Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 19 (1946)

Heft: III

Artikel: Zur Ladungsabhängigkeit der Kernkräfte in der Vektormesontheorie ohne neutrale Mesonen

Autor: Jost, Res

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111700

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Copyright 1946 by Schweizerische Physikalische Gesellschaft.
Société Suisse de Physique. — Società Fisica Svizzera.
Nachdruck verboten. — Tous droits réservés. — Printed in Switzerland.

Zur Ladungsabhängigkeit der Kernkräfte in der Vektormesontheorie ohne neutrale Mesonen

von **Res Jost.**

(5. II. 1946.)

Die ^1S-Potentiale eines Zwei-Nukleonen-Systems werden untersucht. Die Hamilton-Funktion ist der Vektor- (oder Pseudoskalar-) mesontheorie ohne neutrale Mesonen bei starker Kopplung entnommen. Die Ladungsabhängigkeit der Potentiale erweist sich als zu stark auch dann, wenn die Isobarenanregungsenergie klein ist gegenüber der mittleren Wechselwirkungsenergie der Nukleonen.

§ 1. Einleitung.

Die experimentellen Untersuchungen über die Streuung von Neutronen und Protonen in Wasserstoff haben ergeben, dass die eigentlichen Kernkräfte zwischen zwei Nukleonen im massgebenden ^1S-Zustand fast unabhängig sind vom Ladungszustand der beiden Kernteilchen[1]). In der „charged theory" (nur geladene Mesonen) wirken, unter der Annahme schwacher Kopplung, zwischen Teilchen gleicher Ladung (z. B. zwei Protonen) in erster Näherung keine Kräfte. Sie widerspricht also den Tatsachen. Um die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte zu erreichen, ist man, immer unter der Annahme schwacher Kopplung, gezwungen, entweder neben den geladenen Mesonen auch neutrale Mesonen in symmetrischer Weise einzuführen (symmetrische Theorie) oder auf die geladenen Mesonen zur Erklärung der Kernkräfte überhaupt zu verzichten („neutral theory"). Die letzte Möglichkeit erscheint aus folgenden Gründen wenig befriedigend: zunächst muss man auf die Mesontheorie des β-Zerfalls und der magnetischen Momente des Neutrons und Protons verzichten, weiter hat man zwar geladene Mesonen in der Höhenstrahlung direkt beobachtet, die Existenz ungeladener Mesonen aber ist äusserst unsicher, und es ist schwer zu verstehen, wieso gerade die Teilchen, deren Existenz gesichert erscheint, aus der Theorie der Kernkräfte ausgeschlossen werden. Es wäre, von diesem Standpunkt aus beurteilt, im Gegenteil wünschbar, nur

[1]) Tuve, Heydenburg und Hafstad, Phys. Rev. **50**, 806 (1936); Breit, Condon und Present, Phys. Rev. **50**, 825 (1936); Breit und Feenberg, Phys. Rev. **50**, 850 (1936).

unter Heranziehung geladener Mesonen allein, eine Theorie der Kernkräfte aufzubauen.

Eine solche Möglichkeit könnte sich in der charged theory mit starker Kopplung ergeben. Es ist ein wesentliches Ergebnis der Mesontheorien mit starker Kopplung, dass sie das Nukleon mit neuen inneren Freiheitsgraden versehen: insbesondere kann das Nukleon in jeder Theorie, die geladene Mesonen einführt, alle „ganzzahligen" Ladungswerte annehmen. Dies hat zur Folge, dass auch Kernteilchen mit gleicher Ladung geladene Mesonen austauschen können: auch in der charged theory wirken demnach zwischen Teilchen gleicher Ladung weitgehend ähnliche Kräfte wie zwischen Teilchen verschiedener Ladung.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, zu untersuchen, ob die Kernkräfte zwischen zwei Nukleonen im ^1S-Zustand unter Annahme der charged theory wenigstens näherungsweise ladungsunabhängig sein können.

Das Nukleon-Modell entnehmen wir, ähnlich wie dies Fierz, Wentzel und Bleuler[1]) für die symmetrische Theorie getan haben, der Pseudoskalar- oder Vektormesontheorie[2]) (oder auch einer Mischungstheorie). Auch in methodischer Hinsicht werden wir ähnlich vorgehen wie diese Autoren.

Die Lage eines Nukleons ist (ähnlich wie die Lage eines starren Körpers) durch seinen Ortsvektor und eine Drehung, die etwa durch eine orthogonale Matrix $\|x_{ik}\|$ dargestellt sei, gegeben. Bei festgehaltenem Ortsvektor kann sich das Nukleon demnach noch auf der dreidimensionalen Drehgruppe bewegen. Die kinetische Energie dieser Bewegung: die Isobarenenergie, lautet[3]):

$$\frac{\varepsilon}{2}\,[2\vec{d}^2 - h_3^2] + \text{const.}$$

und entspricht der kinetischen Energie eines symmetrischen Kreisels.

ε ist die Isobarenkonstante,

$\vec{d}$ der Spin (Drehimpuls im „raumfesten" Koordinatensystem) des Nukleons mit den Eigenwerten:

$$\vec{d}^2 = j\,(j+1) \qquad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \ldots,$$

---

[1]) Fierz, H. P. A. **17**, 181 (1944) im folgenden als F. zitiert. Fierz und Wentzel, H. P. A. **17**, 215 (1944) im folgenden als I zitiert. Wentzel, H. P. A. **17**, 252 (1944); Bleuler, H. P. A. **18**, 317 (1945).

[2]) Die Theorie wurde entwickelt von Pauli und Dancoff in Phys. Rev. **62**, 85 (1942); Pauli und Kusaka: Phys. Rev. **63**, 400 (1943).

[3]) Pauli und Dancoff l. c. S. 104.

h_3 ist die 3-Komponente des isotopen Spins (Drehimpuls im „körperfesten" Koordinatensystem) mit den Eigenwerten:

$$h_3 = n \qquad n = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\cdots, \qquad |n| \leq j,$$

$n+\frac{1}{2}$ ist die Ladung des Nukleons[1]).

Zwischen zwei Nukleonen im Abstand r wirken eine Zentralkraft und eine Tensorkraft. Die Tensorkraft wird hier ignoriert. Die Zentralkraft hat das Potential: $V(r)\cdot\Omega$, wo $V(r)$ eine Funktion des Nukleonenabstandes ist, über deren genaueren Verlauf wir hier keine Voraussetzungen machen.

Ω ist eine Funktion der „Orientierung", also der orthogonalen Matrizen $\|x_{ik}\|$ und $\|x'_{ik}\|$ der beiden Nukleonen. In der Bezeichnung von F., dem wir hier folgen, lautet sie[2]):

$$\Omega = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ik}\, x'_{ik}.$$

Der Ansatz unterscheidet sich von demjenigen in der symmetrischen Theorie dadurch, dass der Index i (der sich auf den isotopen Spin bezieht) in der Summe nur über die Werte 1,2 läuft, währenddem er in der symmetrischen Theorie über 1,2,3 läuft.

Eine angenäherte Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte im ^1S-Zustand ist nur unter der Voraussetzung $\overline{|V(r)|} \gtrsim \varepsilon$, $\overline{|V(t)|}$: Mittelwert von $|V(r)|$, zu erwarten, da man für $\overline{|V(r)|} \ll \varepsilon$ wieder im wesentlichen zur Theorie der schwachen Kopplung zurückkommt. Wir werden im folgenden sogar voraussetzen, dass $\overline{|V(r)|} \gg \varepsilon$ sei.

Unter dieser Voraussetzung gibt es ein Intervall $r < r_0$, in welchem $|V(r)| \gg \varepsilon$.

Im Sinne der „Adiabatenmethode" beziehen wir unsere Rechnungen auf dieses Intervall: wir halten also die Orte der beiden Nukleonen fest und bestimmen die Energieeigenwerte $W(r)$ als Funktion des Abstandes.

