**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta
**Band:** 18 (1945)
**Heft:** III

**Artikel:** Mécanique fonctionelle
**Autor:** Stueckelberg, E.C.G.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-111604

# Mécanique fonctionnelle

par **E. C. G. Stueckelberg.**

(27. I. 1945.)

*Résumé.* — Les théories de l'électron classique, proposées par DIRAC*) et par l'auteur*) d'une part, et la théorie des grandeurs observables associées aux particules élémentaires, proposée par HEISENBERG*) d'autre part, permettent d'établir une *mécanique fonctionelle.* Dans la forme classique (= non quantifiée), les forces sont des fonctionnelles de l'histoire, donnant un formalisme canonique. Celui-ci permet de traduire cette mécanique en théorie quantifiée. Pour caractériser un problème par une matrice $S$, on doit faire appel à deux principes de correspondance (P.C.). L'un est le P.C. habituel, où l'on passe à la limite $h \rightarrow 0$ ou $N \rightarrow \infty$ ($N$ = nombre d'AVOGADRO). L'autre P.C. considère la limite (de la théorie classique ou quantique) pour les vitesses $v = \frac{p}{m}$ infiniment petites (comparées à $c=1$) ou pour un certain temps fondamental $\tau_0 = \lambda_0/c$ tendant vers zéro. Les forces deviennent, dans cette limite, les forces de la mécanique rationnelle.

Cette mécanique permet ainsi de traiter tous les problèmes**) de la physique atomique (collisions, radiation, etc.), y compris ceux de la théorie des états stationnaires qu'on rencontre dans des systèmes formés de particules élémentaires.

## § 1. — Mécanique fonctionelle et mécanique rationelle.

Par *histoire,* nous comprenons $2n$ fonctions $F(t)$, $G(t)$, . . ., qui nous indiquent les valeurs de $2n$ grandeurs observables $F, G, \ldots$ pour toute époque $t$.

Par *mécanique,* nous entendons $2n$ fonctions $\hat{F}(t+T; F, G, \ldots)(-T)$, $\hat{G} \ldots$ des $2n+1$ variables $t+T, F(-T), G(-T), \ldots$ Elles représentent: la durée $t+T$ (qui s'est écoulée entre l'*époque quelconque* $t$ et une *époque initiale* $t = -T$) et les $2n$ valeurs $F(-T), \ldots$ initiales des observables. Les lois de la mécanique s'expriment par les $2n$ équations (*fonctions historiques*)

$$F(t) = \hat{F}_0(t+T, F, G, \cdots)(-T) \tag{1,1}$$

Les $2n$ fonctions $\partial_t \hat{F}, \ldots$ en

$$\dot{F}(t) = \partial_t \hat{F}(t+T, F, G, \ldots)(-T), \dot{G}(t) = \cdots \tag{1,2}$$

sont appelées les *forces.* Soit

$$\ddot{F}(t) = \partial_t^2 \hat{F}(t+T, F, G, \ldots)(-T) \tag{1,3}$$

*) Pour la bibliographique, voir STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **18**, 21 (1945) (réf. III). (Les deux publications antérieures sur l'électron ponctuel sont citées par I et II).

**) A l'exclusion de la „catastrophe infrarouge" en dectrodynamique.

une deuxième dérivée. Alors il est toujours possible d'éliminer en (1,2) les $2n+1$ grandeurs $t+T, F(-T), G(-T), \ldots$ par les $2n+1$ éq. (1,1) et (1,3)*). On obtient ainsi $2n$ éq.

$$\dot{F}(t) = f_0(F, G, \ldots, \ddot{F})(t), \ \dot{G} = g_0(F, G, \ldots, \ddot{F})(t), \ldots \tag{1,4}$$

dans lesquelles les forces $f_0, \ldots$ à l'instant $t$ sont des *fonctions* des $2n$ observables $F, G, \ldots$ à ce même instant, et de la deuxième dérivée $\ddot{F}$ d'une (ou de plusieurs*)) d'entre elles.

Dans certains cas particuliers, l'élimination des $2n$ grandeurs $F(-T), \ldots$ en (1,2) à l'aide de (1,1) donne déjà des forces

$$\dot{F}(t) = f_{00}(F, G, \ldots)(t), \ \dot{G} = g_{00}(F, G, \ldots)(t), \ldots \tag{1,5}$$

indépendantes de $t+T$. Une mécanique (1,1) réductible à (1,5) est appelée *mécanique rationnelle*; c'est un cas particulier de la mécanique générale (1,4) qui est une *mécanique fonctionnelle.* Dans ce cas, général, la force (1,4) à l'instant $t$, ne peut pas être donnée comme *fonction de la constellation* $F(t), G(t), \ldots$ des observables, mais elle dépend, non seulement de cette constellation, mais encore implicitement de l'histoire contenue en $F(t)$. Une élimination à l'aide de plusieurs ou même de toutes les dérivées supérieures $\ddot{F}, \dddot{F}, \ldots$ donne à (1,4) une forme *explicitement fonctionnelle***).

$$\dot{F}(t) = f_0[F(\tau), G(\tau), \ldots], \ \dot{G}(t) = \cdots \tag{1,6}$$

($f_0[\ldots]$ est une fonctionnelle des $2n$ fonctions historiques). Dans certains cas (1,6) permet un développement

$$\dot{F}(t) = f_{00}(F, G, \ldots)(t) + \lambda_0 f_{01}(F, G, \ldots \ddot{F}, \ddot{G}, \ldots) + \lambda_0^2 f_{02}(F, G, \ldots F, G, \ldots \dddot{F}, \dddot{G}, \ldots) + \ldots \tag{1,7**}$$

en termes d'un paramètre $\lambda_0$***), tel que pour des « mouvements lents » ($\ddot{F}/\dot{F} \ll \lambda_0^{-1}$) la partie fonctionnelle de la force ($f_{0\,i>0}$) peut être traitée comme une perturbation.

La différence entre la mécanique fonctionnelle (traduite par ex. en (1,4)) et le cas particulier de la mécanique rationnelle (réduite à (1,5)) est fondamentale:

En effet l'*intégrale générale de la mécanique rationnelle* (1,5) est identique à l'histoire (1,1) exprimée en termes des $2n$ valeurs ini-

*) En général, une seule équation (1,3) ne suffit pas pour éliminer $t+T$ de toutes les forces. Alors on doit avoir recours aux $\ddot{G} = \partial_t^2 \hat{G}, \ldots$

**) La fonctionnelle peut aussi être écrite en termes des

$$\overset{(-1)}{F}(t) = \int_{-T}^{t} dt' \, F(t'), \ \overset{(-2)}{F} = \ldots$$

***) Nous posons $c = 1$.

tiales $F(-T)$ ... Comme époque initiale $-T$, n'importe quelle époque $t=-T$ peut être choisie. La *connaissance des* $2n$ *fonctions de force* (1,5) *est donc équivalente à la connaissance des* $2n$ *fonctions historiques.*

Par contre l'*intégrale générale du système fonctionnel* (1,4) ne peut être donnée que dans la forme:

$$F(t)=\hat{\hat{F}}(t+T;\ \ddot{F}(-T+\tau);\ F, G,\ldots),\quad G(t)=\ldots \tag{1,8}$$

Elle dépend donc des valeurs $F(-T)$ prises à l'époque initiale, et en plus de $\ddot{F}(-T+\tau)$ pris à une certaine époque $-T+\tau$ ($-T+\tau$ ne peut être identifié avec $-T$ [c.-à-d. $\tau=0$] que si $\ddot{F}(-T)$ n'est pas identiquement nul). Ce n'est alors qu'après avoir déterminé

$$\ddot{F}(-T+\tau)=\partial_\tau^2\hat{F}(\tau;\ F, G,\ldots)(-T) \tag{1,9}$$

pour cette époque $-T+\tau$ que la substitution de (1,9) en (1,8) nous redonne la mécanique (1,1).

La connaissance des $2n$ fonctionnelles de force (1.4) ou (1,6) n'est donc pas équivalente à la connaissance des $2n$ fonctions historiques. Il faut une (ou plusieurs, si les $G$ interviennent) condition supplémentaire. Nous verrons plus tard qu'il existe un choix particulier des variables (§ 2) pour lesquelles les conditions supplémentaires sont

$$\lim_{T\to\infty}\dot{F}(+T)=\lim_{T\to\infty}\dot{G}(+T)=\cdots=0 \tag{1,10}$$

si l'époque initiale est choisie à $\lim(-T)\to-\infty$. Les équations fonctionnelles (1,6), les conditions initiales et les *conditions finales* (1.10) sont alors équivalentes à l'histoire (1.1).

Si le développement (1,7) est possible, *un premier principe de correspondence entre mécanique fonctionnelle et mécanique rationnelle peut être énoncé:*

*Une mécanique fonctionnelle* ((1,6) *et* (1,10)) *correspond à une mécanique rationnelle* (1.5) *si, dans la limite* $\lambda_0\to 0$, *la relation*

$$\lim_{\lambda_0\to 0} f_0[F(t'), G(t'),\ldots](t)\to f_{00}(F, G,\ldots)(t) \tag{1,11}$$

*existe entre la force fonctionnelle* $f_0[\ldots]$ *et la fonction de force* $f_{00}(\ldots)$.

## § 2. — Mécanique quasipériodique et mécanique asymptotique.

Nous appellerons *système élémentaire* un système dont l'histoire est *quasipériodique*

$$F(t)=\Re\mathfrak{e}\left(\sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=\infty}\cdots\sum_{\nu_n=1}^{\nu_n=\infty}F_{\nu\ldots\nu_n}\exp\left(-i\,t\sum_1^n\nu_i\,\omega_i\right)\right),\quad G(t)=\ldots \tag{2,1}$$

Un cas particulier se présente, si quelques-uns des $\omega_i$ tendent vers zéro. Alors il existe, parmi les $2n$ observables $F(t)$, $G(t)$, ... des observables $Z_i(t)$ du type

$$Y_i(t) = Y_i(0) + V_i(0)\,t;\ V_i(t) = V_i(0) \tag{2,2}$$

$V_i(0)$ a pris la place des $\omega_i$. Il y a au minimum $2\times 3$ de ces observables (= endroit et vitesse du centre de gravité). Comme les constantes en (2,2), les $F_{\nu_1 \ldots}$ et $\omega_i$ en (2,1) sont des fonctions des *valeurs initiales* $F(0)$, $G(0)$, ... (pour $t = 0$).

Nous appellerons *système non élémentaire un système apériodique,* par exemple:

$$F(t) = F(-T)\,\frac{e^{-\omega t} - e^{+\omega t}}{e^{-\omega t} + e^{+\omega t}}\,. \tag{2,3}$$

L'observable $F(t)$ passe de sa valeur initiale $F(-T)$ à une valeur finale $F(+T) = -F(-T)$. Les deux époques $\pm T$ sont en général $\pm\,\infty$. Le résultat asymptotique de l'histoire d'un tel système

$$F(+T) = \widehat{F}\big(F(-T),\ G(-T), \ldots\big) = \widehat{F}(F, G, \ldots)(-T) \tag{2,4}$$

portera le nom de *mécanique asymptotique.* Il représente le cas limite de (1,1) où $F$ devient indépendant de $t + T = 2\,T$ pour $T \to \infty$.

