Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 18 (1945)
Heft: II

Artikel: Zur Spin-Bahnkoppelung zweier Nukleonen in der Mesontheorie
Autor: Fierz, Markus
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111602

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Spin-Bahnkoppelung zweier Nukleonen in der Mesontheorie

von **Markus Fierz.**

(21. II. 1945.)

Zusammenfassung. Mit Hilfe früher entwickelter Methoden wird die der sog. Tensorkraft entsprechende Matrix, die sich aus der symmetrischen Mesontheorie mit starker Koppelung ergibt, berechnet (§ 1). Die für den Deuteron-Grundzustand massgebenden Matrixelemente werden explizit angegeben. Die Möglichkeiten, das zugehörige Eigenwertproblem näherungsweise zu behandeln, werden kurz diskutiert (§ 2). Die für die Berechnung des Quadrupolmomentes notwendigen Matrixelemente von $\mathfrak{e}_z^2$ werden angegeben (§ 3).

In der Mesontheorie mit starker Koppelung treten angeregte Zustände der Nukleonen (Proton-Neutron) mit höheren Werten von Spin und Ladung auf (Isobaren). Da die Wechselwirkung Übergänge zwischen den angeregten Zuständen zur Folge hat, ist schon das Zweikörperproblem in dieser Theorie recht verwickelt. Pauli und Kusaka[1]) haben daher bei ihrer Diskussion des Zweikörperproblems die Isobaren lediglich durch eine Störungsrechnung berücksichtigt. Dies setzt voraus, dass die Isobaren-Anregungsenergie ε genügend gross ist. Für den Fall, dass diese Voraussetzung nicht zutrifft, haben Fierz und Wentzel[2]) ein Rechenverfahren entwickelt, wobei jedoch die sog. Tensorkraft, die eine Spin-Bahnkoppelung der Nukleonen zur Folge hat, vernachlässigt wurde. Dies ist bei physikalischen Anwendungen unzulässig; denn die Tensorkraft ist für das Quadrupolmoment des Deuterons massgebend und auch bei der Streuung von Neutronen in Wasserstoff wesentlich.

In der vorliegenden Arbeit soll daher vor allem die der Tensorkraft zugeordnete Matrix mit den Drehimpulsquantenzahlen als Variablen berechnet werden. Hierbei benützen wir das gleiche Rechenverfahren und dieselben Bezeichnungen, wie bei der Berechnung der Matrix Ω, die für die Spinkoppelung der „skalaren" Wechselwirkung massgebend ist[3]).

---

[1]) W. Pauli und S. Kusaka, Phys. Rev. **63**, 400 (1943).

[2]) M. Fierz und G. Wentzel, Helv. Phys. Acta **17**, 215 (1944). — G. Wentzel, ebenda **17**, 252 (1944).

[3]) M. Fierz, Helv. Phys. Acta **17**, 181 (1944). Diese Arbeit wird im folgenden als (A) zitiert.

§ 1. Die Matrix der Tensorkraft.

Das Potential der Tensorkraft kann in folgender Gestalt geschrieben werden[4]):

$$U_T = U(r) \sum_{i,k} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k \left\{ \sum_l x_{li}^{(1)} x_{lk}^{(2)} - \tfrac{1}{3} \delta_{ik} \Omega \right\} \qquad (1)$$

$$(i, k, 1 = 1, 2, 3.)$$

Die beiden Nukleonen sind durch die Indices (1) und (2) unterschieden. $U(r)$ ist eine Funktion des Abstandes r der beiden Nukleonen; $\mathfrak{e}$ ist der Einheitsvektor in ihrer Verbindungsrichtung. $x_{li}^{(1)}$, $x_{li}^{(2)}$ sind Operatoren, die den Spin- und Ladungsfreiheitsgraden zugeordnet sind. Wir denken sie uns in der in (A, II. 13) angegebenen Form dargestellt. Ω ist der in (A) behandelte Operator $\sum_{i,k} x_{ik}^{(1)} x_{ik}^{(2)}$.

