

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 18 (1945)
Heft: VI

Artikel: Structure du nucléon d'après les théories mésoniques à couplage serré
Autor: Houriet, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111618>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Structure du nucléon d'après les théories mésoniques à couplage serré

par A. Houriet.

(23 VII. 1945.)

§ 1. Introduction.

L'équation de Dirac attribue au proton un moment magnétique $M_K = \frac{e\hbar}{2\mu_p c}$ tandis que celui du neutron est nul. L'expérience contredit ces prévisions et donne

$$\begin{aligned} M_P^{(\text{exp})} &= 2,7896 \pm 0,0008 M_K^1) \\ M_N^{(\text{exp})} &= -1,935 \pm 0,02 M_K^2). \end{aligned} \quad (1,1)$$

Il est possible de lever cette contradiction en complétant l'équation de Dirac par le terme

$$M_1 \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \quad (1,2)$$

dans lesquelles $F_{\mu\nu}$ désignent les composantes du champ électromagnétique et M_1 un moment supplémentaire³⁾. Cette solution présente l'inconvénient d'être purement descriptive et de n'établir aucune relation entre M_P et M_N .

La théorie de la désintégration β a suggéré une première explication des mesures (1,1): si l'on suppose le nucléon primitif couplé à un champ d'électrons et de neutrinos, tout champ magnétique agit non seulement sur le nucléon, mais aussi sur le champ d'électrons, ce qui induit des moments magnétiques supplémentaires pour le proton et le neutron⁴⁾. La théorie de Yukawa à couplage faible conduit à des résultats analogues quand elle couple des mésons chargés au spin du nucléon⁵⁾. Dans les deux cas, le calcul fournit un accord plus qualitatif que quantitatif et nécessite l'introduction d'une fonction de structure du nucléon $\delta_a(x)$ de «rayon» fini a pour éviter la divergence des intégrales utilisées. D'autre part, les termes perturbateurs de la théorie de Yukawa, ordonnés suivant les puis-

¹⁾ I. KELLOG, I. RABI et F. RAMSEY, Phys. Rev. **56**, 1940, p. 728.

²⁾ L. W. ALVAREZ et F. BLOCH, Phys. Rev. **57**, 1940, p. 111.

³⁾ Voir p. ex. Hd. der Physik, article de PAULI, p. 233.

⁴⁾ G. C. WICK, Atti Lincei **21**, 1935, p. 70. — PRIMAKOFF, Phys. Rev. **51**, 1937, p. 990.

⁵⁾ FRÖHLICH, HEITLER et KEMMER, Proc. of Roy. Soc. 1938, p. 154.

sances croissantes du paramètre de couplage g convergent mal. Ce sont les raisons pour lesquelles G. WENTZEL¹⁾ développa la théorie de Yukawa sous une forme différente: le nucléon primitif est déjà décrit par $\delta_a(x)$ dans l'hamiltonien et l'on ordonne les termes perturbateurs suivant les puissances décroissantes de g . Cette méthode, dite du couplage serré, fut appliquée sous des formes diverses à l'étude des phénomènes nucléaires et ses conséquences étudiées dans de nombreux travaux²⁾.

Le trait caractéristique des théories à couplage serré est le suivant: la séparation du système total en champ de mésons et nucléon primitif est purement formelle. Chacun de ces deux éléments perd son individualité. Les opérations mathématiques ont pour objet de recréer un nucléon « physique » et des « mésons libres » dont l'interaction soit faible. Le nucléon primitif n'est pas observable. Le nucléon physique, qui apparaît dans les expériences, est un état stationnaire du système total, un agrégat, composé du nucléon primitif et des mésons qui lui sont liés. La méthode du couplage serré fournit à la fois une description des actions nucléaires et une théorie de la structure du nucléon.

Dans ce travail nous analyserons, à l'exemple de la théorie pseudoscalaire symétrique, le problème des actions électromagnétiques et leurs conséquences sur la structure du nucléon. En particulier, nous reprendrons le calcul des moments magnétiques du proton et du neutron, déjà abordé par W. PAULI et S. M. DANCOFF³⁾, le travail de ces auteurs demandant à être complété. Le § 2 contient l'exposé mathématique de la théorie. En de nombreux points, il s'identifie avec celui de G. WENTZEL⁴⁾ auquel nous renverrons souvent. Dans le § 3, nous étudions les perturbations électromagnétiques tandis que le § 4 est réservé à l'analyse des perturbations dues aux termes non-diagonaux par rapport aux états du nucléon physique. Le § 5 contient la discussion des résultats et les conclusions.

Nous avons posé $\hbar = c = 1$. μ désigne la masse du méson, μ_P celle du proton, e la charge élémentaire.

¹⁾ G. WENTZEL, H.P.A. **13**, 1940, p. 269, **14**, 1941, p. 663 et **16**, 1943, p. 222 et 551.

²⁾ J. R. OPPENHEIMER et J. SCHWINGER, Phys. Rev. **60**, 1940, p. 150. — W. PAULI et S. M. DANCOFF, Phys. Rev. **62**, 1942, p. 85. — R. SERBER et S. M. DANCOFF, Phys. Rev. **63**, 1943, p. 143. — W. PAULI et S. KUSAKA, Phys. Rev. **63**, 1943, p. 401. — F. COESTER, H.P.A. **17**, 1944, p. 35. — M. FIERZ, H.P.A. **17**, 1944, p. 182. — M. FIERZ et G. WENTZEL, H.P.A. **17**, 1944, p. 215.

³⁾ Cf. loc. cit. p. 2, travail que nous désignons par II.

⁴⁾ G. WENTZEL, H.P.A. **16**, 1943, p. 551, travail désigné par I.

§ 2. Exposé de la théorie.

Trois paires de fonctions conjuguées $\psi_\varrho(x)$, $\pi_\varrho(x)$, $\varrho=1, 2, 3$ décrivent le champ pseudoscalaire symétrique dont l'hamiltonien s'écrit

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_\varrho \int dx \{ \pi_\varrho^2 + \psi_\varrho (\mu^2 - \Delta) \psi_\varrho \}. \quad (2,1)$$

Fixons le nucléon primitif à l'origine du système de référence. Une fonction de structure, de symétrie sphérique et normée, en définit le « rayon » a :

$$\int dx \delta_a(x) = 1 \quad (2,2)$$

$$\frac{1}{a} = \int dx dx' \frac{\delta_a(x) \delta_a(x')}{|x - x'|}. \quad (2,3)$$

Le nucléon primitif possède quatre états internes: deux états de spin et deux états de charge. Les matrices de PAULI σ_i , $i=1, 2, 3$, opèrent sur les premiers, les matrices de spin isotopique τ_ϱ , $\varrho=1, 2, 3$ sur les seconds. H_2 décrit l'interaction du champ avec le nucléon:

$$H_2 = -g \sum_{i, \varrho} \sigma_i \tau_\varrho \int dx \delta_a(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_\varrho^1). \quad (2,4)$$

Nous postulons pour l'hamiltonien total

$$H^0 = H_1 + H_2. \quad (2,5)$$

Les rotations spatiales laissent H^0 invariant: elles déterminent les intégrales premières habituelles: les composantes M_{ik} et le carré J^2 du moment cinétique

$$M_{ik} = - \sum_\varrho \int dx \pi_\varrho \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \psi_\varrho + \frac{\sigma_{ik}}{2} \quad (2,6)$$

$$J^2 = \sum_{\langle ik \rangle} M_{ik}^2 \quad (2,7)$$

L'invariance de H^0 par rapport aux rotations de l'espace de spin isotopique définit les intégrales premières:

$$N_{\varrho\sigma} = \int dx (\pi_\sigma \psi_\varrho - \pi_\varrho \psi_\sigma) + \frac{\tau_{\varrho\sigma}}{2} \quad (2,8)$$

$$T^2 = \sum_{\langle \varrho\sigma \rangle} N_{\varrho\sigma}^2. \quad (2,9)$$

¹⁾ Toute sommation sur les indices $i, j, k, l, n, \varrho, \sigma$ s'étend de 1 à 3, tandis qu'une sommation sur les indices s, t et r s'étend de 1 à ∞ , ou de 4 à ∞ (dans ce dernier cas la sommation est désignée par $\sum'_{s>3}$).

²⁾ La sommation $\langle ik \rangle$ désigne une sommation simple sur l'indice l cycliquement associé à ik .