Die entsprechende Hamiltonfunktion des Zweikörperproblems lautet:

$$H = T + V(r)\cdot\Omega$$

wo T die Isobarenenergie der beiden Nukleonen vorstellt. Bei unserer Voraussetzung sind die Eigenzustände von H kleine Schwingungen um die Minimallagen, $V(r)\cdot\Omega = \text{Min}$. Da die $\|x_{ik}\|$,

---

[1]) Der Zusammenhang der $\|x_{ik}\|$ mit der Transformation von „raumfesten" auf das „körperfeste" Koordinatensystem: F. S. 182.

[2]) Pauli und Kusaka l. c. S. 405 (61) und (62).

$\| x'_{ik} \|$ orthogonale Matrizen (der Determinante -1) sind, ist $-2 \leqq \Omega \leqq +2$. Die Extrema werden erreicht:

$$\left.\begin{array}{lll} \Omega = -2 \text{ für } & x_{ik} = -x'_{ik} & i = 1,2 \\ & x_{3k} = x'_{3k} & \end{array}\right\} k = 1,2,3.$$

$$\Omega = +2 \text{ für } x_{ik} = x'_{ik} \qquad i, k = 1,2,3.$$

Ist $V(r) > 0$, so treten kleine Schwingungen um die erste Gleichgewichtslage auf. Die Nukleonen stossen sich also auf der Drehgruppe ab, was für die Stabilität der schweren Kerne notwendig ist[1]). Ist $V(r) < 0$, so treten Schwingungen um die zweite Gleichgewichtslage auf. Die Nukleonen ziehen sich auf der Drehgruppe an; es tritt keine Absättigung der Kernkräfte ein, was bei schweren Kernen zum Zusammenbruch führt[2]). Wir werden deshalb im folgenden $V(r) > 0$ voraussetzen. Auf den Fall $V(r) < 0$ werden wir in § 6 noch kurz eingehen.

§ 2. Transformation der Hamiltonmatrix.

Die Hamiltonfunktion lautet:

$$H = \frac{\varepsilon}{2} \left[2\vec{d}_1^{\,2} + 2\vec{d}_2^{\,2} - (h_{13}^2 + h_{23}^2) \right] + V(r) \cdot \Omega + \text{const.} \tag{1}$$

Dabei bedeuten $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ mit den Komponenten (d_{11}, d_{12}, d_{13}), (d_{21}, d_{22}, d_{23}) die Spins, h_{13}, h_{23} die 3-Komponenten des isotopen Spins der beiden Nukleonen,

$$\Omega = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} x_{ik} x'_{ik}. \tag{2}$$

Die Operatoren

$$\vec{D} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 \tag{3}$$

und

$$H_3 = h_{13} + h_{23} \tag{4}$$

kommutieren mit der Hamiltonfunktion. Es ist daher zweckmässig, diese in den folgenden Variablen darzustellen:

j_1, j_2 : Spinbeträge der Nukleonen: $j_i = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \cdots$

J : Betrag des Gesamtspins $\vec{D}$: $J = 0, 1, 2 \ldots$

M : 3-Komponente des Gesamtspins: $M = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

n_1, n_2: 3-Komponenten des isotopen Spins der Nukleonen:

$n_i = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2} \cdots$

---

[1]) Coester, H. P. A. **17**, 35 (1944). Der Fall der charged theory ist dort nicht behandelt. Das Vorgehen bleibt sich aber gleich.

[2]) Wentzel, H. P. A. **15**, 686 (1942) zeigt, dass auch die Berücksichtigung der kinetischen Energie den Zusammenbruch nicht zu verhindern vermag.

Vektor- und Pseudokalartheorie ergeben $V > 0$. Vermutlich ergäbe die Pseudovektortheorie $V < 0$. Kemmer, Proc. Roy. Soc. **166**, 127 (1938).

Die Variablen unterliegen den folgenden Beschränkungen:

$$\left.\begin{array}{ll} |M| \leqq J, & |j_1 - j_2| \leqq J \leqq j_1 + j_2 \\ |n_i| \leqq j_i & i = 1,2 \end{array}\right\} \tag{5}$$

J und M sind Integrationskonstanten, wir unterdrücken sie daher als Matrixindices.

Nach der Transformation wird H von der Form sein:

$$\begin{aligned} &(j_1, j_2, n_1, n_2 \mid H \mid j_1', j_2', n_1', n_2') = \\ &\frac{\varepsilon}{2}\left[2\left(j_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(j_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - (n_1^2 + n_2^2)\right] \cdot 1 \\ &+ V(r)\,(j_1, j_2, n_1, n_2 \mid \Omega \mid j_1', j_2', n_1', n_2') + \text{const.} \end{aligned} \tag{6}$$

Die Hilfsmittel zur Berechnung der Matrix Ω sind in F. enthalten. Ω entsteht nämlich aus den Formeln (IV. 1) bis (IV. 5) (F.S. 192), indem man dort den Index i nur über die Werte 1 und 2 laufen lässt und ausserdem h_{1i}, h_{2i}; c_{1i}, c_{2i}; c^*_{1i}, c^*_{2i} (wir führen an Stelle des Akzentes $'$ zur Unterscheidung der Nukleonen einen ersten untern Index ein), gemäss (II. 3) und der Bemerkung auf S. 185 unten und S. 186 oben, in den Variablen j_l, n_l ausdrückt. Die Terme, die aus der Summation über k entstehen, sind identisch mit $A_l(J, j_1, j_2)$ in (IV.).

Ω hat also die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} &(j_1, j_2, n_1, n_2 \mid \Omega \mid j_1', j_2', n_1', n_2') = \\ &\frac{1}{4}\alpha(j_1, j_1')\,\alpha(j_2, j_2')\,(j_1, j_2 \mid A \mid j_1', j_2') \cdot (j_1, j_2, n_1, n_2 \mid B \mid j_1', j_2', n_1', n_2') \end{aligned} \tag{7}$$

wo

$$\alpha(j, j) = \frac{1}{j(j+1)} \qquad \alpha(j, j-1) = \alpha(j-1, j) = \frac{1}{j\sqrt{4j^2-1}} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned} (j_1, j_2 \mid A \mid j_1, j_2) &= A_1(J, j_1, j_2) \\ (j_1, j_2 \mid A \mid j_1-1, j_2) &= A_2(J, j_1, j_2) \\ (j_1, j_2 \mid A \mid j_1-1, j_2+1) &= A_3(J, j_1, j_2) \\ (j_1, j_2 \mid A \mid j_1-1, j_2-1) &= A_4(J, j_1, j_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Die Matrix B entsteht aus den Termen mit dem Index i in (IV. 1) bis (IV. 5) und lässt sich durch elementare Rechnung gewinnen.

Zu ihrer Angabe führen wir für gewisse Indexkombinationen Nummern ein:

$$1- \sim \quad (j_1, j_2, n_1, n_2 \,|\, \ldots\ldots \,|\, j_1, j_2, n_1-1, n_2+1)$$
$$1+ \sim \quad (j_1, j_2, n_1, n_2 \,|\, \ldots\ldots \,|\, j_1, j_2, n_1+1, n_2-1)$$

analog

$$2\mp \sim \quad (j_1, j_2, \ldots\ldots \,|\, \ldots\ldots \,|\, j_1-1, j_2, \ldots\ldots)$$
$$3\mp \sim \quad (j_1, j_2, \ldots\ldots \,|\, \ldots\ldots \,|\, j_1-1, j_2+1, \ldots\ldots)$$
$$4\mp \sim \quad (j_1, j_2, \ldots\ldots \,|\, \ldots\ldots \,|\, j_1-1, j_2-1, \ldots\ldots).$$

Für B gilt dann folgende Tabelle

$$\begin{array}{ll}
1^- & [(j_1+n_1)\,(j_1-n_1+1)\,(j_2+n_2+1)\,(j_2-n_2)]^{\frac{1}{2}} \\
2^- & -[(j_1+n_1)\,(j_1+n_1-1)\,(j_2+n_2+1)\,(j_2-n_2)]^{\frac{1}{2}} \\
2^+ & [(j_1-n_1)\,(j_1-n_1-1)\,(j_2+n_2)\,(j_2-n_2+1)]^{\frac{1}{2}} \\
3^- & [(j_1+n_1)\,(j_1+n_1-1)\,(j_2+n_2+2)\,(j_2+n_2+1)]^{\frac{1}{2}} \\
3^+ & [(j_1-n_1)\,(j_1-n_1-1)\,(j_2-n_2+2)\,(j_2-n_2+1)]^{\frac{1}{2}} \\
4^- & -[(j_1+n_1)\,(j_1+n_1-1)\,(j_2-n_2)\,(j_2-n_2-1)]^{\frac{1}{2}}\,.
\end{array} \tag{10}$$

Alle übrigen von Null verschiedenen Matrixelemente ergeben sich aus der Hermitizität von Ω und aus der Symmetrie in den beiden Nukleonen 1 und 2. Die Ladungserhaltung ist evident, da nur Matrixelemente von Null verschieden sind, für welche $n_1+n_2=n_1'+n_2'$. $N=n_1+n_2$ ist daher eine Integrationskonstante, $N+1$ die Ladung des Zwei-Nukleonen-Systems.

