Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 17 (1944)

Heft: VI

Artikel: Eigenfrequenzen des E-Typus eines kapazitätsbelasteten zylindrischen Hohlraumes

Autor: Lüdi, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111515

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eigenfrequenzen des E-Typus eines kapazitätsbelasteten zylindrischen Hohlraumes

von **F. Lüdi.**
(Brown, Boveri & Cie., Baden.)

(18. VIII. 1944.)

Inhalt: Es erfolgt die ausführliche Rechnung und Spezialisierung der bereits mitgeteilten Frequenzgleichung[1])[2])[3]). Die Berechnung geschah im Hinblick auf die Verwendung eines kapazitätsbelasteten Hohlraumresonators für Magnetfeldgeneratoren zur Erzeugung von Mikrowellen[4]). Als Kapazitätsbelastung werden die axial angeordneten Segmente betrachtet (Fig. 1). Benachbarte Segmente befinden sich auf Wechselpotential und die Ausgleichströme fliessen über die innere Mantelfläche des ringförmigen Resonators, an dem die Segmente befestigt sind. Die abgeleiteten Gleichungen sind aber auch für den allgemeinen Fall einer zentralangeordneten Kapazität gültig. Solche in der Mitte eingedrückte Resonatoren finden bei Klystrons Verwendung.

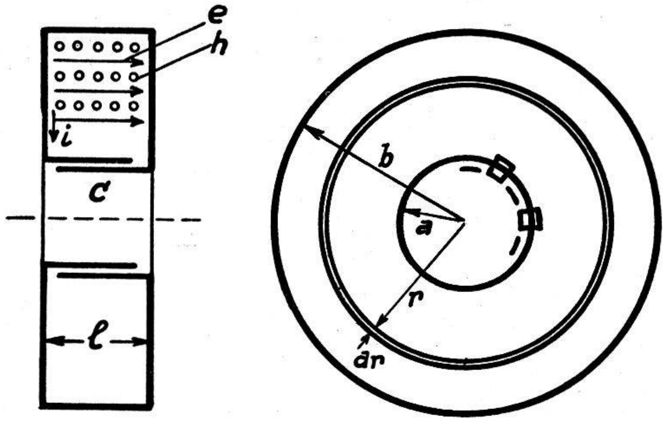

Fig. 1.

§ 1. Die Differentialgleichung mit den Randbedingungen und ihre Lösung.

Die Voraussetzungen sind:

1. Die Feldverteilung ist prinzipiell gleich wie beim kreiszylindrischen Hohlraum, es existieren nur e (axiale Pfeile in Fig. 1) und h (kleine Kreise).

2. Randbedingung: Für $r = b$ ist $e = 0$; für $r = a$ ist der Strom i und die Spannung u durch die Kapazität C verknüpft, gemäss $i = C \frac{du}{dt}$ (C = totale Kapazität).

Bezeichnungen (vgl. Fig. 1 für das folgende):

elektrisches Feld $e = E_z e^{j\omega t}$
magnetisches Feld $h = H_\varphi e^{j\omega t}$

$$\text{Spannung} \quad \begin{cases} u = e l = U e^{j\omega t} \\ U = E_z \cdot l \end{cases}$$

$$\text{Strom} \quad i_r = I_r e^{j\omega t} \quad \text{(totaler radialer Strom)}$$

Die Differentialgleichung für E_z heisst in Zylinderkoordinaten (vgl. F. Borgnis)[5]:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + k^2 E_z = 0\,, \qquad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_e} \tag{1}$$

wo λ_e die dem Eigenwert k entsprechende Eigenwelle des Resonanzsystems ist. Die allgemeine Lösung lautet:

$$E_z = A J_0(kr) + B N_0(kr) = Z_0(kr) \tag{2}$$

$Z_0(kr)$ ist die allgemeine Zylinderfunktion, eine lineare Kombination der Besselfunktion und Neumannfunktion 0-ter Ordnung. Die Besselfunktion allein genügt nicht, weil diese gegen das Zentrum nicht abnimmt; bei unendlicher Kapazität (Kurzschluss) muss aber das Feld an der inneren Begrenzung a Null werden. Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} &\text{für } r = a \quad C\frac{du}{dt} = Cl\frac{\partial e}{\partial t} = C l j \omega E_z e^{j\omega t} = I_r e^{j\omega t} \\ &\text{für } r = b \quad E_z = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Berechnung von I für $r = a$.

