Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 19 (1946)

Heft: IV

Artikel: Sur la phase variable de fermeture de l'écoulement d'un liquide visqueux dans un tube horizontal raccordé à un réservoir

Autor: Lambossy, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111705

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur la phase variable de fermeture de l'écoulement d'un liquide visqueux dans un tube horizontal raccordé à un réservoir

par **P. Lambossy.**

(26. V. 1946.)

1. Introduction.

L'écoulement stationnaire d'un liquide *visqueux* dans un tube a été étudié depuis longtemps et a fait l'objet de nombreuses recherches théoriques et expérimentales. Au contraire la période variable de cet écoulement quand le dispositif de fermeture fonctionne dans un sens ou dans l'autre constitue un problème dont on ne voyait pas l'importance pratique, à en juger d'après le peu de travaux qui ont paru sur ce sujet. Je dois citer cependant un article remarquable de GRUMBACH[1]) concernant la phase initiale de l'écoulement dans un tube capillaire vertical, en vue de l'application aux viscosimètres. Avec des modifications de détail ces calculs s'appliquent à un écoulement dans un tube horizontal relié à un réservoir, la pression à l'origine du tube et celle à l'extrémité étant maintenues rigoureusement constantes. En lisant cet article, on est surpris de voir que la solution mathématique exacte d'un problème dont l'énoncé est si simple exige des développements étendus (GRUMBACH le fait remarquer lui-même), et on peut se demander si une voie plus commode pourrait conduire à des résultats d'une exactitude suffisante. Cette idée devient d'une impérieuse nécessité si on veut traiter des cas complexes, ceux où des tubes de sections inégales sont raccordés. Car le phénomène hydraulique à l'endroit du raccordement, et surtout dans l'état variable, est d'une complication telle qu'il ne peut se mettre rigoureusement en équation. De plus, on n'oubliera pas que les expériences elles-mêmes sont difficiles, et qu'il est malaisé de se mettre dans les conditions théoriques voulues; ce de fait il n'est pas dit qu'un traitement prétendu correct donnerait des résultats concordant mieux avec l'expérience qu'une méthode approchée.

---

[1]) A. GRUMBACH, *Sur l'écoulement libre des liquides dans les tubes capillaires.* J. de Phys. et le Radium, t. 9, p. 49 (1938). Cet article a paru antérieurement plus succinctement dans les Comptes-Rendus, en 1936, p. 1653.

L'Institut de physiologie de l'Université de Fribourg entreprend depuis quelques années, sous la direction de A. MÜLLER, des recherches sur la période variable de l'écoulement visqueux. Leur but est l'étude, sur des modèles et dans des circonstances particulièrement simples, du phénomène de la circulation du sang. Cette méthode est probablement la seule possible du moment que le phénomène réel est inabordable au calcul.

Dans une expérience récente, dont on trouvera la description détaillée dans *Helv. physiol. Acta, 1946*[1]), un liquide doué de viscosité (glycérine+eau) contenu dans un réservoir s'écoule dans un tube horizontal en régime laminaire. On ferme alors progressivement l'extrémité du tube au moyen d'un dispositif de fermeture approprié; la vitesse du liquide dans le tube diminue jusqu'à zéro suivant une certaine loi et en même temps la pression s'élève. C'est le phénomène connu du coup de bélier. Cette question présente au point de vue technique, pour les conduites forcées, un haut intérêt; elle a été étudiée théoriquement et expérimentalement; mais dans ce cas technique, contrairement à celui qui va nous occuper, la viscosité de l'eau a un effet négligeable.

La durée de l'état variable est d'ordinaire si courte que la viscosité peut n'avoir que peu d'importance. Il est utile d'être renseigné là-dessus et, comme le fait A. MÜLLER, de traiter un problème d'hydraulique par la théorie de deux manières, une première fois en supposant un liquide parfait, une deuxième fois en tenant compte de la viscosité, et de confronter ensuite les résultats du calcul avec l'expérience. Toutefois, dans le problème qui fait le sujet de cet article, la viscosité joue un rôle décisif, et si on la néglige, on est conduit à des résultats inacceptables.

2. Position du problème.

Un tube horizontal est raccordé à un réservoir. Le niveau du liquide dans le réservoir étant maintenu constant, le liquide s'écoule tout d'abord avec une vitesse constante. On ferme ensuite progressivement l'extrémité du tube. Etudier comment varient avec le temps la vitesse et la pression du liquide dans le tube.

L'installation comprend trois parties (fig. 1):

a) un réservoir AB de section S; le liquide qu'il contient a une hauteur constante h,

---

[1]) ALOYS MÜLLER, *Über die nicht stationären Strömungsphasen in einem starrwandigen Leitungssystem beim Öffnen und Schliessen des Ausflussrohres*, Helv. physiol. Acta, Vol. 4, fasc. 2 (1946).

b) un tube horizontal BC de longueur l, de section circulaire s, raccordé au réservoir,

c) un dispositif de fermeture CD de longueur très courte que nous appellerons le *distributeur*[1]; la section d'ouverture, variable avec le temps, est σ.

Nous admettons que les parois sont parfaitement rigides et que le liquide est incompressible.

La méthode que nous suivrons est la suivante: Nous écrirons d'abord les équations du mouvement en supposant le liquide parfait, et ensuite nous apporterons les corrections nécessitées par la viscosité.