Spezialisieren wir auf $J=0$, mit welchem Fall wir uns im folgenden ausschliesslich befassen werden, so folgt aus (5)

$$j_1=j_2=j \tag{11}$$

und es treten nur die Indexkombinationen $1\mp$ und $4\mp$ neben den dazu konjugierten auf.

Aus (7), (8), (9), (10) ergibt sich

$$\begin{aligned}
(j, n_1, n_2 \,|\, \Omega \,|\, j, n_1-1, n_2+1) &= -\frac{1}{2j(j+1)} \\
&\quad \cdot [(j+n_1)\,(j-n_1+1)\,(j-n_2)\,(j+n_2+1)]^{\frac{1}{2}} \\
(j, n_1, n_2 \,|\, \Omega \,|\, j-1, n_1-1, n_2+1) &= -\frac{1}{2j\sqrt{4j^2-1}} \\
&\quad \cdot [(j+n_1)\,(j+n_1-1)\,(j-n_2)\,(j-n_2-1)]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{12}$$

wobei die Matrixindices der Beschränkung

$$|n_i| \leqq j, \qquad n_i, j \text{ halbganz} \tag{5'}$$

unterworfen sind.

Hier ist es jetzt zweckmässig, die Ladung als neue Variable einzuführen, indem man setzt:

$$\mu = \frac{1}{2}(n_1 + n_2) \qquad \nu = \frac{1}{2}(n_1 - n_2)\,. \tag{13}$$

μ wird als Integrationskonstante in den Matrixindices wieder unterdrückt. Aus (5') ergibt sich bei vorgegebenem μ:

$$j \geqq |\mu| \quad \text{und} \quad -j + |\mu| \leqq \nu \leqq j - |\mu|. \tag{14}$$

Weiter muss $\mu + \nu$ halbganz sein.

Als Matrixelemente ergeben sich gemäss (12):

$$\begin{aligned}
&(j, \nu \,|\, \Omega \,|\, j, \nu \mp 1) \\
&\quad = -\frac{1}{2j(j+1)}\left[(j+\mu\pm\nu)(j-\mu\pm\nu)(j+\mu\mp\nu+1)(j-\mu\mp\nu+1)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&(j, \nu \,|\, \Omega \,|\, j-1, \nu \mp 1) \\
&\quad = -\frac{1}{2j\sqrt{4j^2-1}}\left[(j+\mu\pm\nu)(j-\mu\pm\nu)(j+\mu\pm\nu-1)(j-\mu\pm\nu-1)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Gemäss (13) kann μ alle positiven und nicht positiven ganzen und halbganzen Zahlwerte annehmen.

$2\mu + 1$ ist die Ladung des Zustandes.

Wir schliessen diesen Paragraphen mit der Bemerkung, dass es zwar möglich aber gänzlich unzweckmässig ist, den Betrag des totalen isotopen Spins (K bei F.) als Matrixindex einzuführen. Dies war in der symmetrischen Theorie dem Problem angepasst, weil K in jener Theorie eine Integrationskonstante darstellt, was hier offenbar nicht der Fall ist.

§ 3. Das Näherungsverfahren zur Lösung des Eigenwertproblems.

Nach den Erfahrungen, die man mit der symmetrischen Theorie gemacht hat, erscheint der Versuch einer exakten Lösung des Eigenwertproblems für die Matrix H auch im einfachsten Fall $J = M = \mu = 0$ aussichtslos. Wentzel und Fierz haben in I eine Näherungsmethode entwickelt, die sie mit der Bezeichnung „Oszil-

latornäherung" belegen. Wendet man dieses Verfahren auf unser Problem an, so ergeben sich vollständig unübersichtliche Formeln. Wir sehen uns deshalb gezwungen, die mathematische Form der Oszillatornäherung passend abzuändern. Wie dies geschieht, werde an einem Beispiel erläutert.

Das Hauptachsenproblem sei durch folgende Matrix definiert (es handelt sich im wesentlichen um den Fall $J=K=0$ in 1):

$$\begin{aligned}(x \mid H \mid x) &= x^2 \\ (x \mid H \mid x-1) &= (x-1 \mid H \mid x) = -\omega^2 .\end{aligned} \tag{16}$$

Die Eigenwertgleichung lautet ($W=$ Eigenwert):

$$(x^2-W)\, u(x) - \omega^2 \left[u(x-1)+u(x+1)\right] = 0 . \tag{17}$$

Sie ist äquivalent einer Mathieu'schen Differentialgleichung. Der Variabilitätsbereich von x sei zunächst das Gitter der ganzen Zahlen. Nun weiss man aber, dass jeder Lösungsvektor von (17) bei beliebigem W sich einbetten lässt in eine analytische (hier sogar ganze) Lösung von (17) mit beliebigem komplexen x[1]). Es ist also sinnvoll $u(x)$ zu differenzieren. Wentzel und Fierz machen den Ansatz:

$$u(x) = \int e^{ixz}\, w(z)\, dz , \tag{18}$$

wobei das Integral über einen passenden Weg der komplexen z-Ebene zu erstrecken ist.

Aus (18) folgt:

$$u(x \pm 1) = \int e^{ixz}\, e^{\pm iz}\, w(z)\, dz \tag{19}$$

$$x^2 \cdot u(x) = \int e^{ixz} \left[-w''(z)\right] dz, \tag{20}$$

wobei wir in (20) partiell integriert haben, unter der Voraussetzung, dass die integralfreien Summanden in den Integrationsgrenzen verschwinden. Schliesslich merken wir uns noch folgende Formeln für die Ableitungen von $u(x)$ an:

$$u^{(\nu)}(x) = \int e^{ixz}\, (iz)^{\nu}\, w(z)\, dz \cdot \tag{21}$$

---

[1]) N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung. Springer 1924 (im folgenden als: „Nörlund" zitiert). 10. Kapital, § 1.

Gemäss (19) und (20) ist (17) erfüllt, wenn $w(z)$ folgender Differentialgleichung genügt:

$$w'' + [W + \omega^2 (e^{iz} + e^{-iz})]\, w = 0\,, \tag{22}$$

welches die schon erwähnte Mathieu-Gleichung darstellt. Oszillatornäherung bedeutet Entwickeln der Exponentialfunktionen in (22) und Abbrechen der Reihen nach den quadratischen Termen in z. Dies ist für $\omega^2 \gg 1$ zulässig. Höhere Potenzen von z werden störungsmässig behandelt. Führen wir die Entwicklung der Exponentialfunktion schon in (19) durch, so erkennen wir mit (21), dass sie einer Taylorentwicklung von $u(x \pm 1)$ um den Punkt x gleichkommt. Oszillatornäherung bedeutet Abbrechen der Taylorreihe nach der zweiten Ableitung.

So ergibt sich das im Folgenden dargestellte Näherungsverfahren.

A. Oszillatornäherung für „eindimensionale" Probleme.

Es seien die Eigenwerte einer reellen Matrix $(x\,|H|\,x')$ mit den folgenden nicht identisch verschwindenden Elementen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} (x|H|x) &= f(x) \\ (x|H|x+1) &= -p_{+1}(x) \\ (x|H|x-1) &= -p_{-1}(x)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

H braucht nicht unbedingt hermitisch zu sein.