Nous allons démontrer que, pour tout système élémentaire, il existe une Hamiltonienne $H(t) = H(\hat{p}(t), \hat{q}(t))$ fonction de $2n$ variables les canoniques $\hat{p}_i(t)$ et $\hat{q}_i(t)$ telle que, pour les observables $F(t)$, $G(t)$, ..., les relations

$$F(t) = F\big(t, \hat{p}_1(t), \ldots \hat{q}_n(t)\big),\ \dot{F}(t) = \partial_t F(t) + \big\{H(t), F(t)\big\} \tag{2,4}$$

soient vérifiées. Mais le $H$ n'est pas uniquement déterminé par (2,1) et (2,2). Ce n'est que la condition supplémentaire de la *covariance relativiste* qui détermine le $H$ (à une constante près): Si $\overline{x}^\alpha = x^\alpha + \delta\tau^\alpha$ est la transformée de $x^\alpha$, cette condition demande que la transformée $\overline{F}$ de $F$ s'exprime par

$$\overline{F} - F = \delta F = -\big\{P_\alpha\,\delta\tau^\alpha, F\big\} \tag{2,5}$$

avec $H = P^4$ et $\delta\tau^4 = \delta t$. $P_\alpha$ doit être un quadrivecteur. En général, le procédé suivant permet de trouver un $H$: Avec $F_{\nu_1 \ldots} = |F_{\nu_1 \ldots}|$ exp $(+i\,\Sigma\,\nu_i\varphi_i)$, on introduit $2\,n$ fonctions des $F(0)$, $G(0)$ ... les $\omega_i$ et les $\varphi_i = \varphi_i(F(0), \ldots)$. Alors, on définit $n$ variables $w_i$ (ou $\hat{q}_i$ pour (2,2)) par

$$w_i = \varphi_i + \omega_i t\ \ (\text{ou } \hat{q}_i = Z_i(0) + V_i\,t)\,. \tag{2,6}$$

Ensuite, on cherche $n$ fonctions $J_i(F(0), \ldots)$ (ou $\hat{p}_i = \hat{p}_i(F(0), \ldots)$) telles que

$$\omega_i = \frac{\partial H(J_1 \ldots J_n)}{\partial J_i}\ \left(\text{ou } V_i = \frac{\partial H(\ldots \hat{p}_i \ldots)}{\partial \hat{p}_i}\right)\cdot \tag{2,7}$$

Il est toujours possible de trouver de ces fonctions $J_i$ et $w_i$. Les $2n$ fonctions $J_i$ et $\varphi_i$ permettent d'éliminer les $F(0)\ldots$ en $F_{\nu_1}\ldots$ On trouve alors, avec (2,4), la même relation pour $F$ qu'on obtenait en différentiant $F$ en (4,1) par rapport à $t$.

Nous donnons quelques exemples:

1. *Particule élémentaire sans spin.*

Position $Y_i$ et vitesse $V_i$ en (2,1) sont les 6 observables ($i = 1$ à 3). En vertu de $Y_i = \hat{q}_i$, la variable conjuguée doit être $\hat{p}_i = P_i$ pour que (2,5) soit vérifiée. La forme quadrivectorielle demande que $|\vec{P}|^2 - H^2 = P_\alpha P^\alpha = -m^2$ soit un scalaire. Donc on a, à cette constante (et au signe $\pm$) près

$$H = \pm\sqrt{m^2 + \hat{p}_i \hat{p}^i}\,; \quad V^i = \frac{\partial H}{\partial \hat{p}_i} = \frac{\hat{p}^i}{H}. \tag{2,8}$$

2. *Système planétaire.*

Si, en plus de la coordonnée du centre de gravité ($Y_i$ en (2,2)), le système possède des points remarquables $(\mu)$ à coordonnées $y_i^{(\mu)} = Y_i + r_i^{(\mu)}$, $r_i^{(\mu)}(t)$ et $\dot{r}_i^{(\mu)}(t)$ sont des variables intérieures pour lesquelles (2,1) est valable. Prenons le cas le plus simple où on n'a qu'un seul $r_i$ et une seule période $\omega_i = \omega'$. Alors (2,1) devient $r_i = \mathfrak{Re}(-i\omega')^{-1} a_i^{(s)} \exp(-\omega' t)$ et $H$ ne peut dépendre des $J_i$ que par l'intermédiaire de $m^2$. Le seul scalaire qu'on puisse former à partir des $a_i^{(s)}$ est $a_\alpha^{(s)} a^{(s)\alpha}$. L'invariance nous a obligés à compléter $a^{(s)i}$ par un $a^{(s)4}$ (et $r^i(t)$ par un $r^4(t)$). Or, avec un $J = h a_\alpha^{(s)*} a^{(s)\alpha} = \sum_1^4 J_\alpha$, on trouve pour les fréquences $\omega_i = \omega' = \partial H/\partial J_i = \omega\sqrt{1 - |\vec{V}|^2}$. $\omega$ est la fréquence invariante $\omega = \partial m/\partial J$ (fonction de l'amplitude $J = h a_\alpha^{(s)*} a^{(s)\alpha}$). Le système planétaire le plus simple est donc identique à notre *particule avec spin en III* (éq. (1,1)).

3. *Onde linéaire réelle.*

Soit $\mu^4 = +\sqrt{\varkappa^2 + |\vec{\mu}|^2} = \mu^4(\vec{\mu})$ les fréquences $\omega_i$ de (2,1). Alors les $F(t)$ sont les $\varphi_a(\vec{x}\,; t) = \varphi_a(x)$. Ils peuvent être exprimés en termes des

$$s_a(x/\mu) = (2\,V\mu^4)^{-\frac{1}{2}} \exp(i(\mu, x)) = s(\mu/x)_a^*$$

par*)

$$\varphi_a(x) = h^{\frac{1}{2}}(s_a(x/\mu)\,c(\mu) + c(\mu)^* s(\mu/x)_a) \tag{2,9}$$

Les variables canoniques sont $\hat{p}(t) - i\hat{q}(t) = \sqrt{2\,h}\,\hat{c}(t) = \sqrt{2\,h}\,c(\mu)\exp(-i\mu^4 t)$. Ce choix seul (à des transf. canoniques près) détermine un $P_\alpha$ covariant $P_\alpha = \Sigma N(\mu)\,h\,\mu_\alpha$ avec $N(\mu) = \hat{c}(\mu)^* c(\mu)$.

4. *Onde linéaire complexe.*

Si $L$*) dépend de deux potentiels $u_{a\,(1)}$ et $u_{a\,(2)}$ de même covariance, on peut les relier en un $w_a = u_{a\,(1)} - i u_{a\,(2)}$ complexe. D'un $L = L(w^*, w, U^*, U)$ réel (avec $U_A = \gamma^\varrho{}_A{}^a w_{\varrho|a}$, $\Delta V^A = \partial \Delta L/\partial U_A$ complexes) dérive une théorie ($\delta\int (dx)^4 \Delta L = 0$), qui admet, en plus des $\varrho_{\alpha\beta}$, $T^\alpha{}_\beta$ et $Q^{\alpha\beta\gamma}$ discutés en III, la continuité $\partial_\alpha \varrho^\alpha = 0$ d'une *densité de courant électrique*

$$\varrho^\alpha = 2\,h^{-1}\,\mathfrak{Imag}\,(V^{*A}\gamma_A{}^{\alpha a} w_a) \tag{2,10}$$

---

*) $V$ est le volume de périodicité infini. La sommation sur $\mu$ est comprise.

*

et la conservation du scalaire

$$N(t) = \int (dx)^3 \varrho^4(\bar{x}, t). \tag{2,11}$$

Pour des champs faibles, les «observables» linéaires et complexes sont

$$w_a(x) = (2\,h)^{\frac{1}{2}}(s_a(x/k)\,a(k,+) + a(k,-)^*\,s(k/x)_a) \tag{2,12}$$

En analogie parfaite avec $\delta w = -\left\{P_\alpha \delta\tau^\alpha, w\right\}$, la grandeur $hN$ transforme $w$ en $\overline{w} = e^{i\chi} w$ suivant $\delta w = -\left\{hN\delta\chi, w\right\}\cdot$ Pour des champs faibles, l'Hamiltonienne doit encore une fois être le $H = P^4$

$$P_\alpha = \sum_k \sum_{\tau=+,-} N(k,\tau)\,h\,k_\alpha \tag{2,13}$$

le scalaire $N$ est la somme

$$N = \sum_k \sum_{\tau=+,-} N(k,\tau)\tau. \tag{2,14}$$

Nos histoires quasipériodiques sont caractérisées par $2n$ paramètres (p. ex. les $J_i$ et les $\varphi_i$ $(= w_i(t = 0))$. $J_i$ et $\varphi_i$ sont les variables canoniques $\hat{p}_i(0)$ et $\hat{q}_i(0)$ pour un temps donné $(t = 0)$. Passant par une transformation canonique, à des variables $\hat{p}_i$, $\hat{q}_i$ quelconques, les séries $\hat{F}(t, p, q)$ définies par

$$\begin{aligned} F\left(t, \hat{p}\,(t), \hat{q}\,(t)\right) &= \frac{1}{0!} F\,(t,p,q\} + \frac{1}{1!}\{tH\,(p,q), F\,(t,p,q)\} + \cdots \\ &= \hat{F}\,(t, p_1 \cdots q_n)\,,\ G\left(t, \hat{p}\,(t)\,,\ \hat{q}\,(t)\right) = \ldots \end{aligned} \tag{2,15}$$

expriment les observables $F(t), \ldots$ etc., en termes d'une transformation canonique $tH(p_1 \ldots q_n)$ opérée sur une fonction

$$F(t,\ p_1 \ldots q_n) \tag{2,16}$$

de $t$ et de $2n$ *paramètres canoniques*. Ces derniers représentent l'état de système à l'époque $t = 0$.

Dans nos exemples 1 et 2, ils sont

$$Y_\alpha = q_\alpha + m^{-1}\,p_\alpha\,\lambda \tag{2,17}$$

$$r_\alpha = \Re\mathrm{e}\,(-i\omega)^{-1} a_\alpha^{(s)} \exp\,(-i\omega\lambda)\,. \tag{2,18}$$

Dans les exemples 3 et 4 (éq. (2,9) et (2,12)), les $p$ et $q$ (reliés dans des $a_\alpha^{(s)}$, $a(k,\tau)$ ou $c(\mu)$) par

$$\sqrt{2\,h}\;a = p - iq \tag{2,19}$$

sont ces $2\,n$ ($n = \infty$ pour les ondes réelles, $= 2\,\infty$ pour les ondes complexes) paramètres complexes. Les $N(\ldots)$ en (2,13) et (2,14) sont

$$N(k,\tau) = a(k,\tau)^* a(k,\tau),\ N(\mu) = c(\mu)^* c(\mu)\,. \tag{2,20}$$

## § 3. — La collision entre des systèmes élémentaires.

Si les $n = n_1 + n_2 + \ldots n_N$ paires des variables en (2,16) se décomposent d'une manière telle que les $2n$ premières paires des variables $\hat{p}_i(t)$ et $\hat{q}_i(t)$ ne dépendent que des $n_1$ premiers paramètres

*) Notations de III pour la densité Lagrangienne.

$p_i$ et $q_i$, les $2n_2$ deuxièmes paires de variables des $n_2$ deuxièmes paires de paramètres etc., la mécanique quasipériodique est séparable. Nous parlons alors d'un *système formé de N systèmes élémentaires.* Nous distinguons deux cas:

1⁰ Si l'histoire d'un tel système a d'abord la forme quasipériodique (pour tout $t < - T$ situé antérieurement à $t = - T$), si elle devient apériodique pendant l'intervalle fini $- T < t < + T$ et si elle redevient de nouveau quasipériodique pour toute époque $t > + T$ postérieure à $t = + T$, nous appelons cette histoire une *collision entre N systèmes élémentaires sans réaction chimique.*

2⁰ Si, postérieurement à $t = + T$, l'histoire redevient quasipériodique, mais si la séparation doit se faire dans $N'$ ($n = n_{1'} + n_{2'} + \ldots n_{N'}$) autres paires de variables canoniques, nous appelons cette histoire une *collision entre N systèmes élémentaires qui deviennent, sous l'influence d'une «réaction chimique», N' autres systèmes élémentaires.*

**(Ex. 1 et 2: En termes du temps propre $\lambda$, le système planétaire est composé de $4(1+\mu)$ systèmes élémentaires. En termes de temps ordinaire ($m =$ une constante caractéristique du système), le système planétaire est un *seul* système élémentaire. Ex. 3 et 4: L'onde réelle à $f$ polarisations indépendantes se compose de $N = f\,\infty$ systèmes, l'onde complexe de $N = 2\,f\,\infty$ systèmes*).)**

Dans le premier cas, les paramètres canoniques, qui furent des constantes $p = p(-T)$ et $q = q(-T)$ pendant l'intervalle $-\infty < t < -T$, et qui seront de nouveau des (autres) constantes $p = p(+T) \neq p(-T)$ et $q = q(+T) \neq q(-T)$ évoluent pendant l'intervalle $2T$ suivant une histoire apériodique (1,1).

Leur histoire est en général engendrée par une mécanique fonctionnelle (1,4). Prenant le symbole $F$ pour $p, q$, on peut ainsi formuler la condition supplémentaire exprimée en (1,10) de la manière suivante: *L'histoire se termine par N systèmes élémentaires dans un état final* ($F(+T)$) *avec* $\dot{F}(+T) = 0$.