Wir wollen (1) als Matrix in den Drehimpulsquantenzahlen darstellen. Diese sind:

Die Spinquantenzahlen der beiden Nukleonen

$$j_1, j_2,$$

die Quantenzahlen der Spinsumme und des gesamten isotopen Spins (der Ladung)

$$J, K.$$

Es gilt

$$|j_1 - j_2| \leqslant J, K \leqslant j_1 + j_2.$$

Weiter treten wegen der durch (1) hervorgerufenen Spin-Bahnkoppelung auf:

Die Quantenzahl des Bahnmomentes

$$L$$

und diejenige des gesamten Impulsmomentes

$$I$$

Es gilt

$$|J - L| \leqslant I \leqslant J + L$$

Ω ist diagonal in I und L und wird durch die Formeln (A, IV) gegeben. Wir haben daher noch den Operator

$$T = \sum_{i,k,l} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k x_{li}^{(1)} x_{lk}^{(2)} \qquad (2)$$

als Matrix in den obigen Variablen darzustellen.

---

[4]) Siehe z. B. G. Wentzel, Helv. Phys. Acta **16** (1943) 551. § 15. Unsere $x_{ik}^{(\nu)}$ entsprechen dort den Grössen $S_{i\varrho}^{(\nu)}$. Siehe auch Pauli und Kusaka, l. c.

*

Im Sinne der in (A) verwendeten Schreibweise setzen wir

$$\mathfrak{e}_k = \frac{1}{\sqrt{4\,L^2-1}}\,(L \mid B_k \mid L-1) + (L-1 \mid B_k^* \mid L)\,\frac{1}{\sqrt{4\,L^2-1}} \tag{3}$$

$x_{ik}^{(1)}$ kann gemäss (A, II. 13) mit Hilfe der Operatoren $d_k^{(1)}, b_k^{(1)}, b_k^{(1)*}\ldots$ dargestellt werden. Wir nennen

$$\begin{aligned} (j_1 \mid d_k \mid j_1) \qquad &= (j_1 \mid f_k^{(1)} \mid j_1) \\ (j_1 \mid b_k \mid j_1 - 1) &= (j_1 \mid f_k^{(1)} \mid j_1 - 1) \\ (j_1 \mid b_k^* \mid j_1 + 1) &= (j_1 \mid f_k^{(1)} \mid j + 1)\,. \end{aligned}$$

Dann gilt zufolge (A, III)

$$\begin{aligned} (j_1 \mid f_k^{(1)} \mid j_1') = {} & (j_1 \mid u(J, j_2) \mid j_1')(J \mid D_k \mid J) \\ & + (j_1 \mid v(J, j_2) \mid j_1')(J \mid B_k \mid J-1) \\ & + (J-1 \mid B_k^* \mid J)(j_1 \mid w(J, j_2) \mid j_1')\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Entsprechend gilt für $d_k^{(2)}, b_k^{(2)}, b_k^{(2)*} = f_k^{(2)}$

$$\begin{aligned} (j_2 \mid f_k^{(2)} \mid j_2') = {} & (j_2 \mid u(J, j_1) \mid j_2')\,(J \mid D_k \mid J) \\ & - (j_2 \mid v\,(J, j_1) \mid j_2')\,(J \mid B_k \mid J-1) \\ & - (J-1 \mid B_k^* \mid J)(j_2 \mid w\,(J, j_1) \mid j_2')\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei sind die Faktoren u, v, w durch folgendes Schema definiert:

	$j_1' = j_1$	$j_1' = j_1 - 1$	$j_1' = j_1 + 1$
$(j_1 \mid u\,(J, j_2) \mid j_1')$	$f(J, j_1, j_2)$	$s(J, j_1, j_2)$	$s(J, j_1 + 1, j_2)$
$(j_1 \mid v(J, j_2) \mid j_1')$	$g(J, j_1, j_2)$	$t(J, j_1, j_2)$	$r(J, j_1 + 1, j_2)$
$(j_1 \mid w(J, j_2) \mid j_1')$	$g(J, j_1, j_2)$	$r(J, j_1, j_2)$	$t(J, j_1 + 1, j_2)$

(6)

(f, g, r, s, t sind durch die Formeln (A. III) gegeben.)

