

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 17 (1944)  
**Heft:** III

**Artikel:** Zum Deuteronproblem. I  
**Autor:** Fierz, M. / Wentzel, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111505>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zum Deuteronproblem. I

von M. Fierz und G. Wentzel.

(8. IV. 1944.)

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Zwei-Nukleon-Probleme auf Grund einer Theorie, die dem Nukleon eine Spinträgheit zuschreibt, so dass es angeregte Zustände (Isobaren) besitzt. Das Modell des Nukleons (Isobaren-Energie und Kräfte) wird im wesentlichen der symmetrischen Mesontheorie entnommen (§ 2)<sup>1)</sup>. Wenn die Isobaren-Anregungsenergie nicht sehr gross ist im Vergleich zur mittleren Wechselwirkungsenergie, so ergeben sich beträchtliche Abweichungen von den früheren Deuteron-Theorien. Zur Lösung des wellenmechanischen Problems in diesem Falle werden zwei Näherungsverfahren vorgeschlagen: Adiabaten-Methode und Variationsverfahren (§ 3). Die Anwendung beschränkt sich (in diesem Teil I) auf Deuteronzustände mit verschwindendem Spin und mit verschwindendem isotopen Spin (§ 4).

## § 1. Einleitung.

In der Feldtheorie der Kernkräfte (Mesontheorie) haben sich zwei verschiedene Betrachtungsweisen herausgebildet. Für die erste, dem Vorbild der elektromagnetischen Strahlungstheorie folgende Betrachtungsweise ist charakteristisch die Entwicklung nach steigenden Potenzen der Kopplungsparameter (Störungsmethode). Wegen der durch die experimentellen Daten geforderten numerischen Grösse dieser Parameter konvergieren diese Entwicklungen sehr schlecht. Der Vorzug dieser Behandlungsweise besteht darin, dass die in der Theorie auftretenden Divergenzen in lorentzinvariante Art subtrahiert werden können<sup>2)</sup>. Allerdings kann man bei

<sup>1)</sup> Nach Abschluss dieser Arbeit erhielten wir Kenntnis von einer Arbeit von W. PAULI u. S. KUSAKA (Phys. Rev. **63** (1943), S. 400), in der auf Grund der gleichen Mesontheorie ebenfalls das Deuteronproblem behandelt wird, jedoch unter Beschränkung auf den Deuteron-Grundzustand ( $^3S$ ) und auf den Grenzfall hoher Isobaren-Energie, wo die Abweichungen von der früheren Theorie geringfügig sind. Da wir hier das Hauptgewicht auf den entgegengesetzten Grenzfall legen und deswegen auch methodisch ganz anders vorgehen, dürfte die Veröffentlichung dieser Arbeit nicht überflüssig sein.

<sup>2)</sup> G. WENTZEL, ZS. f. Phys. **86** (1933), S. 479 u. 635. P. A. M. DIRAC, Annales de l'Institut H. POINCARÉ **9** (1939), S. 13; Proc. Roy. Soc. **180** (1942), S. 1. E. GÓRA, Acta Phys. Polon. **7** (1938), S. 159 u. 374; ZS. f. Phys. **120** (1943), S. 121. W. HEITLER, Proc. Cambr. Phil. Soc. **37** (1941), S. 291 und **38** (1942), S. 296. A. H. WILSON, ebenda **37** (1941), S. 301. E. C. G. STUECKELBERG, Nature **153** (1944), S. 143; Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 3. W. PAULI, Rev. of Mod. Phys. **15** (1943), S. 175.

jedem Schritt der Entwicklung endliche invariante Zusatzterme in willkürlicher Weise addieren, und es lässt sich bis jetzt keine physikalisch befriedigende Vorschrift über die Art der Subtraktion aufstellen. Dies bedeutet, dass durch die Angabe einer Lagrange-Funktion die höheren Näherungen einer solchen Theorie keineswegs definiert sind.

Bei der zweiten Betrachtungsweise entwickelt man nach fallenden Potenzen der Kopplungsparameter<sup>1)</sup>, und diese Entwicklung konvergiert, wegen der starken Kopplung des Feldes mit den Nukleonen, bedeutend besser. Hier besteht jedoch vorerst keine Möglichkeit, die Divergenzen in invarianter Weise zu eliminieren, und man ist gezwungen, den Nukleonen einen endlichen Radius zuzuschreiben. Wenn aber die Lagrange-Funktion (einschliesslich der Formfunktion der Teilchen) gegeben ist, so ist das betrachtete „Modell“ vollständig definiert. Insbesondere sind die Trägheits-eigenschaften der Nukleonen, ähnlich wie die elektromagnetische Masse des Lorentz'schen Elektrons, aus der Theorie berechenbar. Da die Kernkräfte spin- und ladungsabhängig sind, treten hier neben der trägen Masse noch Trägheitsmomente auf, die dem Spin und dem „isotopic spin“ (der Ladung) zugeordnet sind, und entsprechende Rotationsenergien; dies hat zur Folge, dass die Nukleonen angeregte Zustände (Isobaren) mit höheren Werten von Spin und Ladung besitzen. Die Theorie liefert bestimmte Aussagen über die Anregungsenergien der verschiedenen Spin- und Ladungszustände der Teilchen, sowie über ihre Wechselwirkungen in diesen Zuständen. Bei diesen Aussagen geht nun allerdings der Nukleonradius wesentlich ein. Es zeigt sich aber, dass man auch hier, um mit den Experimenten im Einklang zu bleiben, für den Radius die Grössenordnung des klassischen Elektronenradius oder der Comptonwellenlänge des Protons annehmen muss. Dies ist die Grössenordnung der von HEISENBERG<sup>2)</sup> postulierten „universellen Länge“, welche die Massen der „Elementarteilchen“ bestimmen soll.

Es scheint uns daher gerechtfertigt, auch jene Folgerungen der Feldtheorie, welche vom Radius der Nukleonen abhängen, in einer unrelativistischen Näherung ernst zu nehmen, obwohl bis jetzt unklar ist, welche Rolle dieser Radius in einer lorentzinvarianten Theorie spielen wird. Die ersterwähnten Theorien, bei welchen

<sup>1)</sup> G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **13** (1940), S. 269; **14** (1941), S. 633; **16** (1943), S. 222 u. 551. J. R. OPPENHEIMER und J. SCHWINGER, Phys. Rev. **60** (1941), S. 150. W. PAULI und S. M. DANCOFF, Phys. Rev. **62** (1942), S. 85. R. SERBER und S. M. DANCOFF, Phys. Rev. **63** (1943), S. 143. W. PAULI und S. KUSAKA, Phys. Rev. **63** (1943), S. 400.

