

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 18 (1945)  
**Heft:** IV

**Artikel:** Ein Beitrag zum Zwei-Nukleon-Problem  
**Autor:** Bleuler, Konrad  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111609>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ein Beitrag zum Zwei-Nukleon-Problem

von Konrad Bleuler.

(19. III. 1945)

In der Theorie des Mesonfeldes mit starker Kopplung an ein Nukleon besitzt das Nukleon angeregte isobare Zustände mit höheren Spin- und Ladungswerten. Auf Grund dieser Annahme werden (unter Vernachlässigung der Tensorkraft) alle Deuteronzustände mit beliebigem totalen Spin  $J$  und „isotopen Spin“  $K$  untersucht. Es ergibt sich, dass die bereits bekannten Zustände  $J = 1, K = 0$  und  $J = 0, K = 1$  ( $^3S$ - resp.  $^1S$ -Zustand des Deuterons) die tiefsten sind. Als nächst höheren isobaren Zustand erhält man einen  $^3S$ -Zustand, dessen Anregungsenergie zwischen 5 und 30 MeV geschätzt wird. Für die Diskussion der Anisotropie der Proton-Neutron-Streuung ist bemerkenswert, dass die  $^3P$ -Wechselwirkung für kleine Kernabstände anziehend wird.

## § 1. Einleitung.

Das Deuteron wird auf Grund eines Nukleon-Modells und eines Wechselwirkungsansatzes behandelt, welche der Mesontheorie unter Annahme starker Kopplung entnommen wurden. Nach dieser Theorie<sup>1)</sup> (wir betrachten die symmetrische Pseudoskalar- oder Vektortheorie) besitzt das Nukleon innere Freiheitsgrade, welche durch dieselben Operatoren, die in der Quantentheorie des Kugelkreisels auftreten, beschrieben werden. Die entsprechenden Quantenzahlen  $j, m, n$  sind hier halbganze Zahlen und haben die folgende physikalische Bedeutung:

$$\begin{aligned} j &= \text{Spin und zugleich „isotoper Spin“,} \\ m &= \text{Spinkomponente, } m = -j, \dots + j, \\ n + \frac{1}{2} &= \text{Ladung, } n = -j, \dots + j. \end{aligned}$$

Der Rotationsenergie des Kreisels entspricht die sog. Isobaren-Energie mit den Eigenwerten

$$\frac{\varepsilon}{2} \left[ \left( j + \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right].$$

<sup>1)</sup> G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **13** (1940), S. 269; **14** (1941), S. 633; **15** (1942), S. 685; **16** (1943), S. 222 und S. 551. — J. R. OPPENHEIMER und J. SCHWINGER, Phys. Rev. **60** (1941), S. 150; W. PAULI und S. M. DANCOFF, Phys. Rev. **62** (1942), S. 85; R. SERBER und S. M. DANCOFF, Phys. Rev. **63** (1943), S. 143; W. PAULI und S. KUSAKA, Phys. Rev. **63** (1943), S. 400; F. COESTER, Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 35.

Bei der Behandlung des Zweikörperproblems<sup>1)</sup> geht man von den Spin- und Ladungsquantenzahlen der beiden Nukleonen  $j_1, m_1, n_1, j_2, m_2, n_2$  zu den Variablen  $J, M, K, N, j_1, j_2$  über, wobei:

$$\begin{aligned} J &= \text{Gesamtspin } (J = 0, 1, 2, \dots), \\ M &= \text{Spinkomponente } (M = -J, \dots + J), \\ K &= \text{Gesamter „isotoper Spin“ } (K = 0, 1, 2, \dots), \\ N + 1 &= \text{Ladung des Deuterons } (N = -K, \dots + K). \end{aligned}$$

Nach dem Vektoradditionsmodell gelten die Ungleichungen

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2, \quad |j_1 - j_2| \leq K \leq j_1 + j_2. \quad (1)$$

Im Hamiltonoperator  $H$  für das Zweikörperproblem wird die Tensorkraft (Spin-Bahnkopplung) vernachlässigt; dann wird  $H$  eine Diagonalmatrix bezüglich der 4 Quantenzahlen  $J, M, K, N$ . Die entsprechende Untermatrix von  $H$  ist dann noch eine Matrix bezüglich der beiden Spins  $j_1, j_2$ :

$$\begin{aligned} (j_1 j_2 | H | j_1' j_2') &= \left\{ -\frac{\Delta}{M_p} + \frac{\epsilon}{2} \left[ \left( j_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( j_2 + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] \right\} (j_1 j_2 | 1 | j_1' j_2') \\ &\quad + V(r) (j_1 j_2 | \Omega | j_1' j_2'), \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $r$  den Abstand der beiden Nukleonen,  $V(r) > 0$  das Potential,  $M_p$  die Protonmasse und  $\Delta$  den Laplace-Operator bezüglich der Relativkoordinaten bedeuten. Die Wechselwirkungsmatrix  $\Omega$  wurde von FIERZ<sup>2)</sup> in den hier verwendeten Variablen angegeben.

Das Ziel ist nun, die Eigenwerte dieses Hamiltonoperators zu bestimmen. Dabei kann etwa die Adiabatenmethode (vgl. I, § 3) verwendet werden, d. h. man bestimmt die Eigenwerte zunächst für festen Kernabstand  $r$ , welcher die Rolle eines Parameters spielt. Die Eigenwerte  $W$  der Matrix (2), worin  $\Delta$  null gesetzt wird, sind dann Funktionen von  $r$  (adiabatische Potentialkurven  $W(r)$ ). Die Berechnung von  $W(r)$  kann in den beiden folgenden Grenzfällen durchgeführt werden:

1. Für grosse Kernabstände  $r$  ist die Wechselwirkungsenergie klein gegen die Konstante  $\epsilon$  der Isobarenenergie, so dass erstere als kleine Störung betrachtet werden kann; eine einfache Störungsrechnung ergibt dann  $W(r)$  als Entwicklung nach Potenzen von  $\frac{V(r)}{\epsilon}$ .

<sup>1)</sup> Vgl. § 2 der Arbeit von M. FIERZ und G. WENTZEL, Zum Deuteronproblem I, Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 215 (im Folg. als I zitiert).

<sup>2)</sup> M. FIERZ, Über die Wechselwirkung zweier Nukleonen in der Mesontheorie, Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 181, vgl. Gl. IV, S. 193.

2. Wenn  $\varepsilon$  genügend klein angenommen wird, gilt bei kleinen Kernabständen:  $\varepsilon \ll V(r)$ . Für diesen Fall haben FIERZ und WENTZEL<sup>1)</sup> nur die Untermatrizen diskutiert, bei denen eine der beiden Quantenzahlen  $J$  und  $K$  den Wert null hat; doch erweisen sich ihre Methoden auch bei beliebigen Werten von  $J$  und  $K$  als brauchbar. Dies wird im Folgenden gezeigt werden; es soll also für den Grenzfall  $\varepsilon \ll V(r)$  eine allgemeine Formel für die Eigenwerte  $W(r)$  aufgestellt werden.

Die Eigenwertgleichung für  $W(r)$  lautet nach (2):

$$\left\{ -W(r) + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \left( j_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( j_2 + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] \right\} a_{j_1 j_2} + V(r) \sum_{j'_1 j'_2} (j_1 j_2 | \Omega | j'_1 j'_2) a_{j'_1 j'_2} = 0. \quad (3)$$

Für die folgende Rechnung ist es zweckmässig, die Substitution einzuführen:

$$\sigma = j_1 + j_2 + 1, \quad \delta = j_1 - j_2; \quad (4)$$

dabei sind  $\sigma$  und  $\delta$  ganze Zahlen, welche der Bedingung

$$\sigma + \delta = \text{gerade Zahl} \quad (4a)$$

genügen. Ferner empfiehlt sich die Transformation

$$a_{\sigma \delta} = b_{\sigma \delta} \sqrt{\gamma_{\sigma \delta}}, \quad (5)$$

wobei

$$\gamma_{\sigma \delta} = \frac{1}{\sigma^2 - \delta^2} (\sigma - K)(\sigma - K + 1) \dots (\sigma + K)(\sigma - J)(\sigma - J + 1) \dots (\sigma + J). \quad (6)$$

Gleichung (3) lautet dann:

$$\left\{ -W(r) + \frac{\varepsilon}{4} [\sigma^2 + \delta^2 - 4] \right\} b_{\sigma \delta} + V(r) \sum_{\sigma'} \sum_{\delta'} (\sigma \delta | \bar{\Omega} | \sigma' \delta') b_{\sigma' \delta'} = 0. \quad (7)$$

Die transformierte Matrix  $\bar{\Omega}$  hat folgende nicht verschwindende Elemente:

$$(\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma, \delta) = [4K(K+1) - (\sigma + \delta + 1)(\sigma + \delta - 1) - (\sigma - \delta + 1)(\sigma - \delta - 1)] \\ \cdot \frac{[4J(J+1) - (\sigma + \delta + 1)(\sigma + \delta - 1) - (\sigma - \delta + 1)(\sigma - \delta - 1)]}{4(\sigma + \delta + 1)(\sigma + \delta - 1)(\sigma - \delta + 1)(\sigma - \delta - 1)},$$

$$(\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma + 2, \delta) = \frac{(\sigma + K + 1)(\sigma + K + 2)(\sigma + J + 1)(\sigma + J + 2)}{(\sigma + \delta + 1)(\sigma - \delta + 1)(\sigma + \delta + 2)(\sigma - \delta + 2)},$$

$$(\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma - 2, \delta) = \frac{(\sigma - K - 1)(\sigma - K - 2)(\sigma - J - 1)(\sigma - J - 2)}{(\sigma - \delta - 1)(\sigma + \delta - 1)(\sigma - \delta - 2)(\sigma + \delta - 2)},$$

---

<sup>1)</sup> Vgl. I, § 4 und G. WENTZEL, Zum Deuteronproblem II, Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 252 (im Folg. als II zitiert), vgl. § 2.