Wenn wir die Matrix T berechnen, indem wir (3), (4) und (5) benützen, so treten, ähnlich wie bei der Berechnung von Ω in (A) die drehinvarianten Ausdrücke

$$\begin{aligned} (L \mid B_k \mid L-1)(J \mid D_k \mid J) \qquad &= \tfrac{1}{2}\,A_2(I, L, J) \\ (L \mid B_k \mid L-1)(J \mid B_k \mid J-1) &= \tfrac{1}{2}\,A_3(I, L, J) \\ (L \mid B_k \mid L-1)(J \mid B_k^* \mid J+1) &= \tfrac{1}{2}\,A_4(I, L, J) \end{aligned}$$

auf. Auf Grund der in (A) durchgeführten Rechnung gilt

$$\left.\begin{aligned} A_2(I, L, J) &= \{\,[I(I+1) - (L-J)\,(L-J-1)] \\ &\qquad [(L+J)(L+J+1) - I\,(I+1)]\}^{\frac{1}{2}} \\ A_3(I, L, J) &= -\{[I^2 - (L-J-1)^2]\,[(I+1)^2 - (L-J-1)^2]\}^{\frac{1}{2}} \\ A_4(I, L, J) &= \{[I^2 - (L+J)^2]\,[(I+1)^2 - (L+J)^2]\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Man möge dabei beachten, dass hier A_3 per definitionem negativ ist. Abgesehen davon sind die A_k die gleichen Funktionen wie in (A, IV).

Der auf die Ladung bezügliche Teil der Matrix T rührt von den Faktoren $h_k^{(1)}, h_k^{(2)}, c_k^{(1)}, c_k^{(2)}$ in x_{ik} her. Diese ergeben in den Matrixelementen von T folgende Faktoren:

$$\left.\begin{aligned}
h_k^{(1)} h_k^{(2)} &= \tfrac{1}{2} A_1(K, j_1, j_2) \equiv \tfrac{1}{2} (j_1, j_2 \mid A(K) \mid j_1, j_2) \\
c_k^{(1)} h_k^{(2)} &= \tfrac{1}{2} A_2(K, j_1, j_2) \equiv \tfrac{1}{2} (j_1, j_2 \mid A(K) \mid j_1 - 1, j_2) \\
c_k^{(1)} c_k^{*(2)} &= \tfrac{1}{2} A_3(K, j_1, j_2) \equiv \tfrac{1}{2} (j_1, j_2 \mid A(K) \mid j_1 - 1, j_2 + 1) \\
c_k^{(1)} c_k^{(2)} &= \tfrac{1}{2} A_4(K, j_1, j_2) \equiv \tfrac{1}{2} (j_1, j_2 \mid A(K) \mid j_1 - 1, j_2 - 1)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Bis auf das Vorzeichen von A_3 sind die A_k wieder die in (A, IV) angegebenen Funktionen.

Wir setzen nun noch zur Abkürzung

$$\alpha(j, j) = \frac{1}{j(j+1)}; \quad \alpha(j, j-1) = \alpha(j-1, j) = \frac{1}{j\sqrt{4j^2-1}}$$

Dann können wir die Matrixelemente von T auf Grund der Formeln (A,II. 13) und (2) bis (8) folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}
(J, L, j_1, j_2 \mid T \mid J', L', j_1', j_2') &= \tfrac{1}{8} \alpha(j_1, j_1') \alpha(j_2, j_2') \cdot \\
&\cdot (j_1, j_2 \mid A(K) \mid j_1', j_2') \cdot (J, L, j_1, j_2 \mid G(I) \mid J', L', j_1', j_2')
\end{aligned} \tag{9}$$

Dabei haben die $G(I)$ folgende Bedeutung:

