

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 20 (1947)
Heft: II

Artikel: Zur Theorie der Elektronen-Plasmaschwingungen
Autor: Borgnis, F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111800>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Theorie der Elektronen-Plasmaschwingungen

von F. Borgnis.

(3. I. 1947.)

Die Theorie der kurzwelligen Elektronenschwingungen in einem Gasentladungs-Plasma wird von einem verallgemeinerten Standpunkt aus behandelt. Es zeigt sich, dass die von LANGMUIR und TONKS herrührende Behandlung des ebenen Problems, die zu dem Begriff der „Langmuirfrequenz“ geführt hat, erweitert werden muss, um das selbständige Auftreten stationärer Schwingungen in einem Plasma zu beschreiben und dass die Frequenz solcher Schwingungen, die sich zwischen den Begrenzungen einer Entladungsstrecke erregen können, im allgemeinen nicht mit der Langmuirfrequenz identisch ist.

1. Einleitung.

Das Auftreten sehr kurzwelliger Elektronenschwingungen in Gasentladungen ist seit langem bekannt. Die Natur der Gasentladungen bringt es mit sich, dass die Physik dieser „Plasmaschwingungen“ eine recht komplizierte ist; sowohl die theoretischen als auch die experimentellen Untersuchungen über diesen Gegenstand lassen daher noch eine Menge ungeklärter Fragen offen.

Unter den theoretischen Betrachtungen spielt die von LANGMUIR und TONKS¹⁾ zuerst aufgestellte Theorie eine besondere Rolle, die zum Begriff der „Langmuirfrequenz“ geführt hatte. Diese Theorie sowie spätere Erweiterungen betrachten ein quasineutrales Plasma, bei dem die Elektronen aus ihrer mittleren „Ruhelage“ heraus kleine Verschiebungen erleiden, worauf sie um diese Ruhelage periodische Bewegungen mit der „Langmuirfrequenz“ ausführen. Solche Betrachtungen sind jedoch nicht geeignet, die *Anfachung* solcher Schwingungen zu beschreiben. Das Problem der Erzeugung der Schwingungen in einem Plasma lässt sich durch die Bestimmung des ohmschen Widerstandes behandeln, den eine Entladungsstrecke gegenüber einer von aussen aufgeprägten Wechselspannung darstellt. In Bereichen, in denen dieser Widerstand negativ wird, kann die Anordnung Wechselstromleistung nach aussen abgeben und damit Schwingungen anfahren. Die Frequenz dieser Schwingungen braucht nicht notwendigerweise mit der „Langmuirfrequenz“ zusammenzufallen.

Die folgenden Betrachtungen bringen zunächst eine verallgemeinerte Wiedergabe der Langmuirschen Theorie sowie einer von LINDER²⁾ herrührenden Erweiterung, wobei hier etwas genauer auf die zugrundeliegenden Voraussetzungen geachtet wird. Im folgenden werden sodann die Elektronen nicht mehr als an eine Ruhelage gebunden angesehen, sondern bei ihrer Strömung durch das Plasma hindurch verfolgt, wobei Pendelungen um die mittlere Gleichstromgeschwindigkeit auftreten. Diese Pendelungen erfolgen, wie sich zeigt, mit der „Langmuirfrequenz“. Für eine vorgegebene Entladungsstrecke lassen sich dann der elektrische Widerstand und damit die „Anfachbereiche“ bestimmen, wobei sich herausstellt, dass die Frequenzen, bei denen Anfachung auftritt, im allgemeinen *nicht* mit der Langmuirfrequenz identisch sind.

Das Ergebnis der Rechnungen hängt sehr von der Art der gewählten Randbedingungen der Entladungsstrecke ab, die man nicht sehr genau kennt. Da in der Hauptsache gezeigt werden soll, dass die Frequenz der sich anregenden Schwingungen eben nicht gerade die Langmuirfrequenz sein muss, wird ein bestimmtes Beispiel mit einer einfachen Randbedingung betrachtet.

Das physikalische Bild der Erscheinungen wird durch das Zusammenwirken zweier Effekte bestimmt: Die „Laufzeiterscheinungen“ der Gesamtheit der strömenden Elektronen auf ihrem Weg durch das Plasma und die Pendelungen um ihre mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die für das einzelne Elektron mit der „Langmuirfrequenz“ vor sich gehen.