Der Variabilitätsbereich von x sei zunächst ein Abschnitt aus dem ganzzahligen Gitter:

$$A \leqq x \leqq B \tag{23'}$$

$f(x)$, $p_{+1}(x)$ und $p_{-1}(x)$ seien meromorphe Funktionen. Die Eigenwertgleichung lautet:

$$[f(x) - W]\, u(x) = \sum_{k=-1}^{+1} p_k(x)\, u(x+k)\,. \tag{24}$$

Wir erweitern zunächst den Variabilitätsbereich von x auf das unbegrenzte ganzzahlige Gitter, indem wir an Stelle von (23′) die folgende Forderung stellen:

$$\begin{aligned} p_{-1}(A)\, u(A-1) &= 0 \\ p_{+1}(B)\, u(B+1) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$ [1]

[1]) Durch (25) wird erreicht, dass die Funktionswerte für $x > B$ und $x < A$ mit den $u(x)$ in $A \leqq x \leqq B$ nicht gekoppelt sind. Natürlich betrachten wir nur solche Lösungen $u(x)$, die in $A \leqq x \leqq B$ nicht identisch verschwinden und dort normierbar sind.

Dadurch werden wir auf eine Randwertaufgabe für Differenzengleichungen geführt.

Jede Lösung von (24) lässt sich wieder einbetten in eine meromorphe Lösung von (24), wobei x jetzt eine komplexe Variable bedeutet. (Damit erhält (25) erst den vollen Sinn.) Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über die Lage der Singularitäten, auf deren Angabe wir aber verzichten, kann man dann (24) in eine Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung verwandeln, indem man $u(x+k)$ nach k entwickelt.

Die Differentialgleichung lautet:

$$[f(x)-W]\,u(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\sum_{k}p_k(x)\left(k\frac{d}{dx}\right)^{\nu}u(x). \tag{24'}$$

In der Oszillatornäherung bricht man in (24′) die Reihe über ν nach der zweiten Ableitung ab und erhält so (unter Umständen) eine brauchbare Näherungslösung für $u(x)$, die wir mit $\psi(x)$ bezeichnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{k}k^2p_k(x)\cdot\psi''+\sum_{k}kp_k(x)\cdot\psi'+\\&+\left(\sum_{k}p_k(x)-f(x)+W\right)\psi=0.\end{aligned} \tag{26}$$

Es liegt nicht in unserer Absicht, allgemeine Kriterien für die Anwendbarkeit der eben skizzierten Methode anzugeben. Wir begnügen uns damit, aus zwei Beispielen einige Schlüsse zu ziehen. Dabei wird es sich hauptsächlich darum handeln, was an Stelle von (25) für die Funktion $\psi(x)$ zu fordern ist.

1. Beispiel (vgl. (16)).

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2\\p_{+1}(x)&=p_{-1}(x)=V.\end{aligned} \tag{27}$$

Aus (26) folgt:

$$\psi''-(\beta^2x^2-\alpha)\,\psi=0\qquad\beta^2=V^{-1},\ \alpha=\frac{W+2V}{V}. \tag{28}$$

Für $V>0$ also $\beta^2>0$ ist dies die Oszillatorgleichung mit den Eigenwerten

$$\begin{aligned}&\alpha_n=\beta(2n+1)\\&\beta>0,\ n=0,1,2\ldots.\end{aligned}\quad\text{oder}\quad\begin{aligned}&W_n\cong-2V+(2n+1)\sqrt{V}\\&n=0,1,2\ldots.\end{aligned} \tag{29}$$

Die Näherung hat nur dann einen Sinn, wenn die Eigenfunktionen zu (28): $\psi_n(x)$ über dem Gitter der ganzen Zahlen langsam ver-

änderlich sind. Dies ist der Fall, wenn $\beta^{1/2} \ll 1$ ist. Die Darstellung von α_n in (29) ist als Beginn einer Entwicklung nach β aufzufassen: man kann nämlich die dritte und vierte Ableitung (vgl. (24')) noch störungsmässig berücksichtigen, was in (29) für α_n einen Zusatz $\sim \beta^2$ ergibt[1]).

Es werde nun in (27) der Variabilitätsbereich von x wie folgt abgeändert:[2])

$$x = 1, 2, 3 \ldots \tag{27'}$$

Im Sinn von (25) können wir (27') ersetzen durch die Forderung

$$u(0) = 0, \tag{30}$$

wobei wir als Eigenlösungen natürlich nur solche zulassen, die auf dem positiven ganzzahligen Gitter nicht identisch verschwinden und *dort* normierbar sind. Offenbar haben wir (30) auch für $\psi(x)$ zu verlangen, wodurch in (29) die Werte von n auf die ungeraden natürlichen Zahlen beschränkt werden.

Ist $V < 0$[1]), so hat (28) keine in einem unendlichen Intervall normierbare Lösung. In diesem Fall alternieren die Eigenfunktionen von (27). Setzt man an Stelle von $u(x) = (-1)^x v(x)$, so gelten für $v(x)$ alle Gleichungen mit $V > 0$.

Über alternierende Vorzeichen ist so zu verfügen, dass (26) im betrachteten Intervall eine normierbare Lösung besitzt.

Das Beispiel (27) ist dadurch ausgezeichnet, dass weder die der Matrix (27) entsprechende Differenzengleichung, noch die Näherungsgleichung (28) im Endlichen eine Singularität besitzen. Darin liegt der Grund, weshalb wir (25) unmittelbar übertragen konnten.

2. Beispiel.

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = \beta x & \beta > 2 \\ p_{-1}(x) = p_{+1}(x-1) = \sqrt{(x+K)(x-K)} & \end{array}\right\} \begin{array}{l} K = 0, 1, 2, \ldots \\ x = K, K+1, \ldots \end{array} \tag{31}$$

In dieser Gestalt passt das Beispiel noch nicht in unsere Methode: $p_i(x)$ sind irrational. Der irrationale Bestandteil der Eigenlösungen $u(x)$ lässt sich aber leicht separieren:

$$\begin{array}{l} u(x) = \gamma(x)\, v(x) \\ \gamma^2(x) = (x-K+1)(x-K+2) \ldots (x+K). \end{array} \tag{32}$$

---

[1]) Das Resultat stimmt mut. mut. überein mit der Störung die WENTZEL und FIERZ in I berechnen.

[2]) Vgl. I.

Für $v(x)$ ergibt sich eine Differenzengleichung, die durch folgende Matrix bestimmt ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \beta x \\ \overline{p}_{+1}(x) &= x + K + 1 \\ \overline{p}_{-1}(x) &= x - K. \end{aligned} \tag{33}$$

Sie lautet:

$$(x+K+1)\, v(x+1) + (x-K)\, v(x-1) + (W-\beta x)\, v(x) = 0. \tag{33'}$$

Lassen wir x jetzt beliebig variieren, so haben wir an Stelle von (25) zu setzten:

$$[(x-K)\, v(x-1)]_{x \to K} = 0, \tag{34}$$

weiter müssen wir die Normierungsbedingung

$$0 < \sum_{K}^{\infty} \gamma^2(x)\, |v(x)|^2 < \infty \tag{35}$$

hinzufügen.

Im Anhang werden wir auf Grund von (34) und (35) die Differenzengleichung (33′) und damit das Eigenwertproblem (31) exakt lösen. Es wird sich ergeben, dass die Eigenlösungen: $v_n(x)$ ganze Funktionen von x sind. Die Oszillatornäherung liefert die Differentialgleichung:

$$(x+\tfrac{1}{2})\, \psi'' + (2K+1)\, \psi' + (2x+1-\beta x+W)\, \psi = 0 \tag{36}$$

oder, wenn man den Nullpunkt der x-Achse um $\frac{1}{2}$ nach links verschiebt:

$$x\psi'' + (2K+1)\, \psi' + (\alpha - \delta^2 x)\, \psi = 0$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= W + \tfrac{1}{2}\beta \\ \delta^2 &= \beta - 2. \end{aligned} \tag{36'}$$

Wendet man auf (36′) die elementaren Methoden der Wellenmechanik an: Polynommethode $\psi(x) = e^{-\delta x}\mathfrak{P}_n(x)$, $\delta > 0$, so ergeben sich für α die Eigenwerte:

$$\alpha_n = (2n+2K+1)\,\delta, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

also

$$W_n \cong -\frac{1}{2}\beta + (2n+2K+1)\,\delta, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{37}$$

Damit unsere Näherung sinnvoll ist, muss $\delta \ll 1$ sein. Man überzeugt sich übrigens leicht, dass die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ von (36′) die Differenzengleichung (33′) bis auf Terme $\sim \delta^2$, diese

eingeschlossen, erfüllen[1]). Dadurch ist gezeigt, dass (37) als eine Entwicklung der Eigenwerte W_n nach Potenzen von δ zu betrachten ist.