<sup>2)</sup> W. HEISENBERG, Ann. d. Phys. **32** (1938), S. 20.

die Divergenzen in invarianter Weise subtrahiert werden können, zeigen ja durch die Unbestimmtheit ihrer höheren Näherungen, dass noch wesentliche Gesichtspunkte zur Einschränkung der manigfältigen Möglichkeiten fehlen; solche Gesichtspunkte könnten sich aber gerade durch das Studium der Theorie bei starker Kopplung ergeben. Überdies verdienen die aus dieser Theorie folgenden Kernkräfte, für deren Eigenschaften die Existenz der isobaren Zustände bestimmd ist, auch unabhängig von ihrer speziellen Ableitung ein gewisses Interesse, da hierdurch der Kreis der Gesichtspunkte, nach denen die experimentellen Erscheinungen diskutiert werden können, erweitert wird.

Für die Theorie der zusammengesetzten Kerne bedeutet die Annahme von angeregten Nukleon-Zuständen eine erhebliche Komplikation. Nur die einfachsten Probleme kommen daher zunächst in Betracht. Es sind dies einerseits die Viel-Körper-Probleme, d. h. die schweren Kerne; diese sind bereits von COESTER<sup>1)</sup> mittels statistischer Näherungsmethoden untersucht worden. Andererseits bietet sich als nächstliegendes Problem das Zwei-Körper-Problem des Deuterons und seiner Isobaren, das den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden soll.

## § 2. Das Nukleon-Modell.

Die verschiedenen Varianten der Mesontheorie liefern bekanntlich verschiedene Modelle des Nukleons. Die Skalartheorie kann ausgeschieden werden, da sie den Erfahrungstatsachen sicher nicht gerecht wird. Von den anderen Varianten sind bisher nur die Pseudoskalar- und die Vektortheorie, sowie die Theorie, die mit einer Mischung dieser beiden Felder rechnet, unter der Annahme starker Kopplung durchgeführt worden<sup>2)</sup>; auf diese Theorien sind wir also angewiesen. Weiter unterscheidet man „neutral“, „charged“ und „symmetrical theories“. Die symmetrische Theorie (im Sinne von

<sup>1)</sup> F. COESTER, Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 35. Nach dieser Arbeit können die schweren Kerne in Übereinstimmung mit der Erfahrung beschrieben werden. PAULI und KUSAKA äussern sich hierüber nur kurz (l. c., S. 415). Während ihre Angaben über die Stabilität der schweren Kerne in der symmetrischen Mischungstheorie (s. u.) mit COESTERS Ergebnissen übereinstimmen, befürchten sie, dass die Berücksichtigung der Coulombenergie zu kleine Gleichgewichtsladungen ergibt. Die ausführlichen Rechnungen von COESTER (l.c., § 6) zeigen jedoch, dass die Gleichgewichtsladung in ziemlich empfindlicher Weise von den Parametern der Theorie abhängt und daher sehr wohl mit dem Erfahrungswert in Einklang gebracht werden kann. — Auch in anderer Hinsicht (magnetische Momente von Proton, Neutron und Deuteron) scheint uns PAULIS und KUSAKAS Beurteilung der Theorie zu pessimistisch; doch kann darauf hier nicht eingegangen werden.

<sup>2)</sup> Zitate in Fussnote 1, S. 216.

KEMMER<sup>1)</sup>) empfiehlt sich dadurch, dass sie „ladungsunabhängige“ Kräfte liefert, ohne — wie die „neutral theory“ — auf die Mesontheorie des  $\beta$ -Zerfalls verzichten zu müssen.

Während die Lagrangefunktion der Pseudoskalartheorie bei unrelativistischer Näherung (ruhende Nukleonen) nur einen einzigen Kopplungsparameter aufweist, treten in der Vektortheorie bekanntlich deren zwei auf, die den Wechselwirkungen der longitudinalen bzw. transversalen Mesonen mit den Proton-Neutronen zugeordnet sind:  $g_{\text{long}}$  und  $g_{\text{transv}}$ . Ist  $g_{\text{long}} = 0$ , oder bleibt der Quotient  $g_{\text{long}}/g_{\text{transv}}$  dem Betrage nach unter einer gewissen Grenze<sup>2)</sup>, so ergibt die Vektortheorie denselben Ausdruck für die Isobaren-Energie wie die Pseudoskalartheorie. Man kann dann auch beide Felder gemeinsam annehmen (Mischungstheorie), wobei die Möglichkeit besteht, gewisse unerwünschte Terme im Wechselwirkungspotential durch Wahl der Parameter zu eliminieren<sup>3)</sup>.

Wenn man diese — freilich schon sehr ins Detail gehenden — Konsequenzen der Mesontheorie wörtlich nehmen will, so wird man der Pseudoskalar-, Vektor- oder Mischungstheorie, und zwar der symmetrischen Variante, einstweilen eine Vorrangstellung einräumen müssen. Zu ihren Gunsten spricht aber auch die hohe Symmetrie, mit der das Modell des Nukleons in dieser Theorie ausgestattet wird. Wir wollen daher dieses Modell unserer Betrachtung der Zweikörperprobleme zugrundelegen.

Der Ansatz für die Isobaren-Energie laute demnach:

$$H^I = \frac{\epsilon}{2} |\tilde{P}|^2 + \text{const.} \quad (1)$$

Hier bedeutet  $\tilde{P}$  einen Kreiseldrehimpuls mit den Eigenwerten

$$|\tilde{P}|^2 = j(j+1), \quad \text{wo } j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

Seine Projektionen auf eine raumfeste und eine „körperfeste“ Achse können diagonal gemacht werden; sie haben halbganze Eigenwerte  $m, n$ , wobei  $|m| \leq j, |n| \leq j$ ;  $j$  und  $m$  sind die Spinquantenzahlen,  $n + \frac{1}{2}$  die Ladungszahl des Nukleonzustandes. Für das Folgende ist es bequem, die Konstante in (1) so zu wählen,

<sup>1)</sup> N. KEMMER, Proc. Cambr. Phil. Soc. **34** (1938), S. 354.

<sup>2)</sup> Vgl. G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **16** (1943), S. 551, insbesondere S. 579. Andernfalls setzt sich die Isobaren-Energie aus zwei Rotator-Energien zusammen, die dem Spin und dem isotopen Spin getrennt entsprechen.