$$\begin{aligned}
(\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma + 1, \delta + 1) &= 2 A(\delta) \frac{(\sigma + K + 1)(\sigma + J + 1)}{(\sigma + \delta + 1)(\sigma - \delta + 1)(\sigma - \delta - 1)(\sigma + \delta + 2)}, \\
(\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma - 1, \delta + 1) &= 2 A(\delta) \frac{(\sigma - K - 1)(\sigma - J - 1)}{(\sigma - \delta - 1)(\sigma + \delta - 1)(\sigma + \delta + 1)(\sigma - \delta - 2)}, \\
(\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma + 1, \delta - 1) &= 2 A(-\delta) \frac{(\sigma + K + 1)(\sigma + J + 1)}{(\sigma - \delta + 1)(\sigma + \delta + 1)(\sigma + \delta - 1)(\sigma - \delta + 2)}, \\
(\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma - 1, \delta - 1) &= 2 A(-\delta) \frac{(\sigma - K - 1)(\sigma - J - 1)}{(\sigma + \delta - 1)(\sigma - \delta - 1)(\sigma - \delta + 1)(\sigma + \delta - 2)}, \\
(\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma, \delta + 2) &= B(\delta) \frac{1}{(\sigma + \delta + 1)(\sigma - \delta - 1)(\sigma + \delta + 2)(\sigma - \delta - 2)}, \\
(\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma, \delta - 2) &= B(-\delta) \frac{1}{(\sigma - \delta + 1)(\sigma + \delta - 1)(\sigma - \delta + 2)(\sigma + \delta - 2)}, \quad (8)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A(\delta) &= \sqrt{(K + \delta + 1)(K - \delta)(J + \delta + 1)(J - \delta)}, \\
B(\delta) &= \sqrt{[K^2 - (\delta + 1)^2][(K + 1)^2 - (\delta + 1)^2][(J^2 - (\delta + 1)^2][(J + 1)^2 - (\delta + 1)^2]}. \quad (8a)
\end{aligned}$$

Infolge der Transformation (5) sind diese Ausdrücke in  $\sigma$  rational geworden, was für die folgende Rechnung erforderlich ist (vgl. § 2); dagegen ist  $\bar{\Omega}$  nicht mehr hermitisch, da die Transformation (5) nicht unitär ist.

Der Variabilitätsbereich von  $\delta$  und  $\sigma$  ist nach (1) gegeben durch:

$$-\delta_0 \leqq \delta \leqq +\delta_0, \quad (1a)$$

$$\sigma \geqq \sigma_0, \quad (1b)$$

wobei  $\delta_0 = K, \sigma_0 = J + 1$  für  $J \geqq K, \delta_0 = J, \sigma_0 = K + 1$  für  $K \geqq J$ ;

zugleich ist die Bedingung (4a) zu erfüllen. Nach Ausweis der Faktoren  $A(\delta)$  und  $B(\delta)$  verschwinden alle Matrixelemente von  $\bar{\Omega}$ , welche aus dem Intervall (1a) herausführen. Entsprechend (1b) gilt nach (8):

$$(\sigma_0 | \bar{\Omega} | \sigma_0 - 2) = (\sigma_0 + 1 | \bar{\Omega} | \sigma_0 - 1) = (\sigma_0 | \bar{\Omega} | \sigma_0 - 1) = 0;$$

dagegen sind die Elemente

$$(\sigma_0 - 2 | \bar{\Omega} | \sigma_0), (\sigma_0 - 1 | \bar{\Omega} | \sigma_0 + 1), (\sigma_0 - 1 | \bar{\Omega} | \sigma_0)$$

von null verschieden.  $\bar{\Omega}$  ist also nur „halb ausreduziert“. (Dies röhrt daher, dass die Koëffizienten  $\gamma_{\sigma\delta}$  in der Transformation (5) für  $\sigma \leqq K$  und  $\sigma \leqq J$  verschwinden; die ursprüngliche Matrix ist voll reduziert.) Für die folgende Transformation ist es nun zweckmäßig, das System (7) auf alle  $\sigma \geqq 0$ , welche (4a) erfüllen, zu erweitern. Dies lässt die gesuchten Eigenwerte  $W(r)$  ungeändert,

doch werden noch weitere Eigenwerte hinzugefügt (sog. „falsche Eigenwerte“, vgl. die entsprechenden Bemerkungen in II, S. 254). Im erweiterten System dürfen die Matrixelemente

$$(\sigma | \bar{Q} | \sigma') \quad \text{mit} \quad \sigma < \sigma_0$$

willkürlich abgeändert werden. Da  $\bar{Q}$  dabei „halb ausreduziert“ bleibt, werden dadurch nur die „falschen Eigenwerte“ geändert. Dies bildet ein einfaches Kriterium für die „richtigen Eigenwerte“.

Nach dieser Erweiterung wird eine Transformation durchgeführt, welche von der Variablen  $\sigma$  auf die kontinuierliche Variable  $x$  führt, analog der Transformation, die im Falle  $J = 0$  eingeführt wurde (vgl. II, S. 255, Formel (10);  $x = \pi + \eta$ ):

$$\Phi_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\substack{\sigma > \sigma_0 \\ \sigma + \delta = \text{gerade}}} b_{\sigma\delta} \sin \frac{\sigma x}{2}, \quad (9)$$

mit der Umkehrformel

$$b_{\sigma\delta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \Phi_\delta(x) \sin \frac{\sigma x}{2} dx. \quad (10)$$

Die Gleichung (7) geht dann über in

$$(-W(r) + \frac{\varepsilon\delta^2}{4} - \varepsilon) \Phi_\delta(x) - \varepsilon \Phi_\delta''(x) + V(r) \sum_{\sigma'} \int_0^{2\pi} D_{\delta,\sigma'}(x, x') \Phi_{\sigma'}(x') dx' = 0, \quad (11)$$

wobei

$$D_{\delta,\sigma'}(x, x') = \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma \sigma'} (\sigma \delta | \bar{Q} | \sigma' \delta') \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{\sigma' x'}{2}. \quad (12)$$

Die Summen über  $\sigma$  und  $\sigma'$  sind dabei über alle positiven ganzen Zahlen zu erstrecken, welche den Bedingungen „ $\sigma + \delta = \text{gerade}$ ,  $\sigma' + \delta' = \text{gerade}$ “ genügen;  $\delta$  und  $\delta'$  laufen über alle ganzen Zahlen im Intervall (1a). Die Berechnung von  $D_{\delta,\sigma'}$  wird in § 2 durchgeführt werden. Das System von Integro-Differentialgleichungen (11) ist mit dem erweiterten System (7) äquivalent, wenn man die Eigenfunktionen von (11) gemäss (9) den folgenden Periodizitätsbedingungen unterwirft:

Für  $\delta$  gerade:  $\Phi_\delta(x) = -\Phi_\delta(-x) = \Phi_\delta(x + 2\pi)$ , Periode  $2\pi$ ,

für  $\delta$  ungerade:  $\Phi_\delta(x) = -\Phi_\delta(-x) = -\Phi_\delta(x + 2\pi)$ , Periode  $4\pi$ . (13)

Zur Lösung von (11) können ähnliche Methoden verwendet werden wie im Falle  $J = 0$ . Es zeigt sich, dass für  $\varepsilon \ll V$  nur der Verlauf der Eigenfunktionen in der Nähe der Stelle  $x = \pi$  wesent-

lich ist. Man erhält deshalb eine erste Näherung durch Entwickeln des Kernes  $D_{\delta, \delta'}$  nach Potenzen von  $\xi = x - \pi$  und  $\xi' = x' - \pi$  bis zur ersten Ordnung in  $\xi$  und  $\xi'$ . Das System lässt sich dann durch mehrfache Differentiation in die Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators überführen („Harmonische Näherung“, § 3). Von dieser Näherung ausgehend, können die nächst höheren Potenzen in der Entwicklung von  $D_{\delta, \delta'}$  durch eine Störungsrechnung berücksichtigt werden (§ 4). Dieses Verfahren entspricht einer Entwicklung der Eigenwerte nach Potenzen von  $\sqrt{\frac{\epsilon}{V}}$ .

## § 2. Die Berechnung des Kernes $D_{\delta, \delta'}(x, x')$ .

Nach (12) und (8) ist  $D_{\delta, \delta'} = 0$  für  $|\delta - \delta'| > 2$ ; es sind daher nur folgende 5 Typen von „Matrixelementen“  $D_{\delta, \delta'}$  zu berechnen:

$$\begin{aligned} D_{\delta, \delta}(x, x') &= \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma} (\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma, \delta) \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{\sigma x'}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma} (\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma + 2, \delta) \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{(\sigma+2)x'}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma} (\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma - 2, \delta) \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{(\sigma-2)x'}{2}, \\ D_{\delta, \delta \pm 1}(x, x') &= \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma} (\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma + 1, \delta \pm 1) \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{(\sigma+1)x'}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma} (\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma - 1, \delta \pm 1) \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{(\sigma-1)x'}{2}, \\ D_{\delta, \delta \pm 2}(x, x') &= \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma} (\sigma, \delta | \bar{\Omega} | \sigma, \delta \pm 2) \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{\sigma x'}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Die Summation wird dabei immer über alle positiven  $\sigma$  erstreckt, welche der Bedingung (4a) genügen<sup>1)</sup>.

Zur Berechnung dieser Summen müssen die Ausdrücke für  $\bar{\Omega}$ , welche aus (8) zu entnehmen sind, in Partialbrüche bezüglich  $\sigma$  zerlegt werden. Wenn zunächst vorausgesetzt wird, dass  $\delta$  von den

<sup>1)</sup> Durch die einheitliche Wahl der Summationsgrenzen, welche für die folgende Rechnung zweckmäßig ist, wird in  $D_{\delta, \delta}$  für ungerades  $\delta$  (d. h.  $K, J > 0$ ) der Term

$$-\frac{1}{\pi} (1, \delta | \bar{\Omega} | -1, \delta) \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x'}{2}$$

hinzugefügt. Dieser Zusatz ist nach der Bemerkung auf S. 321 erlaubt, da er einer Änderung von  $(1, \delta | \bar{\Omega} | 1, \delta)$  gleichkommt.