2. Die „klassische“ Behandlung der freien Plasmaschwingungen.

Die auf LANGMUIR und TONKS¹⁾ zurückgehende und in der Folge von weiteren Autoren übernommene theoretische Behandlung der freien Schwingungen eines Plasmas bedient sich der folgenden Betrachtungsweise:

Gegeben sei ein homogenes Plasma mit den elektrischen Ladungsdichten p (positiv) und n (negativ) in Coulomb/cm³; im ungestörten Plasma ist $p_0 = n_0$, das Plasma somit feldfrei. Denkt man sich die positive Ladung festgehalten und die negative Ladung um die Strecke $\delta \vec{s}$ aus der ursprünglichen Ruhelage verschoben, so entsteht ein negativer Ladungsüberschuss δn , der in der Form

$$\delta n = -n_0 \operatorname{div} \delta \vec{s} \quad (\text{I})$$

angesetzt wird. Wir schreiben δn und $\delta \vec{s}$ (häufig wird n und \vec{s} verwendet), um anzudeuten, dass (I) nur Geltung besitzt für *kleine*

Verrückungen und die dadurch bedingten Ladungsänderungen. Man erkennt dies, wenn man sich (I) beispielsweise aus der Kontinuitätsgleichung herleitet:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \vec{v} = 0. \quad (1)$$

Durch Multiplikation mit dt und Benutzung von $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ folgt

$$\frac{\partial n}{\partial t} dt + \operatorname{div} n \frac{d\vec{s}}{dt} dt = 0 \quad (2)$$

oder

$$dn + \operatorname{div} (n d\vec{s}) = 0. \quad (3)$$

Mit $n = n_0 + \delta n$ und Vernachlässigung von Gliedern 2. Ordnung folgt

$$\delta n + n_0 \operatorname{div} \delta \vec{s} = 0 \quad (4)$$

das ist die Grundgleichung (I). Wir halten also fest, dass (I) nur für kleine Verrückungen und Dichteänderungen gültig ist.

Im folgenden wollen wir von der Betrachtungsweise Gebrauch machen, die man in der Hydrodynamik als „Lagrangesche“ bezeichnet. Die Verrückung $\delta \vec{s}$ mit den Komponenten ξ, η, ζ wird als Funktion der Ortskoordinaten x, y, z , und der Zeit t dargestellt; x, y, z sind dabei die Koordinaten des Punktes, an dem sich ein Teilchen ursprünglich, d. h. vor der Verrückung befunden hat. Die momentane Lage eines Teilchens nach seiner Verrückung sei durch die Koordination X, Y, Z bestimmt, wobei

$$\begin{aligned} X &= x + \xi \\ Y &= y + \eta \\ Z &= z + \zeta \end{aligned}$$

ist.

Betrachten wir der Einfachheit halber vorübergehend eine Verrückung nur in der X -Richtung, so verlangt die Kontinuitätsbedingung, dass die gleiche Ladungsmenge, welche ursprünglich zwischen den Ebenen x und $x + dx$ eingeschlossen war (Fig. 1), nach der Verrückung zwischen den Ebenen $x + \xi$ und $x + dx + \xi + d\xi$ oder $x + \xi + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx$ eingeschlossen ist. Es gilt daher

$$n \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx = n_0 dx$$

oder

$$\delta n = n - n_0 = -n_0 \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}}.$$

δn bezieht sich dabei auf die Stelle X nach der Verrückung. Wenn wir ξ und damit auch $\partial \xi / \partial x$ und δn als *kleine* Größen ansehen, so gilt unter Vernachlässigung von Gliedern 2. Ordnung

$$\delta n = -n_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Mit Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall folgt Gleichung (I), die unter der Voraussetzung kleiner Verrückungen demnach in der Form

$$\delta n(X, Y, Z) = -n_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = -n_0 \operatorname{div} \vec{\delta s} \quad (6)$$

auch in der Lagrangeschen Betrachtungsweise gültig bleibt, wobei nun x, y, z die ursprünglichen Koordinaten eines Teilchens vor seiner Verrückung bedeuten.

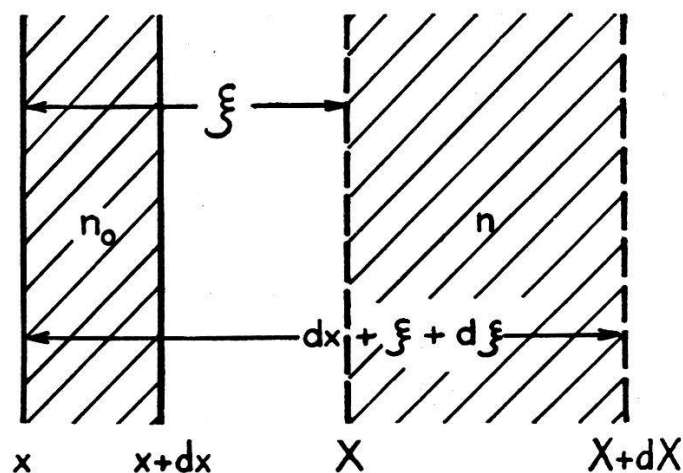


Fig. 1.

Verschiebung der negativen Ladungsdichte n_0 .