<sup>3)</sup> C. MØLLER und L. ROSENFELD, Kgl. Danske Vidensk. S. XVII, 8 (1940). J. SCHWINGER, Phys. Rev. **61** (1942), S. 387.

dass der tiefste Eigenwert von  $H^I$  null wird; dann haben wir die Eigenwerte:

$$H^I = \frac{\epsilon}{2} [(j + \frac{1}{2})^2 - 1]. \quad (2)$$

Zum Modell gehören ferner die Kernkräfte. Hier interessieren nur die Zweikörperkräfte. Neben einer Zentralkraft liefern die genannten Mesontheorien im allgemeinen noch eine „Tensorkraft“ (Spin-Bahn-Kopplung), die bekanntlich zur Erklärung des elektrischen Quadrupolmoments des Deuterons herangezogen wird. Wir wollen aber die mathematische Aufgabe vereinfachen, indem wir die Tensorkraft zunächst fortlassen; man wird sie nachträglich als Störung berücksichtigen können. Dann ist die statische Wechselwirkungsenergie von der Form

$$V(r) \cdot \Omega, \quad (3)$$

wo  $r$  den Abstand der beiden Nukleonen bedeutet und wo  $\Omega$  eine bestimmte Funktion der Euler'schen Winkel der beiden Nukleon-Kreisel ist<sup>1)</sup>. In einer vorangegangenen Arbeit des einen von uns<sup>2)</sup> wurde die zugehörige  $\Omega$ -Matrix berechnet, zunächst im Schema der Spin- und Ladungsquantenzahlen der beiden einzelnen Nukleonen ( $j_1 n_1 m_1 j_2 n_2 m_2$ ), dann durch eine unitäre Transformation als Matrix bezüglich der Quantenzahlen

$$J, M, K, N, j_1, j_2, ; \quad (4)$$

hier bedeuten  $J$  und  $M = m_1 + m_2$  Betrag und Komponente des Deuteron-Spins, und  $K$  und  $N = n_1 + n_2$  sind die entsprechenden Quantenzahlen des isotopen Spins, d. h.  $N + 1$  ist die Gesamtladung des Zwei-Nukleon-Systems;  $J, M, K, N$  sind ganzzahlig, und es gilt  $|M| \leq J, |N| \leq K$ . Die Matrix  $\Omega$  ist aus Symmetriegründen diagonal bezüglich der Quantenzahlen  $J, M, K, N$ ; sie zerfällt demnach in Teilmatrizen bezüglich  $j_1, j_2$ , die noch von  $J$  und  $K$  abhängen; dabei kommen in jeder Teilmatrix nur solche  $j_1, j_2$ -Werte vor, für die gemäss dem „Vektormodell“ die Ungleichungen gelten:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2, \quad |j_1 - j_2| \leq K \leq j_1 + j_2. \quad (5)$$

Was andererseits die Potentialfunktion  $V$  in (3) anbelangt, so ist –

<sup>1)</sup>  $\Omega = \sum_{i\varrho} S_{i\varrho}^{(1)} S_{i\varrho}^{(2)}$  in der Bezeichnung der in Fussnote 2, S. 218 zitierten Arbeit; vgl. Gl. (15.8), S. 592.

<sup>2)</sup> M. FIERZ, Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 27. In dieser Arbeit sind die Grössen  $S_{i\varrho}$  (s. die vorangehende Fussnote) mit  $x_{ik}$  bezeichnet (bis auf gewisse Vorzeichen).

nach den genannten Mesontheorien — ihre  $r$ -Abhängigkeit in grossen Abständen ( $r \gg$  Radius des Nukleons) diejenige des Yukawa-Potentials ( $\text{const. } e^{-\mu r}/r$ ) oder zweier superponierter Yukawa-Potentiale (mit  $\mu_V \neq \mu_{PS}$ : Mischungstheorie). Wir brauchen indessen über die  $r$ -Abhängigkeit noch nicht zu verfügen. Dagegen ist wichtig, dass — im Einklang mit den Mesontheorien —

$$V(r) > 0 \quad (6)$$

angenommen wird; denn nach COESTER (l. c.) ist es dieses Vorzeichen, das die Stabilität der schweren Kerne garantiert.

Die Hamiltonfunktion  $H$  des Zweikörperproblems setzt sich danach aus folgenden Bestandteilen zusammen: kinetische Energie der Relativbewegung (Operator  $-\Delta/M_p$ , wo  $M_p$  = Protonmasse;  $\hbar = 1$ ), Isobaren-Energien (2) der beiden Nukleonen<sup>1)</sup>, und Wechselwirkung (3). Wir denken uns  $H$ , gesondert für jedes Wertesystem der Quantenzahlen  $J, M, K, N$ , als Matrix bezüglich  $j_1$  und  $j_2$  geschrieben:

$$(j_1 j_2 | H | j_1' j_2') = \left\{ \frac{-\Delta}{M_p} + \frac{\varepsilon}{2} [(j_1 + \frac{1}{2})^2 + (j_2 + \frac{1}{2})^2 - 2] \right\} \cdot (j_1 j_2 | 1 | j_1' j_2') + V(r) \cdot (j_1 j_2 | \Omega | j_1' j_2'). \quad (7)$$

Die Schrödinger-Gleichung lautet dann

$$\sum_{j_1' j_2'} (j_1 j_2 | H | j_1' j_2') F(j_1' j_2', \mathbf{r}) = E \cdot F(j_1 j_2, \mathbf{r}) \quad (8)$$

( $\mathbf{r}$  = Vektor der Relativkoordinaten,  $|\mathbf{r}| = r$ ).