Werten  $0, \pm 1, \pm 2$  verschieden ist, so zerfallen die  $\bar{Q}$  in Brüche mit linearen Nennern, z. B.:

$$(\sigma, \delta | \bar{Q} | \sigma, \delta) = 1 + \frac{[K(K+1) - \delta(\delta-1)][J(J+1) - \delta(\delta-1)]}{2\delta(\delta-1)} \left( \frac{1}{\sigma+\delta-1} - \frac{1}{\sigma-\delta+1} \right) + \frac{[K(K+1) - \delta(\delta+1)][J(J+1) - \delta(\delta+1)]}{2\delta(\delta+1)} \left( \frac{1}{\sigma-\delta-1} - \frac{1}{\sigma+\delta+1} \right). \quad (15)$$

Der Term  $+1$  steht nur in den 3 Matrixelementen  $(\sigma, \delta | \bar{Q} | \sigma, \delta)$ ,  $(\sigma, \delta | \bar{Q} | \sigma \pm 2, \delta)$ , die im Ausdruck für  $D_{\delta, \delta}$  auftreten. Diese Terme ergeben zusammengefasst:

wobei  $D_{\delta, \delta}^0(x, x') = (1 + 2 \cos x') \Delta_\delta(x, x')$ , (16)

$$\begin{aligned} \Delta_\delta(x, x') &= \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{\sigma > 0 \\ \sigma + \delta \text{ gerade}}} \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{\sigma x'}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} [\delta(x - x') - \bar{\delta}(x + x')] & \text{für } \delta \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{2} [\delta(x - x') - \delta(x + x')] & \text{für } \delta \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Hier bedeutet  $\delta(z)$  die periodische  $\delta$ -Funktion (Periode  $2\pi$ ),  $\bar{\delta}(z)$  die alternierende  $\delta$ -Funktion ( $\bar{\delta}(z) = -\bar{\delta}(z + 2\pi) = +\bar{\delta}(z + 4\pi)$ , Periode  $4\pi$ ). Die Beziehung (17) entspricht der Vollständigkeitsrelation des hier verwendeten Funktionensystems  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\sigma x}{2}$ ; es gilt nämlich für jede Funktion  $\Phi_\delta(x)$ , welche den Periodizitätsbedingungen (13) genügt:

$$\int_0^{2\pi} \Delta_\delta(x, x') \Phi_\delta(x') dx' = \Phi_\delta(x). \quad (18)$$

In der Integralgleichung (11) ergibt deshalb  $D_{\delta, \delta}^0(x, x')$  den Term

$$V(r)(1 + 2 \cos x) \Phi_\delta(x). \quad (19)$$

Der zweite Teil aus (15) liefert in (14) eingesetzt den Ausdruck

$$S = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{\sigma > 0 \\ \sigma + \delta \text{ gerade}}} \left( \frac{1}{\sigma + \delta - 1} - \frac{1}{\sigma - \delta + 1} \right) \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{\sigma x'}{2}.$$

Die beiden Terme können in eine einzige Summe, die sich von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstreckt, zusammengefasst werden:

$$S = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\sigma = -\infty \\ \sigma + \delta \text{ gerade}}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma + \delta - 1} \left[ \cos \frac{\sigma}{2} (x - x') - \cos \frac{\sigma}{2} (x + x') \right].$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\frac{\sigma + \delta - 1}{2} = s - \frac{1}{2}$$

( $s$  durchläuft bei geradem und ungeradem Wert von  $\delta$  alle ganzen Zahlen) und der Summenformel (vgl. II, S. 257)

$$E(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \frac{\sin(s-\frac{1}{2})z}{s-\frac{1}{2}} = \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{für } 0 < z < 2\pi, \\ -\frac{1}{2} & \text{für } -2\pi < z < 0, \end{cases} \quad (20)$$

(Periode  $4\pi$ )

erhält man in beiden Fällen:

$$S = \frac{1}{2} \left[ E(x-x') \sin \frac{\delta-1}{2} (x-x') - E(x+x') \sin \frac{\delta-1}{2} (x+x') \right]. \quad (21)$$

In entsprechender Weise können alle anderen Summen, in welchen *ungerade* Nenner ( $\sigma \pm \delta \pm 1$ ) auftreten, berechnet werden. Dabei ist wesentlich, dass immer zwei einzelne Summen mit Nennern der Form  $(\sigma + a)$  und  $(\sigma - a)$  mit derselben Funktion von  $K, J$  und  $\delta$  multipliziert erscheinen (vgl. Formel (8)); sie können deshalb in eine einzige Summe vereinigt und mit Hilfe der Formel (20) aufsummiert werden.

Anderseits lassen sich auch die Summen mit *geraden* Nennern ( $\sigma \pm \delta \pm 2$ )<sup>1)</sup> in derselben Art auf den bekannten Ausdruck

$$G(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin sz}{s} = \frac{1}{2} - \frac{z}{2\pi} \quad \text{für } 0 < z < 2\pi \quad (22)$$

(Periode  $2\pi$ )

zurückführen.

Auf diese Weise können die „Matrixelemente“ (14) unter der Voraussetzung  $\delta \neq 0, \pm 1, \pm 2$  berechnet werden. Für die diagonalen Elemente wird unter Berücksichtigung von (16):

$$\text{wobei} \quad D_{\delta, \delta}(x, x') = D_{\delta, \delta}^0 + D_{\delta, \delta}^1,$$

$$\begin{aligned} D_{\delta, \delta}^1 &= \frac{(K(K+1) - \delta(\delta-1))(J(J+1) - \delta(\delta-1))}{4\delta(\delta-1)} \\ &\quad \cdot \left[ E(x-x') \sin \left( \frac{\delta-1}{2} (x-x') \right) - E(x+x') \sin \left( \frac{\delta-1}{2} (x+x') \right) \right] \\ &+ \frac{(K(K+1) - \delta(\delta+1))(J(J+1) - \delta(\delta+1))}{4\delta(\delta+1)} \\ &\quad \cdot \left[ -E(x-x') \sin \left( \frac{\delta+1}{2} (x-x') \right) + E(x+x') \sin \left( \frac{\delta+1}{2} (x+x') \right) \right] \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> In diesen Summen tritt immer ein Term mit dem Nenner Null auf, der weggelassen wird; dies ist erlaubt, da er dem erweiterten System angehört (vgl. S. 320).

$$\begin{aligned}
& + \frac{(K+\delta)(K+\delta+1)(J+\delta)(J+\delta+1)}{4\delta(2\delta+1)} \\
& \cdot \left[ E(x-x') \sin \left( x - \frac{\delta+1}{2}(x-x') \right) - E(x+x') \sin \left( x - \frac{\delta+1}{2}(x+x') \right) \right] \\
& + \frac{(K-\delta)(K-\delta+1)(J-\delta)(J-\delta+1)}{4\delta(2\delta-1)} \\
& \cdot \left[ E(x-x') \sin \left( x + \frac{\delta-1}{2}(x-x') \right) - E(x+x') \sin \left( x + \frac{\delta-1}{2}(x+x') \right) \right] \\
& + \frac{(K+\delta)(K+\delta-1)(J+\delta)(J+\delta-1)}{4\delta(2\delta-1)} \\
& \cdot \left[ -G(x-x') \sin \left( x - \frac{\delta}{2}(x-x') \right) + G(x+x') \sin \left( x - \frac{\delta}{2}(x+x') \right) \right] \\
& + \frac{(K-\delta)(K-\delta-1)(J-\delta)(J-\delta-1)}{4\delta(2\delta+1)} \\
& \cdot \left[ -G(x-x') \sin \left( x + \frac{\delta}{2}(x-x') \right) + G(x+x') \sin \left( x + \frac{\delta}{2}(x+x') \right) \right]. \quad (23)
\end{aligned}$$

(Es gilt wegen der Symmetrie in den beiden Nukleonen  $D_{\delta,\delta}^1 = D_{-\delta,-\delta}^1$ ).

Bei den ausserdiagonalen  $D_{\delta,\delta'}$  gibt es keine Terme der Form (16):

$$D_{\delta,\delta'}^0 = 0, \quad D_{\delta,\delta'} = D_{\delta,\delta'}^1 \text{ für } \delta \neq \delta'.$$

Die Ausdrücke für  $D_{\delta,\delta+1}^1$  und  $D_{\delta,\delta-1}^1$  können in einer Formel geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
& D_{\delta,\delta+1}^1 = D_{-\delta,-\delta-1}^1 = \\
& A(\delta) \left\{ \frac{(K+\delta)(J+\delta)}{4\delta(2\delta+1)} \left[ E(x-x') \sin \left( \frac{\delta+1}{2}(x-x') - \frac{x'}{2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - E(x+x') \sin \left( \frac{\delta+1}{2}(x+x') + \frac{x'}{2} \right) \right] \right. \\
& + \frac{(K+\delta+2)(J+\delta+2)}{4(\delta+1)(2\delta+3)} \left[ -E(x-x') \sin \left( \frac{\delta+1}{2}(x-x') - \frac{x'}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. + E(x+x') \sin \left( \frac{\delta+1}{2}(x+x') + \frac{x'}{2} \right) \right] \right. \\
& + \frac{(K-\delta)(J-\delta)}{4\delta(\delta+1)} \left[ E(x-x') \sin \left( \frac{\delta+1}{2}(x-x') + \frac{x'}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. - E(x+x') \sin \left( \frac{\delta+1}{2}(x+x') - \frac{x'}{2} \right) \right] \right. \\
& + \frac{(K-\delta-1)(J-\delta-1)}{(2\delta+1)(2\delta+3)} \left[ -G(x-x') \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{\delta+1}{2}(x-x') \right) \right. \\
& \quad \left. \left. + G(x+x') \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{\delta+1}{2}(x+x') \right) \right] \right\}, \quad (24)
\end{aligned}$$

ebenso die Ausdrücke für  $D_{\delta, \delta+2}^1$  und  $D_{\delta, \delta-2}^1$ :

$$\begin{aligned} D_{\delta, \delta+2}^1 &= D_{-\delta, -\delta-2}^1 = \\ B(\delta) \frac{1}{4(2\delta+3)} &\left\{ \frac{1}{\delta+1} \left[ E(x-x') \sin \frac{\delta+1}{2}(x-x') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - E(x+x') \sin \frac{\delta+1}{2}(x+x') \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta+2} \left[ -G(x-x') \sin \frac{\delta+2}{2}(x-x') + G(x+x') \sin \frac{\delta+2}{2}(x+x') \right] \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Für die speziellen Werte  $\delta = 0, \pm 1, \pm 2$  sind diese Formeln für  $D_{\delta, \delta}^1$  zum Teil ungültig. In den Partialbruchzerlegungen vom Typus (15) treten jetzt auch in  $\sigma$  quadratische Nenner auf. Zur Berechnung der Summen müssen deshalb noch die folgenden Beziehungen verwendet werden<sup>1)</sup>:

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(s-\frac{1}{2})z}{(s-\frac{1}{2})^2} = \pi - |z|, \text{ für } -2\pi \leq z \leq +2\pi, \quad (20a)$$

$$(Periode 4\pi)$$

$$H(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos sz}{s^2} = \frac{(z-\pi)^2}{4\pi} - \frac{\pi}{12}, \text{ für } 0 \leq z \leq 2\pi. \quad (22a)$$

(Periode 2π)

Es zeigt sich, dass in (23), (24) und (25) nur diejenigen Ausdrücke ersetzt werden müssen, in welchen verschwindende Nenner auftreten.