Eine weitere Grundgleichung verknüpft das durch die Raumladung δn entstehende elektrische Feld $\delta \vec{E}$ mit der Ladungsdichte; im praktischen Maßsystem gilt (mit $\epsilon_0 = 0,886 \cdot 10^{-13}$)

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \delta \vec{E} = -\delta n \quad (\text{II})$$

woraus mit (6) folgt

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \delta \vec{E} = n_0 \operatorname{div} \vec{\delta s}$$

oder

$$\delta \vec{E} = \frac{n_0}{\epsilon_0} \vec{\delta s} + \operatorname{rot} \vec{A} + \text{const.} \quad (7)$$

Solange magnetische Wirkungen ausser acht bleiben, was hier geschehen soll, kann der rot-Anteil von $\delta \vec{E}$ gleich Null gesetzt werden. Die Konstante verschwindet zufolge der Bedingung $\delta \vec{E} = 0$ für $\vec{\delta s} = 0$. Folglich gilt

$$\delta \vec{E} = \frac{n_0}{\epsilon_0} \vec{\delta s}. \quad (8)$$

Gleichung (8) liefert die elektrische Feldstärke an jeder Stelle des Plasmas als Funktion von x, y, z .

Zur Beschreibung der Bewegung der negativen Raumladung gegenüber der als fest gedachten positiven Ladung betrachten wir ein bestimmtes Volumenelement oder, was auf das gleiche hinauskommt, ein bestimmtes Teilchen, das sich ursprünglich am Ort x, y, z befand. Für dessen Verschiebung gilt dann

$$m \frac{\partial^2 \delta \vec{s}}{\partial t^2} = -e \delta \vec{E}. \quad (\text{III})$$

Ein Vorzug der Lagrangeschen Betrachtungsweise besteht darin, dass auf der linken Seite von (III) die *partielle* Ableitung nach der Zeit steht. (Bei der „Eulerschen“ Betrachtungsweise, wo die Grössen Funktionen der *augenblicklichen* Lagekoordinaten sind, wäre hier die totale Ableitung $d^2 \vec{s}/dt^2 = d\vec{v}/dt$ zu schreiben.) Mit (8) folgt aus (III)

$$m \frac{\partial^2 \delta \vec{s}}{\partial t^2} = -\frac{e n_0}{\epsilon_0} \delta \vec{s} \quad (9)$$

oder mit Einführung der „Langmuirfrequenz“

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e n_0}{m \epsilon_0}} \quad (10)$$

die Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \delta \vec{s}}{\partial t^2} + \omega_0^2 \delta \vec{s} = 0. \quad (\text{IV})$$

Die Integration von (IV) liefert unmittelbar

$$\delta \vec{s} = (\delta \vec{s})_0 e^{j \omega_0 t}. \quad (\text{V})$$

Jedes Volumenelement bzw. Teilchen, das zur Zeit $t = 0$ die vorgegebene Verrückung $(\delta \vec{s})_0$ erhalten hat, schwingt also mit der gleichen Frequenz ω_0 um seine Ruhelage. Alle Teilchen schwingen unabhängig voneinander nach Massgabe der zur Zeit $t = 0$ aufgeprägten Verrückung $\delta \vec{s}_0(x, y, z)$.

Es handelt sich dabei um *freie* Schwingungen, wie etwa die eines Systems von elastisch an ihre Ruhelage gebundenen Massenpunkten. Die Energie der Schwingungen entstammt der Arbeit, die bei der Vornahme der anfänglichen Verrückungen zur Zeit $t = 0$ aufgewendet wurde. Durch Energieverluste verschiedener Art werden solche Schwingungen nach einer gewissen Zeit wieder abgeklungen sein. Die Frequenz *dieser* Schwingungen ist die „Langmuirfrequenz“.

Nimmt man an, dass etwa durch statistische Schwankungen Störungen des Plasmagleichgewichtes und damit kleine Verrückungen auftreten, so kann im Frequenzintervall Δf günstigstenfalls Schwingungsenergie von der Grössenordnung $k T \cdot \Delta f$ abgegeben werden. Eine messbare Abgabe von hochfrequenter Energie nach aussen ist durch den betrachteten Schwingungsmechanismus jedenfalls nicht möglich.

3. Berücksichtigung des Elektronendrucks.

Die Tatsache, dass die einzelnen Volumenelemente des Plasmas unabhängig voneinander schwingen sollten, erscheint vom physikalischen Standpunkt aus etwas unbefriedigend. Wie E. G. LINDER²⁾ zeigte, tritt eine Kopplung der schwingenden Teilchen untereinander auf, wenn der Elektronendruck berücksichtigt wird. Besitzen die Elektronen eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung, so kann man sie als ein Gas betrachten, das der allgemeinen Zustandsgleichung in der Form

$$p_e = n \kappa T \quad (11)$$

genügt. Die Kraftdichte auf ein Volumenelement ist gegeben durch

$$\vec{K} = -\text{grad } p_e = -\text{grad } n \kappa T. \quad (12)$$

Mit $n = n_0 + \delta n$ und (I) folgt die Kraftdichte bei Vernachlässigung von Gliedern 2. Ordnung zu

$$\begin{aligned} \vec{K} &= -\text{grad } \kappa T (n_0 + \delta n) \\ &= \kappa n_0 T \text{grad div } \delta \vec{s}. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Bewegungsgleichung (III) mit Berücksichtigung des Elektronendrucks, bezogen auf ein *einzelnes* Teilchen, lautet dann

$$m \frac{\partial^2 \delta \vec{s}}{\partial t^2} = -e \delta \vec{E} + \kappa T \text{grad div } \delta \vec{s} \quad (14)$$

oder unter Einführung von (8) und (10)

$$\frac{\partial^2 \delta \vec{s}}{\partial t^2} + \omega_0^2 \delta \vec{s} = \frac{\kappa T}{m} \text{grad div } \delta \vec{s}. \quad (\text{VI})$$