Dans le deuxième cas, une transformation canonique $p_{i'} = p_{i'}(p_1 \ldots q_N)$ etc. existe, telle que la condition (1,10) doit être imposée pour les $F'(+T)$. Les deux cas engendrent ainsi une transformation canonique

$$F(+T) = \left(\frac{1}{0!}F + \frac{h}{1!}\{\alpha, F\} + \frac{h^2}{2!}\{\alpha, \{\alpha, F\}\} + \cdots\right)(-T)$$
$$= \widehat{F}_0(F, G, \ldots)\,(-T) \tag{3,1}$$

qui exprime les valeurs finales $p(+T)$ en termes des valeurs initiales $p(-T)$. ($\alpha(-T)$ et $F(-T)$ sont des fonctions des $p_1(-T) \ldots q_n(-T)$). L'invariance de $\alpha$ par rapport au groupe de Lorentz

***) Ce $N$ n'a, pour l'instant, rien à faire avec le $N$ en (2,14).**

nous assure la conservation de la quantité de mouvement-énergie $P_\alpha$ et de son moment $M^{\alpha\beta}$ (et des $N$ en (2,14), si nous postulons son invariance par rapport au groupe de jauge).

*Exemple 5. Une seule particule:* Soit $\varphi^{(\mathrm{inc})}(x)$ une fonction scalaire de quatre coordonnées $x^\alpha (\alpha = 1$ à $4)$, qui ne diffère de zéro que dans un domaine $x$ fini. Soit $x^\alpha = z^\alpha(\lambda)$ une ligne d'univers traversant ce domaine et qui est une droite $z^\alpha(\lambda) = y^\alpha(\lambda)$ (2,17) à l'extérieur du domaine. Alors, il existe une transformation $\alpha$ qui relie les 8 paramètres $p^\alpha, q^\alpha(+\Lambda)$ aux $p^\alpha, q^\alpha(-\Lambda)$. Si $\alpha$ est un invariant, les grandeurs $P^\alpha = p^\alpha$ sont conservées $P^\alpha(+\Lambda) = P^\alpha(-\Lambda)$. L'histoire ($z^\alpha$ et $\dot{z}^\alpha = \hat{F}^\alpha(\lambda; p^\alpha(-\Lambda), q^\alpha(-\Lambda))$ peut être exprimée en termes des paramètres variables $p^\alpha = p^\alpha(\lambda)$ et $q^\alpha = q^\alpha(\lambda)$ en (2,17). Le $\alpha(-\Lambda)$ général en (3,1) est une fonctionnelle

$$\alpha(-\Lambda) = \alpha\,[\varphi^{(\mathrm{inc})}(y(\lambda\,; p^\alpha(-\Lambda)\,; q^\alpha(-\Lambda)))]\,. \tag{3,2}$$

L'élimination des $p^\alpha(-\Lambda)$ en (1,1) fournit une équatione fonctionnelle (1,7). Le choix particulier de $\alpha$ donné en III (10,2) donne un résultat asymptotique qui est égal à la solution de la mécanique rationnelle.

$$(m - \varepsilon\,\varphi^{(\mathrm{inc})}(z))\,\ddot{z}_\alpha = e(\partial_\alpha\,\varphi^{(\mathrm{inc})} + \dot{z}_\alpha\,\dot{\varphi}^{(\mathrm{inc})})(z)\,. \tag{3,3}$$

*Exemple 6. Deux particules:* Si la fonction $\varphi^{(\mathrm{inc})}(x)$ donnée en (3,2) et (3,3) est elle-même fonctionnelle invariante d'une autre ligne $z^{(1)\alpha}(\lambda^{(1)})$, on a une mécanique fonctionnelle de l'interaction entre deux particules. Soit $\Delta(x - x')$ une fonction invariante de $x$ et de $x'$. Alors toute théorie (3,2) avec la fonctionnelle

$$\begin{aligned}\alpha\,(-\Lambda) = \alpha\,\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} d\,\lambda^{(1)}\,\Delta(y(\lambda, p^\alpha(-\Lambda), \ldots) - y^{(1)}(\lambda^{(1)}, p^{(1)\alpha}(-\Lambda), \ldots))\Big] \\ = \alpha(p^\alpha \ldots q^{(1)\alpha})(-\Lambda)\end{aligned} \tag{3,4}$$

donnera des lignes, où

$$P^\alpha = p^\alpha + p^{(1)\alpha}$$

sera conservé. Il existe un choix particulier, tel que le résultat asymptotique, de l'équation (3,3) avec la force fonctionnelle dérivant de

$$\varphi^{(\mathrm{inc})}(x) = e\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda^{(1)}\,\Delta\,(x - z^{(1)}(\lambda^{(1)})) \tag{3,5}$$

coïncide avec (3,4). Pour que la théorie soit symétrique dans les deux particules, il faut que $\Delta(x) = \Delta(-x)$. Un tel $\Delta$ invariant permet toujours en (3,5) un développement de LAPLACE

$$e\,\varphi^{(\mathrm{inc})}(x) = \sum_{\varkappa(\varphi)} e_{(\varphi)}\,\mathrm{sym}_{(\varphi)}\big(e^{(1)}_{(\varphi)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda^{(1)}\,\delta(x - z^{(1)}(\lambda^{(1)}))\big) \tag{3,6}$$

$\mathrm{sym}_{(\varphi)}\,\varrho^{(1)}(x)$ est le *potentiel symétrique* (III, éq. (9,13)) d'une éq. d'onde $(\Box - \varkappa^2)\,\varphi = -\varrho^{(1)}$. La force (3,3) pour $z$ est maintenant *fonctionnelle* de $z^{(1)}(\lambda^{(1)})$ et vice versa. On peut écrire (3,3) en termes de

$$\dot{z} = (m - e\,\varphi^{(\mathrm{inc})}(z))^{-1}\,\pi\,; \quad \dot{\pi} = e\;\partial\,\varphi^{(\mathrm{inc})}(z) \tag{3,7}$$

et y faire un développement (1,7) de la fonction $\varphi^{(\mathrm{inc})}$ en termes du *paramètre de retardation* ($e = \epsilon^{(1)}$, $m = m^{(1)}$)

$$\lambda_0 = \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{4\,\pi\,m} \tag{3,8}$$

*Exemple 7. Particule et champ.* La théorie de l'exemple précédent est contraire à nos observations de causalité macroscopique. Pour le voir, considérons le cas ou l'une (ou les deux) particules interagissent par des lois analogues, avec une troisième particule $z^{(2)}(\lambda^{(2)})$. Le $\varphi^{(\mathrm{inc})}(z^{(2)})$, qui agit sur le $z^{(2)}$ est le potentiel symétrique produit par $z$. Or, celui-ci se compose, à des époques lointaines, de la *partie statique*, qui ne s'étend qu'à une distance finie $|\vec{z}^{(2)} - \vec{z}| = r^{(02)} \sim \varkappa_{(\varphi)}^{-1}$ et d'une *partie radiative*, qui se propage, sous forme d'onde $\varphi^{(\mathrm{rad})}$, dans tout l'espace. L'onde avancée, contenue ainsi en $\mathrm{sym}_{(\varphi)}\, \varrho^{(1)}$, rencontrera et accélérera $z^{(2)}$ à une *époque $t$ antérieure* $(t^{(01)} - t \sim r^{(02)})$ *à l'époque $t^{(01)}$ de la rencontre entre $z$ et $z^{(1)}$* qui fut la cause de ce phénomène. Pour éviter cette réaction du futur sur le passé, on introduit le champ $\varphi(x)$ comme un *nouveau système*, composé de de $n = \infty$ systèmes élémentaires (éq. 2,9). Alors, on établit de cette manière une théorie qui, pour $\lambda_0 \to 0$, donne le même résultat que (3,7) pour l'interaction entre les particules $\left(\text{si l'on y substitue } e\varphi^{(\mathrm{inc})}(x) = \Sigma\, \epsilon_{(\varphi)} \mathrm{ret}_{(\varphi)}\, \epsilon^{(1)}_{(\varphi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda^{(1)} \delta(\ldots)\right)$. Mais elle contient, pour des $\lambda_0$ finies, le *rayonnement des ondes $\varphi(x)$*, étudié en II et III.

*Exemple 8. Théorie du champ non linéaire:* Nous avons, en III, éq. (10,3) et (10,4), donné le changement $\delta c(\mu') = c(\mu')(+T) - c(\mu')(-T)$, produit par l'interaction entre une onde $\varphi$ incidente, caractérisée par les paramètres $c(\mu)(-T)$ et une particule, caractérisée par $p^{\alpha}(-T)$. Le résultat, pour des champs faibles, est *l'effet Thompson-Doppler* corrigé pour le freinage. Considérons maintenant un champ à trois composantes $\varphi, u_{(1)}$ et $u_{(2)} (w = u_{(1)} - i u_{(2)})$ avec un $\alpha$ donné par:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 (\alpha^{(2)}[w^* w]\,\varphi\varphi + \alpha^{(2)}[w^* w^* w w])(-T)& \\ = \varepsilon^2 h^{-2} \frac{1}{2} \int (dx)^4 \Big(w^* w \varphi^2 - 2\,\varkappa^2_{(w)} (w^* \varphi\, \mathrm{ret}_{(w)} (w\varphi) + \mathrm{conj})& \\ - 2\,\varkappa^2_{(w)}\, w^* w\, \mathrm{ret}_{(\varphi)} (w^* w)\Big).&\end{aligned} \tag{3,9}$$

Le changement $\delta c(\mu')$ vaut, pour des champs faibles.

$$\delta c(\mu') = -i(\varepsilon^2 \alpha^{(2)} g(\varepsilon^{(2)} \alpha^{(2)}))(\mu'/\mu)\, \delta_{\vec{k}' + \vec{\mu}',\, \vec{k} + \vec{\mu}}\, \delta_{\tau'\tau}\, c(\mu)\, a(k', \tau')^* a(k, \tau) \tag{3,10}$$

avec

$$\begin{gathered}\varepsilon^2 \alpha^{(2)}(\mu'/\mu) = \varepsilon^2 2\pi\delta(\mu'^4 + k'^4 - (\mu^4 + k^4)) \\ (k'^4 k^4)^{-\frac{1}{2}} (2\, V(\mu'^4 \mu^4)^{\frac{1}{2}})^{-1} (1 + (\mu', \mu)\, \varkappa^2_{(w)} ((\mu', k)(\mu, k))^{-1})\end{gathered} \tag{3,11}$$

$g(\alpha)$ est la même fonction matricielle qu'en III (10,6)*). Le résultat représente l'effet *Compton* produit par $N(k, +)$ électrons de qte. de mouvement $p_\alpha = h k_\alpha$ et de charge $e = \varepsilon h^{\frac{1}{2}}$, si l'on pose dans $|\delta c(\mu')|^2$ pour le produit

$$a(k, +)^* a(k, +) = N(k, +) \tag{3,12}$$

et pour tout produit avec $k' \neq k$ et $\tau' \neq +$

$$a(k', \tau')\, a(k', \tau')^* = 1\,. \tag{3,13}$$

---

*) Les coefficients sont arbitraires dans la même mesure qu'en III (10,6), si l'on introduit des

$$\varepsilon^4 \alpha^{(4)}_{(2)} [w^* w \varphi\varphi] = \varepsilon^2 \alpha^{(2)} [w^* w \varphi\varphi]\, \varepsilon^2 \alpha^{(2)} [w^* w \varphi\varphi]\,.$$

## § 4. — Les états stationnaires du système composé.

La mécanique asymptotique de la collision entre deux particules $z$ et $z^{(1)}$, caractérisée par la fonctionnelle (3,2) et la mécanique fonctionnelle (3,3) (avec (3,4) resp. avec (3,5)) ne sont pas équivalents: En plus des solutions apériodiques (qui correspondent aux solutions de la mécanique asymptotique, (3,3) possède d'autres solutions. Un certains nombre de ces solutions doivent être éliminés, parce qu'elles contredisent nos hypothèses fondamentales (p. ex. la possibilité de décomposer $\varphi$ en $\varphi^{(\mathrm{ret})} + \varphi^{(\mathrm{def})}$ (III)). Mais parmi ces autres solutions il peut exister des solutions quasipériodiques, admettant les hypothèses fondamentales. On s'en aperçoit en considérant l'approximation non relativiste de (3,7). Elle n'est autre chose que la mécanique rationnelle d'un système avec

$$H = H^{(0)} + H^{(\,)} \tag{4,1}$$

où $H^{(0)} = (2m)^{-1}(|\vec{p}\,|^2 + |\,\vec{p}^{(1)}\,|^2) + 2m$ est l'*énergie cinétique* et

$$H^{(\,)}(|\vec{q} - \vec{q}^{(1)}) = \sum_{\varphi} c_{(\varphi)}\, H^{(\,)}_{(\varphi)}(\vec{q} - \vec{q}^{(1)}) \tag{4,2}$$

est l'*énergie potentielle,* développée sous forme des potentiels de Yukawa:

$$H^{(\,)}_{(\varphi)}(r) = -\,e^2\,(4\pi r)^{-1} \exp\,(-\varkappa_{(\varphi)}\, r)\,. \tag{4,3}$$