Für  $\delta = 0$  erhält man an Stelle von (23):

$$\begin{aligned} D_{0,0}^1 &= \frac{K(K+1)+J(J+1)+K(K+1)J(J+1)}{2} \\ &\quad \cdot \left[ E(x-x') \sin \frac{x-x'}{2} - E(x+x') \sin \frac{x+x'}{2} \right] \\ &+ \frac{K(K+1)J(J+1)}{8} [F(x-x') - F(x+x')] \left[ \cos \frac{x-x'}{2} + \cos \frac{x+x'}{2} \right] \\ &+ \frac{K(K-1)J(J-1)}{4} [H(x-x') - H(x+x')] \cos x \\ &+ \frac{(K+J)(K+J+1)-2K^2J^2}{2} \left[ E(x-x') \sin \frac{x+x'}{2} - E(x+x') \sin \frac{x-x'}{2} \right] \\ &+ \frac{(K+J)(K+J-1)-2K^2J^2}{2} [-G(x-x') + G(x+x')] \sin x. \quad (23a) \end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Die Formeln (20) und (20a) entsprechen den bekannten Fourier-Reihen für die Euler'schen Polynome der Ordnungen 0 und 1, während (22) und (22a) die Reihen für die Bernoulli'schen Polynome der Ordnungen 1 und 2 darstellen. (Vgl. z. B. bei N. E. NÖRLUND, Differenzenrechnung, Verlag Springer 1924, die Formeln (9), S. 9; (27), S. 24; (77) und (77\*), S. 65; (78) und (78\*), S. 66.)

Für  $\delta = 1$  und  $\delta = -1$  müssen in (23) nur die beiden ersten Terme neu geschrieben werden:

$$\begin{aligned} D_{1,1}^1 &= D_{-1,-1}^1 = \frac{K(K+1)J(J+1)}{16} [-F(x-x') + F(x+x')] \\ &\quad + \frac{[K(K+1)-2][J(J+1)-2]}{8} \\ &\quad \cdot [-E(x-x') \sin(x-x') + E(x+x') \sin(x+x')] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (23b)$$

Die weiteren 4 Terme stimmen mit den 4 letzten in (23) überein.

In (24) hat man für  $\delta = 0$  den ersten und dritten Term zu ersetzen:

$$\begin{aligned} D_{0,1}^1 &= D_{0,-1}^1 = A(0) \left\{ \frac{2(K+J)-KJ}{4} [E(x+x') - E(x-x')] \sin \frac{x}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{KJ}{8} [F(x+x') - F(x-x')] \cos \frac{x}{2} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (24a)$$

für  $\delta = -1$  den zweiten und dritten Term:

$$\begin{aligned} D_{-1,0}^1 &= D_{1,0}^1 = \\ A(-1) &\left\{ -\frac{3KJ+K+J-1}{4} [E(x-x') + E(x+x')] \sin \frac{x'}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(K+1)(J+1)}{8} [F(x-x') + F(x+x')] \cos \frac{x'}{2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (24b)$$

Formel (25) ist ungültig für  $\delta = -1$  und  $\delta = -2$ :

$$\begin{aligned} D_{-1,+1}^1 &= D_{+1,-1}^1 = \frac{B(-1)}{4} \left\{ \frac{1}{4} [F(x+x') - F(x-x')] \right. \\ &\quad \left. + G(x+x') \sin \frac{x+x'}{2} - G(x-x') \sin \frac{x-x'}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} D_{-2,0}^1 &= D_{+2,0}^1 = -\frac{B(-2)}{4} \left\{ E(x-x') \sin \frac{x-x'}{2} - E(x+x') \sin \frac{x+x'}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [H(x-x') - H(x+x')] \right\}. \end{aligned} \quad (25b)$$

Für alle übrigen Werte von  $\delta$  bleiben die alten Formeln (23), (24) und (25) gültig.

### § 3. Die harmonische Näherung.

Mit dem in § 2 berechneten Kern  $D_{\delta,\delta'}(x, x')$  lautet jetzt das System (11) unter Berücksichtigung von (19):

$$\begin{aligned} \Phi_\delta''(x) &+ \left\{ \frac{W(r)}{\varepsilon} - \frac{V(r)}{\varepsilon} (1 + 2 \cos x) - \frac{\delta^2}{4} + 1 \right\} \Phi_\delta(x) \\ &- \frac{V(r)}{\varepsilon} \sum_{\delta'} \int_0^{2\pi} D_{\delta,\delta'}^1(x, x') \Phi_{\delta'}(x') dx' = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

\*

In dieser Schrödinger-Gleichung tritt, wie in I und II, die „Potentialfunktion“  $\frac{V}{\varepsilon} (1 + 2 \cos x)$  auf, welche (wegen  $\varepsilon \ll V$ ) ein tiefes Minimum („Potentialmulde“) bei  $x = \pi$  besitzt. Man kann daher zur Lösung ähnlich vorgehen wie bei der Mathieuschen Gleichung:  $\cos x$  und  $D_{\delta, \delta'}^1(x, x')$  werden nach Potenzen von  $\xi = x - \pi$  resp.  $\xi' = x' - \pi$  entwickelt. Hier werden zunächst nur die niedrigsten Potenzen beibehalten; es zeigt sich dann, dass die nächst höheren Potenzen nur eine kleine Störung der Eigenwerte bewirken.

Um die Entwicklung von  $D_{\delta, \delta'}^1(x, x')$  einfach schreiben zu können, werden die beiden unstetigen Funktionen  $C^+$  und  $C^-$  eingeführt:

$$\begin{aligned} C^\pm(\xi, \xi') &= E(\xi - \xi') \pm E(\xi + \xi') \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\xi - \xi'}{|\xi - \xi'|} \pm \frac{\xi + \xi'}{|\xi + \xi'|} \right), \quad \text{für } |\xi'|, |\xi| < \pi. \end{aligned} \quad (27)$$

Ferner seien Doppelvorzeichen verwendet, da die Entwicklungen der Ausdrücke der Form

$$\sin \frac{\delta-1}{2} (x + x')$$

je nach der Parität von  $\delta$  verschieden lauten: das obere Vorzeichen soll für ungerades  $\delta$ , das untere für gerades  $\delta$  gelten.

Bei der Entwicklung des „Diagonalteils“

$$D_{\delta, \delta}^1(\pi + \xi, \pi + \xi'), \quad \delta \neq 0, 1, -1,$$

bis zur 1. Ordnung in  $\xi$  und  $\xi'$  erhält man mit dieser Bezeichnung für die sechs Ausdrücke in eckigen Klammern aus (23) der Reihe nach:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta-1}{2} (\xi C^\pm - \xi' C^\mp), \quad -\frac{\delta+1}{2} (\xi C^\pm - \xi' C^\mp), \\ &\frac{1}{2} ((\delta-1) \xi C^\pm - (\delta+1) \xi' C^\mp), \quad \frac{1}{2} ((-\delta+1) \xi C^\pm + (\delta-1) \xi' C^\mp), \\ &\frac{1}{2} ((-\delta-2) \xi C^\pm + \delta \xi' C^\mp), \quad \frac{1}{2} ((\delta+2) \xi C^\pm - \delta \xi' C^\mp). \end{aligned}$$

Die sechs Terme in (23) können nun zusammengezogen werden; eine längere Rechnung ergibt den einfachen Ausdruck:

$$D_{\delta, \delta}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') \underset{?}{=} \frac{(K+J-1)(K+J)}{2} \xi C^\pm - \frac{(K+J+1)(K+J)}{2} \xi' C^\mp. \quad (28)$$

Diese Formel gilt zunächst nur für  $\delta \neq 0, 1, -1$ ; die entsprechende Entwicklung des Ausdrucks (23a) für  $D_{0,0}^1$  ergibt aber

$$D_{0,0}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') \underset{?}{=} \frac{(K+J-1)(K+J)}{2} \xi C^- - \frac{(K+J+1)(K+J)}{2} \xi' C^+ \quad (28a)$$

in Übereinstimmung mit Formel (28). Weiter erhält man aus (23b)

$$\begin{aligned} D_{1,1}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') &= D_{-1,-1}^1 \underset{\cong}{=} \frac{(K+J-1)(K+J)}{2} \xi C^+ \\ &\quad - \frac{(K+J+1)(K+J)}{2} \xi' C^- - \frac{\pi K(K+1)J(J+1)}{8}. \end{aligned} \quad (28b)$$

Es wird aber im Folgenden gezeigt werden, dass alle *stetigen* Terme in  $D_{\delta,\delta'}^1$  (mit  $\delta$  oder  $\delta' \neq 0$ ), in dieser Näherung also die konstanten und linearen Terme, keinen Einfluss auf die Eigenwerte haben, so dass auch der Ausdruck (28b) durch (28) ersetzt werden kann.

In der Formel (24) für die „ausserdiagonalen Elemente“  $D_{\delta,\delta+1}^1$  und  $D_{-\delta,-\delta-1}^1$ ,  $\delta \neq 0, -1$ , erhält man nach der Entwicklung für die vier Klammerausdrücke:

$$-C^\mp, +C^\mp, +C^\mp \text{ und } \begin{cases} -C^- - \frac{\xi'}{\pi} & \text{für } \delta \text{ ungerade,} \\ -C^+ + \frac{\xi}{\pi} & \text{für } \delta \text{ gerade.} \end{cases}$$

Bei der Addition der 4 Terme in (24) heben sich aber die  $C^\mp$ -Terme gerade fort, und es bleibt nur ein stetiger (in  $\xi$  bzw.  $\xi'$  linearer) Ausdruck übrig. Dasselbe gilt in den beiden Ausnahmefällen  $\delta = 0$  und  $\delta = -1$  nach (24a, b); man erhält:

$$\begin{aligned} D_{\delta,\delta+1}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') &= D_{-\delta,-\delta-1}^1 \\ &\underset{\cong}{=} A(\delta) \frac{(K-\delta-1)(J-\delta-1)}{\pi(2\delta+1)(2\delta+3)} \begin{cases} \cdot (-\xi') & \text{für } \delta \text{ ungerade,} \\ \cdot (+\xi) & \text{für } \delta \text{ gerade,} \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

wobei für  $\delta = 0$  noch der Term

$$A(0) \frac{\pi K J}{8} \xi, \quad (29a)$$

für  $\delta = -1$  der Term

$$-A(-1) \frac{\pi(K+1)(J+1)}{8} \xi' \quad (29b)$$

zu addieren ist.