Für das *ebene* Problem erhält man aus (VI) mit $\delta \vec{s} = \xi(x, t)$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \omega_0^2 \xi = \frac{\kappa T}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (15)$$

Diese Gleichung findet sich bei LINDER. Als Lösung ergeben sich nach rechts oder links fortschreitende Wellen im Plasma von der Form

$$\xi = \xi_0 e^{j(\omega t \pm kx)}. \quad (16)$$

Durch Einführung des Elektronendrucks lässt sich also eine Kopplung der schwingenden Teilchen untereinander erklären. Aus (15) erhält man mit Einsetzen von (16)

$$-\omega^2 + \omega_0^2 = -\frac{\kappa T}{m} k^2 \quad (17)$$

oder

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\kappa T}{m} k^2. \quad (18)$$

Die Langmuirfrequenz ω_0 tritt hier als unterste Grenzfrequenz der fortschreitenden Wellen (für $k = 2\pi/\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$) auf. An (18) lassen sich die bekannten Betrachtungen über die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der fortschreitenden Wellen anschliessen. Man erhält z. B.

$$v_{gr.} \cdot v_{ph.} = \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega^2}{dk^2} = \frac{\kappa T}{m} \approx v_{thermisch}^2.$$

Die kritische Betrachtung der in Abschnitt 2 und 3 zugrundegelegten Voraussetzungen zeigt, dass hier nur *freie* Schwingungszustände des Plasmas beschrieben werden, die durch anfänglich vorgegebene Verrückungen der negativen Teilchen aus der quasineutralen Verteilung heraus angeregt werden. Betrachtet werden dabei nur *kleine* Verschiebungen, d. h. kleine Schwingungsamplituden der um eine feste Ruhelage schwingenden Teilchen. Ein stationärer Konvektionsstrom ist demnach nicht vorhanden, da ein solcher eine endliche Verschiebung der Teilchen aus ihrer Ruhelage mit sich brächte. Schwingungszustände der geschilderten Art werden nach kurzer Zeit durch verschiedene Energieverluste abgeklungen sein.

4. Theorie der Plasmaschwingungen bei endlicher Verschiebung der Ladungsträger.

Das Problem der *Erzeugung* von Schwingungen mit Hilfe eines Plasmas lässt sich durch Betrachtungen der vorausgehenden Art nicht erfassen. Dazu ist vielmehr eine Untersuchung erforderlich, unter welchen Umständen ein Plasma fähig ist, Wechselstromenergie dauernd nach aussen abzugeben. Aus energetischen Gründen muss diese Energie aus einer andern Energieform bezogen werden können; es liegt nahe, dafür die Gleichstromenergie eines

durch das Plasma hindurch bewegten Konvektionsstromes heranzuziehen. Dabei muss aber von einer Betrachtungsweise Gebrauch gemacht werden, bei der sich die Teilchen durch das Plasma hindurchbewegen und nicht nur kleine Verschiebungen um eine feste Ruhelage ausführen. Die Verhältnisse liegen ähnlich wie in der Kontinuumsmechanik: Die „klassischen“ Betrachtungen zur Plasmatheorie entsprechen den Verhältnissen in der Elastizitätstheorie, wo ebenfalls kleine Verrückungen aus der Ruhelage betrachtet werden. Die erweiterte Plasmatheorie muss der hydrodynamischen Betrachtungsweise entsprechen, bei der die Teilchen endliche Bewegungen durch die Flüssigkeit hindurch ausführen. Hierbei kann Gleichung (I) keine Verwendung finden.

Wir bedienen uns hier zum Unterschied gegenüber der vorangehenden Art der Betrachtung der nach EULER benannten Methode, bei der alle abhängigen Veränderlichen als Funktionen der *augenblicklichen* Ortskoordinaten, die wir x, y, z nennen, auftreten.

Die Kontinuitätsgleichung für die positiven und negativen Ladungsträger in der Form

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} (p \vec{v}_p) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} (n \vec{v}_n) = 0 \quad (20)$$

besitzt allgemeine Geltung bei beliebiger Verschiebung der Ladungsträger, da hier die Verhältnisse an einem festen Ort betrachtet werden. Voraussetzung für (19) und (20) ist, dass die Geschwindigkeit \vec{v} eine eindeutige Ortsfunktion ist; an einem Ort dürfen daher nur Teilchen einerlei Geschwindigkeit vorhanden sein. Rückläufige Bewegungen, die *gleichzeitig* zu einer fortschreitenden Bewegung am selben Ort hinzutreten, sind also auszuschliessen.