Si les constantes $c_{(\varphi)} = e_{(\varphi)}\, e^{(1)}_{(\varphi)}\, e^{-2}$ en (4,2a) donnent lieu à une attraction, un système planétaire est possible (orbites liés, particule capturée). La variable intérieure $r$ est quasipériodique en deux fréquences. Un raisonnement de continuité montre que de ces orbites peuvent subsister en théorie relativiste. Ainsi, il ne suffit pas de donner $\alpha$, mais on doit connaître, soit l'*équation fonctionnelle des forces*, soit l'*histoire explicite pour toute combinaison possible des états initiaux* (y compris ceux de ces états quasi-périodiques). Pour deux particules et pour le potentiel symétrique, les principes de conservation montrent qu'une telle capture ne peut jamais se produire. Les résultats de la mécanique asymptotique suffisent ainsi pour décrire nos observations des *collisions entre deux particules.*

Par contre, la mécanique causale, décrite par le champ $\varphi$, permet des transitions à des orbites liées, même pour deux particules entrant en collision. Elles tournent en spirale autour de leur centre de gravité et émettent des ondes $\varphi$. Pour arriver à un résultat quasipériodique, il faut faire appel à une théorie non linéaire de $\varphi$, dans laquelle des états stationnaires existent où la charge libre ($\varrho \mp \varrho^{(0)} + \varrho^{(1)}$) est statique, même si les charges vraies $\varrho^{(0)} + \varrho^{(2)}$ ne le sont pas (cf. III). Ces orbites stationnaires sont caractérisées par leur moment intérieur $\vec{S}$, leur énergie ($= H < 2m$ dans le système au repos) et par les deux « phases » $\varphi_i(0)$ des $w_i(t)$. L'ensemble de ces constantes sera appelé $p'$ et $q'$. Le *système planétaire*, résultant de la capture, finira ainsi par se trouver dans un de ces états quasi-périodiques $p' = p'(+T) \ldots$ Mais la transformation $\alpha$ semble associer à *tout état initial* $p^\alpha(-T) \ldots q^{\alpha\,(1)}(-T)$ un résultat final $p^\alpha(+T) \ldots q^{\alpha\,(1)}(+T)$. Pourtant il est évident que (3,3) n'admet certainement pas ce résultat pour des particules suffisamment lentes ou la capture *doit* se faire. La seule possibilité est alors que la somme (3,1) ne converge pas pour ces états initiaux. Dans ce cas, il faut exprimer déjà l'état initial en termes de ces autres variables $p'$, qui prendront pour $t + T$ les valeurs constantes $p' = p'(+T)$ ($= \vec{S}, H, \varphi_1(0)$ et $\varphi_2(0)$ du système composé). Nous verrons plus tard (§ 9), que ce problème important se résoudra très simplement en théorie quantifiée.

## § 5. — La mécanique quantifiée.

Aux observables $F$ correspondent, en théorie des quanta, des *opérateurs linéaires*, qu'on peut représenter sous forme de matrices $F(\mu/\mu')$. Un *vecteur unitaire* $\Psi(t)$ (ou $\Phi(t)$) à composantes $\Psi(t;\mu)$ (ou $\Phi(t;\mu)$) permet d'en former *l'espérance mathématique.*

$$\overline{F}(t) = \bigl(\Phi(t), F\Phi(t)\bigr) = \Phi(t;\mu)\, F(\mu/\mu')\, \Phi(t;\mu'). \tag{5,1}$$

L'évolution de $\Phi$ doit suivre une loi

$$\Phi(t) = S(t+T)\, \Phi(-T) \tag{5,2}$$

où $S(t+T)(\mu/\mu')$ est une *matrice unitaire* représentant une *rotation finie* dans l'espace hermitien aux axes $\mu$. Il existe alors un opérateur $\hat{F}(t+T; F, G, \ldots)$, fonction de $t+T$ et des opérateurs $F, G, \ldots$ tel que

$$\overline{F}(t) = \bigl(\Phi(-T), \hat{F}(t+T; F, \ldots)\Phi(-T)\bigr) = \overline{\hat{F}(t+T); \ldots)(-T)}. \tag{5,3}$$

En termes de $S(t+T; F, G, \ldots)$ ce $\hat{F}$ s'exprime par

$$\hat{F}(t+T; F, G, \ldots) = S^{-1}(t+T)\, F S(t+T) \tag{5,4}$$

(5,3) permet d'énoncer un *second principe de correspondance* (*historique*) entre mécanique quantique et classique, si (5,4) permet le développement des esp. math.

$$\begin{aligned}\overline{F}(t) &= \hat{F}\,\overline{(t+T; F, G, \ldots)(-T)} \\ &= \overline{\hat{F}_0(t+T, \overline{F}, \overline{G}, \ldots)(-T)} + h\overline{\hat{F}_1(t+T, \overline{F}, \overline{G}, \ldots)(-T)} + \cdots \end{aligned} \tag{5,5}$$

en termes d'un paramètres $h$. Les $\hat{F}_i\overline{(..)(-T)}$ sont fonctions de

$t+T$ et de $\overline{F}(-T)$, $\overline{G}(-T)$, etc. Ce P. C. s'énonce comme suit: *A une mécanique quantifiée* (5,2) *correspond une mécanique classique* (1,1), *si, dans la limite* $h \to 0$, *la relation*

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \overline{S^{-1} F S\,(t+T; F, G, \ldots)}\,(-T) \to \widehat{F}_0\,(t+T; \overline{F}, \overline{G}, \ldots)\,(-T)} \qquad (5,6)$$

existe entre les esp. math. de $S^{-1}FS$ et la fonction historique classique $\widehat{F}_0$ (1,1).

En particulier, la mécanique quantique devient rationnelle, si (5,4) et l'opérateur

$$\dot{F} = (\partial_t S^{-1}) F S + S^{-1} F \partial_t S = \partial_t \widehat{F}\,(t+T; F, G, \ldots) \qquad (5,7)$$

permettent d'éliminer les $F, G, \ldots$ en termes des $\widehat{F}, \widehat{G}, \ldots$ dans une éq. opératorielle de forme (1,5). Omettant alors les $\wedge$ (car on peut alors se rapporter à un temps $t = -T$ quelconque), ces relations opératorielles sont:

$$\dot{F} = f_{\cdot 0}(F, G, \ldots) \qquad (5,8)$$

et le P. C. prend alors la forme

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \overline{f_{\cdot 0}\,(F, G, \ldots)}\,(t) \to f_{00}\,(\overline{F}, \overline{G}, \ldots)\,(t)} \qquad (5,9)$$

du *P. C.* (*rationnel*) *entre la mécanique quantique* (rationnelle, de Heisenberg-Schroedinger) *et la mécanique classique* (rationnelle, de Newton).

(5,7) exige que $S$ ait la structure $e^{-i h^{-1}(t+T) H(F, G, \ldots)}$. (5,2) se réduit alors à la mécanique rationnelle de Schroedinger

$$\dot{\Phi}\,(t) = -\frac{i}{h}\, H\,(F, G, \ldots)\; \Phi\,(t) \qquad (5,10)$$

pour $\Phi$. Cette mécanique quantifiée est nécessairement conservatrice. Elle permet d'établir une correspondance entre les systèmes quasistationnaires (2,4) et (5,10) par

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0} \overline{H\,(F, G, \ldots)} \to H\,(\overline{F}, \overline{G}, \ldots) \\ \lim\limits_{h\to 0} i h^{-1} \overline{[F, G]} \to \{\overline{F}, \overline{G}\}. \end{array}\right. \qquad (5,11)$$

Un P.C. fonctionnel peut être obtenu en éliminant $t+T$ et et les $F, G, \ldots$ de (5,7) à l'aide de (5,4) et des définitions $\ddot{F} = \partial_t^2 \widehat{F}$ (analogues à (5,7)). La force fonctionnelle et opératorielle est:

$$\dot{F} = f\,(F, G, \ldots \ddot{F}) \qquad (5,12)$$

en analogie parfaite avec (1,4). Si le développement (1,7)

$$\dot{F} = f_{\cdot 0}(F, \ldots) + \lambda_0 f_{\cdot 1}(F, \ldots \ddot{F}) + \ldots \tag{5,13}$$

est possible, on peut énoncer un *P.C.* (*quantique*) *entre mécanique* (quantique) *fonctionnelle et mécanique* (quantique) *rationnelle* par la relation opératorielle

$$\boxed{\lim_{\lambda_0 \to 0} f(F, G, \ldots) \to f_{\cdot 0}(F, G, \ldots)} \tag{5,14}$$

En particulier, l'application à des collissions permet de formuler un P.C. asymptotique entre la mécanique asymptotique quantifiée et la mécanique asymptotique rationnelle. Pour pouvoir l'énoncer, nous définissons d'abord par

$$\Phi(t) = e^{-iH^{(0)}t}\, \Psi \tag{5,15}$$

les constantes d'intégration $\Psi(\mu)$. Elles remplaceront les $p_1 \ldots q_n$ du § 2. ($\overline{F} = (\Psi, F\Psi)$ avec $F = F(p_1 \ldots q_n)$ et $\partial_t F = 0$). Le $S$ en

$$\Psi(+T) = S\,\Psi(-T) \tag{5,16}$$

qui correspond à (3,1), peut toujours être mis sous forme de

$$S = e^{-i\alpha\beta(\alpha)} = \left(\eta(\alpha) - \frac{i}{2}\alpha\xi(\alpha)\right)\left(\eta(\alpha) + \frac{i}{2}\alpha\xi(\alpha)\right)^{-1} \tag{5,17}$$ *)

en termes d'un opérateur hermitien $\alpha$. Nous envisageons le cas où la série opératorielle

$$\hat{F}(F, G, \ldots) = \frac{1}{0!}F + \frac{1}{1!}i[\alpha\beta, F] + \frac{1}{2!}i[\alpha\beta, i[\alpha\beta, F]] + \ldots \tag{5,18}$$

permet le développement suivant (pour les esp. math.)

$$\hat{F}(\overline{F, G, \ldots}) = \hat{F}_0(\overline{F}, \overline{G}, \ldots) + h\hat{F}_1(\overline{F}, \overline{G}, \ldots) + \ldots \tag{5,19}$$

Alors ce *P.C. asymptotique* est

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \hat{F}(\overline{F, G, \ldots}) \to \hat{F}_0(\overline{F}, \overline{G}, \ldots)} \tag{5,20}$$

*Exemple 8:* Si l'on pose $\alpha = \varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ en (3,9) et si les opérateurs $a^*$, $a$ et $c^*$, $c$ satisfont à

$$\frac{i}{h}[a'^*, a] = \frac{i}{h}[c'^*, c] = -\frac{i}{h}\,\delta(k'/k)\,\delta(\tau'/\tau)$$

le résultat asymptotique est (3,10) avec

$$g(\alpha) = \left(\eta(\alpha) + \frac{i}{2}\alpha\xi(\alpha)\right)^{-1}.$$

---

*) $\beta, \eta$ et $\xi$ sont des séries $\beta = 1 + \beta_1\alpha + \beta_2\alpha^2 + \ldots$, $\eta = 1 + \ldots$, $\xi = 1 + \ldots$

(Les opérateurs $\alpha^{(n)}[\varphi\ldots]$ ont, *par définition, tous les* $a^*,\ldots c^*\ldots$ *à gauche* des $a\ldots, c\ldots,$ car les $\alpha^{(n)}[\varphi\ldots]\,\alpha^{(n')}[\varphi\ldots]$ tiennent compte des autres termes).

Les conditions (3,12) et (3,13) sont maintenant automatiquement réalisées. On définit $|\,\delta c(\mu')\,|^2$ par $c(\mu')^* c(\mu')(+T)$, vu que $c(\mu')^* c(\mu')(-T) = 0$ pour $\mu' \neq \mu$. Le résultat de cet *effet Compton* correspond (dans la limite $h \to 0$) à l'*effet Thompson* (si on néglige le changement de fréquence de l'*effet de Doppler*) pour le *modèle général* de l'électron introduit en II et III. (III, (10,4).)