Schliesslich erhält man für die Entwicklung der beiden Klammerausdrücke in (25) für  $D_{\delta,\delta+2}$  und  $D_{-\delta,-\delta-2}$ ,  $\delta \neq -1, -2$ , die Werte

$$\frac{\delta+1}{2} (\xi C^\pm - \xi' C^\mp), \quad \frac{\delta+2}{2} (-\xi C^\pm + \xi' C^\mp)$$

und nach Addition:

$$D_{\delta,\delta+2}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') = D_{-\delta,-\delta-2}^1 \underset{\cong}{=} 0. \quad (30)$$

Für den Ausnahmewert  $\delta = -1$  gilt nach (25a)

$$D_{-1,+1}^1 = D_{+1,-1}^1 \not\cong -\frac{\pi K(K+1)J(J+1)}{8} \quad (30a)$$

und für  $\delta = -2$  nach (25b)

$$D_{-2,0}^1 = D_{2,0}^1 \not\cong 0 . \quad (30b)$$

Sieht man von den konstanten und linearen Termen ab, so folgt:

$$D_{\delta,\delta'}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') \not\cong 0, \text{ für } \delta \neq \delta',$$

während für  $\delta = \delta'$  der Ausdruck (28) gilt. Führt man diese Werte in (26) ein, so zerfällt dieses Gleichungssystem in  $(2K+1)$ , resp.  $(2J+1)$  einzelne Gleichungen. Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$\alpha = \frac{W(r) + V(r)}{\epsilon}, \quad \beta = \sqrt{\frac{V(r)}{\epsilon}} \quad (\text{d. h. } \beta \gg 1), \quad (31)$$

$$\Phi(\pi + \xi) = \varphi(\xi), \quad \Gamma_\delta^0 = - \int_0^\pi \varphi_\delta(\xi) d\xi, \quad \Gamma_\delta^1 = - \int_0^\pi \xi \varphi_\delta(\xi) \delta \xi.$$

Der Term  $\left(\frac{\delta^2}{4} - 1\right)\Phi_\delta$  in (26) wird einstweilen vernachlässigt, da er sich von derselben Größenordnung erweist, wie die erst im nächsten Abschnitt zu behandelnden Störungsglieder. Unter Berücksichtigung der Definition (27) und der Periodizitätseigenschaften (13) wird dann:

Für  $\delta$  gerade ( $\varphi_\delta(\xi) = -\varphi_\delta(-\xi)$ ):

$$\varphi_\delta''(\xi) + (\alpha - \beta^2 \xi^2) \varphi_\delta - \beta^2 (K+J-1)(K+J) \xi \left\{ \int_0^\xi \varphi_\delta(\xi') d\xi' + \Gamma_\delta^0 \right\}$$

$$+ \beta^2 (K+J+1)(K+J) \int_0^\xi \xi' \varphi_\delta(\xi') d\xi' = 0, \quad (32a)$$

für  $\delta$  ungerade ( $\varphi_\delta(\xi) = +\varphi_\delta(-\xi)$ ):

$$\varphi_\delta''(\xi) + (\alpha - \beta^2 \xi^2) \varphi_\delta - \beta^2 (K+J-1)(K+J) \xi \int_0^\xi \varphi_\delta(\xi') d\xi'$$

$$+ \beta^2 (K+J+1)(K+J) \left\{ \int_0^\xi \xi' \varphi_\delta(\xi') d\xi' + \Gamma_\delta^1 \right\} = 0, \quad (32b)$$

Differenziert man diese Gleichungen  $(K+J)$ -mal, so erhält man

in beiden Fällen ( $\varphi^{(N)}$  bedeutet die  $N$ -fache Ableitung von  $\varphi$ ;  
 $\varphi^{(0)} = \varphi$ ):

$$\varphi_{\delta}^{(K+J+2)} + (\alpha - \beta^2 \xi^2) \varphi_{\delta}^{(K+J)} = 0. \quad (33)$$

Daraus folgt, dass die Funktion

$$\psi_{\delta}(\xi) = \varphi_{\delta}^{(K+J)} \quad (34)$$

mit den Paritätseigenschaften

$$\begin{aligned} \psi_{\delta}(\xi) &= \psi_{\delta}(-\xi) && \text{für } K+J+\delta = \text{ungerade}, \\ \psi_{\delta}(\xi) &= -\psi_{\delta}(-\xi) && \text{für } K+J+\delta = \text{gerade} \end{aligned} \quad (35)$$

der Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators

$$\psi_{\delta}'' + (\alpha - \beta^2 \xi^2) \psi_{\delta} = 0 \quad (36)$$

genügt. Die Eigenwerte lauten also:

$$\alpha_n^{\delta} = \beta(2n+1), (n \text{ ganzzahlig } \geq 0). \quad (37)$$

Da die dazugehörigen Eigenfunktionen die Beziehung (35) erfüllen müssen, gilt für die Quantenzahlen  $n$  und  $\delta$  die Bedingung

$$K+J+\delta+n = \text{ungerade Zahl}, \quad (38)$$

wobei  $-J \leq \delta \leq +J$ , resp.  $-K \leq \delta \leq +K$ .

(37) und (38) stellen die Verallgemeinerung der nur für  $J=0$  gültigen Formeln (29) und (31) aus II, S. 260 dar. Die vielfache Entartung dieser Eigenwerte wird erst in der zweiten Näherung zum Teil aufgehoben.

Es ist noch zu bemerken, dass die weggelassenen konstanten und linearen Terme in  $D_{\delta, \delta'}^1$  (vgl. (28b), (29), (29a, b) und (30a)) in den Gleichungen (32a, b) Zusätze ergeben, welche bei der Differentiation im Falle  $K+J \geq 2$  herausfallen; für  $K+J < 2$  (d. h. wegen (1a)  $\delta = 0$ ) treten solche Terme nicht auf. Zusätze ähnlicher Form erhält man, wenn gemäss der Bemerkung S. 321 die Matrixelemente

$$(\sigma, \delta | \bar{Q} | \sigma', \delta'), \quad \sigma < \sigma_0$$

willkürlich abgeändert werden; in (26) ergibt dies den stetigen Term

$$-\frac{V(r)}{\varepsilon} \sum_{\delta'} \sum_{\sigma < \sigma_0} \sin \frac{\sigma x}{2} \int_0^{2\pi} f_{\sigma, \delta, \delta'}(x') \Phi_{\delta'}(x') dx',$$

wobei  $\sigma$  noch durch (4a) und (1a) eingeschränkt ist und  $f_{\sigma, \delta, \delta'}(x)$  willkürlich wählbare Funktionen sind. Nach der Entwicklung erhält man für  $K+J \geq 2$  in (32a, b) die Zusätze:

$$\beta^2 \xi c_0 \text{ für } \delta \text{ gerade, } \beta^2 c_1 \text{ für } \delta \text{ ungerade.}$$

( $c_0$  und  $c_1$  sind dabei willkürliche Konstanten.) Das heisst aber, dass die Konstanten  $\Gamma_\delta^0$  und  $\Gamma_\delta^1$  in (32a, b) beliebig abgeändert werden können. Da die Eigenwerte (37)  $\alpha_n^\delta$  von den „ $\Gamma$ -Termen“ unabhängig sind, hat auch die hier betrachtete Abänderung von  $\bar{Q}$  keinen Einfluss auf  $\alpha_n^\delta$ ; d. h. nach S. 321: Die Eigenwerte (37) sind „richtige Eigenwerte“.

In II, S. 265 wurde für den Fall  $J = 0$  gezeigt, dass aus den exponentiell abklingenden Oszillatoreigenfunktionen der Gleichung (36) durch Integration und geeignete Fortsetzung in das ganze Intervall  $-\pi < \xi < +\pi$  Lösungen der ursprünglichen Gleichung (26) konstruiert werden können; auf diese Frage soll hier nicht eingegangen werden. Die vorgenommene Entwicklung nach  $\xi$  und  $\xi'$  und die darauf beruhende Oszillatornäherung ist natürlich nur brauchbar, wenn das Intervall, in welchem die Oszillatoreigenfunktionen  $\psi_\delta$  merklich von Null verschieden sind, klein gegen 1 ist. Dies bedingt:

$$n \ll \beta = \sqrt{\frac{V(r)}{\varepsilon}}. \quad (39)$$

#### § 4. Die Störungsrechnung.

Berücksichtigt man in der Entwicklung von  $D_{\delta, \delta'}^1$  die nächsthöheren Potenzen von  $\xi$  und  $\xi'$ , so erhält man aus (23), (24) und (25) unter Verwendung der in § 3 eingeführten Bezeichnungsweise<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} D_{\delta, \delta}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') &\underset{\sim}{=} \frac{(K+J)(K+J-1)}{2} \xi C^\pm - \frac{(K+J)(K+J+1)}{2} \xi' C^\mp \\ &+ \frac{\xi^3 C^\pm}{96} \left\{ \delta^4 + \delta^2 [-5(K^2 + J^2) - 8KJ + 15(K+J) - 11] \right. \\ &\quad \left. + K^2 J^2 + 11(K^2 J + KJ^2) - 8(K^2 + J^2) - 27KJ + 8(K+J) \right\} \\ &+ \frac{\xi^2 \xi' C^\mp}{32} \left\{ -\delta^4 + \delta^2 [5(K^2 + J^2) + 8KJ - 7(K+J) - 1] \right. \\ &\quad \left. - K^2 J^2 - 7(K^2 J + KJ^2) + 2(K^2 + J^2) + 3KJ + 2(K+J) \right\} \\ &+ \frac{\xi \xi'^2 C^\pm}{32} \left\{ \delta^4 + \delta^2 [-5(K^2 + J^2) - 8KJ - (K+J) + 5] \right. \\ &\quad \left. + K^2 J^2 + 3(K^2 J + KJ^2) + 5KJ \right\} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Das obere Vorzeichen gilt stets für ungerades, das untere für gerades  $\delta$ . Der erste Ausdruck in eckiger Klammer aus (23) ergibt z. B.:

$$\begin{aligned} E(\xi - \xi') \sin \frac{\delta - 1}{2} (\xi - \xi') \pm E(\xi + \xi') \sin \frac{\delta - 1}{2} (\xi + \xi') &\underset{\sim}{=} \frac{\delta - 1}{2} (\xi C^\pm - \xi' C^\mp) \\ &+ \frac{(\delta - 1)^3}{48} (-\xi^3 C^\pm + 3\xi^2 \xi' C^\mp - 3\xi \xi'^2 C^\pm + \xi'^3 C^\mp). \end{aligned}$$

$$+ \frac{\xi'^3 C^\mp}{96} \left\{ -\delta^4 + \delta^2 [5(K^2 + J^2) + 8KJ + 9(K+J)-1] \right. \\ \left. - K^2 J^2 + (K^2 J + KJ^2) + 2(K^2 + J^2) + 3KJ + 2(K+J) \right\}, \quad (40)$$

$$D_{\delta, \delta+1}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') = D_{-\delta, -\delta-1}^1 \stackrel{\cong}{=} -\frac{A(\delta)}{8} \left\{ (K+J-1) \xi^2 C^\mp \right. \\ \left. - 2(K+J) \xi \xi' C^\pm + (K+J+1) \xi'^2 C^\mp \right\}, \quad (41)$$

$$D_{\delta, \delta+2}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') = D_{-\delta, -\delta-2}^1 \stackrel{\cong}{=} \frac{B(\delta)}{192} \left\{ \xi^3 C^\pm - 3\xi^2 \xi' C^\mp \right. \\ \left. + 3\xi \xi'^2 C^\pm - \xi'^3 C^\mp \right\}. \quad (42)$$