Au-dessus du réservoir, de même qu'à la sortie en D, règne la pression atmosphérique p_0. Soit, à l'instant t, v la vitesse du

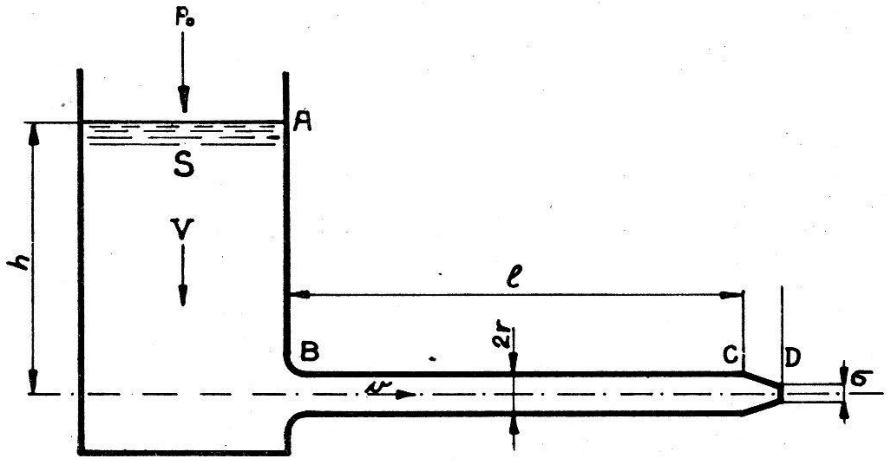

Fig. 1.

liquide dans le tube, c'est-à-dire la vitesse commune des différents filets, V la vitesse dans le réservoir. L'équation de continuité donne

$$V = \frac{s}{S} v .$$

Dans les expériences on fait toujours en sorte que le rapport des sections $\frac{s}{S}$ soit négligeable devant l'unité. Dès lors $V = 0$ et l'on peut admettre que le liquide du réservoir est toujours en repos.

Nous nous proposons d'abord d'établir une équation différentielle se rapportant à la partie $AB + BC$ du circuit hydraulique.

[1]) Nous adoptons ce terme, quoique peu approprié à la disposition expérimentale, parce qu'il est employé dans le cas des conduites forcées. Voir, par exemple, *Etude théorique et expérimentale sur les coups de bélier dans les conduites forcées.* Rapports de Jouguet, Rateau et de Sparre. Paris, Dunod et Pinat, 1917. I. Rapport de E. Jouguet, p. 1—68. – Le problème que traite cet auteur a beaucoup de points de ressemblance avec celui du présent article, mais la méthode d'exposition est différente.

Le principe de l'énergie cinétique pourrait être invoqué ici, mais il est préférable d'employer une méthode plus particulière, d'ailleurs équivalente, qui aura l'avantage de nous faire voir comment peut être introduit le terme correctif dû à la viscosité.

Soit p la pression du liquide en C, $\frac{p}{\varrho g}$ cette pression évaluée en hauteur de liquide (ϱ = densité). Examinons comment cette pression varie de A, où elle est $\frac{p_0}{\varrho g}$, jusqu'en C.

A l'entrée du liquide dans le tube, règne la pression statique h augmentée de la pression atmosphérique, donc

$$\frac{p_0}{\varrho g} + h.$$

Au point de jonction du tube et du réservoir, en B, il se produit une chute de pression due au fait que le liquide, d'abord en repos, prend de la vitesse. Puisque le liquide est parfait, cette chute de pression, évaluée en hauteur de liquide, est $\frac{v^2}{2g}$. Nous avons donc à l'origine du tube la pression

$$\frac{p_0}{\varrho g} + h - \frac{v^2}{2g}.$$

Cette même pression règnerait en C, à l'extrémité du tube, si l'écoulement était stationnaire. Comme il s'agit de l'état variable, nous devons, pour obtenir la pression $\frac{p}{\varrho g}$ régnant en C, soustraire un terme $\frac{P}{\varrho g}$ dû à l'inertie, de sorte que

$$\frac{p}{\varrho g} = \frac{p_0}{\varrho g} + h - \frac{v^2}{2g} - \frac{P}{\varrho g}.$$

Nous allons expliquer et calculer ce dernier terme.

Lorsqu'une colonne de liquide est en mouvement dans un tube, d'inclinaison quelconque mais de section constante, elle supporte de la part du liquide qui la suit dans ce mouvement une force de pression. Si le mouvement a une accélération, cette force de pression subit une *diminution* égale à $M\frac{dv}{dt}$, M désignant la masse de liquide qui suit la colonne considérée et $\frac{dv}{dt}$ son accélération (si je tiens une pierre dans ma main et si je fais mouvoir ma main vers le bas avec une accélération g, la force de pression sur ma main est diminuée de mg, c'est-à-dire la pierre me paraît sans poids). Dans notre cas, la masse de liquide à considérer est celle du tube.

En se rappelant que pour une *pression* on ne doit prendre qu'une section de 1 cm², on a pour la pression d'inertie

$$P = \varrho l \cdot 1 \cdot \frac{dv}{dt}, \qquad \text{d'où } \frac{P}{\varrho g} = \frac{l}{g}\frac{dv}{dt}.$$

Dès lors

$$\frac{p}{\varrho g} = \frac{p_0}{\varrho g} + h - \frac{v^2}{2g} - \frac{l}{g}\frac{dv}{dt}. \tag{1}$$

3. Equation relative au distributeur.

La même méthode peut être appliquée au distributeur CD. Cette partie du circuit hydraulique est le siège d'une chute de pression due à la variation de vitesse. La section d'ouverture étant σ, la vitesse en D est $\frac{s}{\sigma} v$, de sorte que cette chute de pression évaluée en hauteur de liquide est

$$\frac{s^2}{\sigma^2} \cdot \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{ou } \frac{v^2}{2g}\left(\frac{s^2}{\sigma^2} - 1\right).$$

S'il n'y a pas d'autre pression dont il faille tenir compte, comme nous allons le montrer, nous avons la relation suivante entre la pression p dans la section C et p_0 à l'extrémité D

$$\frac{p_0}{\varrho g} = \frac{p}{\varrho g} - \frac{v^2}{2g}\left(\frac{s^2}{\sigma^2} - 1\right). \tag{2}$$

L'effet de l'inertie est représenté dans (1) par le terme $\frac{l}{g}\frac{dv}{dt}$, Comme le distributeur, dans le dispositif expérimental, est de très courte longueur et se réduit à un obturateur, le terme en question devient alors négligeable. Nous n'avons donc rien à ajouter à l'équation (2)[1]).