Die positive Dichte betrachten wir, wie üblich, wieder als ruhend ($\vec{v}_p = 0$) gegenüber den negativen Trägern, was bei der grossen Masse der positiven Ionen im Vergleich zur Elektronenmasse mit genügender Annäherung erlaubt ist. Aus (19) folgt damit die zeitliche Konstanz von p :

$$p = p_0(x, y, z). \quad (21)$$

Die Raumladungsgleichung lautet

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = p_0 - n. \quad (22)$$

Aus (20) folgt, wenn man n aus (22) einführt

$$-\varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \operatorname{div} (n \vec{v}_n) = 0 \quad (23)$$

oder

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - n \vec{v}_n = \vec{F}(t) + \operatorname{rot} \vec{A}(t). \quad (24)$$

Der rot-Anteil wird wie oben vernachlässigt, da wir keine Wirbelfelder betrachten wollen. Die Funktion $\vec{F}(t)$ stellt, wie man aus (24) unmittelbar erkennt, den totalen äusseren Strom dar, wir bezeichnen ihn daher im folgenden mit $\vec{J}(t)$. Er ist gleich der Summe aus dem Konvektionsstrom $-n \vec{v}_n$ (das Minuszeichen rührt daher, dass wir durch (20) die positive Stromrichtung mit der \vec{v}_n -Richtung identifizierten, ein in der \vec{v}_n -Richtung fliessender Elektronenstrom liefert daher einen negativ zu zählenden äusseren Strom \vec{J}) und dem Verschiebungsstrom $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$. Wir schreiben also (24)

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - n \vec{v}_n = \vec{J}(t). \quad (25)$$

Für die Bewegungsgleichung eines bestimmten Teilchens schreiben wir

$$m \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = m \frac{d \vec{v}_n}{dt} = -e \vec{E}. \quad (26)$$

Durch nochmalige Differentiation nach der Zeit t folgt

$$m \frac{d^2 \vec{v}_n}{dt^2} = -e \frac{d \vec{E}}{dt} = -e \left[\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + (\vec{v}_n \operatorname{grad}) \vec{E} \right]. \quad (27)$$

Mit Einführung von (25) erhält man

$$m \frac{d^2 \vec{v}_n}{dt^2} = -e \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{J}(t) + \frac{n}{\varepsilon_0} \vec{v}_n + (\vec{v}_n \operatorname{grad}) \vec{E} \right]$$

und mit Einführung von n aus (22)

$$m \frac{d^2 \vec{v}_n}{dt^2} = -e \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{J}(t) + \frac{p_0}{\varepsilon_0} \vec{v}_n - \vec{v}_n \operatorname{div} \vec{E} + (\vec{v}_n \operatorname{grad}) \vec{E} \right]$$

oder

$$\frac{d^2 \vec{v}_n}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{v}_n = -\frac{e}{m \varepsilon_0} \vec{J}(t) + \frac{e}{m} \vec{v}_n \operatorname{div} \vec{E} - \frac{e}{m} (\vec{v}_n \operatorname{grad}) \vec{E}, \quad (28)$$

wobei

$$\omega_0^2 = \frac{e p_0}{m \varepsilon_0}. \quad (28a)$$

5. Das ebene Problem bei konstanter positiver Dichte.

Eine einfache Lösung von (28) ergibt sich für das ebene Problem (Ortsabhängigkeit z. B. nur in der x -Richtung), wenn man noch die positive Raumladung als räumliche Konstante über das ganze Plasma ansieht. Unter diesen Voraussetzungen ist

- a) p_0 eine Konstante;
- b) $\vec{J}(t) = J_x(t) = J(t)$;
- c) $\vec{v}_n \operatorname{div} \vec{E} = v_x \frac{\partial E_x}{\partial x} = (\vec{v}_n \operatorname{grad}) \vec{E}$

womit sich (28) mit $\vec{v}_n = v_x = v$ reduziert auf

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega_0^2 v = \frac{e}{m \varepsilon_0} J(t), \quad (29)$$

wenn wir noch das Vorzeichen von $J(t)$ umkehren, d. h. den Strom positiv *gegen* die Elektronenströmung zählen. Eine analoge Herleitung von (29) im Fall des ebenen Problems findet sich bei SEELIGER⁵⁾. Gleichung (29) liefert die Geschwindigkeit eines bestimmten Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit t , wenn wir dasselbe auf seiner Bahn verfolgen; sie hat die typische Form einer Schwingungsgleichung.

Für den einfachsten Fall eines zeitlich konstanten äusseren Stromes J_0 lautet die Lösung von (29)

$$v = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t + \frac{J_0}{p_0}. \quad (30)$$

Die Integrationskonstanten A und B sind dabei noch Funktionen eines Parameters, der die Anfangsbedingungen kennzeichnet, unter denen das betrachtete Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt gestartet ist. Je nach der Art des zu behandelnden Problems besitzt der Parameter verschiedene Bedeutungen.