Dabei sind die stetigen Terme der Form

$$\text{const} \cdot \xi^i \xi'^k, \quad i+k \leq 3, \quad (43)$$

wegelassen worden; dann gelten diese Entwicklungen nach (23a, b), (24a, b) und (25a, b) auch in den Ausnahmefällen  $\delta = 0, \pm 1, \pm 2$ . Es wird später am Beispiel der „ $\Gamma$ -Terme“ gezeigt werden, dass die stetigen Terme auch in dieser Näherung keinen Einfluss auf die Eigenwerte haben.

Der entwickelte Kern ist nun in (26) einzusetzen; unter Verwendung der Abkürzungen (31) und nach entsprechender Entwicklung des  $\cos x$  wird:

$$\varphi''_\delta(\xi) + \left( \alpha - \frac{\delta^2}{4} + 1 - \beta^2 \xi^2 + \beta^2 \frac{\xi^4}{12} \right) \varphi_\delta(\xi) \\ - \beta^2 \sum_{\delta'} \int_{-\pi}^{+\pi} D_{\delta, \delta'}^1(\pi + \xi, \pi + \xi') \varphi_{\delta'}(\xi') d\xi' = 0. \quad (44)$$

Dann hat man wieder zum  $(K+J)$ -fach differenzierten System überzugehen; man erhält dadurch die Oszillatorgleichung (33) mit zusätzlichen Störungstermen. Dabei sollen die „ $\Gamma$ -Terme“ zunächst weggelassen werden (vgl. S. 337); für  $K+J \geq 4$  fallen diese Terme, gleichwie die stetigen Zusätze (43), bei der Differentiation ohnedies immer heraus. Die Gleichungen haben dann für gerades und ungerades  $\delta$  dieselbe Form. Nach längerer Rechnung erhält man<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Zur Durchführung der Differentiation ist es zweckmäßig, den Ausdruck (40) in einzelne Terme wie z. B.

$$\frac{1}{96} (\xi^3 C^\pm - 3\xi^2 \xi' C^\mp + 3\xi \xi'^2 C^\pm - \xi'^3 C^\mp) \\ \cdot [\delta^4 - \delta^2 (K^2 + J^2 + K + J - 1) + K^2 J^2 + K^2 J + KJ^2 + KJ]$$

zu zerlegen.

$$\begin{aligned}
& \varphi_{\delta}^{(K+J+2)} + (\alpha - \beta^2 \xi^2) \varphi_{\delta}^{(K+J)} = \left( \frac{\delta^2}{4} - 1 \right) \varphi_{\delta}^{(K+J)} - \beta^2 \frac{\xi^4}{12} \varphi_{\delta}^{(K+J)} \\
& + \beta^2 \left\{ \frac{K(K+1)+J(J+1)-2\delta^2}{4} \xi [\xi \varphi_{\delta}^{(K+J-2)} - \varphi_{\delta}^{(K+J-3)}] \right. \\
& + \frac{(K+J)(K^2+J^2-KJ-1)}{12} [2\xi \varphi_{\delta}^{(K+J-3)} - 3 \varphi_{\delta}^{(K+J-4)}] \\
& + \frac{(K+\delta+1)(K-\delta)(J+\delta+1)(J-\delta)+(K-\delta+1)(K+\delta)(J-\delta+1)(J+\delta)}{16} \varphi_{\delta}^{(K+J-4)} \\
& + \frac{A(\delta)}{2} [\xi \varphi_{\delta+1}^{(K+J-2)} - \varphi_{\delta+1}^{(K+J-3)}] + \frac{A(-\delta)}{2} [\xi \varphi_{\delta-1}^{(K+J-2)} - \varphi_{\delta-1}^{(K+J-3)}] \\
& \left. + \frac{B(\delta)}{16} \varphi_{\delta+2}^{(K+J-4)} + \frac{B(-\delta)}{16} \varphi_{\delta-2}^{(K+J-4)} \right\}. \tag{45}
\end{aligned}$$

Die Störungsterme sind hier auf der rechten Seite zusammengefasst. Da ihr Einfluss auf die Eigenwerte  $\alpha$  nur in einer ersten Näherung zu berücksichtigen ist, kann man  $\varphi_{\delta}$  in diesen Termen durch Lösungen des ungestörten Systems ersetzen. Zu diesem Zweck lasse man in (44) alle Terme höherer Ordnung fort (man erhält dann ein System der Form (32)) und differenziere nur  $(K+J-1)$ - resp.  $(K+J-2)$ -fach anstatt  $(K+J)$ -fach; dies ergibt bis auf Terme höherer Ordnung für  $K+J \geq 4$  die Beziehungen:

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \alpha - \beta^2 \xi^2 \right) \varphi_{\delta}^{(K+J-1)} + 2\beta^2 [\xi \varphi_{\delta}^{(K+J-2)} - \varphi_{\delta}^{(K+J-3)}] + \dots = 0, \tag{46}$$

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \alpha - \beta^2 \xi^2 \right) \varphi_{\delta}^{(K+J-2)} + 2\beta^2 [2\xi \varphi_{\delta}^{(K+J-3)} - 3 \varphi_{\delta}^{(K+J-4)}] + \dots = 0, \tag{47}$$

durch welche die Störungsterme in eckigen Klammern aus (45) eliminiert werden können. Im Falle der Terme, welche  $\varphi_{\delta+1}$  und  $\varphi_{\delta-1}$  enthalten, muss aber die Näherung noch einen Schritt weitergeführt werden; denn diese Terme geben zwar, wie aus dem Folgenden hervorgeht, in der ersten Näherung keine Eigenwertstörung, dagegen zeigt sich, dass sie in zweiter Näherung eine Störung liefern, die von derselben Größenordnung ist, wie diejenige der übrigen Störungsterme in erster Näherung. Man behält deshalb in (44) noch die Störungsoperatoren niedrigster Ordnung  $D_{\delta, \delta+1}^1$  und  $D_{\delta, \delta-1}^1$  (vgl. (41)) bei und geht wieder zum  $(K+J-1)$ -fach differenzierten System über. Damit erhält man wieder die Beziehung

(46), wobei die Störungsterme niedrigster Ordnung hinzugefügt sind:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \alpha - \beta^2 \xi^2 \right) \varphi_{\delta}^{(K+J-1)} + 2 \beta^2 [\xi \varphi_{\delta}^{(K+J-2)} - \varphi_{\delta}^{(K+J-3)}] \\ &= \frac{\beta^2}{2} \left\{ A(\delta) [\xi \varphi_{\delta+1}^{(K+J-3)} - 2 \varphi_{\delta+1}^{(K+J-4)}] \right. \\ & \quad \left. + A(-\delta) [\xi \varphi_{\delta-1}^{(K+J-3)} - 2 \varphi_{\delta-1}^{(K+J-4)}] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

Nun schreibt man in dieser Beziehung  $\delta \pm 1$  an Stelle von  $\delta$  und ersetzt damit die Terme  $[\xi \varphi_{\delta \pm 1}^{(K+J-2)} - \varphi_{\delta \pm 1}^{(K+J-3)}]$  in (45); dies ergibt:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \alpha - \beta^2 \xi^2 \right) \left( \varphi_{\delta}^{(K+J)} + \frac{A(\delta)}{4} \varphi_{\delta+1}^{(K+J-1)} + \frac{A(-\delta)}{4} \varphi_{\delta-1}^{(K+J-1)} \right) \\ &= \beta^2 \left\{ \frac{A(\delta) A(\delta+1)}{8} [\xi \varphi_{\delta+2}^{(K+J-3)} - 2 \varphi_{\delta+2}^{(K+J-4)}] \right. \\ & \quad + \frac{A(\delta) A(-\delta-1) + A(-\delta) A(\delta-1)}{8} [\xi \varphi_{\delta}^{(K+J-3)} - 2 \varphi_{\delta}^{(K+J-4)}] \\ & \quad \left. + \frac{A(-\delta) A(-\delta+1)}{8} [\xi \varphi_{\delta-2}^{(K+J-3)} - 2 \varphi_{\delta-2}^{(K+J-4)}] \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (49)$$

wobei die übrigen Störungsterme aus (45) mit  $\varphi_{\delta}, \varphi_{\delta \pm 2}$  nicht mehr neu angegeben wurden. In den neuen Störungstermen auf der rechten Seite von (49) kann nun die ungestörte Eigenfunktion eingesetzt werden; verwendet man hiefür die Beziehung (47), so erhält man aus (49):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \alpha - \beta^2 \xi^2 \right) \chi_{\delta}^{(K+J)} = -\beta^2 \left\{ \frac{A(\delta) A(\delta+1)}{16} \varphi_{\delta+2}^{(K+J-4)} \right. \\ & \quad + \frac{A(\delta) A(-\delta-1) + A(-\delta) A(\delta-1)}{16} \varphi_{\delta}^{(K+J-4)} \\ & \quad \left. + \frac{A(-\delta) A(-\delta+1)}{16} \varphi_{\delta-2}^{(K+J-4)} \right\} + \dots; \end{aligned} \quad (50)$$

dabei ist

$$\begin{aligned} \chi_{\delta}^{(K+J)} &= \varphi_{\delta}^{(K+J)} + \frac{A(\delta)}{4} \varphi_{\delta+1}^{(K+J-1)} + \frac{A(-\delta)}{4} \varphi_{\delta-1}^{(K+J-1)} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{A(\delta) A(\delta+1)}{16} \varphi_{\delta+2}^{(K+J-2)} + \frac{A(\delta) A(-\delta-1) + A(-\delta) A(\delta-1)}{16} \varphi_{\delta}^{(K+J-2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{A(-\delta) A(-\delta+1)}{16} \varphi_{\delta-2}^{(K+J-2)} \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