Das PAULI'sche Ausschlussprinzip verlangt, dass die Schrödingerfunktion, wenn sie als Funktion der ursprünglichen Variablen  $j_1 m_1 n_1 j_2 m_2 n_2$  und  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  dargestellt wird, bei Vertauschung der Koordinaten beider Teilchen das Vorzeichen wechselt. Für die reduzierte Schrödingerfunktion in (8) bedeutet dies:

$$\left. \begin{aligned} F(j_1 j_2, \mathbf{r}) &= -F(j_2 j_1, -\mathbf{r}), \text{ wenn } J+K \text{ gerade;} \\ F(j_1 j_2, \mathbf{r}) &= +F(j_2 j_1, -\mathbf{r}), \text{ wenn } J+K \text{ ungerade.} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ein wesentlicher Parameter der Hamiltonfunktion (7) ist das Verhältnis  $\varepsilon/\bar{V}$  [ $\bar{V}$  = Mittelwert von  $V$ ; vgl. etwa (26)]. Ist  $\varepsilon \gg \bar{V}$ , so kann man näherungsweise  $\varepsilon = \infty$  setzen, d. h. den Einfluss der angeregten Nukleonenzustände auf die energetisch tiefliegenden Deu-

<sup>1)</sup> Wir betrachten die Isobaren-Energien als additiv. Die nach der Mesontheorie zu erwartenden Abweichungen von der Additivität sind in der Tat belanglos; vgl. PAULI und KUSAKA, l. c., Fussnote 7 auf S. 404.

teronzustände vernachlässigen:  $F(j_1 j_2, \mathbf{r}) = 0$  ausser für  $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ . Es ist aber

$$\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \Omega | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } J = K = 0, \\ -\frac{1}{3} & \text{für } J = 1, K = 0 \text{ und } J = 0, K = 1, \\ \frac{1}{9} & \text{für } J = K = 1. \end{cases} \quad (10)$$

In dieser Grenze besteht kein Unterschied zwischen Mesontheorien mit starker oder schwacher Kopplung, und man kommt zu einer wohlbekannten älteren Deuterontheorie zurück<sup>1)</sup>. Es ist nun die Frage, wie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Hamiltonfunktion (7) sich ändern, wenn die Isobarenenergie  $\varepsilon$  abnimmt und schliesslich klein gegen  $\bar{V}$  wird. Namentlich im letzteren Grenzfall müssen sich ganz neue Verhältnisse ergeben, und es wird zu untersuchen sein, für welche Parameterwerte die Übereinstimmung mit der Erfahrung hergestellt werden kann. Wenn auch vermutlich ein mittlerer Wert von  $\varepsilon/\bar{V} (\approx 1/5)$  am ehesten das Richtige treffen wird, legen wir doch besonderes Gewicht auf den Grenzfall  $\varepsilon \ll \bar{V}$ , weil hier die Wirkungen der Spin-Trägheit am ausgeprägtesten sind.

### § 3. Näherungsmethoden.

Wir haben zuerst versucht, für den Fall des Treppenpotentials [ $V(r) = V_0$  für  $r < r_0$ ,  $= 0$  für  $r > r_0$ ] exakte Lösungen aufzustellen und auszuwerten; doch führen die Stetigkeitsbedingungen für  $r = r_0$  auf eine wenig übersichtliche Gleichung. Man wird daher mit Näherungsmethoden eher zum Ziel kommen. Wir besprechen hier zwei naheliegende Methoden.

#### A. Adiabaten-Methode.

Wie in der Theorie zweiatomiger Moleküle<sup>2)</sup> betrachten wir den Kernabstand  $r$  zunächst als einen Parameter. Bei festgehaltenem  $r$  haben wir statt (7), (8) die Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\varepsilon}{2} [(j_1 + \frac{1}{2})^2 + (j_2 + \frac{1}{2})^2 - 2] a(j_1 j_2) + V \sum_{j'_1 j'_2} \langle j_1 j_2 | \Omega | j'_1 j'_2 \rangle a(j'_1 j'_2) = W \cdot a(j_1 j_2); \quad (11)$$

<sup>1)</sup> (10) entspricht — abgesehen von einem Faktor 1/9 — dem bekannten Austauschoperator  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)$ . Die betreffende Deuterontheorie ist die von RARITA und SCHWINGER (Phys. Rev. 59 (1941), S. 436 u. 556) als „symmetrical“ bezeichnete Theorie; diese Autoren untersuchen aber speziell die Wirkung der Tensorkraft. Von dieser Theorie ausgehend, kann man im Falle  $\bar{V} \ll \varepsilon$  die Ausserdiagonalelemente der Wechselwirkungsmatrix  $V$ ,  $\Omega$  als kleine Störungen berücksichtigen. So gehen PAULI und KUSAKA in ihrer oben zitierten Arbeit vor, und zwar rechnen sie in der Näherung, dass nur die  $F$ -Komponenten mit  $j_1, j_2 \leq 3/2$  als von null verschieden betrachtet werden.

<sup>2)</sup> M. BORN und R. OPPENHEIMER, Ann. d. Phys. 84 (1927), S. 457. R. DE L. KRONIG, ZS. f. Phys. 50 (1928), S. 347.

ihre Eigenwerte seien  $W_n$ , ihre Eigenvektoren  $a_n(j_1 j_2)$ . Wir können die Eigenvektoren reell wählen, weil die  $\Omega$ -Matrix reell ist. Da  $V$  von  $r$  abhängt — die Art der Abhängigkeit bleibe noch offen —, sind  $W_n$  und  $a_n$  Funktionen des Parameters  $r$ . Für jeden Wert von  $r$  seien die Eigenvektoren auf 1 normiert, so dass

$$\sum_{j_1 j_2} a_{n'}(j_1 j_2, r) a_n(j_1 j_2, r) = \delta_{nn'}. \quad (12)$$

Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung (8) entwickeln wir nach diesen Eigenvektoren:

$$F(j_1 j_2, \mathbf{r}) = \sum_n a_n(j_1 j_2, r) f_n(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Aus (7) und (8) folgt dann:

$$\sum_n \left\{ -E + \frac{-\Delta}{M_p} + W_n(r) \right\} a_n(j_1 j_2, r) f_n(\mathbf{r}) = 0. \quad (14)$$

Es sei

$$\begin{aligned} A_{n'n} &= -\frac{2}{M_p} \sum_{j_1 j_2} a_{n'}(j_1 j_2, r) \frac{\partial a_n(j_1 j_2, r)}{\partial r}, \\ B_{n'n} &= -\frac{1}{M_p} \sum_{j_1 j_2} a_{n'}(j_1 j_2, r) \frac{\partial^2 a_n(j_1 j_2, r)}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Beachtet man, dass

$$\Delta(af) = a \cdot \Delta f + 2 \frac{\partial a}{\partial r} \cdot \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) f + \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} \cdot f,$$

so ergibt (14), mit (12) und (15):

$$\left\{ -E + \frac{-\Delta}{M_p} + W_m(r) \right\} f_m(\mathbf{r}) + \sum_n \left\{ B_{mn} + A_{mn} \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} f_n(\mathbf{r}) = 0. \quad (16)$$

Für die Diagonalelemente der Matrizen (15) gilt nach (12):

$$A_{nn}(r) = 0, \quad B_{nn} = + \frac{1}{M_p} \sum_{j_1 j_2} \left( \frac{\partial a_n(j_1 j_2, r)}{\partial r} \right)^2. \quad (17)$$

An Stelle von (16) kann man daher auch schreiben:

$$\begin{aligned} &\left\{ -E + \frac{-\Delta}{M_p} + W_m(r) + B_{mm}(r) \right\} f_m(\mathbf{r}) \\ &+ \sum_n' \left\{ B_{mn} + A_{mn} \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} f_n(\mathbf{r}) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

wo der Strich am Summenzeichen die Auslassung des Terms  $n = m$  verlangt.