4. Modifications nécessitées par la viscosité.

Les équations (1) et (2) ont été obtenues dans l'hypothèse d'un liquide dénué de frottement intérieur et s'écoulant par tranches parallèles. Voyons maintenant comment ces équations peuvent être améliorées pour qu'elles s'appliquent à un liquide visqueux

[1]) Nous admettons ici que le terme d'inertie est négligeable, sans prétendre qu'il soit donné exactement par une formule telle que $\frac{l}{g}\frac{dv}{dt}$, car le distributeur constitue un canal dont la paroi change de forme avec le temps. JOUGUET, dans l'ouvrage déjà cité, p. 7, traitant le même problème du distributeur, arrive à une équation équivalente à notre équation (2); mais son argumentation, différente de la nôtre, ne paraît pas décisive. Il renvoie d'ailleurs pour une analyse plus serrée à DE SPARRE.

dont l'écoulement est laminaire. Nous savons qu'à l'état stationnaire le profil des vitesses dans la section du tube est parabolique; dans l'état variable cette distribution est un peu différente. En toute circonstance nous admettrons que dans (1) et (2) v est la *vitesse moyenne* dans la section.

Nous avons admis que la chute de pression au point de jonction du réservoir et du tube était $\frac{v^2}{2g}$. Par suite de la viscosité les filets de liquide prennent des vitesses différentes suivant leur distance à l'axe, et, au bout d'un petit parcours, règne la distribution parabolique ou à peu près, qui se maintient dans le reste du tube. On peut prendre pour cette chute de pression[1])

$$1{,}1\,\frac{v^2}{g}.$$

Le long du tube, de B en C, il se produit une chute de pression que l'on déduit de la loi de Poiseuille. Si Δp est la pression nécessaire pour entretenir en mouvement stationnaire, avec une vitesse moyenne v, un liquide de coefficient de viscosité μ dans un tube de rayon r et de longueur l, on a

$$\Delta p = \frac{8\,\mu l v}{r^2}.$$

Nous devons donc soustraire à droite de l'équation (1) le terme

$$\frac{8\,\mu l v}{\varrho g r^2}$$

de sorte que nous avons

$$\frac{p}{\varrho g} = \frac{p_0}{\varrho g} + h - 1{,}1\,\frac{v^2}{g} - \frac{l}{g}\,\frac{dv}{dt} - \frac{8\,\mu l v}{\varrho g r^2}. \tag{3}$$

On peut admettre que, vu la courte longueur du distributeur, l'équation (2) ne doit subir aucune correction.

5. Les équations de la vitesse et de la pression.

Nos équations (3) et (2) peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$2l\frac{dv}{dt} + 2{,}2\,v^2 + \frac{16\,\mu l v}{\varrho r^2} - 2\,gh = \frac{2(p_0 - p)}{\varrho} \tag{4}$$

$$\left(\frac{s^2}{\sigma^2} - 1\right) v^2 = \frac{2\,(p - p_0)}{\varrho}. \tag{5}$$

---

[1]) Sur la correction de Hagenbach consulter S. Erk, *Über Zähigkeitsmessungen nach der Kapillarmethode*, Zeit. für techn. Phys., 1929, p. 454. – A. Müller, *Abhandlungen zur Mechanik der Flüssigkeiten mit besonderer Berücksichtigung der Hämodynamik*. Freiburg (Schweiz) und Leipzig, 1936, p. 25—37.

Nous introduirons les constantes

$$v_0 = \sqrt{2gh}\,, \qquad \beta = \frac{8\,\mu l}{\varrho r^2 v_0} \tag{6}$$

et les nouvelles variables

$$\lambda = \frac{\sigma}{s}\,, \qquad H = \frac{p - p_0}{\varrho g}$$

de sorte que nos équations pourront s'écrire

$$2l\frac{dv}{dt} + 2{,}2\,v^2 + 2\beta v_0 v - v_0^2 = -2gH \tag{7}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) v^2 = 2gH \tag{8}$$

v_0 est la vitesse de régime qu'on aurait dans le cas d'un liquide parfait; β est une grandeur proportionnelle au coefficient de viscosité; λ est une fraction qui peut varier de 0 à 1 et peut s'appeler le *degré d'ouverture* du distributeur.

$$\begin{array}{lll} \text{Pour} & \sigma = 0, & \lambda = 0 \\ \text{,,} & \sigma = s, & \lambda = 1\,. \end{array}$$

H est la différence de pression entre l'extrémité du tube et la pression atmosphérique, évaluée en hauteur de liquide; nous appellerons H tout simplement *la pression.*

On élimine H des équations (7) et (8) par addition:

$$2l\frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{\lambda^2} + 1{,}2\right) v^2 + 2\beta v_0 v - v_0^2 = 0\,. \tag{9}$$