Aus der Divergenzgleichung folgt für die Änderung des radialen Stromes durch den Verschiebungsstrom $\frac{\partial e}{\partial t}$ zwischen den beiden Seitenflächen

$$\frac{\partial i_r}{\partial r}\, dr = \varepsilon\, 2\pi r\, dr \frac{\partial e}{\partial t}$$

allgemeine Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 0{,}0886\, pF$

oder für die Amplituden

$$d I_r = \varepsilon\, 2\pi r\, dr\, j\omega E_z$$

und integriert

$$I_r = \varepsilon j\, 2\pi\omega \int E_z(r)\cdot r\, dr + c$$

Dies in die Randbedingung (3) eingesetzt, gibt

$$E_z = \frac{\varepsilon\, 2\pi}{Cl}\int E_z(r)\, r\, dr\,.$$

Die Integrationskonstante ist Null, weil im Spannungsbauch $I = 0$ sein muss.

Wenn von den Rechenregeln für Zylinderfunktionen (Jahnke-Emde, S. 166) mit der Setzung $kr = y$, $dr = \frac{dy}{k}$,

$$\int y Z_0(y)\, dy = y Z_1(y)\,.$$

Gebrauch gemacht wird (Z_1 Zylinderfunktion 1. Ordnung), so heissen die beiden Randbedingungen explizit in geordneter Form:

$$r = a \qquad A\left[J_0(ka) - \frac{\varepsilon\, 2\pi a}{Clk} J_1(ka)\right] + B\left[N_0(ka) - \frac{\varepsilon\, 2\pi a}{Clk} N_1(ka)\right] = 0$$

$$r = b \qquad A\, J_0(kb) + B\, N_0(kb) = 0\,.$$

Dieses homogene Gleichungssystem dient zur Bestimmung des Eigenwertes k (Eigenwelle λ_e) ohne Kenntnis der Konstanten A, B durch Nullsetzen der Determinante der Koeffizienten von A und B. Mit der weiteren Substitution

$$ka = x\,, \qquad kb = x\,\frac{b}{a}$$

wird also die Frequenzgleichung

$$\Delta(x) = [N_0(xb/a)\,J_0(x) - J_0(xb/a)\,N_0(x)] - - \frac{2\pi a^2}{1/\varepsilon C l}\,\frac{1}{x}\,[N_0(xb/a)\,J_1(x) - J_0(xb/a)\,N_1(x)] = 0\,. \qquad (4)$$

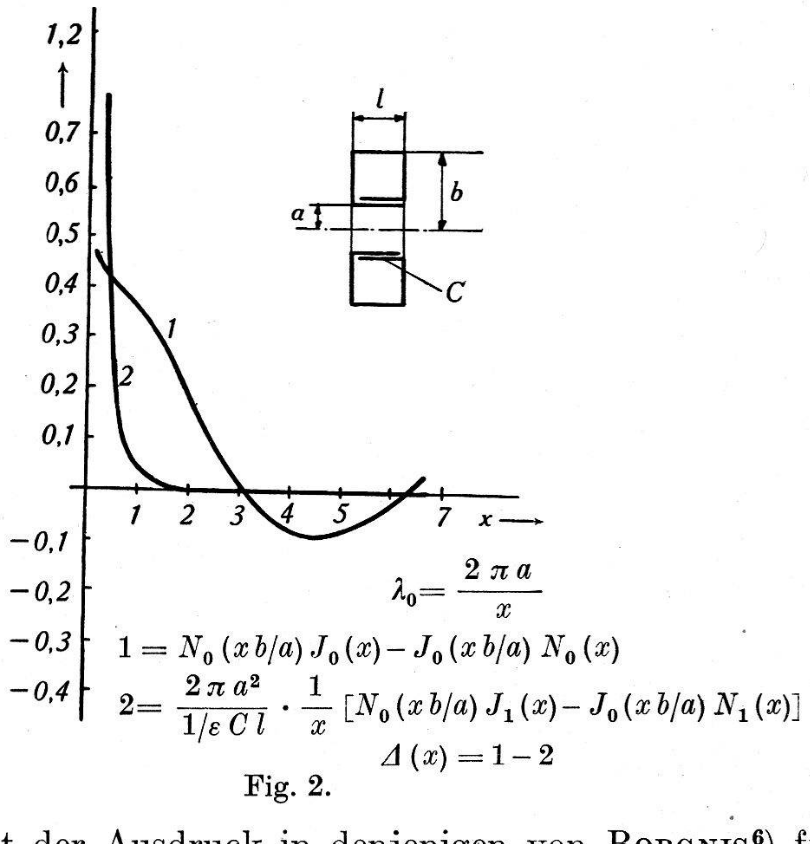

Fig. 2.