### § 6. — Etablissement d'une mécanique fonctionnelle quantifiée.

En général, les observations sur des collisions entre des systèmes élémentaires sont des observations asymptotiques. On observe les *constellations initiales* $\Psi(-T) = \Psi(-T;\ldots N(k,\tau)\ldots N(\mu)\ldots)$ et *finales* $\Psi(+T)$ des particules élémentaires**). Ces expériences déterminent la matrice $S$ d'une *mécanique asymptotique* telle que

$$\begin{aligned} \Phi(t \leqslant -T) &= e^{-ih^{-1}H^{(0)}t}\,\Psi(-T) \equiv \Phi^{(0)}(t) \\ \Phi(t \geqslant +T) &= e^{-ih^{-1}H^{(0)}t}\,\Psi(+T) = e^{-ih^{-1}H^{(0)}t}\,S\,\Psi(-T)\,. \end{aligned} \tag{6,1}$$

Mais au moins pour les forces à grandes distances *une mécanique fonctionnelle* doit exister. Dans ces cas, en effet, l'évolution spatio-temporelle de la collision peut être observée (p. ex. la déflection d'un rayon cathodique ou d'un rayon $\alpha$ par un champ é. m.). Cette mécanique fonctionnelle doit, dans la limite $\lambda_0 \to 0$, correspondre à son tour à la *mécanique rationnelle* de SCHROEDINGER

$$\dot{\Phi}(t) = -\,i h^{-1}\,(H^{(0)} + H^{(\,)})\,\Phi(t)\,. \tag{6,2}$$

$H^{(0)}$ est la somme des Hamiltoniennes des systèmes isolés. $H^{(\,)}$ est l'énergie perturbatrice responsable pour les collisions.

Pour trouver une mécanique fonctionnelle correspondant à un $S$ donné, nous remarquons que $S$ a la forme

$$(S-1)\,(\mu''/\mu') = 2\pi\,\delta(\omega''-\omega')\,A^{(+)}(\mu''/\mu')\,. \tag{6,3}$$

$H^{(0)}$ a été réduite à ses axes principaux $(\omega'' = \omega(\mu''))$

$$H^{(0)}(\mu''/\mu') = h\,\omega''\,\delta(\mu''/\mu')\,. \tag{6,4}$$

Soit $A''^{(+)}(\mu''/\mu')$ une matrice satisfaisant à (6,3) qui n'a pas de singularité infiniment près de l'axe réel dans le plan $\omega'$. (Une telle matrice $A''^{(+)}$ n'est en général pas univoquement déterminée par le $S$ en (6,3)). Cet $A^{(+)}$ permet de définir un opérateur

$$B^{(+)}(\mu''/\mu') = \lim_{\tau \to +0}\,\big(i\,(\omega''-(\omega'+i\tau))\big)^{-1} A^{(+)}(\mu''/\mu')\,. \tag{6,5}$$

---

**) plus exactement leurs amplitudes de probabilité.

Nous étudions les fonctions

$$B^{(+)}\,\Phi^{(0)}\,(t;\,\mu'') =$$
$$= \int d\hat{\mu}' \int_0^\infty d\omega' \frac{e^{-i\omega' t}}{-i(\omega' - (\omega'' - i\tau))} A^{(+)}(\mu''/\mu')\,\Psi(-T;\,\mu'). \tag{6,6}$$

La somme sur les états $\mu'$ a été écrite sous la forme

$$\sum_{\mu'} = \int d\hat{\mu}' \int_0^\infty d\omega' \tag{6,7}$$

$\left(\int d\hat{\mu}'\left(\text{avec } \left[\int d\hat{\mu}\right] = cm\right)\right.$ est une abréviation de la somme, contenant la densité des états, et des sommes sur les spins, etc., des systèmes élémentaires.$\left.\right)$

Pour $t < 0$ resp. $t > 0$, le chemin de l'intégration $d\omega'$ de $0 \to +\infty$ peut être déformé en une demi-droite $0 \to +i\infty$ resp. $0 \to -i\infty$ suivant l'axe imaginaire plus les résidus positifs resp. négatifs situés dans le premier resp. quatrième quadrant du plan $\omega'$. Dans les limites $t = \pm T \to \pm\infty$ et $\tau T \to +0$, seul le résidu de $\omega' = \omega'' - i\tau$ donne une contribution. On a alors, en vertu de (6,3)

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty} B^{(+)}\Phi^{(0)}(t \leqslant -T) \to 0 \\ &\lim_{T\to\infty} B^{(+)}\Phi^{(0)}(t \geqslant +T) \to (S-1)\,e^{-ih^{-1}H^{(0)}t}\,\Psi(-T)\,. \end{aligned} \tag{6,8}$$

La fonction de Schroedinger

$$\Phi(t) = (1 + B^{(+)})\,e^{-ih^{-1}H^{(0)}(t+T)}\,\Phi(-T) \tag{6,9}$$

est ainsi *une histoire compatible avec* (6,1).

En analogie parfaite avec § 1, nous formons la « force »

$$\dot{\Phi}(t) = \left(-ih^{-1}(1 + B^{(+)})\,H^{(0)} + \tau B^{(+)}\right) e^{-ih^{-1}H^{(0)}(t+T)}\,\Phi(-T)\,. \tag{6,10}$$

(Nous avons, pour des raisons ultérieures, remplacé en (6,9)

$$B^{(+)} = \lim_{\tau\to+0} e^{\tau t}\,B^{(+)} \tag{6,11}$$

en nous limitant à des temps $t$ finis). Contrairement à l'histoire classique du § 1, l'histoire quantique comprise en (6,9) et (6,10) permet l'*élimination simultanée de* $t + T$ et des valeurs initiales $\Phi(-T)$. La mécanique fonctionnelle a ainsi *toujours* la forme de Schroedinger (6,2). L'opérateur $X = -ih^{-1}H^{()}$ est déterminé par

$$ih^{-1}\,[H^{(0)}, B^{(+)}] + \tau B^{(+)} = X(1 + B^{(+)}) = A^{(+)} \tag{6,12'}$$

(6,12) peut être résolu en termes du $A$ (6,5) par la série

$$
\begin{aligned}
&-ih^{-1}H^{()}(\mu''/\mu') = X(\mu''/\mu') \\
&= A^{(+)}(\mu''/\mu') - A^{(+)}(\mu''/\mu''')(i(\omega''' - (\omega' + i\tau''')))^{-1}A^{(+)}(\mu'''/\mu') \\
&+ A^{(+)}(\mu''/\mu'''')(i(\omega'''' - (\omega''' + i\tau'''')))^{-1}A^{(+)}(\mu''''/\mu''') \\
&\qquad (i(\omega''' - (\omega' + i\tau''')A^{(+)}(\mu'''/\mu') - \dots \qquad (6,13)
\end{aligned}
$$

La «force» $\dot{\Phi}(t) = f(\Phi(t))$ en (6,2) est, *explicitement*, l'expression d'une *mécanique rationnelle.* Mais, aux dénominateurs de $H^{()}$ en (6,13) correspondent des intégrations sur le passé de $\Phi^{(0)}(t)$. Ceci nous montre que, *implicitement*, cette force

$$
\dot{\Phi}(t) = f\left(\Phi(t), \int_{-\infty}^{t} d t' \dots \Phi(t'), \dots\right)
$$

en (6,2) est de *nature fonctionnelle.*

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer notre P.C. entre mécanique fonctionnelle quantifiée et mécanique rationnelle quantifiée. D'abord, on doit se rappeler que la solution d'un problème rationnel (l'éq. de SCHROEDINGER (6,2)) peut être donné dans la forme (6,9) si $H^{()}\Phi(t \leqslant -T) = 0$. Avec la substitution (6,11), on trouve pour le $A^{(+)}$ en (6,5) la série en $X = -ih^{-1}H^{()}$

$$
\begin{aligned}
&A'^{(+)}(\mu''/\mu') = X(\mu''/\mu') + X(\mu''/\mu''')(i(\omega''' - (\omega' + i\tau''')))^{-1}X(\mu'''/\mu') \\
&+ X(\mu''/\mu'''')(i(\omega'''' - (\omega' + i\tau'''')))^{-1}X(\mu''''/\mu''')(i(\omega''' \\
&- (\omega' + i\tau''')))^{-1}X(\mu'''/\mu') + \dots \qquad (6,14)
\end{aligned}
$$

(différente de (6,13) parce que l'on a toujours $\omega'$ dans les dénominateurs). Dans l'évaluation de (6,7), on doit tenir compte du fait que $A'^{(+)}$ (différent de $A''^{(+)}(\mu''/\mu')$) a maintenant des singularités infiniment près de l'axe réel $\omega'$. Mais, en décomposant les termes en fractions partielles, on trouve (par ex. pour la deuxième approximation)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} B^{(+)}\Phi^{(0)}(t;\mu'') = 2\pi\delta(\omega'' - \omega')X(\mu''/\mu')e^{-i\omega' t}\Psi(-T;\mu') \\
&+ \int d\hat{\mu}' \int_0^\infty d\omega' \left(\frac{1}{-i(\omega' - (\omega'' - i\tau''))} \cdot \frac{1}{i(\omega''' - (\omega'' + i(\tau''' - \tau'')))}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{i(\omega'' - (\omega''' + i(\tau'' - \tau''')))} \cdot \frac{1}{-i(\omega' - (\omega''' - i\tau'''))}\right) \\
&\qquad X(\mu''/\mu''')X(\mu'''/\mu')e^{-i\omega' t}\Psi(-T;\mu') + \dots \qquad (6,15)
\end{aligned}
$$

Pour $t \to +\infty$, seuls les résidus $\dots - i\tau$ donnent une contribution. On a deux termes. Si $\tau''' \neq \tau''$, deux possibilités se présentent. Pour $\tau''' - \tau'' \to +0$, la somme $\int d\hat{\mu}''' \int d\omega''' e^{-i\omega''' t}$ dans le second terme est nulle, parce que $\tau'' - \tau''' \to -0$. Pour $\tau'' - \tau''' \to +0$, le deuxième terme contribue un résidu qui, ajouté au premier terme, change le signe du demi-résidu contribué par le détour autour de $\omega''' = \omega'' - i0$ dans le premier terme*). Dans la limite $t \to \infty$, les singularités près de l'axe réél $\omega'$ ne donnent pas de contribution et (6,8) reste valable. La même démonstration peut être faite pour les termes supérieurs. Le P.C. s'énonce alors ainsi:

*A une mécanique asymptotique quantifiée, caractérisée par un opérateur unitaire et invariant $S$ correspond une mécanique rationnelle de* SCHROEDINGER, *avec $-iH = -iH^{(0)} + hX$, si, dans la limite $\lambda_0 \to 0$, $S - 1$ a la structure*

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{\lambda_0 \to 0} (S-1)(\mu''/\mu') \to 2\pi\delta(\omega'' - \omega')(X + X \oplus X \\ + X \oplus X \oplus X + \ldots)(\mu''/\mu')\end{aligned}} \qquad (6\,16)$$

$F \oplus G$ est une multiplication symbolique définie en termes de $\omega'$, par

$$(F \overset{\oplus}{\underset{\ominus}{}} G)(\mu''/\mu''') = \lim_{\tau \to +0} F(\mu''/\mu'''')(i\omega'''' - (\omega' \pm i\tau)))^{-1} G(\mu''''/\mu''') \qquad (6{,}17)$$

(6,17) est une somme sur $\mu''''$ où le parcours de sommation a été détourné dans le quatrième $(+i\tau)$ ou le premier $(-i\tau)$ quadrant du plan complexe $\omega(\mu'''')$ pour éviter la singularité $\omega'''' = \omega'$. Par les *multiplications symboliques*

$$\left.\begin{aligned} F \times G &= \tfrac{1}{2}(F \oplus G + F \ominus G) \\ F \odot G &= \tfrac{1}{2}(F \oplus G - F \ominus G) \end{aligned}\right\} \qquad (6{,}18)$$

on définit la valeur principale de la somme (6,17) et la moitié du résidu autour de $\omega'''' = \omega'$). On a en particulier

$$(F \odot G)(\mu''/\mu''') = \tfrac{1}{2} F(\mu''/\mu'''')\, 2\pi\delta(\omega'''' - \omega')\, G(\mu''''/\mu'''). \qquad (6{,}18\text{a})$$

*Exemple 9: Collision, due à l'interaction de Coulomb-Yukawa, entre deux particules (diffusion de Rutherford).*

Nous cherchons un $S = S(\alpha)$, fonction d'un opérateur hermitien

$$\alpha = \varepsilon^2 \alpha^{(2)} + \varepsilon^4 \alpha^{(4)}_{(2)} + \varepsilon^6 \alpha^{(6)}_{(4)} + \ldots \qquad (6{,}19)$$

tel que (6,16) soit satisfait dans la limite $m = h\varkappa_{(w)} \to \infty$ (particules « infiniment » lourdes allant « infiniment lentement ») avec un opérateur dans l'espace de configuration

$$\lim_{\varkappa_{(w)} \to \infty} X(\vec{q}^{\,(1)}, \vec{q}^{\,(2)}) \to -ih^{-1} H_{(\varphi)}^{(\;)}(|\vec{q}^{\,(1)} - \vec{q}^{\,(2)}|) \qquad (6{,}20)^{**})$$

*) Enfin, pour $\tau''' = \tau''$, on définit des sommes sur $\mu'''$ par les *valeurs principales* (= les moyennes entre $\tau''' - \tau'' \to \pm 0$) et l'on obtient encore une fois le même résultat.