Nach der Definition (8a) gilt aber:

$$\begin{aligned} A(\delta)A(\delta+1) &= B(\delta), \\ A(\delta)A(-\delta-1) &= (K+\delta+1)(K-\delta)(J+\delta+1)(J-\delta), \end{aligned} \quad (52)$$

d. h. die Störungsterme in (50) heben sich gegen einige der alten Terme, die aus (45) zu entnehmen sind, fort. Das System heisst jetzt:

$$\begin{aligned} \chi_{\delta}^{(K+J+2)} + (\alpha - \beta^2 \xi^2) \chi_{\delta}^{(K+J)} &= \left( \frac{\delta^2}{4} - 1 \right) \varphi_{\delta}^{(K+J)} - \frac{\beta^2 \xi^4}{12} \varphi_{\delta}^{(K+J)} \\ &+ \beta^2 \left\{ \frac{K(K+1)+J(J+1)-2\delta^2}{4} \xi \left[ \xi \varphi_{\delta}^{(K+J-2)} - \varphi_{\delta}^{(K+J-3)} \right] \right. \\ &\left. + \frac{(K+J)(K^2+J^2-KJ-1)}{12} [2\xi \varphi_{\delta}^{(K+J-3)} - 3\varphi_{\delta}^{(K+J-4)}] \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Die beiden Ausdrücke in eckiger Klammer werden noch mit Hilfe von (46) und (47) eliminiert, wobei der Faktor  $\xi$  vor der ersten Klammer zu beachten ist; dies ergibt:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \alpha - \beta^2 \xi^2 \right) \Psi_{\delta}^{(K+J)} &= \left( \frac{\delta^2}{4} - 1 \right) \varphi_{\delta}^{(K+J)} - \beta^2 \frac{\xi^4}{12} \varphi_{\delta}^{(K+J)} \\ &+ \frac{K(K+1)+J(J+1)-2\delta^2}{4} \varphi_{\delta}^{(K+J)}, \end{aligned} \quad (54)$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi_{\delta}^{(K+J)} &= \chi_{\delta}^{(K+J)} + \frac{K(K+1)+J(J+1)-2\delta^2}{8} \xi \varphi_{\delta}^{(K+J-1)} \\ &+ \frac{(K+J)(K^2+J^2-KJ-1)}{24} \varphi_{\delta}^{(K+J-2)}. \end{aligned} \quad (55)$$

Auf der rechten Seite von (54) kann nun  $\varphi_{\delta}$  bis auf Störungsterme höherer Ordnung durch  $\Psi_{\delta}$  ersetzt werden; damit sind der erste und dritte Störungsterm in (54) auf Diagonalform gebracht, während die Eigenwertstörung des zweiten Terms aus der Theorie der Mathieugleichung bekannt ist. Man erhält also für die Eigenwerte in zweiter Näherung:

$$\alpha_n^{\delta} = \beta(2n+1) + \frac{K(K+1)+J(J+1)-\delta^2}{4} - \frac{n(n+1)}{8} - \frac{17}{16}. \quad (56)$$

Dabei gelten für die Quantenzahlen  $n$  und  $\delta$  wegen der Paritäts-eigenschaften von  $\Psi_{\delta}$  (vgl. (55) und (51)) wieder die Bedingungen (38). Für  $J=0$  (d. h.  $\delta=0$ ) ergibt (56) die bereits bekannte Formel (44) aus II, S. 264.

Für  $K + J < 4$  müssen die vorangehenden Rechnungen noch ergänzt werden; z. B. ergibt der Störungsoperator aus der zweiten Zeile von (40) in (44) eingesetzt für gerades  $\delta$  den Ausdruck

$$\text{const} \cdot \xi^3 \int_0^\pi C^-(\xi, \xi') \varphi_\delta(\xi') d\xi' = \text{const} \cdot \left\{ \xi^3 \int_0^\xi \varphi_\delta(\xi') d\xi' + \xi^3 I_\delta^0 \right\},$$

wobei die Abkürzung (31) verwendet wurde. Der „ $I$ -Term“, welcher bisher nicht berücksichtigt wurde, fällt beim Übergang zum differenzierten System (45) für  $K + J < 4$  nicht mehr heraus; dennoch wird sich zeigen, dass Formel (56) auch in diesem Fall gültig ist. Da die Werte  $K + J = 0$  und  $K + J = 1$  (d. h.  $J$  oder  $K = 0$ ) schon behandelt wurden (vgl. II, § 2), sollen hier nur die beiden Fälle

$$K + J = 2, K + J = 3 \quad (57)$$

diskutiert werden. In (45) sind dann rechts die folgenden Terme hinzuzufügen<sup>1)</sup>:

Für  $\delta$  gerade:

$$\begin{aligned} & \beta^2 \xi^{(K+J-2)} \left\{ I_\delta^0 \left[ -(K+J)(K+J-1) - \frac{\delta^2}{2} ((K+J)(K+J-4) + 3) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{KJ}{4} (5(K+J)-6) \right] \right. \\ & + I_\delta^0 \frac{(K+\delta+1)(K-\delta)(J+\delta+1)(J-\delta) + (K-\delta+1)(K+\delta)(J-\delta+1)(J+\delta)}{16} \\ & \left. + I_{\delta+2}^0 \frac{B(\delta)}{16} + I_{\delta-2}^0 \frac{B(-\delta)}{16} \right\}, \end{aligned} \quad (45a)$$

wobei  $\xi^{(N)} = 0$  für  $N \geq 2$ ,  $\xi^{(N)} = 1$  für  $N = 1$ ,  $\xi^{(N)} = \xi$  für  $N = 0$ ,

für  $\delta$  ungerade:

$$\begin{aligned} & \beta^2 \xi^{(K+J-1)} \left\{ I_\delta^1 \left[ \frac{K+J}{4} ((K+J+1)-3KJ) + \frac{\delta^2}{2} (K+J)(K+J-2) \right] \right. \\ & - I_\delta^1 \frac{(K+\delta+1)(K-\delta)(J+\delta+1)(J-\delta) + (K-\delta+1)(K+\delta)(J-\delta+1)(J+\delta)}{16} \\ & - I_{\delta+1}^0 \frac{A(\delta)}{2} (K+J-1) - I_{\delta-1}^0 \frac{A(-\delta)}{2} (K+J-1) \\ & \left. - I_{\delta+2}^1 \frac{B(\delta)}{16} - I_{\delta-2}^1 \frac{B(-\delta)}{16} \right\}. \end{aligned} \quad (45b)$$

<sup>1)</sup> Die Koëffizienten von  $\xi^3 C^\pm$  und  $\xi^2 \xi' C^\mp$  aus (40), welche hier auftreten, werden in einer für die folgende Rechnung zweckmässigen Form geschrieben. In (45) und den folgenden Formeln bedeuten  $\varphi^{(-1)}$  und  $\varphi^{(-2)}$  die Integrale:

$$\varphi^{(-1)} = \int_0^\xi \varphi(\xi') d\xi', \quad \varphi^{(-2)} = \int_0^\xi \varphi^{(-1)}(\xi') d\xi'.$$

Anderseits sind auch in den Relationen (46), (47) und (48), mit welchen die Störungsterme in (45) umgeformt werden, die folgenden „ $\Gamma$ -Terme“ auf der rechten Seite hinzuzufügen:

Für  $\delta$  gerade:

$$\beta^2 \xi^{(K+J-1)} \Gamma_\delta^0 (K+J)(K+J-1), \quad (46a)$$

$$\beta^2 \xi^{(K+J-2)} \Gamma_\delta^0 (K+J)(K+J-1), \quad (47a)$$

$$\begin{aligned} & \beta^2 \xi^{(K+J-1)} \left\{ \Gamma_\delta^0 (K+J)(K+J-1) \right. \\ & \quad \left. + \Gamma_{\delta+1}^1 \frac{A(\delta)}{2} (K+J) + \Gamma_{\delta-1}^1 \frac{A(-\delta)}{2} (K+J) \right\}, \end{aligned} \quad (48a)$$

für  $\delta$  ungerade ((46) erhält keinen Zusatz):

$$-\beta^2 \xi^{(K+J-1)} \Gamma_\delta^1 (K+J)(K+J+1), \quad (47b)$$

$$-\beta^2 \xi^{(K+J-2)} (K+J-1) \left[ \Gamma_{\delta+1}^0 \frac{A(\delta)}{2} + \Gamma_{\delta-1}^0 \frac{A(-\delta)}{2} \right]. \quad (48b)$$

Diese Zusätze sind nun in allen früheren Rechnungen zu berücksichtigen; dann erhält man in (50) auf der rechten Seite die „ $\Gamma$ -Terme“:

$$\begin{aligned} & -\beta^2 \xi^{(K+J-2)} \left[ 2(K+J-1) - \frac{(K+J)(K+J-1)}{2} \right] \left[ \frac{A(\delta) A(\delta+1)}{16} \Gamma_{\delta+2}^0 \right. \\ & \quad \left. + \frac{A(\delta) A(-\delta-1) + A(-\delta) A(\delta-1)}{16} \Gamma_\delta^0 + \frac{A(-\delta) A(-\delta+1)}{16} \Gamma_{\delta-2}^0 \right] \\ & \quad + \dots, \end{aligned} \quad (50a)$$

bzw.:

$$\begin{aligned} & \beta^2 \xi^{(K+J-1)} \left\{ \left[ (K+J)(K+J-1) - 2(K+J-1) \right] \left[ \Gamma_{\delta+1}^0 \frac{A(\delta)}{4} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Gamma_{\delta-1}^0 \frac{A(-\delta)}{4} \right] \right. \\ & \quad \left. + \left[ 2(K+J) - \frac{(K+J)(K+J+1)}{2} \right] \left[ \frac{A(\delta) A(\delta+1)}{16} \Gamma_{\delta+2}^1 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{A(\delta) A(-\delta-1) + A(-\delta) A(\delta-1)}{16} \Gamma_\delta^1 + \frac{A(-\delta) A(-\delta+1)}{16} \Gamma_{\delta-2}^1 \right] \right\}, \\ & \quad + \dots, \end{aligned} \quad (50b)$$

wobei die Terme aus (45a, b), welche  $\Gamma_\delta$  und  $\Gamma_{\delta\pm 2}$  enthalten, nicht mehr neu angegeben wurden. In (50b) verschwindet der Koeffizient von  $\Gamma_{\delta\pm 1}^0$  für die beiden Werte (57) von  $K+J$ , während sich die