Man wird nun etwa — nach dem Vorbild der Molekültheorie — auf die Gleichung (18) das Störungsverfahren anwenden können. Als nullte Näherung bietet sich das Eigenwertproblem:

$$\left\{ -\ddot{E}_m + \frac{-A}{M_p} + W_m(r) + B_{mm}(r) \right\} \dot{f}_m(\mathbf{r}) = 0, \quad (19)$$

dessen Eigenwerte  $\ddot{E}_{m\alpha}$  und dessen normierte Eigenfunktionen  $\dot{f}_{m\alpha}(\mathbf{r})$  seien. Für jeden Wert der Quantenzahl  $m$  liefern die Funktionen  $\dot{f}_{m\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ) ein vollständiges Orthogonalsystem, nach dem die betreffende Funktion  $f_m$  in (18) entwickelt werden kann:

$$f_m(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} c_{m\alpha} \dot{f}_{m\alpha}(\mathbf{r}).$$

(18) ist dann äquivalent dem Eigenwertproblem der Matrix  $\Phi_{m\alpha, n\beta}$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{m\alpha, m\beta} &= \ddot{E}_{m\alpha} \cdot \delta_{\alpha\beta}, \\ \Phi_{m\alpha, n\beta} &= \int d^3\mathbf{r} \cdot \dot{f}_{m\alpha}(\mathbf{r}) \left\{ B_{mn}(r) + A_{mn}(r) \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} \dot{f}_{n\beta}(\mathbf{r}) \\ &\quad (m \neq n). \end{aligned} \quad (20)$$

Die Eigenwerte  $E$  dieser Matrix wären dann nach dem üblichen Störungsverfahren zu bestimmen.

### B. Variationsverfahren.

Zur Schrödingergleichung (8) gehört das folgende Variationsproblem: Es soll

$$\bar{H} = \int d^3\mathbf{r} \cdot \sum_{j_1 j_2 j'_1 j'_2} F^*(j_1 j_2, \mathbf{r}) (j_1 j_2 | H | j'_1 j'_2) F(j'_1 j'_2, \mathbf{r}) \quad (21)$$

durch Variation der Funktionen  $F$  und  $F^*$  zum Extremum gemacht werden, mit der Nebenbedingung

$$\int d^3\mathbf{r} \cdot \sum_{j_1 j_2} F^*(j_1 j_2, \mathbf{r}) F(j_1 j_2, \mathbf{r}) = 1. \quad (22)$$

Die Extremalwerte von  $\bar{H}$  sind die Eigenwerte  $E$  der Gleichung (8).

Wir gehen nun ähnlich vor wie FOCK<sup>1)</sup> in seiner Begründung der HARTREE-Näherung der Atomtheorie: Wir beschränken uns auf Funktionen vom Typus

$$F(j_1 j_2, \mathbf{r}) = a(j_1 j_2) \cdot f(\mathbf{r}), \quad F^*(j_1 j_2, \mathbf{r}) = a(j_1 j_2) \cdot f^*(\mathbf{r}), \quad (23)$$

---

<sup>1)</sup> V. FOCK, ZS. f. Phys. 61 (1930), S. 126.

wo  $a (= a^*)$  von  $\mathbf{r}$  unabhängig und  $f$  von  $j_1, j_2$  unabhängig ist; dabei sei

$$\sum_{j_1 j_2} a^2(j_1 j_2) = 1, \quad \int d^3 \mathbf{r} \cdot f^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = 1. \quad (24)$$

Mit dieser beschränkten Auswahl von Funktionen  $F, F^*$  soll jetzt  $\bar{H}$  extremal gemacht werden. Wenn wir zunächst  $f$  und  $f^*$  festhalten, also nur die  $a(j_1 j_2)$  variieren, so ergeben sich für diese die Gleichungen

$$\frac{\varepsilon}{2} [(j_1 + \frac{1}{2})^2 + (j_2 + \frac{1}{2})^2 - 2] a(j_1 j_2) + \bar{V} \sum_{j'_1 j'_2} (j_1 j_2 | \Omega | j'_1 j'_2) a(j'_1 j'_2) = \bar{W} \cdot a(j_1 j_2), \quad (25)$$

wo

$$\bar{V} = \int d^3 \mathbf{r} \cdot f^*(\mathbf{r}) V(r) f(\mathbf{r}). \quad (26)$$

Von der Gleichung (11) unterscheidet sich (25) dadurch, dass  $V(r)$  durch den Mittelwert  $\bar{V}$  ersetzt ist, sodass der Eigenwert  $\bar{W}$  von  $r$  unabhängig wird. Setzt man (25) in (7), (8) ein, so wird

$$\bar{H} = \int d^3 \mathbf{r} \cdot f^*(\mathbf{r}) \cdot \frac{-A}{M_p} f(\mathbf{r}) + \bar{W}. \quad (27)$$

Dieser Ausdruck ist jetzt noch durch Wahl von  $f, f^*$  extremal zu machen, wobei der Term  $\bar{W}$  durch (25), (26) in seiner Abhängigkeit von  $f, f^*$  bestimmt zu denken ist. Die Euler'sche Gleichung dieser Variationsaufgabe ist einer Schrödinger-Gleichung ähnlich (s. § 4).

#### § 4. Deuteronzustände mit $J = 0, K = 0$ .

Die vorstehenden Überlegungen sollen jetzt für den einfachsten Fall  $J = K = 0$  ausgeführt werden. Es handelt sich also um Deuteronzustände, die sowohl Spin-Singletts als Ladungs-Singletts sind. ( $K = 0, N = 0$  heisst: Ladung = +1). Nach dem „Vektormodell“ (vgl. (5)) gibt es dann nur  $F$ -Komponenten mit  $j_1 = j_2$ . Das Ausschlussprinzip besagt nach (9):

$$F(jj, \mathbf{r}) = -F(jj, -\mathbf{r}), \quad (28)$$

d. h. es verbietet  $S$ -,  $D$ -...-Terme.