Die Differenzengleichung (33′) hat in $x = K-1$ eine Singularität[2]). (34) bedeutet, dass wir nur Lösungen zulassen, die sich in diesem Punkt regulär verhalten. Die Übertragung auf die Differentialgleichung (36′) lautet offenbar: es sind nur solche Lösungen zuzulassen, die sich in der Singularität $x = 0$ der *Differentialgleichung* regulär verhalten. Die Singularität der Differentialgleichung fällt aber immer ausserhalb des Normierungsintervalles $K + \frac{1}{2} \leqq x < \infty$. Dass trotzdem die Lösungen von (36′), die in $x = 0$ singulär sind, auch dann, wenn sie in $K + \frac{1}{2} \leqq x < \infty$ normierbar sind, ausgeschlossen werden müssen, sei am Beispiel:

$$\psi(x) = x^{-2K} e^{-\delta x} \quad \text{zu} \quad \alpha = -(2K-1)\delta$$

illustriert. Nach (33′) sollte, wenigstens näherungsweise, gelten:

$$\left(x+K+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2K} e^{-\delta} + \left(x-K-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2K} e^{+\delta} \cong 2x + (2K-1)\delta + x\delta^2$$

was offensichtlich nicht erfüllt ist.

B. Oszillatornäherung für „zweidimensionale" Probleme.

Die sinngemässe Übertragung unseres Näherungsverfahrens auf Matrizen mit mehreren Matrixindices (mehrdimensionale Matrizen) ist trivial.

Es sei $(y, x \mid H \mid y', x')$ eine (nicht notwendig hermitische) reelle Matrix mit folgenden nicht verschwindenden Elementen:

$$\begin{aligned} &(y, x \mid H \mid y, x) = f(xy) \\ &(y, x \mid H \mid y+i, x+k) = -p_{ik}(xy) \quad i, k = 0, \pm 1;\ i^2+k^2 > 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Die Schrödingergleichung lautet:

$$\sum_{ik} p_{ik}(xy)\, u(x+k, y+i) = [f(xy) - W]\, u(xy). \tag{39}$$

Entwickeln wir hierin $u(x+k, y+i)$ nach k und i und brechen nach den zweiten Ableitungen ab, so erhalten wir eine Differential-

---

[1]) Die Verifikation kann, ähnlich wie wir dies in § 5 in extenso durchführen werden, an Hand der erzeugenden Funktion

$$\sum_0^\infty \psi_n^{(K)}(x)\, \mathfrak{t}^n = e^{-\frac{1+\mathfrak{t}}{1-\mathfrak{t}}\delta x} (1-\mathfrak{t})^{-2K-1}$$

erfolgen.

[2]) Nörlund S. 273.

gleichung für eine (unter Umständen brauchbare) Näherungsfunktion $\psi(xy)$:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} k^2 p_{ik}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\sum_{i,k} ik\,p_{ik}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{2}\sum_{i,k} i^2 p_{ik}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+$$
$$+\sum_{i,k} k\,p_{ik}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\sum_{i,k} i\,p_{ik}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+\left(\sum_{i,k} p_{ik}-f+W\right)\psi=0. \tag{40}$$

§ 4. Anwendung der Oszillatornäherung.

Es handelt sich jetzt um die Lösung des Hauptachsenproblems, welches durch (6) und (15) dargestellt ist. (Fall $J=0$). Vorerst erkennt man, dass die Fälle $\mu=\alpha$ und $\mu=-\alpha$ dieselben Eigenwerte liefern. Wir können uns also auf

$$\mu\geqq 0 \tag{41}$$

beschränken. Wie in der Einleitung § 1 erwähnt wurde, schränken wir unsere Diskussion auf einen Bereich ein, wo

$$V(r)\gg\varepsilon,\qquad\text{also}\qquad\beta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{V}}\ll 1. \tag{42}$$

Im Bereich $V(r)\ll\varepsilon$ kommt man mit gewöhnlichen Störungsverfahren zum Ziel. Die Zuordnung der Eigenwerte in den beiden r-Bereichen geschieht nach bekannten Prinzipien (Verbot des Überschneidens adiabatischer Potentialkurven). Durch die Separation

$$u(j,\nu)=\gamma(j,\nu)\cdot v(j,\nu),$$

mit

$$\gamma^2(j,\nu)=\left(j+\frac{1}{2}\right)\prod_{\sigma=1}^{2\mu}(j-\mu+\nu+\sigma)\,(j-\mu-\nu+\sigma) \tag{43}$$

schaffen wir in Ω die Wurzeln weg und erhalten eine Matrix $\overline{\Omega}$ mit den folgenden Elementen (wir setzen $y=j+\frac{1}{2}$, $x=\nu$):

$$(y,x\,|\,\overline{\Omega}\,|\,y,x\pm 1)=-\frac{1}{2}+\frac{(\mu\pm x)(\mu\pm x+1)}{2\left(y^2-\frac{1}{4}\right)} \tag{44}$$

$$(y,x\,|\overline{\Omega}|\,y+1,x\pm 1)=-\frac{1}{4}-\frac{\left(\mu\pm x+\frac{1}{2}\right)\left(\mu\pm x+\frac{3}{2}\right)}{2y}+\frac{(\mu\pm x)(\mu\pm x+1)}{2\left(y+\frac{1}{2}\right)}$$

$$(y,x\,|\overline{\Omega}|\,y-1,x\pm 1)=-\frac{1}{4}+\frac{\left(\mu\pm x+\frac{1}{2}\right)\left(\mu\pm x+\frac{3}{2}\right)}{2y}-\frac{(\mu\pm x)(\mu\pm x+1)}{2\left(y-\frac{1}{2}\right)}.$$

Gemäss (38) führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} p_{ik}(xy) &= -(y, x \mid \overline{\Omega} \mid y+i, x+k) \\ f(xy) &= \beta^2 (2y^2 - x^2 - \mu^2) . \end{aligned} \tag{45}$$

Nach (14) ist der Variabilitätsbereich von (xy) wie folgt eingeschränkt:

$$\begin{aligned} &y \quad \text{ganz}, \; y > \mu, \\ &\mu + x \; \text{halbganz}, \; -y + \mu + \tfrac{1}{2} \leqq x \leqq y - \mu - \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{46}$$

An die Stelle von (46) setzen wir wieder eine Randbedingung für die Differenzengleichung:

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} p_{0,1} &\cdot v = 0 \\ p_{-1,1} &\cdot v = 0 \end{aligned}\right\} \text{längs } y - x - \mu - \frac{1}{2} = 0 \\ &p_{-1,1} \cdot v = 0 \quad \text{längs } y - x - \mu - \frac{3}{2} = 0 \\ &\left.\begin{aligned} p_{0,-1} &\cdot v = 0 \\ p_{-1,-1} &\cdot v = 0 \end{aligned}\right\} \text{längs } y + x - \mu - \frac{1}{2} = 0 \\ &p_{-1,-1} \cdot v = 0 \quad \text{längs } y + x - \mu - \frac{3}{2} = 0 . \end{aligned} \tag{47}$$

Da, wie man aus (44) erkennt, alle p_{ik}, die in (47) auftreten, verschwinden, verlangt (47) die Endlichkeit von $v(x+k, y+i)$ längs den angegebenen Geraden.