Cette équation différentielle contient trois variables v, λ, t de sorte qu'il nous faudra admettre une relation entre λ et t. Nous admettrons que *le degré d'ouverture est une fonction linéaire du temps* et nous poserons

$$\lambda = 1 - \frac{t}{T}\,, \qquad d\lambda = -\frac{dt}{T} \tag{10}$$

T est la durée totale de fermeture. A l'instant initial $t = 0$, l'ouverture est complète, $\lambda = 1$, $\sigma = s$. En substituant $dt = -T\,d\lambda$ dans (9) on obtient

$$\frac{2l}{T}\frac{dv}{d\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda^2} + 1{,}2\right) v^2 - 2\beta v_0 v + v_0^2 = 0 \tag{11}$$

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) \tag{12}$$

(11) est l'*équation différentielle de la vitesse*; (12) est la *formule de la pression.*

6. Cas de l'état stationnaire.

Avant d'entreprendre l'intégration de l'équation différentielle considérons l'*état stationnaire*, alors que le distributeur est grand ouvert. La vitesse est constante, $v = v_1$. On fera donc dans l'équation (11)

$$\frac{dv}{d\lambda} = 0, \qquad \lambda = 1 .$$

Il vient

$$2{,}2 v_1^2 + 2\beta v_0 v_1 - v_0^2 = 0 .$$

Si pour ce régime on connaît $\frac{v_1}{v_0}$ on peut calculer β

$$\beta = \frac{1 - 2{,}2\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2}{2\left(\frac{v_1}{v_0}\right)} \tag{13}$$

Nous nous baserons sur les données suivantes correspondant à une expérience de A. Müller

$h = 69{,}5$ cm	$r = 1{,}1$ cm	$l = 380{,}7$ cm
$T = 1$ sec	$\varrho = 1{,}1827$	$v_1 = 98{,}8$ cm/sec

On calcule d'après (6)

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 69{,}5} = \underline{369{,}3}$$

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{98{,}8}{369{,}3} = 0{,}2676 \tag{14}$$

d'après (13)

$$\beta = \frac{1 - 2{,}2 \cdot (0{,}2676)^2}{2 \cdot 0{,}2676} = \underline{1{,}5744}$$

d'après (6)

$$\mu = \frac{\varrho r^2 v_0 \beta}{8 l} = \frac{1{,}1827 \cdot (1{,}1)^2 \cdot 369{,}3 \cdot 1{,}5744}{8 \cdot 380{,}7} = \underline{0{,}273} .$$

Nous utiliserons ces valeurs numériques lorsque l'équation différentielle sera intégrée.

7. Intégration de l'équation différentielle de la vitesse.

Pour ramener l'équation (11)

$$\frac{2l}{T} \cdot \frac{dv}{d\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda^2} + 1{,}2\right) v^2 - 2\beta v_0 v + v_0^2 = 0$$

à une forme intégrable, il faut faire subir aux variables diverses transformations.

Première transformation. Nous poserons tout d'abord

$$\frac{2l}{Tv_0} = n \tag{15}$$

et ensuite nous ferons le changement de fonction

$$v = \frac{v_0}{\beta + z} \tag{16}$$

z étant la nouvelle fonction.

$$\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{v_0}{(\beta+z)^2}\frac{dz}{d\lambda}.$$

En remplaçant v et $\frac{dv}{d\lambda}$ par leurs expressions dans (11), il vient

$$-nv_0 \cdot \frac{v_0}{(\beta+z)^2}\frac{dz}{d\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda^2} + 1{,}2\right)\frac{v_0^2}{(\beta+z)^2} - 2\beta v_0 \frac{v_0}{\beta+z} + v_0^2 = 0.$$

On résout par rapport à $\frac{dz}{d\lambda}$ et on obtient

$$\frac{dz}{d\lambda} = -\frac{1{,}2+\beta^2}{n} - \frac{1}{n\lambda^2} + \frac{z^2}{n}. \tag{17}$$

Deuxième transformation. L'équation (17) est de la forme

$$\frac{dz}{d\lambda} = P + Qz + Rz^2$$

où P, Q, R sont des fonctions de la variable λ

$$P = -\frac{1{,}2+\beta^2}{n} - \frac{1}{n\lambda^2}, \qquad Q = 0, \qquad R = \frac{1}{n}.$$

Il existe pour cette forme d'équation une transformation classique par laquelle on obtiendra une équation linéaire, mais du second ordre. Cette transformation est la suivante

$$z = -\frac{1}{R}\frac{1}{u}\frac{du}{d\lambda}$$

ou, puisque $R = \frac{1}{n}$

$$z = -\frac{n}{u}\frac{du}{d\lambda}, \tag{18}$$

u est une nouvelle fonction. On déduit de (18) par différentiation

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{n}{u^2}\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 - \frac{n}{u}\frac{d^2u}{d\lambda^2}.$$

Substituant dans (17), il vient

$$\frac{n}{u^2}\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 - \frac{n}{u}\frac{d^2u}{d\lambda^2} = -\frac{1{,}2+\beta^2}{n} - \frac{1}{n\lambda^2} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{u^2}\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2$$

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} - \left(\frac{1{,}2+\beta^2}{n^2} + \frac{1}{n^2\lambda^2}\right)u = 0. \tag{19}$$

Troisième transformation. On introduit une autre variable indépendante x reliée à λ par

$$\lambda = \frac{n x}{\sqrt{1,2+\beta^2}}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{1,2+\beta^2}}{n} \lambda. \tag{20}$$

On déduit, par différentiation

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{du}{dx} \frac{\sqrt{1,2+\beta^2}}{n}, \quad \frac{d^2u}{d\lambda^2} = \frac{d^2u}{dx^2} \frac{1,2+\beta^2}{n^2}.$$