Die  $\Omega$ -Matrix hat im Falle  $J = K = 0$  folgende nicht-verschwindenden Elemente<sup>1)</sup>:

$$(jj | \Omega | jj) = 1 \\ (jj | \Omega | j+1, j+1) = (j+1, j+1 | \Omega | jj) = 1 \quad \left. \right\} j \geq \frac{1}{2}.$$

---

<sup>1)</sup> M. FIERZ, l. c., Gl. IV.

Mit der Abkürzung  $a(jj) = a_j$  lautet also die Gleichung (11):

$$\left\{ -W + \varepsilon \left[ (j + \frac{1}{2})^2 - 1 \right] + V \right\} a_j + V(a_{j-1} + a_{j+1}) = 0 \quad (29)$$

$$(j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots; a_{-\frac{1}{2}} = 0).$$

Dieses Gleichungssystem ist aus der Theorie der Mathieu'schen Funktionen wohlbekannt. Wir definieren eine Funktion  $\psi(x)$  durch die Fourierreihe

$$\psi(x) = \sum_{j \geq \frac{1}{2}} a_j \frac{\sin(j + \frac{1}{2})x}{\sqrt{\pi}}; \quad (30)$$

sie ist periodisch mit der Periode  $2\pi$  und ungerade:

$$\psi(x + k \cdot 2\pi) = \psi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x). \quad (31)$$

Beachtet man, dass

$$\begin{aligned} 2 \cos x \cdot \psi(x) &= \sum_{j \geq \frac{1}{2}} a_j \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{ \sin(j + \frac{3}{2})x + \sin(j - \frac{1}{2})x \} \\ &= \sum_{j \geq \frac{1}{2}} (a_{j-1} + a_{j+1}) \frac{\sin(j + \frac{1}{2})x}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned} \quad (32)$$

so folgt aus (29), dass  $\psi(x)$  der Mathieu'schen Differentialgleichung genügt:

$$-\varepsilon \psi'' + \{-W - \varepsilon + V(1 + 2 \cos x)\} \psi = 0. \quad (33)$$

Von den Eigenwerten  $W$  dieser Gleichung kommen hier nur diejenigen in Betracht, deren zugehörige Eigenfunktionen die Eigenschaften (31) besitzen<sup>1)</sup>. Dass man auf diese Weise *alle* Eigenwerte des Gleichungssystems (29) erhält, erkennt man am einfachsten durch den Grenzübergang  $V \rightarrow 0$ . Die Mathieu-Funktionen  $\psi_s(x)$  mit den Eigenschaften (31) gehen nämlich in diesem Limes in  $\text{const. } \sin(sx)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) über; nach (33) wird also

$$\lim_{V=0} W_s = \varepsilon(s^2 - 1), \quad \text{wo } s = 1, 2, \dots,$$

und dies sind offenbar auch die Eigenwerte des Systems (29) für  $V = 0$ .

<sup>1)</sup> In der Bezeichnung von M. J. O. STRUTT [Lamé'sche, Mathieu'sche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. I, Julius Springer, Berlin 1932] sind es die Mathieu'schen Funktionen erster Art  $S_2\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$ ,  $S_4\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$ , ... Die Eigenwerte  $W$  als Funktionen der Parameter  $\varepsilon$  und  $V$  kann man durch die Reihenentwicklungen S. 31 bis 37 des Strutt'schen Buches bestimmen, oder aus den Kurven  $\lambda_{S_2}$ ,  $\lambda_{S_4}$ , ... der Figur auf S. 24 [die gleiche Figur findet man auch in ZS. f. Phys. 69 (1931), S. 606]; dabei ist  $h^2 = 4 \frac{V}{\varepsilon}$ ,  $\lambda = 4 \left( \frac{W-V}{\varepsilon} + 1 \right)$ .

Für den Fall  $V \ll \varepsilon$  liefert die Störungsmethode in Anwendung auf (29) eine Entwicklung nach Potenzen von  $V/\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} W_s &= \varepsilon(s^2 - 1) + V + \frac{2}{4s^2 - 1} \frac{V^2}{\varepsilon} + \dots \quad \text{für } s \neq 1, \\ W_1 &= V - \frac{V^2}{\frac{1}{3}\varepsilon} + \dots \quad (V \ll \varepsilon). \end{aligned} \tag{34}$$

Im anderen Grenzfall  $\varepsilon \ll V$  hat die Mathieu-Gleichung (33) den Charakter einer Schrödinger-Gleichung, deren Potentialfunktion  $2V \cos x$  ein tiefes Minimum bei  $x = \pi$  hat [im Periodizitätsbereich  $0 \leq x < 2\pi$ ;  $V > 0$  nach (6)]. Man kann daher in nullter Näherung  $\cos x$  durch  $(-1 + (x - \pi)^2/2)$  ersetzen; dadurch wird (33) zur Schrödinger-Gleichung eines linearen harmonischen Oszillators, mit den Eigenwerten

$$W_{(n)} = -V + \sqrt{\varepsilon V}(2n+1) + \dots \quad (n \text{ ganz}).$$

Die additive Konstante  $-\varepsilon$  ist in dieser Näherung zu vernachlässigen. Die weitere Entwicklung des  $\cos x$  liefert Anharmonizitäten, die in bekannter Weise störungsmässig zu behandeln sind. Für die Eigenwerte erhält man so eine Entwicklung nach Potenzen von  $\sqrt{\varepsilon/V}$ :

$$\begin{aligned} W_{(n)} &= -V + \sqrt{\varepsilon V}(2n+1) - \varepsilon \left( \frac{n(n+1)}{8} + \frac{17}{16} \right) + \dots \\ &\quad (\varepsilon \ll V, \quad n \cdot \sqrt{\varepsilon V} \ll V). \end{aligned} \tag{35}$$

Nach (31) müssen aber die Eigenfunktionen die Symmetrie-Eigenschaft  $\psi(\pi - x) = -\psi(\pi + x)$  besitzen; hierdurch wird die Oszillationsquantenzahl auf ungerade Werte beschränkt:

$$n = 2s - 1, \quad \text{wo } s = 1, 2, \dots \tag{36}$$

Der tiefste Eigenwert ist also

$$W_{(1)} = -V + 3\sqrt{\varepsilon V} - \frac{21}{16}\varepsilon + \dots \quad (\varepsilon \ll V). \tag{37}$$