Natürlich sind nur solche Lösungen $v(xy)$ brauchbar, die im Bereich (46) nicht identisch verschwinden und dort mit dem Gewicht $\gamma^2(xy)$ aus (43) normierbar sind. Um zur Oszillatornäherung überzugehen, müssen wir die Differentialgleichung (40) aufstellen. Aus (44) folgt:

$$\begin{aligned} &\sum k^2 p_{ik} = 2, \; \sum ik\, p_{ik} = \frac{4(\mu+1)x}{y} - 2y \frac{(2\mu+1)x}{y^2 - 1/4} \\ &\sum i^2 p_{ik} = 1 + \frac{x^2 + \mu(\mu+1)}{y^2 - 1/4} \\ &\sum k p_{ik} = 0, \; \sum i p_{ik} = \frac{2}{y}\left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\left(\mu + \frac{3}{2}\right) + x^2\right] - 2y \frac{x^2 + \mu(\mu+1)}{y^2 - 1/4} \\ &\sum p_{ik} = 2 . \end{aligned} \tag{48}$$

Um zu einer annehmbaren Differentialgleichung zu gelangen, entwickeln wir die Ausdrücke nach y^{-1} und vernachlässigen in den Koeffizienten der zweiten Ableitungen in (40) Terme mit $y^{-2}\ldots$ in den Koeffizienten der ersten Ableitungen Terme mit $y^{-3}\ldots$, wobei $|x| \sim y$ betrachtet wird. Wir werden später zeigen, dass die Vernachlässigungen, die wir dadurch begehen, unsere Näherung,

deren Ziel es ist, die Eigenwerte W bis auf Terme in $\sqrt{\varepsilon V}$ genau zu bestimmen, nicht stören. Es ergibt sich dann:

$$\sum k^2 p_{ik} = 2, \qquad \sum ik p_{ik} = \frac{2x}{y}, \qquad \sum i^2 p_{ik} = 1 + \frac{x^2}{y^2}$$

$$\sum k p_{ik} = 0 \qquad \sum i p_{ik} = \frac{4\mu+3}{2y} - \frac{x^2}{2y^3} \qquad \sum p_{ik} = 2. \tag{49}$$

Damit lautet schliesslich (40):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2x}{y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2y^2}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} +$$

$$+ \left(\frac{4\mu+3}{2y} - \frac{x^2}{2y^3}\right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + [\alpha - \beta^2 (2y^2 - x^2)]\psi = 0, \tag{50}$$

wo

$$\alpha = \frac{W + 2V + \varepsilon\mu^2}{V}. \tag{51}$$

Die Substitution:

$$\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \sqrt{\xi^2 + \tfrac{1}{2}\eta^2} \end{aligned} \quad \text{mit der Umkehrung} \quad \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= \sqrt{2(y^2 - x^2)} \end{aligned} \tag{52}$$

führt zur Normalform:

$$\Delta \psi + \frac{4\mu+1}{\eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + [\alpha - \beta^2(\xi^2 + \eta^2)]\psi = 0. \tag{53}$$

Separation:

$$\psi = u(\xi) \cdot v(\eta) \tag{54}$$

liefert:

$$v'' + \frac{4\mu+1}{\eta} v' + (\lambda - \beta^2 \eta^2)\, v = 0 \tag{55}$$

$$u'' + [(\alpha - \lambda) - \beta^2 \xi^2] u = 0. \tag{56}$$

(55) stellt die Radialgleichung des $4\mu+2$-dimensionalen isotropen Oszillators dar und hat die Eigenwerte:

$$\lambda_l = 2\,[2l + 2\mu + 1]\beta, \qquad l = 0, 1, 2 \ldots. \tag{57}$$

(56) ist die gewöhnliche Oszillatorgleichung mit den Eigenwerten:

$$\alpha_n = \lambda + (2n+1)\beta,$$

also

$$\alpha_{l,n}^{(\mu)} = (2n + 4l + 4\mu + 3)\beta. \tag{58}$$

Nach (51) also

$$W_{l,n}^{(\mu)} = -2V + (2n + 4l + 4\,|\mu| + 3)\,\beta + \cdots$$
$$n = 0, 1, 2 \ldots, \qquad l = 0, 1, 2 \ldots \tag{59}$$

$$W_m^{(\mu)} = -2V + (2m + 4\,|\mu| + 3)\,\beta + \cdots$$
$$m = 0, 1, 2 \ldots \tag{60}$$

Die bestehende Entartung würde durch eine Störungsrechnung weitgehend aufgehoben.

§ 5. Die Eigenfunktionen, Rechtfertigung der Entwicklung (49).

Setzt man in (55)

$$\beta\eta^2 = z \qquad \text{und} \qquad v(z) = e^{-\frac{z}{2}}\, w, \tag{61}$$

so ergibt sich für w die Differentialgleichung der Laguerreschen Polynome:

$$z w'' + (m - z)\, w' + l w = 0 \tag{62}$$

mit

$$m = 2\mu + 1 \tag{63}$$

und

$$\lambda = 4\mu + 2 + 4l. \tag{64}$$

Die Lösungen seien mit $w_l^{(m)}(z)$ bezeichnet. Dann hat man die folgende erzeugende Funktion:

$$\sum_{l=0}^{\infty} w_l^{(m)}(z) \cdot \mathfrak{x}^l = (1 - \mathfrak{x})^{-m}\, e^{-\frac{z\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}}}. \tag{65}$$

Durch Ableiten nach $\mathfrak{x}$ folgt die Rekursion:

$$m\, w_{l-1}^{(m+1)} = l\, w_l^{(m)} + z\, w_{l-1}^{(m+2)}, \tag{66}$$

wobei wir $w_l^{(m)} \equiv 0$ setzen für $l < 0$.

Für die Eigenfunktionen von (55) zum Ladungsparameter μ und zum Eigenwertparameter l ergibt sich als Funktion von x und y aus (61), (63), (64); (52):

$$v_l^{(\mu)}(xy) = e^{-\beta(y^2 - x^2)}\, w_l^{(2\mu+1)}\,[2\beta(y^2 - x^2)], \tag{67}$$

nach (65) und (66):

$$\sum_{l=0}^{\infty} v_l^{(\mu)} \cdot \mathfrak{x}^l = (1 - \mathfrak{x})^{-2\mu-1}\, e^{-\frac{1+\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}}\beta(y^2 - x^2)} \tag{68}$$

und

$$(2\mu + 1)\, v_{l-1}^{(\mu+\frac{1}{2})} = l\, v_l^{(\mu)} + 2\beta(y^2 - x^2) \cdot v_{l-1}^{(\mu+1)}. \tag{69}$$

Die Eigenfunktionen von (53) lauten:

$$\psi_{l,n}^{(\mu)} = u_n(x)\, v_l^{(\mu)}(xy) \tag{70}$$

wo $u_n(x)$ die bekannten Oszillatoreigenfunktionen sind.

Nach (67) sind sie gerade oder ungerade in x, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Damit unsere Rechnung sinnvoll ist, müssen die Funktionen $\psi(x, y)$ über dem Gitter der ganzen Zahlen langsam variieren. Nach (67) und (56) bedeutet dies, dass

$$\beta^{1/2} \ll 1\,. \tag{71}$$

(58) ist aufzufassen als Beginn einer Entwicklung von $\alpha_{l,n}^{(\mu)}$ nach Potenzen von β. Dies ist natürlich nur dann widerspruchsfrei möglich, wenn $\psi_{l,n}^{(\mu)}(xy)$ die Differenzengleichung

$$\sum p_{ik}(xy)\, \psi(x+k,\, y+i) = [f(xy) - V^{-1} W]\, \psi(xy) \tag{72}$$

genügend genau erfüllt. Falls dies nachgeprüft ist, ist die Entwicklung (49) gerechtfertigt.