La charge totale du système est représentée par l'opérateur

$$L = e \left(N_{12} + \frac{1}{2} \right) = e \left(N_3 + \frac{1}{2} \right). \quad (2,10)$$

La séparation de H^0 en H_1 et H_2 est purement formelle lorsque le couplage est serré. Les opérations mathématiques suivantes ont pour but de décomposer H^0 en deux parties, dont l'une puisse être interprétée comme hamiltonien du nucléon physique, tandis que l'autre décrit les mésons libres.

Développons ψ_ϱ et π_ϱ suivant le système orthonormé complet $U_s(x)$ à l'aide des nouvelles variables canoniques $q_{r\varrho}$ et $p_{r\varrho}$

$$\begin{aligned} \psi_\varrho(x) &= \sum_r^\infty q_{r\varrho} U_r(x) & \pi_\varrho(x) &= \sum_r^\infty p_{r\varrho} U_r(x) \\ i[p_{r\varrho}, q_{s\sigma}] &= \delta_{rs} \delta_{\varrho\sigma}. \end{aligned} \quad (2,11)$$

H^0 s'écrit

$$H^0 = \frac{1}{2} \sum_{r,\varrho} p_{r\varrho}^2 + \frac{1}{2} \sum_{r,s,\varrho} B_{rs} q_{r\varrho} q_{s\varrho} \quad (2,12)$$

$$B_{rs} = \int dx U_r(x) (\mu^2 - \Delta) U_s(x). \quad (2,13)$$

Si l'on choisit

$$U_i(x) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_a(x) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2,14)$$

où η norme $\delta_a(x)$, ($\eta \sim a^{-5/2}$), H_2 (2,4) se réduit à

$$H_2 = \gamma \sum_{i,\varrho} \sigma_i \tau_\varrho q_{i\varrho} \quad (g = g\eta). \quad (2,15)$$

H_2 est un opérateur quadratique à quatre lignes, relativement aux états du nucléon primitif. Pour le mettre sous forme diagonale, nous remplaçons les neuf variables $q_{i\varrho}$ par $r_1, r_2, r_3, \vartheta, \varphi, \psi, \vartheta', \varphi', \psi'$ (cf. I. § 4) telles que

$$q_{i\varrho} = \sum_n r_n s'_{in}(\vartheta', \varphi', \psi') s_{\varrho n}(\vartheta, \varphi, \psi) \quad (2,16)$$

$s'_{in}(\vartheta', \varphi', \psi')$ et $s_{\varrho n}(\vartheta, \varphi, \psi)$ désignent deux transformations orthogonales, construites avec les angles d'Euler $\vartheta', \varphi', \psi'$; ϑ, φ, ψ , tandis que les r_n^2 , $n = 1, 2, 3$, sont les valeurs propres du tenseur $T_{\varrho\sigma} = \sum_i q_{i\varrho} q_{i\sigma}$, ($r_n > 0$). Définissons la matrice unitaire S

$$S = Y Y' Z = X Z \quad (2,17)$$

telle que

$$Y^* \sum_\varrho \tau_\varrho s_{\varrho n} Y = \tau_n \quad Y'^* \sum_i \sigma_i s'_{in} Y' = \sigma_n. \quad (2,18)$$

Avec

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 + i\tau_2) \quad (2,19)$$

il vient

$$S^* H_2 S = -\gamma (r_1 \tau_3 + r_2 \sigma_3 + r_3 \sigma_3 \tau_3). \quad (2,20)$$

La transformation correspondante du fonctionnel $F(q)$

$$F = S F' \quad (2,21)$$

ramène l'équation initiale de Schrödinger à

$$(-E + S^* K S + A) F' = 0 \quad (2,22)$$

où

$$K = H^0 - \gamma \sum_n r_n \quad (2,23)$$

$$A = \gamma \{ (1 - \tau_3) r_1 + (1 - \sigma_3) r_2 + (1 - \sigma_3 \tau_3) r_3 \}. \quad (2,24)$$

Si l'on choisit pour σ_3 et τ_3 la représentation $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, A est une matrice diagonale dont les valeurs propres sont:

$$0, \quad 2\gamma(r_1 + r_2), \quad 2\gamma(r_2 + r_3), \quad 2\gamma(r_3 + r_1). \quad (2,22a)$$

A chacune d'elles correspond un système de termes. L'énergie minimale appartient à $A = 0$. Nous négligeons les trois systèmes $A \neq 0$ dont les niveaux sont beaucoup plus élevés. Le fonctionnel F' est donc nul pour $A \neq 0$. (cf. I. § 2). Pour $A = 0$, K , fonction des variables du champ, possède un minimum. Soient \dot{q}_{re} , \dot{r}_n ses coordonnées, que l'on trouve égales à

$$\dot{r} = \gamma C = F \quad \dot{q}_{re} = \gamma \sum_{i,n} C_{ri} s'_{in} s_{en} \quad (2,25)$$

$$C_{rs} = C_{sr} = \int dx U_r(x) \frac{1}{\mu^2 - A} U_s(x)^1 \quad C_{ij} = \delta_{ij} C. \quad (2,26)$$

Ecrivons

$$r_n = \dot{r}_n + r'_n \quad q_{re} = \dot{q}_{re} + q'_{re}. \quad (2,27)$$

L'hypothèse de couplage serré revient à étudier les positions voisines du minimum telles que

$$|r'_n| \ll \dot{r} = F \quad (2,28)$$

ou encore (cf. I. § 5)

$$g \gg a \quad \text{si} \quad a\mu \ll 1. \quad (2,28a)$$

¹⁾ C_{rs} est la matrice inverse de B_{rs} : $\sum_s C_{rs} B_{st} = \delta_{rt}$.

Introduisons les variables q'_{re} dans K

$$K = \frac{1}{2} \sum_{r,e} p_{re}^2 + \frac{1}{2} \sum_{r,s,e} B_{rs} q'_{re} q'_{se} - E^0. \quad (2,29)$$

La constante $-E^0$ est interprétée comme énergie propre du nucléon et vaut

$$-E^0 = -\frac{3}{2} \gamma \Gamma = -\frac{3}{2} \gamma^2 C = -\frac{3}{2} g^2 \int dx \delta_a^2(x) \sim -\frac{g^2}{a^3} \text{ si } a\mu \ll 1. \quad (2,30)$$

Les \dot{q}_{re} ne dépendent que du produit $\sum_n s'_{in} s_{en}$, comme il ressort des formules (2,25). Il convient d'introduire les trois angles d'Euler Θ, Φ, Ψ de la rotation

$$S_{ie}(\Theta, \Phi, \Psi) = \sum_n s'_{in} s_{en}. \quad (2,31)$$

Au lieu des neuf variables q_{ie} ou encore de $r_1, r_2, r_3, \vartheta, \varphi, \psi, \vartheta', \varphi', \psi'$, nous utiliserons Θ, Φ, Ψ et les six composantes du tenseur symétrique $\xi_{\sigma e}$

$$\xi_{e\sigma} = \xi_{\sigma e} = \sum_i S_{i\sigma} q'_{ie} = \sum_n r'_n s_{en} s_{\sigma n} \quad (2,32)$$

ce qui donne pour les q_{ie}

$$\begin{aligned} q_{ie} &= \gamma C S_{ie} + \sum_{\sigma} \xi_{e\sigma} S_{i\sigma} = \dot{q}_{ie} + q'_{ie} \quad i = 1, 2, 3 \\ q_{ie} &= \gamma \sum_i C_{ri} S_{ie} + q'_{re} = \dot{q}_{re} + q'_{re} \quad r > 3. \end{aligned} \quad (2,33)$$

Puisque $C_{ij} = \delta_{ij} C$, on peut écrire

$$\dot{q}_{re} = \gamma \sum_i C_{ri} S_{ie} \quad \text{pour tout } r. \quad (2,34)$$

A (2,27) correspond la décomposition de $\psi_e(x)$

$$\psi_e(x) = \dot{\psi}_e(x) + \psi'_e(x) = \sum_r \dot{q}_{re} U_r(x) + \sum_r q'_{re} U_r(x). \quad (2,35)$$

D'après (2.34) on trouve

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_e(x) &= \sum_r \dot{q}_{re} U_r(x) = \gamma \sum_i S_{ie} \sum_r C_{ri} U_r(x) \\ \dot{\psi}_e(x) &= \gamma \sum_i S_{ie} \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_i(x). \end{aligned} \quad (2,36)$$

$\dot{\psi}_e(x)$ est la fonction d'onde des mésons liés au nucléon; $\psi'_e(x)$ celle des mésons libres. $\dot{\psi}_e$ ne contient que les trois variables de champ Θ, Φ, Ψ : elles décrivent complètement le nucléon primitif et les mésons qui lui sont liés. Cet aggrégat constitue le nucléon physique,