Die zu den tiefsten Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen  $\psi(x)$  sind nur in der Umgebung von  $x = \pi$  merklich von null verschieden, und zwar in einem Intervall der Größenordnung  $(\varepsilon/V)^{1/4}$ . Ihre Fourieranalyse gemäss (30) liefert daher als hauptsächliche Komponenten  $a_j$ , solche mit hohen  $j$ -Werten. Nach (30) ist

$$-\int_0^{2\pi} dx \psi \psi'' = \sum_j (j + \frac{1}{2})^2 a_j^2 \equiv \overline{(j + \frac{1}{2})^2};$$

in nullter Näherung findet man hierfür:

$$\overline{(j + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{V}{\varepsilon}} (n + \frac{1}{2}) \quad (\varepsilon \ll V). \quad (38)$$

Speziell für  $n = 1$  ist

$$\left. \begin{aligned} a_j &= 2 \pi^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{\varepsilon}{V} \right)^{\frac{3}{8}} (j + \frac{1}{2}) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{V} \right)^{\frac{1}{2}} (j + \frac{1}{2})^2}, \\ \bar{j} &= 2 \pi^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{V}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \left( \frac{j - \bar{j}}{j} \right)^2 = \frac{3 \pi}{8} - 1 \approx 0,18 \\ &\quad (n = 1, \quad \varepsilon \ll V). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Im Übergangsbereich zwischen den beiden Grenzfällen ( $\varepsilon \sim V$ ) können keine „Überschneidungen“ der Eigenwerte eintreten; dadurch sind die Eigenwerte mit gleichen  $s$ -Werten — (34) einerseits, (35) mit (36) andererseits — eindeutig einander zugeordnet.

Diese Formeln für  $W$  sollen jetzt im Rahmen der beiden Näherungsmethoden (§ 3) verwertet werden.

#### A. Adiabaten-Näherung.

Wenn  $\varepsilon \ll \bar{V}$  angenommen wird, kann man einen  $r$ -Wert  $r_\varepsilon$  durch die Gleichung

$$V(r_\varepsilon) = \varepsilon$$

definieren, und es wird dann gelten:

$$\begin{aligned} V(r) &\ll \varepsilon \quad \text{für } r \gg r_\varepsilon, \\ V(r) &\gg \varepsilon \quad \text{für } r \ll r_\varepsilon. \end{aligned}$$

Man wird also im Außenbereich ( $r \gg r_\varepsilon$ ) die Formel (34), im Innenbereich ( $r \ll r_\varepsilon$ ) die Oszillatornäherung (35 ff.) verwenden können. Speziell für den tiefsten Eigenwert  $s = 1$  gilt nach (34) und (37):

$$W_1(r) = \begin{cases} + V(r) - \frac{1}{3} [V(r)]^2 / \varepsilon + \dots & \text{für } r \gg r_\varepsilon, \\ - V(r) + 3 \sqrt{\varepsilon V(r)} - \frac{21}{16} \varepsilon + \dots & \text{für } r \ll r_\varepsilon. \end{cases} \quad (40)$$

In der Schrödinger-Gleichung (19) ignorieren wir vorerst den Term  $B_{mm}$ . Die Funktion  $W_m(r)$  bestimmt die „adiabatische Potentialkurve“ des betreffenden Deuteronzustandes,  $W_1(r)$  (40) speziell die tiefstliegende Potentialkurve mit  $J = K = 0$ . Da die betreffenden Schrödingerfunktionen  $\hat{f}_m(\mathbf{r})$  nach (13) und (28) ungerade sein müssen, handelt es sich um P-, F-...-Potentialkurven. Da aber das Deuteron in Wirklichkeit keine stabilen P-, F-...-Zustände besitzt, müssen die Konstante  $\varepsilon$  und die Funktion  $V(r)$  so gewählt

werden, dass es keine diskreten negativen Energie-Eigenwerte mit  $J = K = 0$  gibt. (Im Teil II dieser Arbeit wird gezeigt werden, dass dies mit der Existenz stabiler S-Zustände verträglich ist.) Die P-Potentiale sind jedoch bekanntlich von Wichtigkeit für die Theorie der Neutron-Proton-Streuung; namentlich bestimmen sie die Anisotropie der Streuung im Schwerpunktssystem (bei nicht zu kleinen Energien). Es ist daher von Interesse, die Funktion  $W_1(r)$  mit der entsprechenden Potentialfunktion jener älteren Theorie zu vergleichen, die die Mesontheorie nur in störungstheoretischer Näherung verwendet (schwache Kopplung) und die demgemäß die Existenz von Nukleon-Isobaren ausschliesst. Zu dieser Theorie gelangen wir, wie früher (§ 2) bemerkt, durch den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Dann wird aber nach (34)  $W_1(r) = V(r)$ . Dies entspricht einer überall abstoßenden Kraft. Nach (40) dagegen ist die Kraft in kleinen Abständen anziehend:  $W_1(r) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} -V(r)$ <sup>1)</sup>. Auch wenn die oben gemachte Voraussetzung  $\varepsilon \ll \bar{V}$  fallen gelassen wird, ist nach (34), (35) in jedem Falle  $W_1(r) < V(r)$ . Die Existenz der Isobaren hat also zur Folge, dass die unterste P-Potentialkurve ( $J = K = 0$ ) herabgedrückt wird, was sich in der Anisotropie der Neutron-Proton-Streuung bemerkbar machen muss. Dieser Effekt lässt sich natürlich erst berechnen, wenn die anderen massgebenden S- und P-Potentiale bekannt sind.

In den vorstehenden qualitativen Betrachtungen haben wir uns nur der gröbsten adiabatischen Näherung bedient, indem wir die Größen  $A_{mn}(r)$  und  $B_{mn}(r)$  in den Gleichungen (16) bis (20) vernachlässigt haben. Ihre Berechnung tragen wir jetzt nach, zunächst für den „Innenbereich“  $r \ll r_\varepsilon$ . Durch die normierten Eigenfunktionen  $\psi_n(x)$  der Mathieu-Gleichung (33) drücken sie sich folgendermassen aus:

$$A_{mn} = -\frac{2}{M_p} \int_0^{2\pi} dx \psi_m \frac{\partial \psi_n}{\partial r}, \quad B_{mn} = -\frac{1}{M_p} \int_0^{2\pi} dx \psi_m \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2}; \quad (41)$$

man verifiziert dies leicht durch Einsetzen der Fourierentwicklung (30) und Vergleich mit den Definitionsformeln (15). Für  $r \ll r_\varepsilon$ ,  $V(r) \gg \varepsilon$ , sind  $\psi_n$ ,  $\psi_m$  Oszillator-Eigenfunktionen; die Indices  $n, m$  identifizieren wir mit den (ungeraden) Oszillator-Quantenzahlen [vgl. (36):  $n = 2s - 1$ ]. Bei Vernachlässigung der Anharmonizitäten sind die normierten Oszillator-Eigenfunktionen von der Form:

$$\psi_n = \left( \frac{V(r)}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{8}} \text{mal Funktion von } \left( \left( \frac{V(r)}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \xi \right),$$