Für $C = \infty$ geht der Ausdruck in denjenigen von BORGNIS[6]) für den ringförmigen Resonator über. In vorliegender Form ist der Eigenwert x resp. k nicht analytisch auszurechnen und muss graphisch gefunden werden. Fig. 2 zeigt eine solche Auswertung für das Beispiel

$$a = 0{,}6\ \text{cm} \qquad b = 1{,}2\ \text{cm} \qquad l = 1{,}2\ \text{cm} \qquad C = 1{,}5\ \text{pF}$$

Die genaue Bestimmung von C ist nicht einfach. Einen Näherungswert erhält man, wenn man sich die Segmente in ihrem mittleren Abstand parallel gegenübergestellt denkt und die Kapazität als diejenige eines n-paarigen Plattenkondensators berechnet. Der erste Schnittpunkt der beiden Kurven in Fig. 2 gibt für $x = 0{,}41$, woraus sich die Grundwelle

$$\lambda_e = \frac{2\pi a}{x} = 9{,}3 \text{ cm}$$

berechnet; die gemessene selbsterregte Welle eines solchen Magnetfeldgenerators war etwa 10,1 cm, also sicher keine schlechte Übereinstimmung mit der Theorie, die vor allem zeigt, dass das physikalische Bild der Erregung richtig ist.

§ 2. Näherungslösungen.

Es kommt weniger darauf an, die Eigenwelle exakt zu bestimmen, als vielmehr ihre Abhängigkeit von der Konstruktionsart. Einen guten analytischen Einblick bekommt man in zwei Grenzfällen, nämlich für kleine x ($x \to 0$) und grosse x ($x \to \infty$), d. h. für kleines a und für $b/a \to 1$.

1. $x \to 0$. Nach Jahnke-Emde gilt für die Entwicklung von $N_0(x)$, $N_1(x)$ für kleine Argumente

$$N_0(x) = J_0(x) \ln x + \mathfrak{P}_1(x)$$

$$N_1(x) = J_1(x) \ln x - \frac{1}{x} J_0(x) + \mathfrak{P}_2(x)$$

wo $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ Polynome der folgenden Form sind:

$$\mathfrak{P}_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots$$

$$\mathfrak{P}_2(x) = -\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots$$

Setzt man dies in (4) ein, so erhält man mit den Abkürzungen

$$\varkappa = b/a \qquad K = \frac{2\pi a^2}{1/\varepsilon\, C l}$$

$$J_0(\varkappa x) J_0(x) \ln \varkappa + \mathfrak{P}_1(\varkappa x) J_0(x) - \mathfrak{P}_1(x) J_0(\varkappa x) =$$

$$= \frac{K}{x}\left[J_0(\varkappa x) J_1(x) \ln \varkappa + \mathfrak{P}_1(\varkappa x) J_1(x) + \frac{J_0(\varkappa x) J_0(x)}{x} - J_0(\varkappa x) \mathfrak{P}_2(x)\right]$$

Mit den weiteren Entwicklungsformeln für J_0 und J_1

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16}$$

bekommt man, wenn für $J_0(\alpha x)$, $J_1(\alpha x)$ in der Entwicklung x durch αx ersetzt wird und die Werte für die Polynome eingesetzt und höhere Glieder als quadratische vernachlässigt werden, eine biquadratische Gleichung

$$x^2\left[-\frac{\alpha^2+1}{4}\ln\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{4}\right] + 1 - \frac{K}{x^2} = 0$$

daraus

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\,\alpha' K}}{2\,\alpha'} = +K$$

und schliesslich

$$x = \sqrt{K}$$

wenn zur Abkürzung die eckige Klammer mit α' bezeichnet und die Wurzel entwickelt wird.

Damit erhält man für die Eigenwelle

$$\lambda_e = \frac{2\pi a}{\sqrt{K}} = 8 \cdot 4\sqrt{C\,l}\ \text{cm}$$

Hierbei ist die Kapazität C in Picofarad und die Axiallänge l des Resonators in cm auszudrücken. Man erkennt, dass die Wellenlänge in diesem Fall praktisch nur von der Belastungskapazität abhängt! Für dasselbe Beispiel der Fig. 2 erhält man für

$$\lambda_e = 11{,}2\ \text{cm}$$

2. Für grosse x gelten ebenfalls nach Jahnke-Emde die Näherungsformeln

$$J_0(x) = \frac{\cos(x-\pi/4)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \qquad N_0(x) = \frac{\sin(x-\pi/4)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$$

$$J_1(x) = \frac{\sin(x-\pi/4)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \qquad N_1(x) = \frac{-\cos(x-\pi/4)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$$