Θ, Φ, Ψ sont ses variables internes. Soient P_Θ, P_Φ, P_Ψ leurs moments conjugués, $\pi_{e\sigma} = \pi_{\sigma e}$ ceux des $\xi_{e\sigma}$. Il est avantageux d'utiliser P_Θ, P_Φ, P_Ψ dans les combinaisons linéaires P_1, P_2, P_3 qui possèdent les mêmes propriétés que les composantes d'un moment cinétique.

$$P_1 = \sin \Psi P_\Theta + \frac{\cos \Psi}{\sin \Theta} (P_\Phi + \cos \Phi P_\Psi) \quad (2,37)$$

$$P_2 = -\cos \Psi P_\Theta + \frac{\sin \Psi}{\sin \Theta} (P_\Phi + \cos \Theta P_\Psi)$$

$$P_3 = P_\Psi$$

$$[P_j, P_k] = i P_l$$

$$i[P_3, S_{i2}] = -i[P_2, S_{i3}] = S_{i1} \text{ (cycliquement).}$$

Nous choisissons les nouvelles variables canoniques $\Theta, \Phi, \Psi, \xi_{e\sigma}, q'_{r\sigma} (r > 3)$ reliées aux $q_{r\sigma}$ par (2,33). Soit $p'_{r\sigma} (r > 3)$ tel que

$$i[p'_{r\sigma}, q'_{s\sigma}] = \delta_{rs} \delta_{e\sigma} \quad (2,38)$$

Complétons la transformation canonique (2,33) par les formules de transformation des $p_{r\sigma}$ (cf. I. § 6)

$$p_{i\sigma} = p_{i\sigma} + \sum'_{s>3} \sum_{\sigma} \lambda_{i\sigma s\sigma} p'_{s\sigma} \text{ et } p_{r\sigma} = p'_{r\sigma}, (r > 3). \quad (2,39)$$

Il n'est pas possible d'écrire sous forme explicite les $p'_{i\sigma}$ et $\lambda_{i\sigma s\sigma}$, fonctions des variables $\Theta, \Phi, \Psi, \xi_{e\sigma}$ et de leurs moments conjugués. Cependant, l'hypothèse de couplage serré (2,28) entraîne $|\xi_{e\sigma}| \ll F$. Si l'on développe $p'_{i\sigma}$ et $\lambda_{i\sigma s\sigma}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{|\xi_{e\sigma}|}{F}$ et que l'on néglige tous les termes en $\frac{|\xi_{e\sigma}|}{F}$ il vient (cf. I. § 6)

$$p'_{i\sigma} = \bar{p}_{i\sigma} + \bar{\bar{p}}_{i\sigma} \quad (2,40)$$

$$\bar{p}_{i1} = \frac{1}{2F} (S_{i3} P_2 - S_{i2} P_3 + i S_{i1}) \text{ (cycliquement)}$$

$$\bar{\bar{p}}_{i1} = S_{i1} \pi_{11} + \frac{1}{2} S_{i2} \pi_{12} + \frac{1}{2} S_{i3} \pi_{13} \text{ (cycliquement)}$$

$$\lambda_{i\sigma s\sigma} = -\frac{1}{2C} \sum_j C_{sj} (\delta_{ij} \delta_{e\sigma} - S_{i\sigma} S_{j\sigma}). \quad (2,41)$$

Introduisons les nouvelles variables dans K (2,29)

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2} \sum_{r,\sigma} p'^2_{r\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{r,s,\sigma} B_{rs} q'_{r\sigma} q'_{s\sigma} - E^0 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,\sigma} (-p'^2_{i\sigma} + [p'_{i\sigma} + \sum'_{s>3} \sum_{\sigma} \lambda_{i\sigma s\sigma} p'_{s\sigma}]^2). \end{aligned} \quad (2,42)$$

*

K contient des termes mixtes en $P_i \cdot p'_{s\sigma}$ par l'intermédiaire de

$$\left[p'_{i\varrho} + \sum'_{s>3} \sum_{\sigma} \lambda_{i\varrho s\sigma} p'_{s\sigma} \right]^2.$$

Pour en obtenir la séparation, détachons des $p'_{s\sigma} (s > 3)$ la partie $\dot{p}_{s\sigma}$ qui dépend des $p'_{i\varrho}$

$$p'_{s\sigma} = \dot{p}_{s\sigma} + p''_{s\sigma} \quad s > 3. \quad (2,43)$$

Nous définissons

$$\dot{p}_{i\varrho} = p'_{i\varrho} + \sum'_{s>3} \sum_{\sigma} \lambda_{i\varrho s\sigma} \dot{p}_{s\sigma}. \quad (2,44)$$

Un calcul analogue à I. § 7 donne

$$\dot{p}_{s\sigma} = - \sum_{i,\varrho} \dot{p}_{i\varrho} \lambda_{i\varrho s\sigma} \quad s > 3 \quad (2,45)$$

$$\dot{p}_{i\varrho} = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{C^2}{D} \right) p'_{i\varrho} + \left(1 - \frac{C^2}{D} \right) \sum_{j,\sigma} S_{j\varrho} S_{i\sigma} p'_{j\sigma} \right\} \quad (2,46)$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_i \sum_r C_{ir}^2 = \frac{1}{3} \sum_i \int dx \left(\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_i(x) \right)^2 \quad (2,47)$$

Introduisons par analogie avec $\dot{\psi}_\varrho(x)$ (2,35)

$$\dot{\pi}_\varrho(x) = \sum_s \dot{p}_{s\varrho} U_s(x). \quad (2,48)$$

A partir de (2,45, 46) on trouve après quelques transformations

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_\varrho(x) &= \frac{C}{2D} \sum_i \left(p'_{i\varrho} - \sum_{j,\sigma} p'_{j\sigma} S_{j\varrho} S_{i\sigma} \right) \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \left(p'_{i\varrho} + \sum_{j,\sigma} p'_{j\sigma} S_{j\varrho} S_{i\sigma} \right) U_i. \end{aligned} \quad (2,49)$$

$\dot{\psi}_\varrho(x)$ et $\dot{\pi}_\varrho(x)$ décrivent les mésons liés, tandis que $\psi'_\varrho(x)$ comme

$$\pi'_\varrho(x) = \pi_\varrho(x) - \dot{\pi}_\varrho(x) \quad (2,50)$$

représente les mésons libres. Exprimons K (2,42) au moyen des nouvelles variables $p''_{s\sigma}$ (2,43)

$$\begin{aligned} K &= K_0 + \frac{1}{2} \sum_{\varrho} \pi_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{4} \sum_{\varrho < \sigma} \pi_{\varrho\sigma}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum'_{r>3} \sum_{\varrho} p''_{r\varrho}{}^2 + \frac{1}{2} \sum_{r,s,\varrho} B_{rs} q'_{r\varrho} q'_{s\varrho} + \frac{1}{2} \sum_{i,\varrho} \left(\sum'_{s>3} \sum_{\sigma} \lambda_{i\varrho s\sigma} p''_{s\sigma} \right)^2. \end{aligned} \quad (2,51)$$

Lorsque $a\mu \ll 1$, K_0 vaut, cf. I. (7,19, 21)

$$K_0 = \frac{3\pi a}{g^2} \sum_n P_n^2 - E^0 = \varepsilon \sum_n P_n^2 - E^0. \quad (2,52)$$

Il reste à effectuer la transformation S (2,15, 16). Le problème est identique à celui traité dans I § 8. Nous nous bornons à indiquer les résultats. Dans l'approximation $\frac{|\xi_\varrho \sigma|}{F} \rightarrow 0$, S se réduit à

$$S = XZ \quad (2,53)$$

$$X = YY' = \left(\cos \frac{\Phi}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\Phi}{2} \right) \left(\cos \frac{\Theta}{2} - i\sigma_2 \sin \frac{\Theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\Psi}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\Psi}{2} \right). \quad (2,54)$$

X est tel que

$$X^* \sigma_i X = \sum_\varrho S_{i\varrho} \sigma_\varrho \quad (2,55)$$

$$X^* P_n X = P_n + \frac{\sigma_n}{2}. \quad (2,56)$$

Quant à Z (2,19), cette matrice a les propriétés suivantes: elle ramène à la forme diagonale toute matrice du type $\sigma_n \tau_n$, tandis qu'elle rend entièrement non-diagonales (tous les éléments diagonaux nuls) les matrices du type $\sigma_i \tau_\varrho$ ($i \neq \varrho$) et σ_i, τ_ϱ :

$$Z^* \sigma_n \tau_n Z = -1 \text{ pour la valeur propre } A=0, \text{ cf. (2,24)} \quad (2,57)$$

$$Z^* \sigma_i \tau_\varrho Z \text{ ($i \neq \varrho$)}, Z^* \sigma_i Z, Z^* \tau_\varrho Z \text{ non-diagonales.}$$