**) à cause de (3,8,) la limite $\lambda_0 \to 0$ s'exprime dans ces exemples par $\varkappa_{(w)} \to \infty$ ($h$ restant fini).

$H_{(\varphi)}^{()}$ est défini par (4,3). Nous allons démontrer que la série (5,17) en $\alpha$ avec un $\alpha[w^* w^* w w]$ quadrilinéaire en $w^*$ et $w$ dont le $\varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ est donné par (3,9) et dont les $\varepsilon^{n+2} \alpha_{(n)}^{(n+2)}$ sont les termes $n$ fois contractés $w \ldots w'$ (III (9,14)) en:

$$\varepsilon^4 \alpha_{(2)}^{(4)} = -2\, \varepsilon^4 \varkappa_{(w)}^4\, h^{-3} \int (dx)^4 w^* w \operatorname{ret}_{(\varphi)} \left(w^* \operatorname{ret}_{(w)} (w \operatorname{ret}_{(\varphi)} (w^* w))\right) + \ldots$$

$$\varepsilon^6 \alpha_{(4)}^{(6)} = -4\, \varepsilon^6 \varkappa_{(w)}^6\, h^{-4} \int (dx)^4 w^* w \operatorname{ret}_{(\varphi)} (w^* \operatorname{ret}_{(w)} (w \operatorname{ret}_{(\varphi)} (w^* \operatorname{ret}_{(w)} (w \operatorname{ret}_{(\varphi)} (w^* w))))) + \ldots$$

$$\varepsilon^8 \alpha_{(6)}^{(8)} = \ldots \tag{6,21}$$

permet de satisfaire au P.C. (6,16). Définissant un $\alpha(\vec{k}', \vec{l}' / \vec{k}, \vec{l})$ dans l'espace de configuration de deux particules $\vec{k}, \vec{l}$ (pas d'antiparticules) par

$$\alpha = \sum_{\vec{k}'} \sum_{\vec{l}'} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{l}} a^*(k', +)\, a^*(l', +)\, a(k, +)\, a(l, +)\, \alpha(\vec{k}', \vec{l}' / \vec{k}, \vec{l}) + \ldots \tag{6,22}$$ *)

on trouve, avec $(k-k')^2 = (k-k', k-k')$

$$-i \varepsilon^2 \alpha^{(2)} (\vec{k}', \vec{l}' / \vec{k}, \vec{l}) = 2 \pi \delta (k'^4 + l'^4 - (k^4 + l^4))\, X_{(2)} (\vec{k}', \vec{l}' / \vec{k}, \vec{l}) \tag{6,23}$$

$$X_{(2)} (\vec{k}', \vec{l}' / \vec{k}, \vec{l}) = i \varepsilon^2 \delta_{\vec{k}' + \vec{l}', \vec{k} + \vec{l}}\, V^{-1} \frac{\varkappa_{(w)}^2}{\sqrt{k'^4\, l'^4\, k^4\, l^4}} \cdot \frac{1}{(k-k')^2 + \varkappa_{(\varphi)}^2}$$

et

$$-i \varepsilon^4 \alpha_{(2)}^{(4)} (\vec{k}', \vec{l}' / \vec{k}, \vec{l}) = 2 \pi\, \delta\, (k'^4 + l'^4 - (k^4 + l^4))$$

$$\sum_{\vec{k}''} \sum_{\vec{l}''} X_{(2)} (\vec{k}', \vec{l}' / \vec{k}'', \vec{l}'') \frac{2\, l''^4}{i} \frac{1}{(k+l-k'')^2 + \varkappa_{(w)}^2} X_{(2)} (\vec{k}'', \vec{l}'' / \vec{k}, \vec{l}) \tag{6,24}$$

etc. Dans la limite envisagée, les dénominateurs en $\alpha_{(2)}^{(4)}$ (dus à $\operatorname{ret}_{(w)}$) tendent vers

$$(k+l-k'')^2 + \varkappa_{(w)}^2 = \varkappa_{(w)}^2 + |\vec{l}''|^2 - (k^4 + l^4 - k''^4)^2 \rightarrow 2\, \varkappa_{(w)} (k''^4 + l''^4 - (k^4 + l^4))$$

Le $\alpha$ défini en (6,19) tend ainsi vers

$$\lim_{\varkappa_{(w)} \to \infty} (-i\alpha)(\mu'/\mu) \rightarrow 2 \pi \delta (\omega' - \omega)(X + X \times X + X \times X \times X + \ldots)(\mu'/\mu) \tag{6,25}$$

$\mu$ est ici l'espace de configuration des impulsions $\mu = (h\vec{k}\,; h\vec{l})$ des deux particules $\vec{k}$ et $\vec{l}$ avec $\omega(\mu) = k^4 + l^4$. (6,25) est un opérateur antihermitien.

Le choix particulier $\eta = \xi = 1$ en (5,17) donne, pour $S-1$, la série

$$S - 1 = -i\alpha \left(1 + \frac{i}{2} \alpha\right)^{-1} = (-i\,\alpha) + \frac{1}{2} (-i\,\alpha)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (-i\alpha)^3 + \ldots \tag{6,26}$$

Dans la limite, cette série s'exprime, en vertu de (6,18a), par

$$\begin{aligned} \lim_{\varkappa_{(w)} \to \infty} (S-1)(\mu'/\mu) &\rightarrow 2 \pi \delta (\omega' - \omega)(X + X \times X + \ldots \\ &\quad + (X + X \times X + \ldots) \bigcirc (X + X \times X + \ldots) + \ldots) \\ &= 2 \pi \delta (\omega' - \omega)(X + (X \times X + X \bigcirc X) \\ &\quad + (X \times X \times X + X \bigcirc X \times X + X \times X \bigcirc X + X \bigcirc X \bigcirc X) + \ldots) \end{aligned} \tag{6,27}$$

qui est identique à (6,16) (voir la définition des produits symboliques (6,18)).

Un $S(\alpha)$ avec $\xi = \eta = 1$ en (5,17), dont les termes quadrilinéaires sont donnés par les séries (6,19) et (6,21), correspond ainsi, dans la limite $\lambda_0 \rightarrow 0$ (c'est-

---

*) $+ \ldots$ signifie des termes éventuels contenant $\varphi$ en (6,21) et des termes contenant des $a(k, -)$.

à-dire en négligeant les effets de retardation), à l'interaction d'un $H^{()}$ dont l'élément de matrice est l'élément de YUKAWA:

$$ih\, X_{(2)} \to H^{()}_{\varkappa_{(\varphi)}}(\vec{k}'\vec{l}'/\vec{k}\vec{l}) = -e^2 \frac{1}{V} \delta_{\vec{k}'+\vec{l}',\vec{k}+\vec{l}} \frac{1}{|\vec{k}-\vec{k}'|^2+\varkappa^2_{(\varphi)}} =$$

$$\int (dq^{(1)})^3 \int (dq^{(2)})^3 \frac{1}{V^2} e^{i((\vec{k}'-\vec{k},\vec{q}^{(1)})+(\vec{l}'-\vec{l},\vec{q}^{(2)}))} H^{()}_{\varkappa_{(\varphi)}}(|\vec{q}^{(1)}-\vec{q}^{(2)}|) \tag{6,28}$$

*Exemple 10: Collision entre trois particules:* L'élément de matrice dans l'espace de configuration

$$ih X_{(3)}(\vec{k}',\vec{l}',m'/\vec{k},\vec{l},\vec{m}) = \sum_{\text{Perm}} ih X_{(2)}(\vec{k}',\vec{l}'/\vec{k},\vec{l})\,\delta_{\vec{m}',\vec{m}}$$

$$\to \int\int\int (dq^{(1)})^3 (dq^{(2)})^3 (dq^{(3)})^3 V^{-3} e^{i((\vec{k}'+\vec{k},\vec{q}^{(1)})+\cdots)} \tag{6,29}$$

$$\left(H^{()}_{(\varphi)}(r^{12}) + H^{()}_{(\varphi)}(r^{13}) + H^{()}_{(\varphi)}(r^{23})\right) = H^{()}(\vec{k}',l',m'/\vec{k},\vec{l},\vec{m})$$

décrit l'interaction entre trois particules à qte. de mouv. $h\vec{k}, h\vec{l}$ et $h\vec{m}$. Notre $\alpha^{(2)}$ a déjà la structure voulue. Mais il faut ajouter à (6,19) des termes $\varepsilon^n\, \alpha^{(n)}_{(n-4)}$, hexalinéaires en $w^*$ et $w$ ((6,21) $(n-4)$ fois contracté))

$$\alpha\,[w^* w^* w^* w w w] = a(k',+)^* a(l',+)^* a(m',+)^*$$

$$a(k,+)\, a(l,+)\, a(m,+)\; \alpha\,(\vec{k}',\vec{l}',\vec{m}'/\vec{k},\vec{l},\vec{m}) \tag{6,30}$$

avec

$$\varepsilon^4\, \alpha^{(4)} = 2\pi\delta(k'^4 + l'^4 + m'^4 - (k^4 + l^4 + m^4))$$

$$X_{(2)}(\vec{k}',\vec{m}'/\vec{k}'',\vec{m})\, 2\, k''^4 \frac{1}{(k+l-k'')^2+\varkappa^2_{(\varphi)}} X_{(2)}(\vec{k}'',\vec{l}'/\vec{k},\vec{l}) \tag{6,32}$$

Alors, l'opérateur $-i\alpha(\mu'/\mu)$ dans l'espace de configuration $\vec{k},\vec{l},\vec{m}$ tend encore une fois vers (6,27) avec l'opérateur $X_{(3)}$ de (6,29).

*Exemple 11. Collision entre $N$ particules.* En généralisation de l'exemple précédent, on doit ajouter au $\alpha$ du problème de $N-1$ particules des termes $\alpha^{(n)}_{(n-(2N-2))}$, $2N$-linéaires en $w^*$ et $w$.

## § — 7. La théorie du continu classique

L'exemple étudié au paragraphe précédent pour un $N$ très grand est l'*image atomique du continu macroscopique de la matière*. On passe à l'*image du vrai continu* en faisant tendre ce nombre $N$ (= nombre d'AVOGADRO) vers l'infini tout en gardant $Nh$ fini.

Nous remarquons alors que les termes contractés $\alpha^{(n)}_{(2)}$ peuvent être obtenus des $\alpha^{(n)}$ en transposant tous les $a^*$ d'un $w$ (ou $w^*$) à droite des $a$. Formellement, ceci s'écrit

$$\varepsilon^n(\alpha^{(n)} + \alpha^{(n)}_{(m)}) = \varepsilon^n\, \alpha^{(n)}{}_{\text{transposé }(m/2)\text{ pairs}}$$

Comme les $a^*$ et $a$ sont, dans la limite $N \to \infty$, proportionnels à $\sqrt{N}$, on peut énoncer le P.C. suivant:

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \varepsilon^n \left(\alpha^n + \sum_m \alpha^{(n)}_{(m)}\right) \to \varepsilon^n \alpha^{(n)} \left(1 + \Sigma \chi^{(n)}_{(m)} N^{-m}\right)} \tag{7,1}$$

Si l'on fait intervenir des $\alpha^{(n)}_{(m)}$ du type

$$\varepsilon^2 \alpha^{(2)}_{(2)} = -\varepsilon^2 \varkappa^2_{(w)} \int (d x)^4 \, u^* \underbrace{w \operatorname{ret} w^*}_{} \, w = -\lim_{K\to\infty} \int_{-T}^{+T} d t N \varepsilon^2 \varkappa_{(w)} \log \frac{K}{\varkappa_w} \tag{7,2}$$

les facteurs $\chi^{(n)}_{(m)}$ deviennent en (7,1) des coefficients infinis. Ils expriment les effets dus à la fameuse « énergie propre » des particules élémentaires dans l'ancienne mécanique. Mais, dans la limite $N \to \infty$, nous avons la liberté de faire tendre $\lim N^{-1} \log (K/\varkappa_{(w)}) \to 0$. On arrive ainsi à la *mécanique asymptotique d'un vrai continu* classique $w$, caractérisée par son

$$\alpha = \lim_{N\to\infty} (\varepsilon^2 \alpha^{(2)} + \varepsilon^4 \alpha^{(4)} + \ldots) \tag{7,3}$$

(les $a^*$ et $a$ à leurs places naturelles).