Zur Verifikation beschränken wir uns zunächst auf „kleine" (xy)-Werte, d. h. auf solche, für welche

$$\beta^2 x^2,\ \beta^2 y^2 \ll 1\,. \tag{73}$$

In $[f(xy) - V^{-1} W] = [\beta^2(2y^2 - x^2) + 2 - \alpha]$ können wir, da $\alpha \sim \beta$ ist, den Term $\beta^2(2y^2 - x^2)$ als klein gegen α weglassen, desgleichen andere Terme von gleicher oder kleinerer Grössenordnung. Wir bezeichnen

$$\sum p_{ik}(xy) \cdot \psi_{l,n}^{(\mu)}(x+k,\, y+i) \equiv R_{l,n}^{(\mu)}\,. \tag{74}$$

Aus (68) folgt:

$$\sum_{l=0}^{\infty} v_l^{(\mu)}(x,\, y+i)\, \mathfrak{x}^l = (1-\mathfrak{x})^{-2\mu-1}\, e^{-\frac{1+\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}}\beta^2(y^2-x^2)}\, e^{-\frac{1-\mathfrak{x}}{1+\mathfrak{x}}\beta(2iy+i^2)}\,.$$

Hierin entwickeln wir die zweite Exponentenfunktion und vernachlässigen Terme $\sim \beta^2$ und höhere; nach (68) folgt dann leicht:

$$v_l^{(\mu)}(x,\, y+i) \cong \left[1 - 2\beta i\left(y + \frac{i}{2}\right)\right] v_l^{(\mu)} - 4\beta i\left(y + \frac{i}{2}\right) v_{l-1}^{(\mu+\frac{1}{2})} \tag{75}$$

oder nach (70)

$$\psi_{l,n}^{(\mu)}(x,\, y+i) \cong \left[1 - 2\beta i\left(y + \frac{i}{2}\right)\right] \psi_{l,n}^{(\mu)} - 4\beta i\left(y + \frac{i}{2}\right) \psi_{l-1,n}^{(\mu+\frac{1}{2})}\,; \tag{76}$$

damit wird aus (74)

$$R_{l,n}^{(\mu)} \cong \sum_k \left(\sum_i p_{ik}\right) \psi_{l,n}^{(\mu)}(x+k, y) -$$
$$- 2\beta \sum_k \left(\sum_i i\left(y+\frac{i}{2}\right) p_{ik}\right) \psi_{l,n}^{(\mu)}(x+k, y) -$$
$$-4\beta \sum_k \left(\sum_i i\left(y+\frac{i}{2}\right) p_{ik}\right) \psi_{l-1,n}^{(\mu+\frac{1}{2})}(x+k, y). \tag{77}$$

Aus (44) und (45):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i p_{ik} = 1 \\ &\sum_i i\left(y+\frac{i}{2}\right) p_{ik} = kx+\mu+1 \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

so dass aus (77) wird:

$$R_{l,n}^{(\mu)} \cong [1-2\beta(\mu+1)] \sum_k \psi_{l,n}^{(\mu)}(x+k, y) - 2\beta x \sum_k k\,\psi_{l,n}^{(\mu)}(x+k, y) -$$
$$-4\beta(\mu+1) \sum_k \psi_{l-1,n}^{(\mu+\frac{1}{2})}(x+k, y) - 4\beta x \sum_k \psi_{l-1,n}^{(\mu+\frac{1}{2})}(x+k, y). \tag{79}$$

Es sind also nur noch die Grössen

$$\sum_{k=-1,+1} \psi_{l,n}^{(\mu)}(x+k, y) \quad \text{und} \quad \beta x \sum_{k=-1,+1} k\,\psi_{l,n}^{(\mu)}(x+k, y)$$

zu bestimmen.

Zunächst folgt, immer auf dieselbe Weise, aus (68):

$$\sum_k \psi_{l,n}^{(\mu)}(x+k, y) \cong v_l^{(\mu)} \sum_k u_n(x+k) + \beta\,[v_l^{(\mu)} + 2\,v_{l-1}^{(\mu+\frac{1}{2})}] \sum_k u_n(x+k) +$$
$$+ 2\,[v_l^{(\mu)} + 2\,v_{l-1}^{(\mu+\frac{1}{2})}]\,\beta x \sum_k k u_n(x+k) \tag{80}$$

und

$$\beta x \sum_k k\,\psi_{l,n}^{(\mu)}(x+k, y) \cong v_l^{(\mu)}\,\beta x \sum_k k\,u_n(x+k); \tag{81}$$

überall wo keine Variablen geschrieben sind, ist xy zu setzen.

Aus den bekannten Formeln für die Oszillatoreigenfunktionen leitet man (in unserer Näherung) leicht ab:

$$\sum_k u_n(x+k) \cong [2-(2n+1)\beta]\,u_n \tag{82}$$

$$\beta x \sum_k k u_n(x+k) \cong 2n\beta u_n + \beta u_{n-2}.^{1)} \tag{83}$$

---

[1]) Die Hermiteschen Polynome in $u_n(x)$ sind wie üblich normiert.

Setzt man (82) und (83) in (80) und (81) ein und verwendet die Resultate in (79), so folgt für

$$R_{l,n}^{(\mu)} \cong [2-(2n+4\mu+3)\beta]\,\psi_{l,n}^{(\mu)} - 4\beta(2\mu+1)\,\psi_{l-1,n}^{(\mu+\frac{1}{2})}\,. \tag{84}$$

Zur Umformung des letzten Summanden benützt man (69), worin rechts der zweite Term zu vernachlässigen ist:

$$R_{l,n}^{(\mu)} \cong [2-(2n+4l+4\mu+3)\beta]\,\psi_{l,n}^{(\mu)} = [2-\alpha_{l,n}^{(\mu)}]\,\psi_{l,n}^{(\mu)} \tag{85}$$

womit die Verifikation für „kleine" (xy) durchgeführt ist[1]).

Für alle „nicht kleinen" (xy)-Werte können wir die Entwicklung (49) durchführen. Will man auch hier (wenigstens solange $\beta y \ll 1$ ist) explizit die Konsistenz der Lösung nachweisen, so hat man nur zu zeigen, dass dann gilt:

$$\psi(x+k,\, y+i) \cong \left\{1 + i\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(i\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right\}\psi(xy)\,;$$

denn damit geht die Differenzengleichung (72) in die Differentialgleichung (50) über. Wir verzichten auf die ausführliche Durchrechnung.

Natürlich kann man die Approximation der Eigenwerte durch eine Störungsrechnung verbessern. Will man nur die Grössenordnung der Störung bestimmen, so bietet sich folgende Möglichkeit: man bestimmt einerseits die Störterme aus der Entwicklung (49) dadurch, dass man diese Entwicklung um 2 Potenzen in y^{-1} weitertreibt, ferner die Störterme aus der Vernachlässigung der Ableitungen höherer Ordnung in der Oszillatornäherung dadurch, dass man als Störungen auch die dritten und vierten Ableitungen von ψ nach x und y berücksichtigt, wobei man aber an der Entwicklung (49) festhält.

So findet man für die Störung der tiefsten Eigenwerte $W_{0,0}^{(\mu)}$ leicht, dass sie $\sim\varepsilon$ ist (grössere Terme, wie $\varepsilon^{3/4}\,V^{1/4}$, heben sich weg), dass also gilt:

$$W_{0,0}^{(\mu)} = -2V + (4\,|\mu| + 3)\sqrt{\varepsilon V} + 0(\varepsilon)\,. \tag{86}$$

---

[1]) Die durchgeführte Verifikation kann auch unter der schwächeren Voraussetzung: $\beta(y^2 - x^2) \ll 1$ und $\beta y \ll 1$ erfolgen.

§ 6. Diskussion der Resultate.

Die ^1S-Zustände sind durch folgende Quantenzahlen ausgezeichnet: $J=0$.

Bahndrehimpuls $L=0$.

Den verschiedenen Ladungszuständen μ entsprechen:

$\mu=0$ Deuteron

$\mu=\frac{1}{2}$ Proton-Proton $\mu=-\frac{1}{2}$ Neutron-Neutron

Die den empirischen ^1S-Zuständen zuzuordnenden Potentiale $W_{l,n}^{(\mu)}$ sind die tiefsten, die mit dem Pauliprinzip verträglich sind.

^1S-Zustände sind in den räumlichen Koordinaten symmetrisch, in den Spinkoordinaten[1]) antisymmetrisch, also nach dem Pauliprinzip in n_1, n_2 symmetrisch, d.h. in $x=\nu=\frac{1}{2}(n_1-n_2)$ (13) gerade. Nach (43) und § 5 gehören dazu $W_{l,n}^{(\mu)}$ mit geradem n.

Demnach lauten die Potentiale der tiefsten ^1S-Zustände:

$$W_{0,0}^{(\mu)}(r)=-2\,V(r)+(4\,|\,\mu\,|+3)\,\sqrt{\varepsilon\,V(r)}+0\,(\varepsilon)$$

im Bereich, wo $V(r)\gg\varepsilon$.