Calculons

$$X^* K_0 X = \varepsilon \sum_n \left(P_n + \frac{\sigma_n}{2} \right)^2 - E^0$$

$$\bar{K}_0 = Z^* X^* K_0 X Z = \varepsilon \left(\sum_n P_n^2 + Z^* \sum_n \sigma_n P_n Z \right) - E^{0'}. \quad (2,58)$$

Nous décomposons \bar{K}_0 en opérateur diagonal H_0^I et non-diagonal H_0^- d'après (2,57). Nous supprimons la constante $E^{0'} = E^0 - \frac{3\varepsilon}{4}$ qui appartient à l'énergie propre du nucléon

$$H_0^I = \varepsilon \sum_n P_n^2 \quad (2,59)$$

$$H_0^- = \varepsilon Z^* \sum_n \sigma_n P_n Z \quad (2,60)$$

H_0^I est l'hamiltonien du nucléon physique. Il possède les fonctions propres $(q | j, m, n)$ correspondant aux valeurs propres (cf. I. § 9)

$$E_0^I = \varepsilon j(j+1) \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots \quad (2,61)$$

Comme dans H^0 , séparons les variables Θ, Φ, Ψ et leurs moments dans les opérateurs suivants (2,6, 7, 8, 9, 10)

$$M_{12} = M_3 \quad J^2 = \sum_i M_i^2$$

$$N_{12} = N_3 \quad L = e \left(N_3 + \frac{1}{2} \right) \quad T^2 = \sum_e N_e^2.$$

Dans chacun d'eux, nous négligeons la partie qui correspond aux mésons libres $(\psi'_e(x), \pi'_e(x))$, puis nous transformons chacun d'eux par S (2,53), cf. I. § 9. Comme pour l'énergie, nous ne conservons que les éléments diagonaux dont les valeurs propres sont

$$J^2 = T^2 = \sum_n P_n^2 = j(j+1) \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots \quad (2,62)$$

$$M_3 = - \sum_i P_i S_{3i} = P_\phi = m \quad -j \leq m \leq j \quad m \text{ demi-entier} \quad (2,63)$$

$$N_3 = P_\Psi = n \quad -j \leq n \leq j \quad n \text{ demi-entier} \quad (2,64)$$

$$L = e \left(P_\Psi + \frac{1}{2} \right) = e \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

La fonction $(q | j, m, n)$ décrit un nucléon physique de spin j , (de composante $M_3 = m$), et de charge $e(n + \frac{1}{2})$. En particulier $j = n = \frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$ représente le proton, $j = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$ le neutron. Les états $j > \frac{1}{2}$ correspondent à des états excités du nucléon physique, l'énergie supplémentaire provenant de « l'inertie » du spin.

§ 3. Perturbations électromagnétiques.

Dans leur travail, W. PAULI et S. M. DANCOFF (II) ont observé qu'il n'est pas possible d'écrire sans autre l'hamiltonien du système précédent lorsqu'il se trouve dans un champ électromagnétique de potentiels Φ_0 et \mathfrak{A} . L'introduction d'une longueur finie a dans la théorie détruit l'invariance relativiste et ne permet pas de définir un quadrivecteur s_ν , $\nu = 1, 2, 3, 4$ qui satisfasse l'équation de continuité à l'intérieur de la source. Malgré ces difficultés, nous prendrons pour termes d'interaction électromagnétique, ceux que la théorie à couplage faible détermine par invariance de jauge, et

dans lesquels nous remplacerons $\delta(x)$ par $\delta_a(x)$. Nous aurons l'hamiltonien (avec $h_i = \text{rot}_i \mathfrak{A}$)

$$H = H^0 + H' + H'' \quad (3,1)$$

où H^0 est donné par (2,5) tandis que

$$\begin{aligned} H' = & e \int dx \Phi_0 (\pi_2 \psi_1 - \pi_1 \psi_2) - M_0 \frac{(1+\tau_3)}{2} \sum_i \sigma_i h_i \\ & + \sum_i e \int dx \mathfrak{A}_i \left(\psi_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_2 - \psi_2 \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_1 \right) \\ & + eg \sum_i \sigma_i \int dx \mathfrak{A}_i \delta_a(x) (\tau_2 \psi_1 - \tau_1 \psi_2). \end{aligned} \quad (3,2)$$

On néglige H'' quadratique en \mathfrak{A} . A partir de (3,2), on définit

$$\begin{aligned} s_i = & e \left(\psi_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_2 - \psi_2 \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_1 \right) + eg \sigma_i (\tau_2 \psi_1 - \tau_1 \psi_2) \delta_a(x) \\ s_4 = & e (\pi_2 \psi_1 - \pi_1 \psi_2) + e \frac{(1+\tau_3)}{2} \delta_a(x). \end{aligned} \quad (3,3)$$

Ces grandeurs ne satisfont pas l'équation de continuité¹⁾. En effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_4}{\partial t} + \text{div } \vec{s} = & g \delta_a(x) \sum_i \sigma_i \left\{ \tau_2 \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_1 - \tau_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_2 \right. \\ & \left. - \int dx \delta_a(x) \left(\tau_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} - \tau_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3,4)$$

Le membre de droite n'est différent de zéro qu'à l'intérieur du nucléon primitif. Soit V un volume de dimension linéaire a qui contient la source, on a

$$\int_V dx \left(\frac{\partial s_4}{\partial t} + \text{div } \vec{s} \right) = 0. \quad (3,5)$$

Pour échapper aux difficultés que soulève (3,4) et à cause de (3,5), W. PAULI et S. M. DANCOFF ont posé la condition que les intégrales où interviennent les s_v , doivent provenir de volumes grands par rapport aux dimensions de la source. En fait cette condition n'est pas réalisée: cf. (3,14, 20) et (3,24, 24a, 25). Il est cependant possible d'écarter cette difficulté. Rappelons que les mésons liés sont décrits par $\hat{\psi}_e(x)$ et $\hat{\pi}_e(x)$ (2,36, 49). On trouve l'énergie d'interaction du nucléon physique avec le champ Φ_0, \mathfrak{A} en remplaçant $\psi_e(x)$ et $\pi_e(x)$ par $\hat{\psi}_e(x)$ et $\hat{\pi}_e(x)$ dans (3,2). Cela revient à effectuer

¹⁾ cf. II. § 9, relations (121) et suivantes.

la même substitution dans (3,3), à remplacer s_ν par \hat{s}_ν ¹⁾. Les \hat{s}_ν satisfont l'équation différentielle de continuité: en effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{s}_4}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{\vec{s}} &= g \delta_a(x) \left\{ \sum_i \sigma_i \left(\tau_2 \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial x_i} - \tau_1 \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial x_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \sigma_i \int dx \delta_a(x) \left(\tau_2 \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial x_i} - \tau_1 \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial x_i} \right) \right\} \\ &= g^2 \delta_a(x) \sum_{i,k} \sigma_i (S_{k1} \tau_2 - S_{k2} \tau_1) I_{ik} \end{aligned} \quad (3,6)$$

avec

$$I_{ik} = I_{ki} = \frac{1}{\mu^2 - A} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \delta_a(x) - \int dx \delta_a(x) \frac{1}{\mu^2 - A} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \delta_a(x).$$

Transformons (3,6) par S (2,18, 19, 31) et limitons-nous aux éléments diagonaux de l'état fondamental $A = 0$ (2,24). Il vient

$$S^* \left(\frac{\partial \hat{s}_4}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{\vec{s}} \right) S = g^2 \delta_a(x) \sum_{i,k} (S_{i1} S_{k2} - S_{i2} S_{k1}) I_{ik} = 0. \quad (3,7)$$

\hat{s}_ν fournit donc une description satisfaisante de la répartition et du mouvement des charges à l'intérieur du nucléon physique. Du point de vue électrodynamique son emploi est légitime. Nous déterminons d'abord l'énergie électrostatique due à l'interaction du proton primitif avec les mésons liés (partie A); puis le moment magnétique du nucléon physique (partie B). Nous développons ces perturbations suivant les puissances croissantes de e^2 en nous bornant aux termes en e^2 .