übrigen Terme in (50a, b) unter Berücksichtigung von (52) gegen die entsprechenden Terme aus (45a, b) fortheben. In (53) ist also nur noch der „ $\Gamma$ -Term“ aus den ersten Zeilen von (45a) resp. (45b) hinzuzufügen. Nun wurden nochmals die Relationen (46) und (47) benutzt; mit den „ $\Gamma$ -Terminen“ (46a) und (47a, b) erhält man deshalb in (54) die Zusätze:

Für  $\delta$  gerade:

$$\begin{aligned} \beta^2 \Gamma_\delta^0 \left\{ \xi \cdot \xi^{(K+J-1)} \frac{K(K+1)+J(J+1)-2\delta^2}{8} (K+J)(K+J-1) \right. \\ + \xi^{(K+J-2)} \frac{(K+J)(K^2+J^2-KJ-1)}{24} (K+J)(K+J-1) \\ + \xi^{(K+J-2)} \left[ -(K+J)(K+J-1) - \frac{\delta^2}{2} \{ (K+J)(K+J-4)+3 \} \right. \\ \left. \left. + \frac{KJ}{4} \{ 5(K+J)-6 \} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (54a)$$

für  $\delta$  ungerade:

$$\begin{aligned} \beta^2 \Gamma_\delta^1 \xi^{(K+J-1)} \left\{ - \frac{(K+J)(K^2+J^2-KJ-1)}{24} (K+J)(K+J+1) \right. \\ \left. + \frac{K+J}{4} [(K+J+1)-3KJ] + \frac{\delta^2}{2} (K+J)(K+J-2) \right\}. \end{aligned} \quad (54b)$$

Jetzt verifiziert man leicht, dass die Koëffizienten von  $\Gamma_\delta^0$  resp.  $\Gamma_\delta^1$  für alle nach (57) in Betracht kommenden Werte von  $K$ ,  $J$  und  $\delta$  verschwinden; d. h. (54) und damit die Eigenwerte (56) bleiben auch bei Berücksichtigung der „ $\Gamma$ -Terme“ ungeändert.

## § 5. Diskussion der Ergebnisse.

Für die adiabatischen Potentialkurven  $W(r)$  des Zwei-Nukleon-Problems bei Vernachlässigung der Tensorkräfte wurde im Grenzfall  $\varepsilon \ll V$  die folgende Entwicklung nach Potenzen von  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{V}}$  gefunden (vgl. (56) und (31)):

$$\begin{aligned} W(r) = -V(r) + \sqrt{\varepsilon V(r)} (2n+1) \\ + \varepsilon \left[ \frac{J(J+1)+K(K+1)-d^2}{4} - \frac{n(n+1)}{8} - \frac{17}{16} \right] + \dots \end{aligned} \quad (58)$$

Dabei sind die Quantenzahlen  $d$  und  $n$  ganze Zahlen, welche nach (37) und (38) den Bedingungen

$$\begin{aligned} n &\geq 0, \quad d \geq 0, \quad d \leq K, \quad d \leq J, \\ K + J + d + n &= \text{ungerade} \end{aligned} \tag{59}$$

genügen. Alle zu  $d \neq 0$  gehörigen Eigenwerte sind doppelt zu zählen: Die dazugehörigen Eigenfunktionen können in  $\delta$  gerade oder ungerade sein, d. h. nach (4) symmetrisch oder antisymmetrisch in  $j_1$  und  $j_2$ . Die Quantenzahlen  $M$  und  $N$  (vgl. § 1) treten in (58) wegen der Kugelsymmetrie im gewöhnlichen Raum und im „isotopen Spin-Raum“ nicht auf; die zu einem Wertesystem von  $K$  und  $J$  gehörigen Eigenwerte sind deshalb neben der Austauschentartung noch  $(2K+1)(2J+1)$ -fach entartet.

Aus (58) und (59) folgt, dass man die tiefsten Potentialkurven  $W(r)$  für die kleinen Werte von  $K$ ,  $J$  und  $n$  erhält. Es scheint zunächst, dass man für sehr grosse  $n \left( > 16 \sqrt{\frac{V}{\epsilon}} \right)$  noch tiefere Werte erhalten würde; in diesem Fall ist jedoch die vorangehende Näherung unbrauchbar (vgl. (39)). Für  $J = K = 0$  (Mathieu'sche Gleichung) ist ersichtlich, dass die Eigenwerte monoton mit  $n$  anwachsen.

Im Grenzfall  $\epsilon \gg V$  (grosse Kernabstände) kann  $W(r)$  durch Störungsrechnung (Entwicklung nach Potenzen von  $\frac{V}{\epsilon}$ ) bestimmt werden. Die Zuordnung der Eigenwerte in den beiden Grenzfällen ergibt sich dann aus der Bedingung, dass sich zwei Potentialkurven, die zu denselben Werten von  $J$  und  $K$  gehören und deren Eigenfunktionen in  $j_1$  und  $j_2$  beide symmetrisch oder beide antisymmetrisch sind, nicht überschneiden dürfen. Aus diesen Kurven können die Energieniveaus des Deuterons z. B. mit Hilfe des Adiabatenverfahrens gewonnen werden (vgl. I, § 3 und II, § 3).

Die tiefsten Niveaus<sup>1)</sup> erhält man nun für  $J = 0, K = 1$  oder  $J = 1, K = 0$  mit  $n = d = 0$ , welche mit dem  $^1S$ - bzw.  $^3S$ -Zustand des Deuterons zu identifizieren sind (vgl. II, § 3). Diese beiden Niveaus werden erst bei Berücksichtigung der Tensorkraft aufgespalten. Das Potential  $V(r)$  kann so gewählt werden, dass man die richtige Bindungsenergie des Deuterons erhält. Nun liefert diese

---

<sup>1)</sup> Vgl. die Zusammenstellung aller Potentialkurven, die für  $r \rightarrow \infty$  zwei unangeregten Nukleonen entsprechen, in dem vorläufigen Bericht über diese Arbeit, Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 405.

Theorie Aussagen über die Lage der höheren Niveaus, wobei hier allerdings über die Konstante  $\varepsilon$  im Ausdruck für die Isobarenanregungsenergie noch verfügt werden kann<sup>1)</sup>.

Ordnet man die Potentialkurven nach ihrer Höhe für  $V \gg \varepsilon$  (kleine  $r$ -Werte), so folgt als nächst höhere nach (58) und (59) die Kurve  $J = K = 1, d = 1, n = 0$ . Der von den Spin-Variablen  $j_1, m_1, n_1, j_2, m_2, n_2$  (vgl. § 1) abhängige Teil der Eigenfunktion kann hier wegen  $d \neq 0$  in den Koordinaten beider Teilchen symmetrisch oder antisymmetrisch sein, so dass das Pauliprinzip sowohl ungerade wie gerade Bahnmomente ( $P$ - und  $S$ -Terme) zulässt. Die  $P$ -Kurve mit gerader Spineigenfunktion tendiert für  $r \rightarrow \infty$  ( $V \rightarrow 0$ ) gegen das Nullniveau (vgl. Formel (3)):  $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}, W(\infty) = 0, W(r) = \frac{1}{9} V(r) + \dots$  für  $V \ll \varepsilon$ ). Die  $S$ -Kurve dagegen, deren ungerade Spinfunktion für  $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$  verschwindet<sup>2)</sup>, ist dem Niveau  $W(\infty) = \frac{3}{2} \varepsilon$  zuzuordnen ( $j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{3}{2}$ , bzw.  $j_1 = \frac{3}{2}, j_2 = \frac{1}{2}$ , d. h. ein Nukleon ist angeregt, das andere im Grundzustand). Diese  $S$ -Kurve liegt also aussen ( $r$  gross) um  $\frac{3}{2} \varepsilon$ , innen ( $r$  klein,  $V \gg \varepsilon$ ) aber nach (58) um  $\frac{\varepsilon}{4}$  oberhalb der  $^3S$ -Potentialkurve des Grundzustandes; sie muss daher zu einem stabilen isobaren Zustand Anlass geben, dessen Anregungsenergie nach der Adiabaten-Näherung zwischen  $\frac{\varepsilon}{4}$  und  $\frac{3}{2} \varepsilon$  liegen sollte. Dieser Zustand ist ein Spintriplett ( $J = 1$ ) und gleichzeitig ein Ladungstriplett ( $K = 1, N = 0, \pm 1$ ), stellt also Isotopen des Wasserstoffs, Heliums und Neutrons dar. Nach dem von COESTER angegebenen Wert der Konstanten  $\varepsilon$  liegt die Anregungsenergie dieser Isotopen zwischen 5 und 30 MeV.

Die besprochene  $^3P$ -Kurve für  $J = K = 1$  ist die tiefste von allen  $P$ -Kurven. Sie gibt trotzdem zu keinem stationären Zustand Anlass, weil sie im Innenbereich ( $V \gg \varepsilon$ ) um  $\frac{\varepsilon}{4}$  höher liegt als die  $^3S$ -Kurve des Grundzustandes und überdies noch die Zentrifugalkraft hinzukommt. Sie ist aber von Bedeutung für alle Streuprozesse: Proton-Proton- und Proton-Neutron-Streuung. Im Hinblick auf die bekannte Anisotropie bei der Proton-Neutron-Streuung ist hervorzuheben, dass die Potential-Kurve des  $^3P$ -Zustandes für kleine  $r$  ( $V \ll \varepsilon$ ) einer anziehenden Kraft entspricht<sup>3)</sup>. Dasselbe

<sup>1)</sup>  $\varepsilon$  wurde durch Betrachtung der Bindungsenergie schwerer Kerne abgeschätzt; vgl. F. COESTER, Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 35.

<sup>2)</sup> Vgl. I, Formel (9), S. 220, mit  $J = K = 1$ , also  $(J+K)$  gerade.

<sup>3)</sup> Vgl. die Diskussionsbemerkung von G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 407.

gilt übrigens nach (58) von allen Potentialkurven; hierin kann man eine typische Auswirkung der isobaren Zustände des Nukleons erblicken.

Herrn Professor Dr. G. WENTZEL möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die vielen freundlichen Ratschläge bei der Ausführung derselben herzlich danken.

Der Jubiläumsspende für die Universität Zürich bin ich für die Gewährung einer Subvention, welche mir diese Arbeit ermöglichte, zu grossem Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

---