On peut démontrer qu'un $\alpha$ existe tel que (7,3) et est la forme asymptotique d'une mécanique fonctionnelle d'un champ complexe classique, exprimée par l'équation fonctionnelle

$$(\Box - (\varkappa_{(w)} - \varepsilon h^{-\frac{1}{2}} \varphi[w])^2) w = 0 \tag{7,4}$$

La fonctionnelle $\varphi[w]$ est alors la moyenne du potentiel avancé et retardé, solution de

$$(\Box - \varkappa^2_{(\varphi)}) h^{-\frac{1}{2}} \varphi = -\varepsilon h^{-1} \varkappa_{(w)} w^* w + \varepsilon^2 h^{-\frac{3}{2}} \varphi w^* w \tag{7,5}$$

Cette mécanique est conservatrice pour $P_\alpha(\pm T) = \Sigma N(k, \tau) k_\alpha$ en analogie parfaite avec la théorie des deux particules au § 3. La dispersion naturelle a réduit à ces deux époque l'intensité $w$ des paquets d'onde à des amplitudes infiniment faibles. Le potentiel $\varphi[w]$ symmétrique produit dans la théorie (7,4) et (7,5) les mêmes phénomènes acausals (action des potentiels avancés) que dans la théorie des particules en § 3.

Pour remédier à ce défaut, il faut introduire le champ $\varphi$ comme une observable physique indépendante de $w$. En termes des coefficients $\hat{a}^*$, $\hat{a}$ et $\hat{c}^*$ et $\hat{c}\,(t)$ ou des « constantes » $a^*$, $a$, $c^*$ et $c$ de (2,9) et (2,12), cette théorie rationnelle des trois champs $\varphi$ et $w = u_{(1)} - i\, u_{(2)}$ est canonique. Son $H^{()}$ en (4,1) est

$$H^{()} = \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)}$$

$$\varepsilon H^{(1)} = -\varepsilon h^{-\frac{1}{2}} \varkappa_{(w)} \int (dx)^3 \, \varphi w^* w \, ; \; \varepsilon^2 H^{(2)} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 h^{-1} \int (dx)^3 \, \varphi^2 w^* w \tag{7,6}$$

Un tenseur $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ satisfaisant à la loi de continuité $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ existe. Pour trouver $\alpha(t)$ en termes de $H^{()}(t)$ dans

$$F(t) = \left(\frac{1}{0!} F(-T) + \{\alpha(t)(-T), F(-T)\} + \ldots\right) \tag{7,7}$$

on doit résoudre

$$\frac{1}{1!}\,\partial_t \alpha(t) + \frac{1}{2!}\{-\alpha(t), \partial_t \alpha(t)\} + \\ + \frac{1}{3!}\{-\alpha(t), \{-\alpha(t), \partial_t \alpha(t)\} + \ldots = H^{()}(t) \tag{7,8*}$$

$\alpha(t)(-T)$ est l'intégrale $\int\limits_{-T}^{t} dt'\,\partial_{t'}\,\alpha(t')$ d'un $\partial_t\,\alpha(t)(-T)$, qui dépend des observables $F(-T)$ à l'époque initiale. $\alpha = \alpha(+T)(-T)$ est alors le $\alpha = \alpha(-T)$ de la mécanique asymptotique.

## § 8. — Théorie du rayonnement quantique.

Le procédé classique de (7,7) nous fournit les termes

$$\varepsilon\alpha^{(1)} = -\varepsilon h^{-\frac{3}{2}}\,\varkappa_{(w)} \int (dx)^4\, \varphi\, w^* w \tag{8,1}$$

le $\varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ de (3,9), etc., qui dépendent de $\varphi$. Les termes linéaires en $\varphi$ et, au maximum, quadrilinéaires en $w^*$ et $w$ sont (8,1) et

$$\varepsilon^3 \alpha^{(3)} = -2\,\varepsilon^3 h^{-\frac{5}{2}}\,\varkappa^3_{(w)} \int (dx)^4 \left(w^* \varphi\, \mathrm{ret}_{(w)}\, (w\, \mathrm{ret}_{(\varphi)}\, (w^* w) + \mathrm{conj})\right) \\ = \varepsilon^{(3)} \left(\alpha^{(1)+(2)} + \alpha^{(2)+(1)}\right) \tag{8,2}$$

D'autres termes sont obtenus par contraction sur $\underbrace{w^* \ldots w'}$ des $\alpha^{(5)}$, etc. Ils ont la forme

$$\varepsilon^5\, \alpha^{(5)}_{(2)} = \varepsilon^5 \left(\alpha^{(1)+(2)+(2)}_{(2)} + \alpha^{(2)+(1)+(2)}_{(2)} + \alpha^{(2)+(2)+(1)}_{(2)}\right) \tag{8,3}$$

Dans l'espace $\mu$ de la configuration de deux particules ($\vec{k}$ et $\vec{l}$) et du nombre de protons $N(\vec{\mu})$, (8,1) définit l'opérateur

$$Y(\vec{k}', \vec{l}'; \ldots N(\vec{\mu})' \ldots / \vec{k}, \vec{l}; \ldots N(\vec{\mu}) \ldots) \\ = i\varepsilon \sum_{\vec{\mu}} c(\vec{\mu}) (\ldots . N(\vec{\mu}')' \ldots / \ldots N(\vec{\mu}') \ldots) (2\, V \mu^4)^{-\frac{1}{2}} \\ (\delta_{\vec{k}'+\vec{\mu}, \vec{k}}\, \delta_{\vec{l}', \vec{l}} + \delta_{\vec{k}', \vec{k}}\, \delta_{\vec{l}'+\vec{\mu}, \vec{l}}) + \mathrm{conj} \tag{8,4}$$

En termes de cet opérateur, la série (8,1) + (8,2) + (8,3) etc., (linéaire en $\varphi$) tend vers

$$\lim_{\varkappa_{(w)} \to \infty} (-i(\alpha^{(1)} + \ldots)) \to 2\pi\delta(\omega' - \omega) \tag{8,5}$$

$$(Y + (X \times Y + Y \times X) + (Y \times X \times X + X \times Y \times X + X \times X \times Y) + \ldots)(\mu'/\mu)$$

---

*) $H^{()}(t)$ est le $H^{()}$ de (7,6) avec $\varphi(t)$ et $w(t)$.

*

avec $\omega = k^{(4)} + l^{(4)} + \Sigma N(\vec{\mu})\,\mu^4$. Le choix $\zeta = \eta = 1$ détermine un $S-1$, qui correspond à

$$\lim (S-1)(\mu'/\mu) \to 2\pi\delta(\omega'-\omega)\,(A_{(2)}^{(+)}$$
$$+ (1 + X \oplus + X \oplus X \oplus + \ldots)\, Y (1 + \oplus X + \ldots)$$
$$+ (1 + X \oplus + \ldots)(Y \bigcirc Y + 2\, Y \bigcirc X \bigcirc Y + Y \times X \bigcirc Y + Y \bigcirc X \times Y$$
$$+ \ldots)(1 + \oplus X + \ldots) + \ldots)\,(\mu'/\mu) \qquad (8,5)$$

$A_2^{(+)}$ est l'opérateur défini en (6,27). En termes de l'opérateur $1 + B_2^{(+)}$ cette expression prend la forme

$$\lim (S-1)(\mu'/\mu) \to 2\pi\delta(\omega'-\omega)\,(A_2^{(+)} + (1+B_2^{(+)})\, Y (1+B_2^{(+)})$$
$$+ (1+B_2^{(+)})\, Y (1+B_2^{(+)}) \bigcirc (1+B_2^{(+)})\, Y (1+B_2^{(+)}) + \ldots)\,(\mu'/\mu) \qquad (8,6)$$

Nous avons ajouté à $\alpha$ des termes anti-hermitiens du type $-i2$ $(\alpha^{(1)} \frac{i}{2} \alpha^{(2)} \frac{i}{2} \alpha^{(1)}$ etc. qui contribuent $2\, Y \bigcirc X \bigcirc Y$ au troisième terme de (8,5) nécessaire pour obtenir (8,6).

Les éléments de matrice de (8,6), contenant $Y$ à une puissance impaire, contribuent une expression linéaire en $c(\mu)$ ou $c(\vec{\mu})^*$. Ils sont la mesure pour l'amplitude de probabilité de l'*absorption et de l'émission d'un seul quantum*, à qte. de mouvement $h\vec{\mu}$, lors d'une rencontre des deux particules $h\vec{k}$ et $h\vec{l}$ (rayonnement de freinage). Les termes multilinéaires en $c^* \ldots c \ldots c^* \ldots$ provenant du $Y \ldots \bigcirc \ldots Y \ldots \bigcirc \ldots Y$ en (8,6), donnent la mesure pour l'*émission successive de plusieurs quanta* et les corrections pour l'amortissement dues à une réabsorption (freinage de rayonnement). Pour obtenir l'*émission simultanée de plusieurs quanta*, on calcule d'abord par le raisonnement de correspondance avec la théorie du continu classique, d'autres termes multilinéaires en $\varphi$. Les bilinéaires en $\varphi$ sont le $\varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ de (3,9) plus

$$\varepsilon^4 \alpha^{(4)} [w^* w^* w w \varphi \varphi] =$$
$$-2\varepsilon^4 h^{-3} \varkappa_w^4 \int (dx)^4 \Big(w^* \varphi\, \mathrm{ret}_{(w)} (w\, \mathrm{ret}_{(\varphi)} (w^*\, \mathrm{ret}_{(w)} (w \varphi)))$$
$$+ w^* \varphi\, \mathrm{ret}_{(w)} (w\, \mathrm{ret}_{(\varphi)} (w\, \mathrm{ret}_{(w)} (w^* \varphi)))$$
$$+ w^* \varphi\, \mathrm{ret}_{(w)} (w^*\, \mathrm{ret}_{(\varphi)} (w\, \mathrm{ret}_{(w)} (w \varphi)))\Big) \qquad (8,7)$$

et des $\alpha_{(2)}^{(6)}$ etc. Dans la limite non relativiste, ces termes se réduisent à l'adjonction d'un

$$\lim (-i\alpha)(\mu'/\mu) \to 2\pi\delta(\omega'-\omega)$$
$$(\ldots (Y \times Y) + ((Y \times Y) \times X + (Y \times X \times Y) + X \times (Y \times Y)) + \ldots)\,(\mu'/\mu)$$

$(\ldots \times \ldots)$ est le produit symbolique du $Y$ (8,1) avec lui-même, *mais où tous les $c^*$ sont à gauche des $c$.* On peut aussi l'écrire dans la forme

$$\rightarrow 2\pi\delta(\omega'-\omega)(\ldots((1+B_2^{(+)})\,Y(1+B_2^{(+)}) \\ \times(1+B_2^{(+)})\,Y(1+B_2^{(+)}))+\ldots)(\mu'/\mu) \qquad (8,9)$$

Ces termes décrivent la *diffusion* d'un quantum ($h\vec{\mu}\rightarrow h\vec{\mu}'$) par un système matériel composé de deux particules en collision et l'*émission* et l'*absorption simultanée* de deux quanta $h\vec{\mu}$ et $h\vec{\mu}'$ par un tel système.