Décomposons H' (3,2) en deux parties: l'énergie électrostatique H'_e et l'énergie due au champ magnétique H'_h

$$H' = H'_e + H'_h \quad (3,8)$$

$$H'_e = e \int dx \Phi_0 (\pi_2 \psi_1 - \pi_1 \psi_2) \quad (3,9)$$

$$\begin{aligned} H'_h &= e \sum_i \int dx \mathfrak{A}_i \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \right) \\ &+ eg \sum_i \sigma_i \int dx \mathfrak{A}_i \delta_a(x) (\tau_2 \psi_1 - \tau_1 \psi_2) - M_0 \frac{(1+\tau_3)}{2} \sum_i \sigma_i h_i. \end{aligned} \quad (3,10)$$

A. Calculons l'énergie électrostatique due à l'interaction du proton primitif avec les mésons liés. Soit $\mathfrak{A}_i = h_i = 0$, $H_h = 0$. Le champ électrique du nucléon primitif est décrit par

$$\Phi_0 = e \frac{(1+\tau_3)}{2} \int dx' \delta_a(x') \frac{1}{|x-x'|} = e \frac{(1+\tau_3)}{2} F(r). \quad (3,11)$$

¹⁾ A l'exemple de W. PAULI et S. M. DANCOFF.

Puisque $\dot{\psi}_e(x)$ (2,36) et $\dot{\pi}_e(x)$ (2,49) représentent les mésons liés, nous calculons la valeur moyenne de H'_e en reportant ces grandeurs dans (3,9)

$$\begin{aligned}
 H'_e &= e^2 \frac{(1+\tau_3)}{2} \int dx F(r) (\dot{\pi}_2 \dot{\psi}_1 - \dot{\pi}_1 \dot{\psi}_2) \\
 H'_e &= e^2 \frac{(1+\tau_3)}{2} \frac{\gamma C}{2D} \sum_{i,k} \left\{ \left(p'_{12} - \sum_{j,\sigma} p'_{j\sigma} S_{j2} S_{i\sigma} \right) S_{k1} \right. \\
 &\quad \left. - \left(p'_{i1} - \sum_{j,\sigma} p'_{j\sigma} S_{j1} S_{i\sigma} \right) S_{k2} \right\} \cdot \int dx F(r) \left(\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_i \right) \left(\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_k \right) \\
 &\quad + e^2 \frac{(1+\tau_3)}{2} \frac{\gamma}{2} \sum_{i,k} \left\{ \left(p'_{i2} + \sum_{j,\sigma} p'_{j\sigma} S_{j2} S_{i\sigma} \right) S_{k1} \right. \\
 &\quad \left. - \left(p'_{i1} + \sum_{j,\sigma} p'_{j\sigma} S_{j1} S_{i\sigma} \right) S_{k2} \right\} \cdot \int dx F(r) U_k \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_i. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Les intégrales qui figurent dans H'_e ne diffèrent de zéro que si $i = k$; elles ne dépendent pas de l'indice k

$$\begin{aligned}
 H'_e &= \frac{e^2 \gamma C}{2D} \frac{(1+\tau_3)}{2} \sum_{i,j} (p'_{i2} S_{i1} - p'_{i1} S_{i2}) \frac{1}{3} \int dx F(r) \left(\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_j \right)^2 \\
 &\quad + \frac{e^2 \gamma}{2} \frac{(1+\tau_3)}{2} \sum_{i,j} (p'_{i2} S_{i1} + p'_{i1} S_{i2}) \frac{1}{3} \int dx F(r) U_j \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_j.
 \end{aligned}$$

D'après (2,40)

$$\begin{aligned}
 \sum_i (p'_{i2} S_{i1} - p'_{i1} S_{i2}) &= \frac{2}{\gamma C} P_3 \\
 \sum_i (p'_{i2} S_{i1} + p'_{i1} S_{i2}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$H'_e = e^2 \frac{(1+\tau_3)}{2} \overline{F(r)} P_3 \quad (3.13)$$

avec

$$\overline{F(r)} = \frac{\sum_j \int dx F(r) \left(\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_j \right)^2}{\sum_j \int dx \left(\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_j \right)^2} \sim \frac{1}{a} \text{ si } a\mu \ll 1. \quad (3.14)$$

Il reste à calculer

$$\overline{H'_e} = S^* H'_e S = Z^* X^* H'_e X Z.$$

On trouve à partir de (2,56)

$$\overline{H'_e} = \frac{e^2}{2} \overline{F(r)} \left(P_3 + \frac{\sigma_3 \tau_3}{2} \right) + \frac{e^2}{2} \overline{F(r)} Z^* \left(\tau_3 P_3 + \frac{\sigma_3}{2} \right) Z. \quad (3.15)$$

Décomposons \bar{H}_e' en opérateur diagonal H_e^I et non-diagonal H_e^-

$$\bar{H}_e' = H_e^I + H_e^- \quad (3,16)$$

$$H_e^I = \frac{e^2}{2} \bar{F}(r) \left(P_3 + \frac{\sigma_3 \tau_3}{2} \right)$$

et l'on trouve pour l'état fondamental $A = 0$ (2,24, 57)

$$H_e^I = \frac{e^2}{2} \bar{F}(r) \left(P_3 - \frac{1}{2} \right) \quad (3,17)$$

$$H_e^- = \frac{e^2}{2} \bar{F}(r) Z^* \left(\tau_3 P_3 + \frac{\sigma_3}{2} \right) Z. \quad (3,18)$$

H_e^I possède les valeurs propres suivantes, d'après (2,64):

$$E_e^I = \frac{e^2}{2} \bar{F}(r) \left(n - \frac{1}{2} \right) \quad (3,17a)$$

E^I représente l'énergie électrostatique interne du nucléon physique. Elle est nulle pour le proton ($n = \frac{1}{2}$), négative pour le neutron ($n = -\frac{1}{2}$). La masse du proton serait donc supérieure à celle du neutron, ce que contredit l'expérience. Dans les § 4 et 5, nous examinerons s'il est possible de compenser H_e^I par d'autres termes perturbateurs. Evaluons encore $\bar{F}(r)$ (3,14) en choisissant la fonction de structure particulière

$$\delta_a(x) = \left(\frac{1}{2a^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2} \quad (3,19)$$

ce qui conduit à

$$\bar{F}(r) = \frac{\pi}{2a} \quad (3,20)$$

Voyons si l'on peut considérer E^I (3,17) comme une perturbation, comparée à l'énergie des isobares (2,61). Si tel est le cas, on doit avoir

$$E_e^I \ll E_0^I \quad (3,21)$$

condition équivalente à

$$\frac{\pi e^2}{4a} \ll \frac{3\pi a}{g^2} \quad (3,21a)$$

elle est compatible avec la condition de couplage serré (2,28a) pourvu que $\frac{g}{a}$ ne soit pas trop grand.

B. L'énergie additionnelle due au champ magnétique: H_h^I , définit le moment magnétique M^I

$$M^I = - \frac{\partial H_h^I}{\partial h} \quad (3,22)$$

Soit $h_i = \delta_{i3} h$, $\mathfrak{A} = \frac{h}{2} (-x_2, x_1, 0)$. Dans (3,10), remplaçons $\psi_e(x)$ par $\tilde{\psi}_e(x)$ de (2,36)

$$\begin{aligned} H'_h &= e h \gamma^2 \sum_{i,j} S_{i1} S_{j2} I_{ij}^{(1)} \\ &+ \frac{e \gamma g h}{2} \{ \sigma_2 (\tau_2 S_{j1} - \tau_1 S_{j2}) I_{1j}^{(2)} - \sigma_1 (\tau_2 S_{j1} - \tau_1 S_{j2}) I_{2j}^{(2)} \} \\ &- \frac{M_0 h}{2} (1 + \tau_3) \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Les intégrales

$$\begin{aligned} I_{ij}^{(1)} &= \int dx \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_j \\ I_{ij}^{(2)} &= \int dx \delta_a(x) x_i \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_j \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

ne diffèrent de zéro, les premières $I_{ij}^{(1)}$ que si $(i, j) = (1, 2)$ et $(i, j) = (2, 1)$, les secondes si $i = j$. Elles valent

$$I_{12}^{(1)} = \pm \int dx \left(\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_1 \right)^2 = \pm \frac{1}{3} \sum_j \int dx \left(\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_j \right)^2 \quad (3.24)$$

$$I_{12}^{(1)} = \pm \frac{g^2}{12 \pi a \gamma^2} \quad \text{si } a \mu \ll 1 \quad (3.24a)$$

$$I_{21}^{(1)} = - \frac{g}{24 \pi a \gamma} \quad (3.25)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} H'_h &= - \frac{e g^2 h}{48 \pi a} \{ \sigma_2 (\tau_2 S_{11} - \tau_1 S_{12}) - \sigma_1 (\tau_2 S_{21} - \tau_1 S_{22}) \} \\ &+ \frac{e g^2 h}{12 \pi a} S_{33} - M_0 h \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right) \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.23a)$$