$$\left.\begin{aligned}
&(J, L, j_1, j_2 \mid G \mid J, L, j_1', j_2') = \\
&\Big[(j_1 | u(J, j_2) | j_1')(j_2' | u(J, j_1') | j_2')\left\{\frac{A_2^2(I, L, J)}{(2L+1)(2L-1)} + \frac{A_2^2(I, L+1, J)}{(2L+1)(2L+3)}\right\} \\
&-(j_1 | v(J, j_2) | j_1')(j_2 | w(J, j_1') | j_2')\left\{\frac{A_4^2(I, L, J)}{(2L+1)(2L-1)} + \frac{A_3^2(I, J, L)}{(2L+1)(2L+3)}\right\} \\
&-(j_1 \mid w(J+1, j_2) \mid j_1')(j_2 \mid v(J+1, j_1') \mid j_2')\left\{\frac{A_3^2(I, L, J)}{(2L+1)(2L-1)} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{A_4^2(I, L+1, J+1)}{(2L+1)(2L+3)}\right\}\Big] \\
&(J, L, j_1, j_2 \mid G \mid J, L+2, j_1', j_2') = \\
&\frac{1}{(2L+3)\sqrt{(2L+1)(2L+5)}} \big[(j_1 \mid u(J, j_2) \mid j_1')(j_2 \mid u(J, j_1') \mid j_2') \cdot \\
&\quad \cdot A_2(I, L+1, J) A_2(I, L+2, J) \\
&-\{(j_1 \mid v(J, j_2) \mid j_1')(j_2 \mid w(J, j_1') \mid j_2') + \\
&\quad + (j_1 \mid w(J+1, j_2) \mid j_1')(j_2 \mid v(J+1, j_1') \mid j_2')\} \cdot \\
&\quad \cdot A_3(I, J, L) A_4(I, J, L+2)\big]
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(J, L, j_1, j_2 \mid G \mid J+2, L, j_1', j_2') = \\
&-\frac{2}{(2L-1)(2L+3)} A_3(I, L, J) A_4(I, J+2, L) \\
&\qquad (j_1 \,| w(J+1, j_2) |\, j_1')(j_2 \,| w(J+2, j_1') |\, j_2') \\
&(J, L, j_1, j_2 \mid G \mid J+2, L+2, j_1', j_2') = \\
&-\frac{1}{(2L+3)\sqrt{(2L+1)(2L+5)}} A_4(I, J+1, L+1) \cdot \\
&\quad \cdot A_4(I, J+2, L+2)(j_1 \,| w(J+1, j_2) |\, j_1') \cdot (j_2 \,| w(J+2, j_1') \,|\, j_2') \\
&(J, L, j_1, j_2 \mid G \mid J+2, L-2, j_1', j_2') = \\
&-\frac{1}{(2L-1)\sqrt{(2L+1)(2L-3)}} A_3(I, L, J) A_3(I, L-1, J+1) \cdot \\
&\qquad \cdot (j_1 \mid w(J+1, j_2) \mid j_1')(j_2 \mid w(J+2, j_1') \mid j_2') .
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die durch (9) und (10) definierten Matrixelemente sind, abgesehen von ihren konjugierten, die einzigen, welche nicht verschwinden. Es gelten demnach die Auswahlregeln:

$$\begin{aligned}
&\Delta I = \Delta K = 0 \\
&\Delta j \;= 0, \pm 1 \\
&\Delta J = 0, \pm 2 ; \; \Delta L = 0, \pm 2
\end{aligned}$$

Weiter bestehen zwischen den Quantenzahlen die Ungleichungen

$$| J - L | \leqslant I \leqslant J + L ; \; | j_1 - j_2 | \leqslant J, K \leqslant j_1 + j_2$$

Der Hamilton-Operator des Zweikörperproblems wird diagonal in K und I und hat für festes K und I folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
H = \frac{1}{M}\Big(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{L(L+1)}{r^2} &+ \frac{\varepsilon}{2}\left\{(j_1+\tfrac{1}{2})^2 + (j_2+\tfrac{1}{2})^2 - 2\right\}\Big) \cdot \\
&\cdot (J, L, j_1, j_2 \mid 1 \mid J', L', j_1', j_2') \\
+ \big(V(r) - \tfrac{1}{3} U(r)\big)&(j_1, j_2 \mid \Omega \mid j_1', j_2')(J, L \mid 1 \mid J', L') + \\
&+ U(r)(J, L, j_1, j_2 \mid T \mid J', L', j_1', j_2') .
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Hier ist M die Nukleonmasse, r der Abstand der beiden Nukleonen, ε die Isobarenenergie. $(\cdot \mid \Omega \mid \cdot)$ und $(\cdot \mid T \mid \cdot)$ sind noch Funktionen von J und K bzw. von I und K.

Die Eigenfunktionen von H sind Funktionen von r, j_1, j_2, J und L:

$$F = F(j_1, j_2, J, L, r) \tag{12}$$

Die Normierungsgleichung lautet

$$\sum_{j_1, j_2} \sum_{J, L} \int_0^\infty dr \, | F(j_1, j_2, J, L, r) |^2 = 1 . \tag{13}$$

§ 2. Zur Theorie des Deuteron-Grundzustandes.