### § 9. — Les états stationnaires du système composé

Un problème de SCHROEDINGER (6,2) permet des solutions stationnaires

$$\Phi_{(i)}=e^{-i\,\omega_{(i)}\,t}\,\Psi_{(i)} \qquad (9,1)$$

Pour les trouver, on peut procéder suivant la méthode des perturbations de BORN. On développe $\Psi_{(i)}$ en puissance de l'opérateur $X=-i\,h^{-1}H^{()}$. Soit $\Psi^{(0)}_{(i)}$ une solution propre du problème non perturbé avec l'énergie $h\,\omega_{(i)}$. Alors, on vérifie facilement que les constantes

$$\Psi_{(i,\,\pm)}=(1+B^{(\pm)})\,\Psi^{(0)}_{(i)} \qquad (9,2)$$

substituées en (9,1), forment une solution de (6,2). Elle est composée de l'onde non perturbée $\Psi^{(0)}_{(i)}$ et d'une onde sphérique émergente $B^{(+)}\Psi^{(0)}_{(i)}$ ou incidente $B^{(-)}\Psi^{(0)}_{(i)}$. De même les constantes

$$\Psi_{(i,\,\times)}=(1+B^{(\times)})\,\Psi^{(0)}_{(i)} \qquad (9,3)$$

forment une solution où les moitiés de l'onde sphérique incidente et émergente s'ajoutent à $\Psi^{(0)}_{(i)}$. On sait que toute onde non perturbée $\Psi^{(0)}$ peut être décomposée en deux parties:

$$\Psi^{(0)}_{(i)}=\Psi^{(0,\,-)}_{(i)}+\Psi^{(0,\,+)}_{(i)} \qquad (9,4)$$

$\Psi^{(0,\,+)}_{(i)}$ est une onde qui, dans l'espace de configuration $3\,N$-dimensionnel des $N$ particules ou quanta, ne contient que des ondes sphériques émergentes et $\Psi^{(0,\,-)}_{(i)}$ est entièrement composé d'ondes spériques incidentes. Soit $\mathrm{R}^2=\sum^{N}|\vec{q}^{(n)}|^2$ le rayon dans cet espace*). Soit $\vartheta$ l'ensemble des $3\,N-1$ angles et soit $P_l(\vartheta)$ les harmoniques sphériques dans cet espace. Alors, le développement suivant est possible dans la limite asymptotique spatiale

$$\lim_{R\to\infty}\Psi^{(0,\,\pm)}_{(i)}(R\,;\,\vartheta)\rightarrow P_l(\vartheta)R^{2-3\,N}e^{\pm\,i\,\nu\,R}\,\Psi^{(0,\,\pm)}_{(i)}(\nu\,;\,l) \qquad (9,5)$$

*) Espace à nombre de dimensions variable, si des particules ou quanta sont créés.

$\mu = (\nu;\, l)$ est l'indice dénombrant les axes dans l'espace hermitien correspondant. Un raisonnement analogue à (6,8) dans le plan complexe de la longueur $\nu$ du « vecteur d'onde » $\mu = (\nu\,;\, l)$ donne le résultat

$$\lim_{R\to\infty} B^{(+)}\Psi_{(i)}^{(0,\,-)}(R\,;\,\vartheta) \to 0$$

$$\lim_{R\to\infty} B^{(+)}\Psi_{(i)}^{(0,\,+)}(R\,;\,\vartheta) \to (S-1)\,\Psi_{(i)}^{(0,\,+)}(R\,;\,\vartheta) \qquad (9{,}6)^*$$

Dans la limite asymptotique, on peut donc écrire pour (9,2)

$$\lim \Psi_{(i,\,+)} \to \Psi_{(i)}^{(0,\,-)} + S\,\Psi_{(i)}^{(0,\,+)} \qquad (9{,}7)$$

Ceci signifie:

*A toute mécanique asymptotique temporelle $\Psi(+T) = S\,\Psi(-T)$ caractérisée par $S$, correspond une mécanique fonctionnelle, dont les états stationnaires sont décrites à des distances asymptotiques spatiales, en termes de l'onde $\Psi_{(i)}^{(0)}$ du problème non perturbé si l'on y change la phase de la partie émergente $\Psi_{(i)}^{(0,\,+)}$ en $S\,\Psi_{(i)}^{(0,\,+)}$.*

Nous avons ainsi démontré l'*équivalence* entre *notre mécanique* et *la théorie des grandeurs observables de* Heisenberg [1944].

La nouvelle signification de $1 + B^{(+)}$ en (9,2) permet une interprétation alternative de (8,6) et (8,9). Un élément, p. ex. le terme

$$2\,\pi\,\delta\,(\omega' - \omega)\,(1 + B_2^{(+)})\;Y\,(1 + B_2^{(+)})\,(\mu'/\mu) \qquad (9{,}8)$$

de la série (8,6) était une mesure de la probabilité de transition d'un état $\mu_i = (\vec{k}_i,\, \vec{l}_i;\, \ldots 0_{\vec{\mu}} \ldots)$ (où les deux particules avaient des quantités de mouvement $h\vec{k}_i$ et $h\vec{l}_i$) à un autre état $\mu_i' = (\vec{k}_i{}',\, \vec{l}_i{}'\,;\, \ldots 1_{\vec{\mu}'},\, \ldots)$ (où un quantum $h\vec{\mu}'$ est présent et où les particules se trouvent dans les états $h\vec{k}_i{}'$ et $h\vec{l}_i{}'$). Ces deux états sont caractérisés par des

$$\Psi_{(\mu_i)}^{(0)}(\mu) = 2^{-\frac{1}{2}}\left(\delta_{\vec{k}_{(i)},\,\vec{k}}\,\delta_{\vec{l}_{(i)},\,\vec{l}} + \delta_{\vec{k}_{(i)},\,\vec{l}}\,\delta_{\vec{l}_{(i)},\,\vec{k}}\right)\ldots\delta_{0,\,N(\vec{\mu})}\cdots$$

$$\text{et}\quad \Psi_{(\mu'_i)}^{(0)}(\mu) = 2^{-\frac{1}{2}}\left(\delta_{\vec{k}'_{(i)},\,\vec{k}}\cdots \right)\ldots\delta_{1,\,N(\vec{\mu}')}\cdots$$

Introduisant les fonctions $\Psi_{(\mu_i,\,+)} = (1 + B_2^{(+)})\,\Psi_{(\mu_i)}^{(0)}$, on s'aperçoit que l'élément (9,8) peut aussi être compris comme mesure de la probabilité de transition entre deux états (9,2) où les deux particules sont dans des ondes $\Psi_{(\mu_i,\,\ldots)}(\vec{q}^{\,(k)},\, \vec{q}^{\,(l)})$ solutions de (6,2) représentant un état stationnaire du spectre continu d'un atome d'Hydrogène*) accompagné de l'émission ou de l'absorption d'un quantum. La conjuguée complexe de $\Psi_{(i,\,+)}$ étant (9,2) $\Psi^*_{(i,\,+)} = \Psi^{(0)}(1 + X\ominus + X\ominus X\ominus)$, on s'apercoit que (9,8) représente la

*) Cette condition demande que les énergies $\omega = \omega(\nu; l)$ soient positives.

**) formé de deux particules identiques $\vec{k}$ et $\vec{l}$, s'attirant suivant un lim $H^{()} \to \varepsilon^2\,(4\,\pi\,r)^{-1}\exp(-\varkappa r)$.

transition d'un état $\Psi_{(\mu_i,+)}(\vec{q}^{(k)}; \vec{q}^{(l)})$ à un état $\Psi_{(\mu'_i,-)}(\vec{q}^{(k)}, \vec{q}^{(l)}, \vec{\mu})$. Ceci est naturel, parce que, dans l'état initial, les particules «entrent» comme des ondes planes, tandis que, dans l'état final, elles «sortent» sous forme d'ondes planes. Aux autres termes de (8,6) et (8,9) on peut donner cette même forme

$$(S-1)(\mu' - / \mu +) \to 2\pi\delta(\omega' - \omega)(\ldots Y + Y \odot Y + \ldots \\ + (Y \times Y) + \ldots)(\mu' - / \mu +) \qquad (9,9)$$

Les produits symboliques sont à effectuer *sur des états intermédiaires de* (6,2) (des $\Psi_{(\mu,+)}$, des $\Psi_{(\mu,-)}$ ou des $\Psi_{(\mu,\times)}$). (9,9) définit ainsi une matrice $S(\mu' - / \mu +)$ dans l'espace hermitien des solutions de l'«atome d'hydrogène». Ce nouveau $S$ décrit l'émission, l'absorption, la diffusion, etc., de la lumière (champ $\varphi$) par un système matériel (par ex. nos deux particules de l'«atome d'hydrogène»). Le P.C. détermine (9,9) à des termes de retardation près. En plus, le modèle de l'oscillateur de dispersion est le *modèle classique,* si l'on considère $S$ *comme fonction d'un seul* $\alpha$ exprimé par la série des $\alpha^{(n)}$ et des $\alpha^{(n)}_{(m)}$, parce que $S(\alpha)$ doit être la fonction avec $\xi = \eta = 1$ pour que le P.C. exposé au § 7 soit valable. Si l'on ne dispose pas d'un P.C., on peut concevoir un $S(\alpha^{(2)}, \alpha^{(4)}_{(2)} \ldots)$ tel que le rayonnement et la diffusion soient ceux du *modèle général* traité en II.

Il est important de remarquer que le passage (9,2) correspond à un changement des axes $\mu$ à de nouveaux axes $(\mu, +)$ (ou $(\mu, -)$ ou $(\mu, \times)$) dans l'espace hermitien. On a substitué au *système complet* des ondes planes $\mu$ un *nouveau système* $(\mu, +)$. Il n'est pas dit que ce nouveau système soit complet. Pourtant, la matrice (8,6) et (8,9) ou (9,9) est déterminée en termes de $A^{(+)}$ (même sans passer à la limite). Elle détermine ainsi toutes les transitions dans le *spectre continu* de l'«atome». Si les nouveaux axes $(\mu, +)$ sont incomplets (ce qui est toujours le cas si le problème de Schroedinger correspondant admet, en plus des solutions du continu (9,2), de *nouvelles solutions d'un spectre discret*), on peut compléter la matrice $S$ en (9,9) par des éléments qui expriment des transitions de $(\mu, +)$ à ces *nouvelles solutions* et des transitions entre ces nouvelles solutions. Formellement, ceci s'exprime en substituant à (9,2) une transformation unitaire complète

$$\Psi_{(i)} = \Psi_{(i')}\, \Sigma^{(i')}{}_{(i)}$$

qui comprend, outre les éléments $\Sigma^{(\mu')}{}_{(\mu,+)} = (1 + B^{(+)})(\mu/\mu')$, des éléments $\Sigma^{(\mu')}{}_{(n)}$. Ces derniers expriment les solutions $\Psi_{(n)}$ du spectre discret en termes d'une série de Fourier (en $\vec{k}$ et $\vec{l}$ $(= \mu')$). Les produits symboliques en (9,9) doivent maintenant être effectués *dans le système complet* de ces nouveaux axes (($\mu$, +) et $n$).

Pour les transitions dans le spectre discret, on obtient ainsi la théorie de dispersion et de la largeur de raie exposée en II pour un modèle général.

Il est important de remarquer que cette manière de compléter $S$ reste arbitraire, parce que le $A_2^{(+)}$ et le $H^{()}$ en (6,2) ne semble pas être univoquement déterminés en termes de $S$. Mais le P.C. entre méc. asymptotique et méc. rationnelle n'admet qu'un seul $H^{()}$ (à des termes de retardation près), qui correspond au champ $\varphi$ macroscopiquement observable. Si par contre le champ $\varphi$ n'est pas macroscopiquement observable (comme c'est le cas pour le champ des forces nucléaires), le $H^{()}$ n'est pas nécessairement déterminé en termes de $S$. La seule chose qu'on puisse alors dire c'est qu'un champ nucléaire correspond à des quanta (mésons) observables. Mais le freinage et la diffusion des mésons ne suffisent pas nécessairement pour nous renseigner sur la forme du $H^{()}$, responsable des niveaux des noyaux atomiques.

*Note ajoutée après la rédaction de l'article.*

Dans les M.S. de deux articles récents III et IV (à paraître dans la Zs. f. Phys. [1945]) et dans un exposé au séminaire de physique théorique à Zurich, M. Heisenberg a complété sa théorie proposée en (1943) I et II. Il montre qu'on peut calculer les valeurs propres $h\,\omega_{(n)}$ du spectre discret par une prolongation analytique de $S$, sans passer par les $A^{(+)}$ et $X = -ihH^{()}$ comme nous l'avons fait. Ce résultat est très important, parce qu'il montre que l'arbitraire contenu dans notre matrice $A(\mu'/\mu)$ (i.e. la *prolongation de* $S(\mu'/\mu)$ *à des régions* $\omega' - \omega \neq 0$) est identique à l'arbitraire du *prolongement analytique* de $S(\vec{k}', \ldots/\vec{k}, \ldots)$ *pour des vecteurs d'ondes* $\vec{k}$ *complexes*. Or, si l'on admet l'hypothèse qu'en physique des fonctions non analytiques n'ont pas de signification, cette comparaison entre nos deux formes de la mécanique montre que tout comportement dans le fini (spatial ou temporal) est entièrement déterminé par le comportement asymptotique.

En d'autres termes, si plusieurs histoires (1,1) amènent exactement au même état final, elles ne peuvent se distinguer que par des fonctions non analytiques.

Genève, Institut de Physique de l'Université
Lausanne, Laboratoire de Physique de l'Université
Décembre 1944.