Transformons H'_h par S (2,17, 55, 57) et décomposons \bar{H}'_h en opérateurs diagonal H_h^I et non-diagonal H_h^-

$$\bar{H}'_h = S^* H'_h S = Z^* X^* H'_h X Z$$

$$\begin{aligned} \bar{H}'_h &= - \frac{e g^2 h}{48 \pi a} Z^* \sum_i \sigma_i \{ S_{2i} (\tau_2 S_{11} - \tau_1 S_{12}) - S_{1i} (\tau_2 S_{21} - \tau_1 S_{22}) \} Z \\ &+ \frac{e g^2 h}{12 \pi a} S_{33} - \frac{M_0 h}{2} Z^* (1 + \tau_3) \sum_i \sigma_i S_{3i} Z. \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\bar{H}'_h = H_h^I + H_h^- \quad (3.27)$$

$$H_h^I = \frac{e g^2}{12 \pi a} h S_{33} - \frac{e g^2}{48 \pi a} h 2 S_{33} + M_0 h \frac{S_{33}}{2}$$

$$H_h^I = \left(\frac{eg^2}{24\pi a} + \frac{M_0}{2} \right) S_{33} \quad (3,28)$$

$$H_h^- = \frac{eg^2h}{48\pi a} Z^* \sigma_3 (\tau_1 S_{31} + \tau_2 S_{32}) Z \\ - \frac{M_0h}{2} Z^* \left\{ \sum_i \sigma_i S_{3i} + \tau_3 (\sigma_1 S_{31} + \sigma_2 S_{32}) \right\} Z \quad (3,29)$$

et d'après (3,22)

$$M^I = - \frac{\partial H_h^I}{\partial h} = - \left(\frac{eg^2}{24\pi a} + \frac{M_0}{2} \right) S_{33} \quad (3,30)$$

dont les valeurs propres sont¹⁾

$$M^I = \left(\frac{eg^2}{24\pi a} + \frac{M_0}{2} \right) \frac{nm}{j(j+1)}. \quad (3,30a)$$

En particulier, le proton $j = n = m = \frac{1}{2}$ et le neutron $j = m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$ possèdent les moments magnétiques

$$M_{P,N}^I = \pm \left(\frac{eg^2}{72\pi a} + \frac{M_0}{6} \right) = \pm \left(\frac{e}{24\varepsilon} + \frac{M_0}{6} \right). \quad (3,30b)$$

Dans cette approximation, les moments magnétiques du proton et du neutron sont égaux en grandeur, et de signe contraire, ce que l'expérience contredit. Nous étudions dans les paragraphes suivants, s'il est possible d'éliminer cette contradiction.

§ 4. Calcul des termes perturbateurs non-diagonaux.

Les deux résultats négatifs du paragraphe précédent: le défaut de masse du proton (3,17a) et les moments magnétiques (3,30b) sont les résultats d'une première approximation: nous avons ignoré tous les termes non-diagonaux par rapport aux états du nucléon physique, et nous avons négligé ψ'_e devant $\hat{\psi}_e$. Nous établirons ici dans quelle mesure ces termes perturbateurs peuvent modifier les résultats précédents.

Étudions d'abord la perturbation due aux termes non-diagonaux. Dans les paragraphes précédents, nous avons supposé que le fonctionnel n'est différent de zéro que pour la valeur propre $\Lambda = 0$. Nous avons négligé les trois systèmes de termes $\Lambda \neq 0$ parce qu'ils sont beaucoup plus élevés que l'état fondamental. Ils jouent le rôle

¹⁾ cf. II. p. 106, ou encore M. FIERZ, loc. cit. (7) relations II. 13, p. 186.

On retrouve les valeurs propres déjà indiquées dans II en remplaçant notre paramètre de couplage g par $\frac{g' \sqrt{2\pi}}{\mu}$.

de niveaux virtuels. Nous montrons dans l'appendice (§ 6) que seuls ceux des niveaux l ($l \neq 0$) tels que l'on ait approximativement

$$E_l \simeq -E^0 + 4\gamma F \quad (4,1)$$

sont capables de combiner avec l'état fondamental.

Les termes non-diagonaux H^- de l'hamiltonien se composent de H_0^- (2,60), H_e^- (3,18) et H_h^- (3,29)

$$H^- = H_0^- + H_e^- + H_h^- . \quad (4,2)$$

Soit l un des niveaux virtuels $l \neq 0$, H_{l0}^- l'élément de matrice correspondant. L'énergie de l'état fondamental est diminuée de

$$\Delta E^I = - \sum_l \frac{(H_{l0}^-)^2}{E_l + E^0}$$

et d'après (4,1)

$$\Delta E^I = - \frac{1}{4\gamma F} \sum_l (H_{l0}^-)^2 = - \frac{1}{4\gamma F} \{(H^-)^2\}_{00} .$$

Si l'on calcule $4\gamma F$ avec la fonction de structure particulière (3,18), il vient, cf. (2,26, 30)

$$4\gamma F = \frac{g^2}{6a^3} = \frac{8}{3} E^0$$

$$\Delta E^I = - \frac{6a^3}{g^2} (H^-)^2_{00} = - \frac{3}{32 E^0} (H^-)^2_{00} . \quad (4,3)$$

Pour simplifier l'analyse des nombreux termes de H^- et déterminer les combinaisons qui nous intéressent, introduisons l'opérateur ϑ . Sa propriété essentielle est la suivante: il change le signe de la charge électrique du champ de mésons et échange les états de charge du nucléon primitif. ϑ est représenté par

$$\begin{aligned} \vartheta \psi_1 &= \psi_1 \vartheta & \vartheta \pi_1 &= \pi_1 \vartheta & \vartheta \tau_1 &= \tau_1 \vartheta \\ \vartheta \psi_2 &= -\psi_2 \vartheta & \vartheta \pi_2 &= -\pi_2 \vartheta & \vartheta \tau_2 &= -\tau_2 \vartheta \\ \vartheta \psi_3 &= -\psi_3 \vartheta & \vartheta \pi_3 &= -\pi_3 \vartheta & \vartheta \tau_3 &= -\tau_3 \vartheta . \end{aligned} \quad (4,4)$$

ϑ est une rotation d'angle π du plan $(\widehat{2,3})$ de l'espace de spin isotopique. Appliqué aux composantes s_ν (3,3) du quadrivecteur courant, ϑ donne

$$\vartheta s_i = -s_i \vartheta \quad i = 1, 2, 3 \quad \vartheta s_4 = (-s_4 + e \delta_a(x)) \vartheta . \quad (4,5)$$

On vérifie que ϑ laisse invariantes la densité d'énergie et celle des

composantes du moment cinétique. ϑ ne change donc pas l'état mécanique du système.

$$\begin{aligned}\vartheta H^0 &= H^0 \vartheta & \vartheta M_{ik} &= M_{ik} \vartheta \\ \vartheta J^2 &= J^2 \vartheta & \vartheta T^2 &= T^2 \vartheta\end{aligned}\quad (4,6)$$

Par contre, d'après (2,9, 10)

$$\begin{aligned}\vartheta N_{\sigma_e} &= -N_{\sigma_e} \vartheta \\ \vartheta L &= (-L + e) \vartheta\end{aligned}\quad (4,7)$$

ϑ et la transformation identique forment un groupe d'ordre 2. Il est possible, si l'on choisit H^0 , M_3 , $J^2 = K^2$ et N_3 (c'est-à-dire L) diagonaux, de représenter ϑ par la matrice irréductible

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\quad (4,8)$$

encadrée par les fonctions $(q | j, m, n)$ et $(q | j, m, -n)$. ϑ permute les états isobares, en particulier les états proton et neutron. Cela est évident à partir de (4,7) et (4,5).

Nous dirons d'un opérateur R qu'il est symétrique R_S si

$$\vartheta R_S = R_S \vartheta \quad (4,9)$$

qu'il est antisymétrique R_A si

$$\vartheta R_A = -R_A \vartheta. \quad (4,10)$$

De (4,8) on conclut que R_S possède les mêmes valeurs propres pour les états $(q | j, m, n)$ et $(q | j, m, -n)$, tandis que R_A possède pour les mêmes états stationnaires des valeurs propres égales et de signe contraire

$$(j, m, n | R_S | j, m, n) = (j, m, -n | R_S | j, m, -n) \quad (4,11)$$

$$(j, m, n | R_A | j, m, n) = -(j, m, -n | R_A | j, m, -n).$$

Reprenons H^0 (2,5), H'_e (3,9) et H'_h (3,10). Décomposons chacun de ces opérateurs en ses parties symétrique et antisymétrique. Nous n'écrivons que les opérateurs qui se rapportent aux mésons liés, c'est-à-dire au nucléon physique, cf. (2,52), (3,12) et (3,23).