Betrachten wir beispielsweise den Fall, dass zur Zeit $t = 0$ an allen Punkten x_0 des Plasmas die Werte der Geschwindigkeit $v = V(x_0)$ und Beschleunigung $\dot{v} = \dot{V}(x_0)$ vorgegeben sind, so erhält man als Lösung von (29)

$$v(x_0, t) = \frac{\dot{V}(x_0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + V(x_0) \cos \omega_0 t + \frac{J_0}{p_0} (1 - \cos \omega_0 t). \quad (31)$$

(31) beschreibt die Bewegung eines Teilchens, das zur Zeit $t = 0$ vom Ort x_0 aus mit vorgegebener Geschwindigkeit $V(x_0)$ und Beschleunigung $\dot{V}(x_0)$ startet. Der Parameter besitzt hier die Dimension einer Länge (x_0).

Verschwindet der äussere Strom J , so schwingen die Elektronen mit der Langmuirfrequenz ω_0 um ihre Ruhelage; dies führt wieder auf das Ergebnis von Abschnitt 2. Bei endlichem äusserem Strom bewegen sich die Elektronen durch das Plasma hindurch, wobei sie Pendelungen um die mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Frequenz ω_0 ausführen können. Diese Pendelfrequenz ω_0 hat den Wert der „Langmuirfrequenz“ (10) bzw. (28a). Die räumliche Periode, auf die eine solche Pendelung der Geschwindigkeit um die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} entfällt, ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega_0} \bar{v} = \frac{\bar{v}}{c} \lambda_0$$

wenn λ_0 die „Langmuirwellenlänge“ und c die Lichtgeschwindigkeit bedeuten.

Eine andere Problemstellung ist z. B. die, dass an einer festen Stelle $x = x_0$ Elektronen mit einer vorgegebenen Geschwindigkeit in das Plasma eintreten. Die Geschwindigkeit sei dabei eine Funktion der Startzeit $t = t_0$ an der Eintrittsstelle x_0 . In diesem Fall besitzt der Parameter die Dimension einer Zeit (t_0). Für $t = t_0$ sei $v = V(t_0)$ und $\dot{v} = \dot{V}(t_0)$ bekannt. Als Lösung folgt dann

$$v(t_0, t) = \frac{\dot{V}(t_0)}{\omega_0} \sin \omega_0(t - t_0) + V(t_0) \cos \omega_0(t - t_0) + \frac{J_0}{p_0} (1 - \cos \omega_0(t - t_0)). \quad (32)$$

(32) beschreibt die Bewegung eines Teilchens, das zur Zeit $t = t_0$ an der Stelle x_0 gestartet ist, auf seiner Bahn. Den zurückgelegten Weg erhält man aus

$$x(t_0, t) - x_0 = \int_{t_0}^t v dt. \quad (33)$$

Von dieser Art der Problemstellung werden wir anschliessend Gebrauch machen. (Abschnitt 6.)

Gleichung (29) zeigt, dass bei allen Problemen, die mit der *Erzeugung* von Plasmaschwingungen zusammenhängen, die Einführung eines äusseren Stromes $J(t)$ notwendig ist. Erst damit erscheint auf der rechten Seite von (29) das „Störungsglied“ $\frac{e}{m\epsilon_0} J(t)$, aus welchem die Schwingung ihre nach aussen abzugebende Energie beziehen kann. Der Strom $J(t)$ kann in der Form

$$J(t) = J_0 + \hat{J} e^{j\eta t} \quad (34)$$

angesetzt werden, d. h. mit einem Gleichstromanteil J_0 , dem ein Wechselstromanteil \hat{J} mit der Kreisfrequenz η überlagert ist.

Schwingungsenergie kann nach aussen abgegeben werden, wenn der äussere Plasmawiderstand $\hat{\mathfrak{R}} = \hat{U}/\hat{J}$ (\hat{U} sei der an der Entladungsstrecke auftretende Wechselspannungsanteil) negative Werte annimmt. Es zeigt sich in der Tat, dass für gewisse Frequenzbereiche η bei vorgegebenem ω_0 negative Widerstände auftreten. In solchen Bereichen von η , die also keineswegs mit der „Langmuirfrequenz“ ω_0 zusammenfallen müssen, ist das Plasma zur *Anfachung* hochfrequenter Schwingungen fähig.

Zum Fall des ebenen Problems seien noch zwei Bemerkungen angefügt: a) Denken wir uns die positive Raumladung p_0 entfernt und dafür senkrecht zur Elektronenströmung ein homogenes Magnetfeld mit der Induktion $\vec{B} = B_z = B$ wirksam, so lautet (26)

$$m \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = -e \vec{E} - e [\vec{v} \vec{B}]$$

oder in Koordinaten

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -e E_x - e B \dot{y} \\ m \ddot{y} &= e B \dot{x}. \end{aligned}$$

Für die Bewegung in der x -Richtung folgt mit $\dot{x} = v_x$ hieraus

$$m \ddot{v}_x + \frac{e^2}{m} B^2 v_x = -e \dot{E}_x$$

und analog der Rechnung zu (29)

$$\ddot{v}_x + \frac{e^2}{m^2} B^2 v_x = \frac{e}{m \epsilon_0} J(t). \quad (35)$$