Dem Deuteron-Grundzustand entspricht in der hier zur Diskussion stehenden Theorie eine Wellenfunktion mit

$$I = 1, K = 0, J = 1, 3, 5 \ldots, L = 0, 2, 4 \ldots$$

Wegen den zwischen den Drehimpulsquantenzahlen bestehenden Ungleichungen ist $j_1 = j_2 = j$ und $J = L \pm 1$.

Dadurch ergeben sich für die Matrix T gewisse Vereinfachungen, indem, je nachdem $J = L \pm 1$, nur folgende Übergänge auftreten können:

$$J = L + 1 : J, L \longleftrightarrow \begin{cases} J, L \\ J, L+2 \\ J+2, L+2 \end{cases}$$

$$J = L - 1 : J, L \longleftrightarrow \begin{cases} J, L \\ J+2, L \\ J+2, L+2 \end{cases}$$

wobei gleichzeitig $\Delta j = 0, \pm 1$ sein kann.

Das dem Grundzustand des Deuterons entsprechende Eigenwertproblem ist aber gleichwohl noch so kompliziert, dass eine strenge Lösung unmöglich sein dürfte. Man ist daher auf Näherungen angewiesen. Pauli und Kusaka[1]) haben angenommen, die Isobarenenergie sei so gross, dass Zustände mit $j \geqslant {}^5/_2$ praktisch nicht angeregt sind und haben diese deshalb vernachlässigt. Die Terme mit $j = {}^3/_2$ haben sie überdies nur durch eine Störungsrechnung berücksichtigt. Will man über ε von vorneherein keine Annahme machen, so darf man die Werte von j nicht beschränken. Wohl aber darf man die Zustände mit grossen Werten von L und J vernachlässigen, und zwar auf Grund der folgenden Überlegung:

Erfahrungsgemäss ist das Quadrupolmoment des Deuterons verhältnismässig sehr klein, was mit der kleinen Reichweite der Kernkräfte zusammenhängt. Man wird daher erwarten, dass die Zustände mit $L \geqslant 4$, zufolge der starken Wirkung der Zentrifugalkraft bei kleinen Abständen r, praktisch keine Rolle spielen. Es genügt deshalb, die Zustände mit

$$L = 0, J = 1; \; L = 2, J = 1 \text{ und } J = 3$$

zu berücksichtigen.

Die den Übergängen zwischen diesen Zuständen entsprechenden Matrixelemente von $T - \frac{1}{3}\,\Omega$ sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt ($I = 1$, $K = 0$).

$J\,L\,j$	$J'\,L'\,j'$	$(J, L, j \mid T - \frac{1}{3}\Omega \mid J', L', j')$
$1, 0, j$	$1, 2, j$	$-\frac{\sqrt{2}}{15}\left(2+\frac{1}{j(j+1)}\right)$
$1, 0, j$	$1, 2, j-1$	$\frac{\sqrt{2}}{15}\,\frac{\sqrt{j^2-1}}{j}$
$1, 0, j-1$	$1, 2, j$	$\frac{\sqrt{2}}{15}\,\frac{\sqrt{j^2-1}}{j}$
$1, 0, j$	$3, 2, j$	$\frac{1}{5\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{(j-1)(j+2)(2j-1)(2j+3)}}{j(j+1)}$
$1, 0, j$	$3, 2, j-1$	$-\frac{1}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{j}\sqrt{\frac{(j-1)(j-2)(2j-3)}{2j+1}}$
$1, 0, j-1$	$3, 2, j$	$-\frac{1}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{j}\sqrt{\frac{(j+1)(j+2)(2j+3)}{2j-1}}$
$1, 2, j$	$1, 2, j$	$\frac{1}{15}\left(2+\frac{1}{j(j+1)}\right)$
$1, 2, j$	$1, 2, j-1$	$-\frac{1}{15}\,\frac{\sqrt{j^2-1}}{j}$
$1, 2, j$	$3, 2, j$	$-\frac{1}{35}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{j(j+1)}\sqrt{(j-1)(j+2)(2j-1)(2j+3)}$
$1, 2, j$	$3, 2, j-1$	$\frac{1}{35}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{j}\sqrt{\frac{(j-1)(j-2)(2j-3)}{2j+1}}$
$1, 2, j-1$	$3, 2, j$	$\frac{1}{35}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{j}\sqrt{\frac{(j+1)(j+2)(2j+3)}{2j-1}}$
$3, 2, j$	$3, 2, j$	$\frac{16}{35}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{j(j+1)}\right)$
$3, 2, j$	$3, 2, j-1$	$-\frac{4}{105}\,\frac{1}{j\sqrt{4j^2-1}}\sqrt{(4j^2-9)(4j^2-16)}$