Substituant dans (19), il vient

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(1 + \frac{1}{n^2 x^2}\right) u = 0. \tag{21}$$

Quatrième transformation. Bien qu'il paraisse que l'équation obtenue soit aussi simple qu'on puisse le souhaiter, il convient de lui faire subir une transformation, qui est la suivante

$$u = x^{\frac{1}{2}} y. \tag{22}$$

On déduit

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y + x^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y + x^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

En substituant dans (21) on obtient, après quelques calculs,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}}{x^2}\right) y = 0. \tag{23}$$

Cette équation peut être ramenée à une équation de Bessel. L'équation différentielle de Bessel a la forme suivante

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{24}$$

Une telle équation, si p n'est pas un nombre entier a deux solutions particulières indépendantes $I_p(x)$ et $I_{-p}(x)$ qui, abstraction d'un facteur constant sans intérêt pour nous, ont la forme suivante[1])

$$\begin{aligned} I_p(x) &= x^p \left[1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1!\,(p+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!\,(p+1)(p+2)} - \cdots\right] \\ I_{-p}(x) &= x^{-p} \left[1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1!\,(-p+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!\,(-p+1)(-p+2)} - \cdots\right] \end{aligned} \tag{25}$$

[1]) Voir par exemple A. R. Forsyth, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, deutsch von W. Jacobsthal, II. Aufl., p. 182—185 (1912).

Il est possible de ramener notre équation (23) à une équation de Bessel en l'écrivant comme suit

$$\frac{d^2 y}{d(ix)^2} + \frac{1}{ix}\frac{dy}{d(ix)} + \left[1 - \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}}{(ix)^2}\right] y = 0.$$

C'est une équation de Bessel pour la variable ix, donc vérifiée par les fonctions $I_p(ix)$ et $I_{-p}(ix)$, où p est donné par

$$p = \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}}. \tag{26}$$

La solution générale de notre équation différentielle (23) a donc pour expression, A_1 et B_1 désignant deux constantes arbitraires

$$y = A_1 I_p(ix) + B_1 I_{-p}(ix).$$

8. Solution du problème.

Connaissant y, nous reprenons la chaîne des transformations dans l'ordre inverse. D'après (22) on a

$$u = A_1\sqrt{x}\, I_p(ix) + B_1\sqrt{x}\, I_{-p}(ix). \tag{27}$$

La formule de transformation (18) peut s'écrire, du moment que d'après (20)

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{du}{dx}\frac{\sqrt{1,2+\beta^2}}{n},$$

$$z = -\sqrt{1,2+\beta^2}\,\frac{1}{u}\frac{du}{dx}. \tag{28}$$

Enfin, reprenant (16), nous avons la vitesse v

$$v = \frac{v_0}{\beta+z}. \tag{29}$$

Ces trois formules (27), (28) et (29) auxquelles il faut joindre (20), savoir

$$\lambda = \frac{nx}{\sqrt{1,2+\beta^2}}. \tag{30}$$

résolvent théoriquement notre problème.

Les constantes A_1 et B_1 seront déterminées par la condition initiale: Au temps $t=0$, pour lequel on a $\lambda=1$, $x_1 = \frac{\sqrt{1,2+\beta^2}}{n}$, l'écoulement est celui du régime stationnaire et se fait avec une vitesse v_1 que l'on connaît ou que l'on sait calculer (n° 6). Cette valeur de v_1 introduite dans (29) permet de déterminer la valeur

correspondante z_1 de la variable z. Si ensuite dans (28) on fait $x = x_1$ et $z = z_1$ on obtient

$$z_1 = -\sqrt{1{,}2 + \beta^2}\,\frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_1}.$$

Contrairement aux apparences, $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$, calculable à l'aide de (27), ne contient que le rapport $\frac{A_1}{B_1}$, donc une seule constante arbitraire; cette dernière équation permet de la déterminer. C'est pourquoi on pourrait supposer d'emblée $B_1 = 1$.

9. Le développement en série de u et $\frac{du}{dx}$.

Les tables très connues de Jahnke et Emde permettent de calculer les fonctions de Bessel $I_p(x)$ même pour les valeurs imaginaires de l'argument. Malheureusement ces tables sont établies pour les valeurs entières de p: 0, 1, 2, ... et ne sont d'aucune utilité pour nous, car dans tous les cas pratiques n, donné par (15), est plus grand que 2 et en conséquence

$$p = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}}$$

ne peut dépasser 0,71. C'est pourquoi nous avons été dans l'obligation d'écrire les séries et de calculer u et $\frac{du}{dx}$ d'après ces séries.

Si, en se basant sur (25), nous formons $I_p(ix)$ et $I_{-p}(ix)$ et qu'ensuite nous utilisons les séries obtenues pour former u d'après (27), les facteurs constants A_1 et B_1 seront multipliés, l'un par i^p, l'autre par i^{-p}. On désignera par A et B deux nouvelles constantes arbitraires, mais on peut prendre $B = 1$, d'après une remarque du n° 8. Dès lors

$$\begin{aligned} u = {} & A\,x^{p+\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{x^2}{2^2\cdot 1!\,(p+1)} + \frac{x^4}{2^4\cdot 2!\,(p+1)\,(p+2)} + \cdots\right] \\ & + x^{-p+\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{x^2}{2^2\cdot 1!\,(-p+1)} + \frac{x^4}{2^4\cdot 2!\,(-p+1)\,(-p+2)} + \cdots\right] \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = {} & A\,x^{p-\frac{1}{2}}\left[\left(p+\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(p+2+\frac{1}{2}\right)x^2}{2^2\cdot 1!\,(p+1)} + \frac{\left(p+4+\frac{1}{2}\right)x^4}{2^4\cdot 2!\,(p+1)\,(p+2)} + \cdots\right] \\ & + x^{-p-\frac{1}{2}}\left[\left(-p+\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(-p+2+\frac{1}{2}\right)x^2}{2^2\cdot 1!\,(-p+1)} + \frac{\left(-p+4+\frac{1}{2}\right)x^4}{2^4\cdot 2!\,(-p+1)\,(-p+2)} + \cdots\right] \end{aligned} \tag{32}$$