Setzt man diese Werte in die Frequenzgleichung (4) ein, so erhält man

$$\frac{1/\varepsilon C}{2\pi a}\,\frac{l}{a}\,x =$$

$$= \frac{\sin(xb/a-\pi/4)\sin(x-\pi/4) + \cos(x\,b/a-\pi/4)\cos(x-\pi/4)}{\sin(xb/a-\pi/4)\cos(x-\pi/4) - \cos(xb/a-\pi/4)\sin(x-\pi/4)}$$

Wird für $x = ak$ eingesetzt und $b - a$ durch den Abstand d der beiden kreisförmigen Begrenzungen nach Fig. 1 ausgedrückt, so folgt nach trigonometrischer Umformung

$$\frac{1/\varepsilon C}{2\pi a}\, lk = \operatorname{cotg} dk$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für den Eigenwert k und damit für die Eigenwelle λ_e des kapazitätsbelasteten ringförmigen Resonators. Sie hat eine grosse Ähnlichkeit mit derjenigen eines kapazitätsbelasteten Lechersystems. Es ist bemerkenswert, dass als frequenzbestimmende Grössen nur die Dimension des Ringquerschnittes (d, l) und die Kapazität pro cm Umfang eingehen. Man kann also einen solchen Resonator beliebig vergrössern, ohne die Eigenwelle zu verändern. Diese Schlussfolgerung wurde durch eine entsprechende Bauart des Resonators mit grossem Innendurchmesser experimentell verifiziert.

§ 3. Der Verlustwiderstand

Im Anschluss an Borgnis[5]) berechnen wir diesen aus einem Ersatzparallelwiderstand R_p, bezogen auf die Wechselspannung für $r = a$, also an den Segmenten, wo die Einwirkung auf die Elektronen stattfindet. Danach ist

$$R_p = \frac{(U^2_{\text{eff}})_{r=a}}{\overline{Q}} \tag{5}$$

wo

$$U_{\text{eff}} = \frac{E_z \cdot l}{\sqrt{2}}\bigg/_{r=a} = \frac{Z_0 \cdot l}{\sqrt{2}}\bigg/_{r=a}$$

die effektive Spannung an der Stelle $r = a$ ist. Wir setzen sie gleich derjenigen zwischen den Segmenten, vernachlässigen also die Spannungsänderung längs der Segmente. Der Unterschied ist nur, dass das Feld zwischen den Segmenten tangential verläuft statt axial wie im Resonator; dies ist durch die Konstruktion bedingt.

$\overline{Q}$ ist der Joule'sche Verlust an der Innenfläche des Resonators durch Skineffekt hervorgerufen und bestimmt sich aus

$$\overline{Q} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega \pi_2}{2\sigma}} \int\limits_{\text{Oberfläche}} (H H^*)\, df$$

mit

$$\pi_2 = 4\pi \cdot 10^{-9}$$
$$\sigma = 57 \cdot 10^4 \text{ (Kupfer)}$$
$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda_e}$$

d. h. das Magnetfeld unmittelbar an der Oberfläche auf der Vakuumseite ist mit dem Absolutquadrat des Oberflächenstromes im Leiter durch HH^* verknüpft, wodurch die Verluste aus der Feldverteilung berechenbar sind. Für das Magnetfeld gilt nach der Maxwell'schen Gleichung $h = \operatorname{rot} \frac{\partial e}{\partial t}$

$$H_\varphi = -\frac{j}{k\mathfrak{Z}_0}\frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{j}{\mathfrak{Z}_0}\frac{\partial Z_0}{\partial (kr)} = \frac{j}{\mathfrak{Z}_0} Z_1(kr)$$

$\mathfrak{Z}_0 = 377\ \Omega$ Wellenwiderstand des Vakuums.

Damit wird $\overline{Q}$

$$\overline{Q} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\pi_2}{2\sigma}}\,\frac{1}{\mathfrak{Z}_0^2}\left[\underbrace{Z_1^2(kb)\,2\pi b l}_{\substack{\text{äussere}\\ \text{Zylinderfläche}}} + \underbrace{Z_1^2(ka)\,2\pi a l}_{\substack{\text{innere}\\ \text{Zylinderfläche}}} + \underbrace{2\int_a^b Z_1^2(kr)\,2\pi r\,dr}_{\substack{\text{beide}\\ \text{Seitenflächen}}}\right]$$

Das Integral ist:

$$2\pi\left[b^2 Z_1^2(kb) - a^2 Z_1^2(ka) - b^2 Z_0(kb)\,Z_2(kb) + a^2 Z_0(ka)\,Z_2(ka)\right]$$