Die Abhängigkeit von μ: $W_{0,0}^{(1/2)}-W_{0,0}^{(0)}\cong 2\sqrt{\varepsilon V}$ ist viel zu stark, um mit der Erfahrung vereinbar zu sein.

Die „charged-theory" ist also auch unter der Annahme starker Kopplung zur Darstellung der Kernkräfte ungeeignet.

Eigentümlicherweise tritt im Fall $V<0$, den wir in § 1 ausgeschlossen haben, in unserer Näherung Ladungsunabhängigkeit ein. $u(j,\nu)$ sei eine Eigenlösung zu $V>0$. Wir gelangen zu einer Eigenlösung zu $V'=-V$ und zum selben Eigenwert, indem wir setzen $u'(j,\nu)=(-1)^\nu\,u(j,\nu)$.

Die Eigenwerte zu $V'=-V<0$ stimmen also überein mit den Eigenwerten zu V und lauten allgemein für $V\lesseqgtr 0$, $|V|\gg\varepsilon$:

$$W_{l,n}^{(\mu)}(r)=-2\,|\,V(r)\,|+(2n+4l+4\,|\,\mu\,|+3)\,\sqrt{\varepsilon|\,V(r)\,|}+\cdots\cdot \tag{87}$$

Es sei nun $V(r)<0$. Da der Faktor $(-1)^\nu$ die Parität der Eigenfunktionen bei halbganzem ν oder ganzem μ (vgl. (14)) umkehrt, für ganzes ν oder halbganzes μ aber nicht verändert, sind den empirischen ^1S-Zuständen die folgenden Potentiale zuzuordnen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Proton-Proton}\\ \text{Neutron-Neutron}\end{array}\right\}\; W_{0,0}^{(1/2)}=-2\,|\,V(r)\,|+5\,\sqrt{\varepsilon\,|\,V(r)\,|}+\cdots\cdot$$

$$\text{Deuteron}\qquad W_{0,1}^{(0)}=-2\,|\,V(r)\,|+5\,\sqrt{\varepsilon\,|\,V(r)\,|}+\cdots\cdot$$

---

[1]) m_1, m_2 bei F.

In unserer Näherung besteht also Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte. Natürlich ändert dies nichts an der in § 1 besprochenen Sachlage bei den schweren Kernen, die zum Ausschluss des Falles $V(r) < 0$ zwingt.

ANHANG.

Exakte Lösung des Eigenwertproblems (33)[1].

Die Lösung $v(x)$ von (33′) gestattet die folgende Integraldarstellung:

$$v(x) = \frac{1}{2\pi i}\int z^{x-K}(\lambda_1 - z)^A (\lambda_2 - z)^B \, dz\,. \tag{88}$$

Der Integrationsweg in der komplexen z-Ebene bleibt noch frei. Es bedeuten: λ_1, λ_2 die Wurzeln der Gleichung $\lambda^2 - \lambda\beta + 1 = 0$ also

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - 1}\,, \qquad \lambda_1 > 1 > \lambda_2\,,$$

weiter

$$A = K + \frac{W + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\,, \qquad B = K - \frac{W + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

und es ist

$$A + B = 2K - 1 \quad \text{eine ganze Zahl.} \tag{89}$$

Die Singularitäten des Integranden liegen in $z = 0$, $z = \lambda$, und $z = \lambda_2$. Sie sind im allgemeinen Verzweigungspunkte.

Zunächst seien A und B beide nicht 0, 1, 2 ... Wir erhalten ein Fundamentalsystem der Differenzengleichung, wenn wir als Integrationswege die Wege l_1 und l_2 wählen (vergl. die Figur):

$$v_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{l_1} \cdots\cdots \qquad v_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{l_2} \cdots\cdots \tag{90}$$

Die Integrale konvergieren in $R[x] > K - 1$. Die durch sie definierten analytischen Funktionen sind in $x = K - 1$ singulär und haben dort Pole. Als asymptotisches Verhalten findet man leicht: $v_1(x)$ nimmt für $x \gg 1$ exponentiell zu, $v_2(x)$ exponentiell ab.

Die allgemeine Lösung von (33′) lautet:

$$v(x) = \pi_1(x)\, v_1(x) + \pi_2(x)\, v_2(x) \tag{91}$$

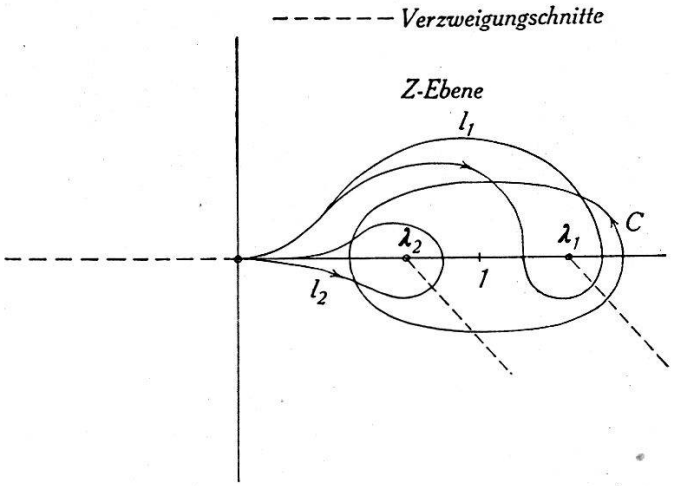
wo $\pi_1(x)$ und $\pi_2(x)$ beliebige (nicht notwendig analytische) periodische Funktionen der Periode 1 sind. Da für uns nur die Funk-

[1]) Nörlund, 11. Kap., § 6.

tionswerte in den Punkten K, $K+1, \ldots$ von Bedeutung sind, können wir π_1 und π_2 als Konstante annehmen, ohne dass wir dadurch Lösungen des Eigenwertproblems verlieren. Nun verlangt (34) die Regularität der Eigenlösungen im Punkte $x=K-1$. π_1 und π_2 in (91) sind demnach so zu bestimmen, dass $v(x)$ im Normierungsintervall nicht identisch verschwindet und in $x=K-1$ regulär ist. Dies ist im wesentlichen genau dann der Fall, wenn wir setzen:

$$v(x)=v_1(x)+v_2(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{C}\cdots\cdots \tag{92}$$

Wegen des angegebenen asymptotischen Verhaltens von $v_1(x)$ ist $v(x)$ nicht normierbar.



Es muss also mindestens eine der Zahlen A oder B eine natürliche Zahl sein, dann sind sie aber nach (89) beide ganz. Es sei jetzt $B=-1, -2\ldots$ Dann verschwindet v_1 identisch, da $A\geqq 0$ wird. (92) stellt eine Eigenfunktion dar. Die zugehörigen Eigenwerte lauten:

$$W_n=-\frac{\beta}{2}+(2n+2K+1)\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-1}\,, \qquad n=0, 1, 2\cdots \tag{93}$$

und stimmen mit (37) in der dort angegebenen Näherung überein.

Sind sowohl A als auch B natürliche Zahlen: $A=\mu$, $B=\nu$, so verschwinden $v_1(x)$ und $v_2(x)$ identisch. Als Ersatz findet man das folgende Fundamentalsystem:

$$v_1(x)=\int_0^{\lambda_2} z^{x-K}(\lambda_1-z)^{\mu}(\lambda_2-z)^{\nu}\,dz$$

$$v_2(x)=\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} z^{x-K}(\lambda_1-z)^{\mu}(\lambda_2-z)^{\nu}\,dz$$

$v_1(x)$ ist in $x = K - 1$ singulär, $v_2(x)$ ist für $x \gg 1$ exponentiell zunehmend. Demnach gibt es in diesem Fall keine Eigenlösungen. Ganz entsprechend schliesst man den noch verbleibenden Fall: $A = -1, -2 \ldots$ aus. (93) stellt daher alle Eigenwerte dar. Nach (92) sind die Eigenfunktionen ganze Funktionen (im Sinn der Analysis).

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Gregor Wentzel bin ich zu grossem Dank verpflichtet. Er hat diese Arbeit angeregt. Ihm verdanke ich es, dass ich sie zu Ende führen konnte.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.