Pour pouvoir utiliser ces séries il est nécessaire de connaître numériquement les coefficients. On se reportera au n⁰ 6 où ont été données les valeurs des constantes fondamentales.

$$\text{Calcul de } n \text{ (15)}: \; n = \frac{2l}{Tv_0} = \frac{2 \cdot 380{,}7}{1 \cdot 369{,}3} = 2{,}062 \tag{33}$$

$$\text{Calcul de } p \text{ (26)}: \; p = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{(2{,}062)^2} + \frac{1}{4}} = 0{,}6966\,. \tag{34}$$

En utilisant cette valeur de p on peut calculer les coefficients qui interviennent dans les séries (31) et (32) et on trouve:

$$u = A x^{1{,}1966}(1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots) + x^{-0{,}1966}(1 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \cdots) \tag{35}$$

$$\frac{du}{dx} = A\, x^{0{,}1966}(a_0' + a_2' x^2 + a_4' x^4 + \cdots) + x^{-1{,}1966}(b_0' + b_2' x^2 + b_4' x^4 + \cdots) \tag{36}$$

$a_2 = 0{,}14738$	$b_2 = 0{,}82390$	$a_0' = 1{,}19657$	$b_0' = -0{,}19657$
$a_4 = 0{,}00683$	$b_4 = 0{,}07901$	$a_2' = 0{,}47104$	$b_2' = 1{,}48590$
$a_6 = 0{,}00015$	$b_6 = 0{,}00286$	$a_4' = 0{,}03550$	$b_4' = 0{,}30053$
	$b_8 = 0{,}00005$	$a_6' = 0{,}00111$	$b_6' = 0{,}01659$
		$a_8' = 0{,}00002$	$b_8' = 0{,}00042$

Voici enfin la valeur de A que nous allons bientôt calculer

$$A = -1{,}2498\,.$$

10. Détermination de la constante A.

Au temps $t = 0$, l'ouverture est totale, $\lambda = 1$. Si donc dans la formule (30) on fait $\lambda = 1$ on peut calculer la valeur correspondante de x

$$x_1 = \frac{\sqrt{1{,}2 + \beta^2}}{n}\,.$$

Puisque $\beta = 1{,}5744$ (14) et $n = 2{,}062$ (33), on a $\sqrt{1{,}2 + \beta^2} = 1{,}918$

$$x_1 = \frac{1{,}918}{2{,}062} = 0{,}9302\,.$$

Pour cette valeur $x = x_1 = 0{,}9302$ les séries (35) et (36) donnent

$$u_1 = 1{,}03876\, A + 1{,}79937$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_1} = 1{,}60837\, A + 1{,}4450$$

A l'instant initial, la variable z, donnée par (28), a pour expression

$$z_1 = -\sqrt{1{,}2 + \beta^2}\,\frac{1}{u}\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_1} = -1{,}918\,\frac{1{,}60837\, A + 1{,}4450}{1{,}03876\, A + 1{,}79937}$$

D'autre part z_1 peut être calculé au moyen de (16) en faisant $v = v_1$

$$z_1 = \frac{v_0}{v_1} - \beta = \frac{369{,}3}{98{,}8} - 1{,}5744 = 2{,}16307 .$$

En égalant ces deux expressions de z_1 on obtient une équation de laquelle on peut tirer A

$$-1{,}918 \frac{1{,}60837\, A + 1{,}4450}{1{,}03876\, A + 1{,}79937} = 2{,}16307 .$$

On trouve

$$A = -1{,}2498 .$$

11. Courbe de la vitesse et courbe de la pression.

Donnons un exemple du calcul de la vitesse et de la pression correspondant à une ouverture déterminée, par exemple $\lambda = 0{,}4$.

On obtient x par la formule (20)

$$x = \frac{\sqrt{1{,}2 + \beta^2}}{n} \lambda = \frac{1{,}918}{2{,}062} \cdot 0{,}4 = 0{,}3721 .$$

Les séries (35) et (36) permettent, pour cette valeur de x, de calculer u et $\frac{du}{dx}$. On trouve

$$u = 0{,}96414 \qquad \frac{du}{dx} = -1{,}25036 .$$

On calcule z par (28)

$$z = -\sqrt{1{,}2 + \beta^2} \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = -1{,}918 \frac{-1{,}25036}{0{,}96414} = 2{,}4872 .$$

Calcul de la vitesse (29)

$$v = \frac{v_0}{\beta + z} = \frac{369{,}3}{1{,}5744 + 2{,}4872} = \underline{90{,}92} .$$

Calcul de la pression (12)

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) = \frac{(90{,}92)^2}{2 \cdot 981} \left(\frac{1}{0{,}4^2} - 1 \right) = \underline{22{,}12} .$$

C'est ainsi qu'ont été calculés les nombres qui figurent dans les 2e et 4e colonnes du Tableau (p. 281).