Ein Vergleich mit (29) zeigt, dass ein homogenes Magnetfeld B in bezug auf die Bewegung der Elektronen in der x -Richtung (und nur darauf!) den nämlichen Einfluss ausübt, wie eine homogene positive Raumladung p_0 , wenn die Beziehung besteht

$$\frac{p_0}{\epsilon_0} = \frac{e}{m} B^2. \quad (36)$$

Auf eine solche Äquivalenz zwischen Magnetfeld und Raumladung wurde bereits durch J. MÜLLER⁶⁾ hingewiesen.

b) Aus (29) folgt bei konstantem äusserem Strom J eine besonders einfache Lösung für v , nämlich $v = \text{constans}$, wenn

$$\omega_0^2 v = \frac{e}{m \epsilon_0} J_0$$

oder mit (28a) $J_0 = p_0 v$, d. h. $n = n_0 = p_0$ ist. Das bedeutet, dass ein mit der Geschwindigkeit $v = J_0/p_0$ bzw. der Dichte $n = J_0/v$ in das Plasma eintretender Elektronenstrom sich *ohne* Pendelungen gleichmässig durch das Plasma hindurch bewegt; physikalisch ist

dies leicht einzusehen, da in diesem Fall das elektrische Feld und damit die Raumladungskräfte verschwinden. ($n = p_0$.)

Für die Betrachtung im äquivalenten Magnetfeld folgt analog, dass für einen äusseren Strom

$$J_0 = \frac{e}{m} \varepsilon_0 B^2 v_x \quad (37)$$

die Bewegung der Elektronen in der x -Richtung unter Beibehaltung der konstanten Eintrittsgeschwindigkeit v_x vor sich geht. Da das elektrische Feld hier keineswegs Null ist, verschwinden die Raumladungskräfte nicht, wohl aber werden sie durch die Kraftwirkung des Magnetfeldes in der x -Richtung gerade kompensiert.

Im Falle $p_0 = n_0$ ist die Spannung an der Entladungsstrecke wegen des Verschwindens der elektrischen Feldstärke im Plasma Null; im äquivalenten Fall des Magnetfeldes ist jedoch eine solche Spannung vorhanden, welche gerade die zusätzliche Energie der Elektronen deckt, die sie bei der Bewegung durch die Entladungsstrecke in der y -Richtung erhalten.

6. Bestimmung der Anfachbereiche von Schwingungen für ein einfaches Beispiel.

Aus einem homogenen Plasma denken wir uns eine Entladungsstrecke von der Länge d abgegrenzt (Fig. 2), die von einem zeitlich konstanten Strom J_0 durchflossen wird, dem eine kleine Wechsel-

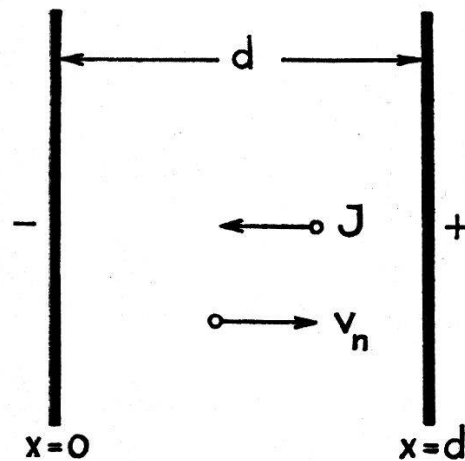


Fig. 2.

Ebene Entladungsstrecke.

spannungskomponente mit der Kreisfrequenz η überlagert ist (34). Gesucht sind die Frequenzbereiche η , in denen der ohmsche Anteil des äusseren Widerstandes der Entladungsstrecke negative Werte annimmt. Wir wählen eine einfache Grenzbedingung an der Stelle $x_0 = 0$, nämlich $v_0 = 0$ und $E_0 = 0$, d. h. verschwindende Eintrittsgeschwindigkeit und Feldstärke an einer „virtuellen“ Kathode bei

$x = 0$. Wie erwähnt, hängt das Ergebnis von der Wahl der Anfangsbedingungen bei $x = 0$ merklich ab; es kommt uns aber hier nicht darauf an, irgendein experimentell realisiertes, aber kompliziertes Beispiel durchzurechnen, sondern darauf, an einem möglichst einfachen Beispiel zu zeigen, wie solche Anfachbereiche überhaupt liegen und dass sie eben *nicht* mit der Langmuirfrequenz zusammenfallen müssen.

Die Wiedergabe der Rechnung können wir uns ersparen, da der Fall einer ebenen Elektronenströmung im Magnetfeld in anderm Zusammenhang in einer Untersuchung von J. MÜLLER⁶⁾ bereits behandelt ist, der wegen der Äquivalenz von Magnetfeld und positiver Raumladung unserm Beispiel analog ist. Wir können daher von dort den Wert des ohmschen Widerstandes übernehmen; er folgt zu*)

$$R = \frac{e J_0}{m \varepsilon_0} \tau_m^4 \cdot \frac{1}{2 \alpha \beta} \left[\frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^2} - \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^2} \right] \text{ Ohm.} \quad (38)$$

Dabei bedeuten:

τ_m = mittlere Laufzeit eines Elektrons für die Entladungsstrecke der Länge d .