D'après (4,6), H^0 est symétrique et l'on a (2,51, 52)

$$H^0 = H^0_S = \varepsilon \sum_n P_n^2 \quad (4,12)$$

dont la partie non-diagonale vaut, cf. (2,60)

$$H^0 = H_S^0 = \varepsilon Z^* \sum_n \sigma_n P_n Z. \quad (4,12a)$$

Appliqué à (3,9, 10, 11), (4,4) permet de définir

$$H'_e = H'_{eS} + H'_{eA} \quad (4,13)$$

$$H'_{eS} = \frac{e^2 \tau_3}{2} \int dx F(r) (\pi_2 \psi_1 - \pi_1 \psi_2) \quad (4,14)$$

$$H'_{eA} = \frac{e^2}{2} \int dx F(r) (\pi_2 \psi_1 - \pi_1 \psi_2) \quad (4,15)$$

$$H'_h = H'_{hS} + H'_{hA} \quad (4,16)$$

$$H'_{hS} = -\frac{M_0 \sigma_3 h}{2} \quad (4,17)$$

$$\begin{aligned} H'_{hA} = & \frac{egh}{2} \int dx \delta_a(x) (\sigma_2 x_1 - \sigma_1 x_2) (\tau_2 \psi_1 - \tau_1 \psi_2) \\ & + e h \int dx \psi_2 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \psi_1 - \frac{M_0 h \sigma_3 \tau_3}{2}. \end{aligned} \quad (4,18)$$

Si l'on se borne aux états liés, on trouve pour ces opérateurs d'après (3,13, 20) et (3,23a)

$$H'_{eS} = \frac{\pi e^2}{4a} \tau_3 P_3 \quad (4,14a)$$

$$H'_{eA} = \frac{\pi e^2}{4a} P_3 \quad (4,15a)$$

$$H'_{hS} = -\frac{M_0 \sigma_3 h}{2} \quad (4,17a)$$

$$\begin{aligned} H'_{hA} = & \frac{eg^2}{12\pi a} h S_{33} - \frac{M_0 h}{2} \sigma_3 \tau_3 \\ & - \frac{eg^2 h}{48\pi a} \{ \sigma_2 (\tau_2 S_{11} - \tau_1 S_{12}) - \sigma_1 (\tau_2 S_{21} - \tau_1 S_{22}) \} \end{aligned} \quad (4,18a)$$

qui possèdent les éléments non-diagonaux suivants (pour ce passage on remarquera que X (2,54) laisse les τ_e invariants)

$$H'^-_{eS} = \frac{\pi e^2}{4a} Z^* \tau_3 P_3 Z \quad (4,14b)$$

$$H'^-_{eA} = \frac{\pi e^2}{4a} Z^* \frac{\sigma_3}{2} Z \quad (4,15b)$$

$$H'^-_{hS} = -\frac{M_0 h}{2} Z^* \sum_i \sigma_i S_{3i} Z \quad (4,17b)$$

$$H_{hA}^- = \frac{eg^2}{48\pi a} h Z^* \sigma_3 (\tau_1 S_{31} + \tau_2 S_{32}) Z - \frac{M_0 h}{2} Z^* \tau_3 (\sigma_1 S_{31} + \sigma_2 S_{32}) Z. \quad (4,18b)$$

Si l'on se reporte au paragraphe précédent (partie B), il apparaît que M^I provient tout entier de H'_{hA} : $M^I = M^I_A$. L'opérateur H'_{hS} (4,17a, b) qui forme la partie symétrique de H'_h ne possède pas d'élément diagonal. Cependant les valeurs expérimentales (1,1) exigent une partie symétrique ΔM^I_S . Examinons s'il est possible de l'obtenir à partir du terme linéaire en h de ΔE^I_{hS} (4,3), en posant, cf. (3,22)

$$\Delta M^I_S = - \frac{\partial}{\partial h} \Delta E^I_{hS}. \quad (4,19)$$

Dans ce but décomposons

$$H^- = H^-_S + H^-_A. \quad (4,20)$$

D'après (4,2), (4,12a, 14b, 17b) et (4,15b, 18b) il vient

$$H^-_S = Z^* \left\{ \varepsilon \sum_n \sigma_n P_n + \frac{e^2 \pi}{4a} \tau_3 P_3 - \frac{M_0 h}{2} \sum \sigma_i S_{3i} \right\} Z \quad (4,21)$$

$$H^-_A = Z^* \left\{ \frac{e^2 \pi}{4a} \frac{\sigma_3}{2} - \frac{M_0 h \tau_3}{2} (\sigma_1 S_{31} + \sigma_2 S_{32}) + \frac{eg^2}{48\pi a} h \sigma_3 (\tau_1 S_{31} + \tau_2 S_{32}) \right\} Z. \quad (4,22)$$

Calculons

$$(H^-)^2 = H_S^{-2} + 2 H^-_S H^-_A + H_A^{-2}. \quad (4,23)$$

Dans (4,21), nous négligeons $Z^* \frac{e^2 \pi}{4a} \tau_3 P_3 Z$ devant $Z^* \varepsilon \sum_n \sigma_n P_n Z$ à cause de (3,21). Nous symétrisons naturellement les termes non-commutatifs de (4,23) et ne conservons que ceux en e^2 et linéaires en h . Le terme H_A^{-2} peut être négligé de sorte que l'on trouve pour les parties diagonales, symétrique et antisymétrique de H^{-2}

$$\begin{aligned} (H^2)^I_{hS} &= -\varepsilon M_0 h \sum_i P_i S_{3i} = \varepsilon M_0 h P_\phi \\ (H^2)^I_{hA} &= 2 H_S H_A = -\frac{\varepsilon M_0 h}{2} Z^* \sigma_3 \tau_3 \{ i[P_1, S_{32}] - i[P_2, S_{31}] \} Z \\ &\quad + \varepsilon \frac{eg^2 h}{48\pi a} Z^* i \{ \sigma_1 \tau_1 [P_2, S_{31}] + \sigma_2 \tau_2 [P_1, S_{32}] \} Z \end{aligned} \quad (4,24)$$

ce qui donne, cf. (2,37) et (2,57)

$$(H^2)_{hA}^I = -\varepsilon \left(M_0 + \frac{eg^2}{24\pi a} \right) h S_{33} \quad (A=0). \quad (4,25)$$

De (4,3), (4,19) et (4,24), on déduit

$$\Delta M_S^I = -\frac{\partial}{\partial h} \Delta E_{hS}^I = \frac{3\varepsilon}{8E^0} M_0 P_\phi \quad (4,26)$$

qui possède les valeurs propres, cf. (2,63)

$$\Delta M_S^I = \frac{3\varepsilon}{8E^0} M_0 m. \quad (4,26a)$$

Introduisons de même à partir de (4,3) et (4,25)

$$\Delta M_A^I = -\frac{\partial}{\partial h} \Delta E_{hA}^I = -\frac{3\varepsilon}{8E^0} \left\{ M_0 + \frac{eg^2}{24\pi a} \right\} S_{33} \quad (4,27)$$

dont les valeurs propres sont, cf. (3,30a)

$$\Delta M_A^I = \frac{3\varepsilon}{8E^0} \left(M_0 + \frac{eg^2}{24\pi a} \right) \cdot \frac{nm}{j(j+1)} \quad (4,27a)$$

ce que nous négligeons devant (3,30a).

La décomposition de H^- en ses parties symétrique et antisymétrique permet encore de démontrer que les $\psi'_e(x)$ (2,35) ne peuvent pas contribuer à un moment symétrique. En effet, les termes qui contiennent h et $\psi'_e(x)$ sont tous antisymétriques et appartiennent à H'_{hA} (4,18). Puisque nous nous bornons aux termes en e^2 , nous négligeons les combinaisons de H'_{hA} avec H_{hA} . D'autre part, H_0^- est symétrique. Toute perturbation basée sur la seule combinaison possible de H_{hA}^- avec H_0 sera antisymétrique, ce qui démontre notre affirmation.