La vitesse v et la pression H étant maintenant des fonctions connues de λ ou de t, on peut les représenter graphiquement (fig. 2). En abscisse on a porté le temps t et l'on a $AB = T$. En adoptant une seconde échelle pour laquelle $AB = 1$, on peut lire pour chaque t la valeur correspondante du degré d'ouverture λ; cette variable est comptée positivement vers la gauche, à partir de l'origine B.

*

12. Pression maximum et coup de bélier.

La valeur maximum H_m de la pression H a lieu à la fin de la fermeture, soit pour $\lambda = 0$. Nous ne pouvons sans étude préalable appliquer nos formules à ce cas puisque, pour $x = 0$, on a d'après (35) et (36) $u = \infty$, $\frac{du}{dx} = \infty$.

Pour x tendant vers zéro (31) et (32) se réduisent à deux termes

$$u = A x^{p+\frac{1}{2}} + x^{-p+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dx} = A\left(p + \frac{1}{2}\right) x^{p-\frac{1}{2}} - \left(p - \frac{1}{2}\right) x^{-p-\frac{1}{2}}.$$

On notera que $p > \frac{1}{2}$, de sorte que les exposants $p + \frac{1}{2}$ et $p - \frac{1}{2}$ sont positifs. Les termes $A x^{p+\frac{1}{2}}$ et $A(p + \frac{1}{2}) x^{p-\frac{1}{2}}$ tendant vers zéro avec x, les seconds termes sont prépondérants, de sorte que pour es valeurs de x voisines de zéro, nous avons

$$u = x^{-p+\frac{1}{2}}, \qquad \frac{du}{dx} = -\left(p - \frac{1}{2}\right) x^{-p-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = -\left(p - \frac{1}{2}\right)\frac{x^{-p-\frac{1}{2}}}{x^{-p+\frac{1}{2}}} = -\left(p - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}$$

$$z = -\sqrt{1{,}2+\beta^2}\,\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \sqrt{1{,}2+\beta^2}\left(p - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}$$

et puisque $x = \frac{\sqrt{1{,}2 + \beta^2}}{n}\lambda$,

$$z = \frac{n\left(p - \frac{1}{2}\right)}{\lambda}$$

$$v = \frac{v_0}{\beta + z} = \frac{v_0}{\beta + \frac{n(p - \frac{1}{2})}{\lambda}} = \frac{v_0 \lambda}{\beta\lambda + n\left(p - \frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{\lambda=0} \frac{v}{\lambda} = \frac{v_0}{n\left(p - \frac{1}{2}\right)}.$$

Connaissant la limite du rapport $\frac{v}{\lambda}$, nous pouvons calculer la pression H d'après (12)

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{v}{\lambda}\right)^2(1 - \lambda^2).$$

Pour $\lambda = 0$, on a

$$H_m = \frac{1}{2g}\frac{v_0^2}{n^2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Enfin, puisque $v_0^2 = 2gh$

$$H_m = \frac{h}{n^2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2}. \tag{37}$$

Telle est la valeur maximum de la pression; mais nous pouvons donner à cette expression une autre forme, car nous pouvons montrer qu'on a l'identité

$$n^2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{p-\frac{1}{2}}{p+\frac{1}{2}}.$$

En effet, on déduit successivement de cette équation

$$n^2\left(p-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{p+\frac{1}{2}}$$

$$n^2\left(p^2-\frac{1}{4}\right)=1.$$

Cette égalité a lieu puisque $p^2=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}$ d'après (26).

Tableau.

Ouverture λ	Vitesse v expérim.	Vitesse v théor.	Pression H expérim.	Pression H théor.
1,0	98,8	98,80	0	0
0,9	98,8	98,65	0	1,14
0,8	98,8	98,24	1	2,77
0,7	98,5	97,44	2	5,04
0,6	98,0	96,15	5	8,38
0,5	96,7	94,12	11	13,55
0,4	94,5	90,92	25	22,12
0,3	89,5	85,55	45	37,72
0,2	79,8	75,80	95	70,29
0,1	59,5	55,20	161	153,70
0	0	0	248	423,07

Nous avons donc l'expression

$$H_m=\frac{p+\frac{1}{2}}{p-\frac{1}{2}}h,\quad \text{avec}\quad p=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}}. \tag{38}$$

Passons à l'évaluation numérique de H_m.

$$p=0{,}6966\ (34)\qquad h=69{,}5$$

$$H_m=\frac{0{,}6966+0{,}5}{0{,}6966-0{,}5}\cdot 69{,}5=\underline{423{,}1}.$$

On appelle d'ordinaire *coup de bélier* le rapport $\frac{H_m - h}{h}$. L'examen de la formule (38) montre que *le coup de bélier est indépendant de la viscosité.* Rappelons que la viscosité est signalée