Aus der Tabelle sieht man, dass die in J und L diagonalen Matrixelemente sich durch eine Linearkombination aus der Einheitsmatrix und der Matrix

$$(J, j \mid \Omega \mid J, j')$$

darstellen lassen. Es ist nämlich, wie in (A) gezeigt wurde, für $K=0$:

$$(J, j \mid \Omega \mid J, j) = 1 - \frac{J(J+1)}{2j(j+1)}$$

$$(J, j \mid \Omega \mid J, j-1) = \frac{\sqrt{(4j^2-J^2)(4j^2-(J+1)^2)}}{2j\sqrt{4j^2-1}}$$

daher

$$\left.\begin{aligned}(1,2,j \mid T - \tfrac{1}{3}\Omega \mid 1,2,j') &= \frac{1}{5}\delta_{jj'} - \frac{1}{15}(1,j \mid \Omega \mid 1,j')\\ (3,2,j \mid T - \tfrac{1}{3}\Omega \mid 3,2,j') &= \frac{8}{35}\delta_{jj'} - \frac{8}{105}(3,j \mid \Omega \mid 3,j')\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Wenn man also das hier gestellte Problem mit den von FIERZ und WENTZEL[2]) entwickelten Methoden behandeln will, so ergibt sich folgende Möglichkeit:

Die Diagonalelemente (14) von $T - \frac{1}{3}\Omega$ kann man, bezüglich ihrer Abhängigkeit von j streng berücksichtigen; die anderen Matrixelemente wird man jedoch, im Sinne einer Störungsrechnung durch ihre Erwartungswerte bezüglich j ersetzen. Man gelangt so zu einem Problem, das grosse Ähnlichkeit mit dem von RARITA und SCHWINGER[5]) behandelten besitzt. Auf die mathematische Behandlung des so entstehenden Gleichungssystems kann jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden.

§ 3. Das Quadrupolmoment des Deuterons.

Das Quadrupolmoment des Deuterons ist definiert als Erwartungswert des Operators

$$Q = \tfrac{3}{4}\, r^2 (\mathfrak{e}_z^2 - \tfrac{1}{3}) \tag{15}$$

im Zustande I, $M_{\mathrm{I}} = I$, wobei M_{I} die z-Komponente des gesamten Impulsmomentes bedeutet. Um diesen Erwartungswert zu berechnen, muss die Matrix $\mathfrak{e}^2$ in den Drehimpuls-Variablen gegeben sein. Mit Hilfe der entwickelten Rechenmethoden findet man für die hier interessierenden Matrixelemente

$$(I, L \mid \mathfrak{e}_z^2 \mid I, L) = \frac{1}{4L^2-1}\{I^2 s^2(I,L,J) + (2I+1) r^2 (I+1, L, J)\} +$$
$$+ \frac{1}{4(L+1)^2-1}\{I^2 s^2(I, L+1, J) + (2I+1) t^2 (I+1, L+1, J)\} \tag{16}$$

[5]) W. RARITA und J. SCHWINGER, Phys. Rev. **59**, 436 (1941).

$$(I, L \mid \mathfrak{e}_2^2 \mid I, L+2) = \frac{1}{(2L+3)\sqrt{(2L+1)(2L+5)}} \cdot$$
$$\cdot \{ I^2 s(I, L+1, J) s(I, L+2, J)$$
$$+ (2I+1) t(I+1, L+1, J)\, r(I+1, L+2, J)\} \tag{17}$$

Daraus folgt für das Deuteron, falls wieder Zustände mit $L \geqslant 4$ vernachlässigt werden

$$\overline{Q} = \sum_j \int r^2\, dr \left\{ \frac{\sqrt{2}}{10} F(j, 1, 0, r)\, F(j, 1, 2, r) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{20} F^2(j, 1, 2, r) - \frac{1}{70} F^2(j, 3, 2, r) \right\}. \tag{18}$$

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.