Für $Z_1 = J_1(kr)$ und $a = 0$, $J_0(kb) = 0$ erhält man daraus den Wert von BORGNIS für die Seitenflächen des kreiszylindrischen Resonators.

$$2\pi b^2 A^2 J^2{}_1(kb)$$

Z_2 ist analog Z_1.

$$Z_2 = A J_2(kr) + B N_2(kr)$$

dabei ist berücksichtigt, dass $Z_0(kr)$ für $r = b$ die Randbedingung erfüllt. Benützt man jetzt Gl. 5 zur Ausrechnung von R_p, so entsteht ein Quotient aus Zylinderfunktionen, wo Zähler und Nenner noch die Konstanten A, B der linearen Kombination von J und N enthalten. Werden dann Zähler und Nenner mit $A \cdot B$ dividiert, so entstehen Faktoren $\frac{A}{B}$ und $\frac{B}{A}$. Weiter ist $\frac{A}{B}$ aus der Randbedingung für $E_z = 0$ bei $r = b$ zu bestimmen

$$\frac{A}{B} = -\frac{N_0(kb)}{J_0(kb)}$$

und in der Gleichung für R_p einzusetzen. Indem noch

$$ka = x \quad \text{und} \quad kb = x\frac{b}{a}$$

gesetzt wird, so erhält man für R_p die etwas umständliche Form

$$\frac{1}{R_p} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega \pi_2}{2\sigma}}\,\frac{2\pi}{\mathfrak{Z}_0^2}\,\frac{1}{l^2/2\left[-\frac{N_0(xb/a)}{J_0(xb/a)}\cdot J_0^2(x)+2\,J_0(x)\,N_0(x)-\frac{J_0(xb/a)}{N_0(xb/a)}N_0^2(x)\right]}\,.$$

$$\Big\{(b\,l+b^2)\left[-\frac{N_0(x\,b/a)}{J_0(x\,b/a)}J_1^2(x\,b/a)+2\,J_1(x\,b/a)\,N_1(x\,b/a)-\frac{J_0(x\,b/a)}{N_0(x\,b/a)}N_1^2(x\,b/a)\right.$$

$$\left.+(a\,l-a^2)\left[-\frac{N_0(x\,b/a)}{J_0\,(x\,b/a)}\,J_1^2(x)+2\,J_1(x)\,N_1(x)-\frac{J_0(x\,b/a)}{N_0(x\,b/a)}\,N_1^2\,(x)\right]\right.$$

$$+\,a^2\left[-\frac{N_0(x\,b/a)}{J_0(x\,b/a)}J_0(x)\,J_2(x)+J_0(x)\,N_2(x)+N_0(x)\,J_2(x)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{J_0(x\,b/a)}{N_0(x\,b/a)}\,N_0(x)\,J_2(x)\right]\right]\Big\}\,.$$

Diese Gleichung wurde benützt, um den Ersatzwiderstand der Dämpfung für das Beispiel der Fig. 2 mit $a = 0{,}6$ cm, $b/a = 2$, $1 = 1{,}2$ cm, $C = 1{,}5$ pF, d. h. also $x = 0{,}41$ auszurechnen. Man erhält

$$R_p = 17000\ \Omega\,.$$

Für die erste Oberwelle ($x = 3{,}15$) hat man dagegen für R_p nahezu den Wert Null, d. h. praktisch Kurzschluss, so dass man sagen kann, dass sich nur die Grundwelle des Systems erregt. Experimentell wurde auch nie eine andere beobachtet.

Die Dämpfung ist bei diesem Generator nicht entscheidend wie etwa beim Kylstron, weil infolge des anderen Elektronenmechanismus die Wechselwirkung der Elektronenpakete mit dem Resonator nicht nur beim einmaligen Durchtritt vorhanden ist, sondern sich an den kreisförmig angeordneten Segmentpaaren beliebig oft wiederholt, weswegen man die kleinen Anschwingströme beobachtet.

Literatur

[1]) F. Lüdi, Helv. Physica Acta, Vol. XIV, Fasc. Quint. et Sextus 1941. Vgl. die inzwischen erschienenen Publikationen über einen ähnlichen Gegenstand [2]) und [3]).

[2]) H. Meinke, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **60**, 29 (1942).

[3]) W. Dällenbach, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **61**, 129 (1943).

[4]) F. Lüdi, Brown, Boveri-Mitteilungen, Sonderheft „HF-Technik", XXVIII. Jahrg., Dez. 1941.

[5]) F. Borgnis, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **54**, 121 (1939).

[6]) F. Borgnis, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **56**, 47 (1940).