$\alpha = \eta \tau_m$

$\beta = \omega_0 \tau_m$.

(38) gibt den Wert von R in erster Näherung für *kleine* Schwankungen des Stromes J . Wir interessieren uns hier für die relative

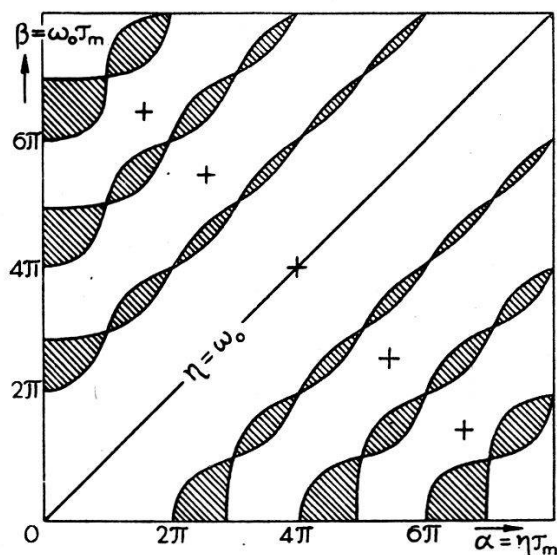


Fig. 3.

Beispiel für die Lage von Anfachbereichen bei Plasmaschwingungen. In den schraffierten Bereichen besitzt der ohmsche Widerstand der Entladungsstrecke für kleine aufgeprägte Wechselfspannungen der Frequenz η negative Werte (Anfachbereiche), auf den Kurvenzügen den Wert Null und ausserhalb positive Werte. (ω_0 = Langmuirfrequenz, τ_m = Elektronenlaufzeit durch die Entladungsstrecke.)

*) Gleichung (46a).

Lage der Frequenzbereiche η , in denen R negative Werte annimmt, zur Langmuirfrequenz ω_0 . Wir zeichnen daher zweckmässig in der (η, ω_0) -Ebene die Kurven auf, auf denen $R = 0$ wird, was in Fig. 3 geschehen ist*). Im (schraffierten) Inneren der „Zöpfe“ nimmt, wie man aus (38) feststellt, R negative Werte an, auf den Kurven geht R durch Null und nimmt sonst überall positive Werte an.

Man sieht, dass gerade in der Umgebung der Langmuirfrequenz ($\eta = \omega_0$) keine Anfachung möglich ist, wohl aber in Bereichen $\eta \lesssim \omega_0$, wobei es zu jedem ω_0 ein ganzes Spektrum von Anfachbereichen gibt. Wie aus (38) hervorgeht, nehmen die negativen Werte für R bei festem ω_0 und damit die Möglichkeit einer Anfachung schnell mit wachsendem η ab. Wir schliessen damit die Diskussion des gewählten Beispiels ab und wollen nochmals folgendes festhalten:

Der nach aussen wirksame Wechselstromwiderstand einer Entladungsstrecke in einem Plasma, dessen konstante positive Ladungsdichte als ruhend und von den Elektronen durchströmt betrachtet wird, nimmt für gewisse Frequenzbereiche η einer aufgedrückten kleinen Wechselspannung negative Werte an; in solchen Bereichen kann das Plasma nach aussen hochfrequente Energie abgeben. Diese Bereiche fallen aber nicht notwendigerweise in die unmittelbare Umgebung der „Langmuirfrequenz“. Das physikalische Bild der Erscheinungen ergibt sich aus dem Zusammenwirken der die Langmuirfrequenz bestimmenden Raumladungskräfte mit den Laufzeitercheinungen der Elektronenströmung in der Entladungsstrecke.

Literatur.

- 1) L. TONKS und I. LANGMUIR, Oscillations in ionized Gases, Phys. Rev. **33**, 189 (1929).
- 2) E. G. LINDER, Effect of electron pressure on plasma electron oscillations, Phys. Rev. **49**, 645 und 753 (1936).
- 3) R. ROMPE und M. STEENBECK, Der Plasmazustand der Gase. Erg. d. exact. Naturwiss. **18**, 300ff. (1939).
- 4) R. SEELIGER und M. STEENBECK, Bemerkung über den Elektronendruck in der Theorie der Plasmaschwingungen. Z. f. Phys. **113**, 526 (1939).
- 5) R. SEELIGER, Zur Theorie der Elektronen-Plasmaschwingungen. Z. f. Phys. **118**, 618 (1942).
- 6) J. MÜLLER, Untersuchungen über Elektronenströmungen. Hochfr. Technik und Elektroak. **46**, 145 (1935).

*) Vgl. dazu B. MROWKA, Jahrb. d. A.E.G.-Forschung **6**, 111 (1939).