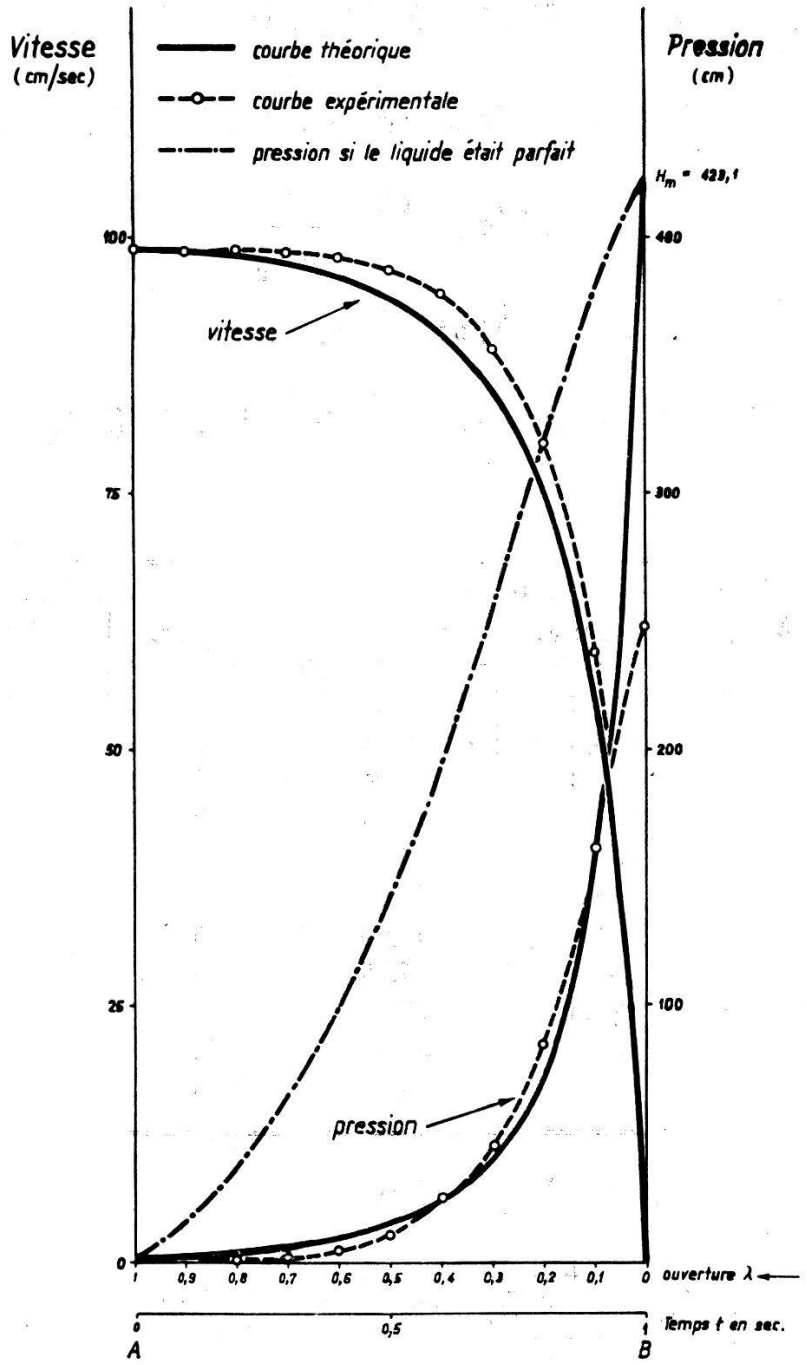

Fig. 2.

dans nos formules par la présence de β et du nombre 1,2; ce dernier a été introduit par la correction de Hagenbach, qui est elle-même une conséquence de la viscosité. Or H_m ne contient ni l'une ni l'autre de ces constantes.

Ce résultat, assez surprenant, est incontestable. Nous en tirons la conclusion que le même problème traité en admettant un liquide parfait donnerait pour H_m l'expression même que nous venons de trouver[1]).

13. Vérification expérimentale.

Comme nous l'avons dit au début, des expériences répétées ont été faites par A. Müller avec les données mêmes que nous avons utilisées pour nos calculs. Le plus grand soin a été apporté, tant pour constituer une installation irréprochable que pour enregistrer correctement la vitesse et la pression.

La jonction tube—réservoir a été soignée tout particulièrement; afin d'éviter la turbulence en cet endroit, le tube à son origine était judicieusement évasé et ainsi cette jonction adoucie. L'extrémité du tube passait progressivement de la forme circulaire à la forme carrée, de sorte que, l'obturateur se déplaçant avec une vitesse constante, la fermeture était une fonction linéaire du temps.

Le Tableau donne pour diverses ouvertures λ variant de 1 à 0 les valeurs de la vitesse moyenne et de la pression à l'extrémité du tube que nous avons calculées et celles qui ont été observées[2]).

Ce tableau a servi à construire les courbes de la fig. 2. On remarquera que la vitesse varie très peu tout d'abord, puis, vers la fin de la fermeture, tombe rapidement à zéro. Corrélativement la pression (plus exactement, excès de la pression du liquide sur la pression atmosphérique) est presque nulle durant une grande partie de la période de fermeture, puis s'élève brusquement vers la fin.

Pour servir de comparaison et rendre visible l'influence de la viscosité on a tracé également la courbe qui figurerait les variations de la pression dans le cas théorique d'un liquide parfait.

Nous ne trouvons d'écart entre la théorie et l'expérience qui soit digne de remarque que pour la pression finale; celle qui est observée est notablement plus faible que la valeur calculée H_m. A notre avis, les approximations que nous avons faites dans nos calculs ne sont responsables de cet écart que dans une faible

---

[1]) Jouguet (ouvrage cité, p. 10) trouve pour le coup de bélier dans les conduites forcées la formule $\delta_m = n\left(\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}\right)$. Du moment que δ_m est égal à $\frac{H_m-h}{h}$ et que n a la même signification que dans notre étude, il est aisé de vérifier que la formule de Jouguet est identique à notre formule (38).

[2]) Voir l'article déjà cité de A. Müller, Tableau II.

mesure. A. Müller estime plutôt que, par suite de l'élasticité des parois du tube et de la compressibilité du liquide, dont il n'a pas été tenu compte, l'onde de pression voyageant avec amortissement a été cause de l'atténuation observée. On comprend que cette perturbation ne soit appréciable qu'à la fin de la phase, au moment où la pression a pris de grandes valeurs. Des expériences sont en cours pour élucider ce point.

Fribourg (Suisse), Institut de physiologie de l'Université.