Il est maintenant naturel d'étudier s'il est possible d'éliminer H_e^I (3,17), responsable du rapport inexact des masses. Soit $h=0$ dans (4,21, 22). Négligeons encore $Z^* \frac{e^2\pi}{4a} \tau_3 P_3 Z$ devant $Z^* \varepsilon \sum_n \sigma_n P_n Z$, cf. (3,21). Il reste

$$H_S^- = Z^* \varepsilon \sum_n \sigma_n P_n Z \quad (4,21a)$$

$$H_A^- = Z^* \frac{e^2\pi}{4a} \frac{\sigma_3}{2} Z. \quad (4,22a)$$

La partie principale de H_e^I qu'il faudrait éliminer est antisymétrique et linéaire en P_3 , cf. (4,15a) et (3,15, 17):

$$H_{eA}^I = \frac{e^2\pi}{4a} P_3. \quad (4,29)$$

Les produits $H_A^- H_S^-$, cf. (4,23), sont les seuls termes de $(H^-)^2$ qui pourraient nous servir, mais on vérifie facilement qu'ils sont négligeables devant H_{eA}^I . Il faut donc introduire un terme non-diagonal dans H . Ce terme devra donner un produit antisymétrique avec H_S^- qui contient seul P_3 . Il sera donc antisymétrique. De plus, pour que $H_A^- H_S^-$ soit diagonal, il devra contenir σ_3 ou τ_3 . Le plus simple est d'ajouter un terme $H_{\mu_P}^-$ qui représente une inégalité des masses du proton et du neutron primitif.

$$H_{\mu_P}^- = H_{\mu_P A}^- = \tau_3 \Delta \mu_P^1 \quad (4,30)$$

Combiné à (4,21a) et reporté dans (4,3), il conduit à

$$\Delta E_{P_3}^I = \frac{3\varepsilon}{4E^0} \Delta \mu_P P_3. \quad (4,31)$$

Compensons H_{eA}^I (4,29) à l'aide de (4,31)

$$(\Delta E_{P_3}^I + H_{eA}^I) \cong 0$$

ce qui donne

$$\Delta \mu_P \cong \frac{\pi}{3} e^2 \frac{E^0}{\varepsilon} \frac{1}{a} \quad (4,32)$$

valeur que nous apprécierons au paragraphe suivant.

§ 5. Conclusions.

Nous discuterons ici les résultats des paragraphes précédents. Définissons à partir de (1,1) et d'après (4,11)

$$M_A^{(\text{exp})} = \frac{|M_P| + |M_N|}{2} = 2,36 M_K \quad (5,1)$$

$$M_S^{(\text{exp})} = \frac{|M_P| - |M_N|}{2} = 0,43 M_K. \quad (5,2)$$

Nous avons trouvé, cf. (3,30b) et (4,26a), où l'on pose $m = \frac{1}{2}$

$$M_A^I = \frac{e}{24\varepsilon} + \frac{M_0}{6} \quad (5,3)$$

$$M_S^I = \Delta M_S^I = \frac{3}{16} \frac{\varepsilon}{E^0} M_0. \quad (5,4)$$

Il est possible d'égaliser (5,1) avec (5,3) pourvu que soit remplie la condition

$$\frac{e}{24\varepsilon} < 2,36 M_K = 2,36 \frac{e}{2\mu_P} \quad (M_0 > 0)$$

$$\varepsilon \gtrsim \frac{\mu_P}{28,7} \cong 32 \text{ MeV}. \quad (5,5)$$

¹⁾ Ce terme n'apporte aucun changement dans la discussion du moment magnétique.

En comparant (5,2) avec (5,4), on voit que le signe de M_S^I est exact. Mais à propos de (5,4), il convient de rappeler que l'une des hypothèses du couplage serré, celle qui permet de négliger les termes non-diagonaux (2,60) de l'hamiltonien, revient à poser

$$\frac{\varepsilon}{E^0} \ll 1. \quad (5,6)$$

de sorte qu'il n'est possible d'égaliser M_S^I avec $M_S^{(\text{exp})}$ qu'au prix de l'hypothèse artificielle

$$M_0 \gg M_K \quad (5,7)$$

Cette condition, comme la nécessité du terme $\Delta \mu_P \tau_3$ (4,30) qui sert à rétablir le rapport expérimental des masses du proton et du neutron, prouve que la théorie du couplage serré ne permet pas d'expliquer d'une manière naturelle la structure électromagnétique du nucléon.

L'étude de la théorie mésonique vectorielle a montré que celle-ci conduit à des conclusions analogues.

En terminant ce travail, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Dr. G. WENTZEL, qui m'en a proposé le sujet et m'a constamment guidé de ses conseils.

Zurich, Institut de Physique de l'E.P.F.

§ 6. Appendice.

Au début du § 4 nous avons utilisé le résultat suivant: à savoir que l'état fondamental ne peut combiner qu'avec les états l des trois spectres $\Lambda \neq 0$ tels que

$$E_l \subseteq -E^0 + 4\gamma F. \quad (6,1)$$

Nous démontrons ici cette proposition. Reprenons dans (2,22) la partie $V(q)$ de l'hamiltonien qui dépend des $q_{s\varrho}$

$$V(q) = \sum_{r,s,\varrho} B_{rs} q_{r\varrho} q_{s\varrho} - \gamma \sum_n r_n + \Lambda.$$

Soit $V^-(q)$ la valeur de V pour $\Lambda = 0$, $V^+(q)$ l'une de celles correspondant à $\Lambda \neq 0$. $V^-(q)$ possède un minimum en $\hat{q}_{r\varrho}$ (2,25) et s'écrit à l'aide des $q_{r\varrho}$, cf. (2,29)

$$V^-(q) = \sum_{r,s,\varrho} B_{rs} q'_{r\varrho} q'_{s\varrho} - E^0$$

tandis que

$$V^+(q) = V^-(q) + 4\gamma F + 2\gamma(r'_i + r'_k)$$

i et k désignant deux valeurs différentes.

Le fonctionnel $F^0(q)$ de l'état fondamental n'est différent de zéro qu'aux environs du minimum de $V^-(q)$ et cela pour des intervalles $\Delta r'$ et $\Delta q'_{re}$ de largeur (cf. I. § 5 et 10)

$$\Delta r' \sim \Delta q'_{re} \sim \sqrt{a}. \quad (6,2)$$

Considéré comme fonction des q'_{se} , $s > 3$, seuls, $V^+(q)$ ne varie pas plus rapidement que $V^-(q)$. La borne supérieure de la variation est

$$\Delta V^+(q_{se})_{s>3} \sim \Delta V^-(q_{se})_{s>3} \lesssim \frac{1}{a} \quad (6,3)$$

ce que l'on vérifie en introduisant des coordonnées normales dans $K - K_0$ (2,51) de façon analogue à I. § 10. Suivant r' , la variation de V^+ a pour borne supérieure

$$\Delta V^+(r') \sim 4\gamma r' \sim 4\gamma \sqrt{a} \sim \frac{g}{a^2} \gg \Delta V^+(q'_{se})_{s>3}. \quad (6,4)$$

Soit $F_l^+(q)$ un fonctionnel de $\Delta \neq 0$ et d'énergie

$$W_l = 4\gamma F + \delta W_l - E^0 \quad (6,5)$$

Si $\delta W_l \gtrsim E^0 \sim \gamma F$, on a, cf. (6,4)

$$\delta W_l \gg \Delta V^+$$

La longueur d'onde de l'oscillation de $F_l^+(q)$ suivant r' ou q'_{re} vaut

$$\lambda_l \sim \frac{1}{\sqrt{W - V^+}} \sim \frac{1}{\sqrt{\delta W}}$$

et d'après (2,30) et (2,28a)

$$|\lambda_l| \sim \sqrt{a} \left(\frac{a}{g} \right) \ll \sqrt{a}$$

Dans le domaine (6,2) où $F^0(q)$ diffère de zéro, $F_l^+(q)$ oscille rapidement (ou décroît exponentiellement, et est sensiblement nul lorsque $\delta W < 0$ et λ_l imaginaire). Les deux états ne peuvent pas combiner. Ce n'est que pour des valeurs

$$\delta W_l \sim \Delta V^+ \sim \frac{g}{a^2} \ll E^0$$

que λ_l peut devenir égale ou supérieure à \sqrt{a} . La condition (6,1) est nécessaire pour que le niveau l combine avec l'état fondamental.

Erratum

zu: „BÖMMEL et NIKITINE, Contribution à l'étude des propriétés optiques...“

In unserer Arbeit H. P. A. XVIII. 1945 ist durch ein Versehen die Figur pag. 236 in falscher Lage reproduziert worden. Dieselbe ist um $+\frac{\pi}{2}$ zu drehen.