---

<sup>1)</sup>  $W_1$  wird negativ für  $V/\varepsilon > 6$  (rund).

wo  $\xi = x - \pi$ . Infolgedessen wird

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_n}{\partial r} &= \frac{1}{8} \frac{d \log V}{dr} \left( 1 + 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \psi_n, \\ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2} &= \frac{1}{8} \frac{d^2 \log V}{dr^2} \left( 1 + 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \psi_n \\ &\quad + \frac{1}{64} \left( \frac{d \log V}{dr} \right)^2 \left( 1 + 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \psi_n.\end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\left( 1 + 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \psi_n = \sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2} - \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2}.$$

Hiermit ergibt (41) (für  $r \ll r_\varepsilon$ ):

$$\left. \begin{aligned} A_{nn} &= 0, & B_{nn} &= \frac{1}{32M_p} \left( \frac{d \log V}{dr} \right)^2 (n^2 + n + 1), \\ A_{n,n-2} = -A_{n-2,n} &= -\frac{1}{4M_p} \frac{d \log V}{dr} \sqrt{n(n-1)}, \\ B_{n,n-2} = -B_{n-2,n} &= -\frac{1}{8M_p} \frac{d^2 \log V}{dr^2} \sqrt{n(n-1)}, \\ B_{n,n-4} = B_{n-4,n} &= -\frac{1}{64M_p} \left( \frac{d \log V}{dr} \right)^2 \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}; \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

alle übrigen Matrixelemente verschwinden. Wählt man etwa  $V(r) = V(0)e^{-\mu r}$ , so ergibt (42) die Größenordnung

$$B_{nn} \sim B_{n,n\pm 4} \sim \frac{\mu^2}{M_p}, \quad A_{n,n\mp 2} \sim \frac{\mu}{M_p} \text{ (für } r \ll r_\varepsilon\text{).} \quad (43)$$

Im Aussenbereich  $r \gg r_\varepsilon$  ( $V \ll \varepsilon$ ) sind die Matrixelemente, wie man leicht abschätzt, mindestens um einen Faktor  $\sim V/\varepsilon$  kleiner. Man kann daher die Formeln (42) für kleine  $r$ -Werte bis zu  $r_\varepsilon$  hinaus gelten lassen und  $A_{mn}, B_{mn}$  weiter aussen verschwindend klein annehmen.

Das Diagonalelement  $B_{mm}$  spielt in den Gleichungen (18), (19) die Rolle eines Zusatzes zum adiabatischen Potential  $W_m$ ; so wird z. B. die tiefste Potentialkurve um  $B_{11}$  gehoben, was bei kleinen Abständen nach (42)

$$\frac{3}{32 M_p} \left( \frac{d \log V}{dr} \right)^2 \sim \text{einige MeV}$$

ausmacht. Die anderen  $A$ - und  $B$ -Terme in (18) ( $n \neq m$ ) beschreiben Übergänge von einer Potentialkurve zur anderen. So ist z. B. ein Übergang  $n=1 \rightarrow 3$  ( $s=1 \rightarrow 2$ ) möglich, was einem unelastischen Streuprozess entspricht, bei dem beide Nukleonen in den isobaren Zustand  $j = 3/2$  befördert werden. Die Realisierung dieses Prozesses würde natürlich die Energie  $3 \varepsilon$ , d. h. die doppelte Anregungsenergie eines Nukleons erfordern (im Schwerpunktssystem). Aber auch bei kleineren Energien können die angeregten Zustände als „virtuelle Zwischenzustände“ den Streuvorgang beeinflussen. Dieser Effekt lässt sich am einfachsten abschätzen, wenn man die  $r$ -Funktionen in (18) ( $W$ ,  $A$  und  $B$ ) durch geeignete Treppenfunktionen approximiert. Er erweist sich als belanglos, wenn die Abstände der Potentialkurven  $W_{(n)}$  im Innenbereich gross gegen  $\mu^2/M_p$  sind (vgl. (43)), und dies heisst nach (35):

$$\sqrt{\varepsilon V(0)} \gg \frac{\mu^2}{M_p} . \quad (44)$$

Identifiziert man  $\mu$  mit der Masse der Höhenstrahlungsmesonen so wird  $\mu^2/M_p \sim 10$  MeV. Aber selbst wenn man statt dessen den grossen Wert von rund 50 MeV für  $\mu^2/M_p$  einsetzt, der aus den Proton-Proton-Streuversuchen abgeleitet wurde<sup>1)</sup>, und für  $V(0)$  den entsprechenden Wert von etwa 100 MeV, erweist sich die adiabatische Näherung noch bis zu  $\varepsilon$ -Werten von etwa 20 MeV hinunter als brauchbar<sup>2)</sup>. Dieser  $\varepsilon$ -Wert entspricht einer Nukleon-Anregungsenergie von  $3 \varepsilon/2 = 30$  MeV; es ist dies der Wert, auf den COESTER (l. c.) durch die Diskussion der schweren Kerne geführt wurde<sup>3)</sup>. Ein höherer  $\varepsilon$ -Wert wäre für die Adiabaten-Näherung günstiger; doch wäre dann die Annahme  $\varepsilon \ll \bar{V}$  nicht mehr zutreffend, so dass der Verlauf der  $W$ -Kurven für mittlere Werte von  $V(r)/\varepsilon$  massgebend würde. Jedenfalls wird man quantitative Auskünfte von der

<sup>1)</sup> Vgl. L. E. HOISINGTON, S. S. SHARE und G. BREIT, Phys. Rev. **56** (1939), S. 884. Die im Text angegebenen Daten beziehen sich auf das Exponentialpotential (const.  $e^{-\mu r}$ ) dieser Autoren; nach der hier diskutierten Theorie wäre für das  $^1S$ -Potential streng genommen anzusetzen (vgl. Teil II dieser Arbeit):

$$W(r) = -V(r) + \sqrt{\varepsilon V(r)} - \frac{9}{16} \varepsilon + \dots \quad (r \ll r_\varepsilon).$$

<sup>2)</sup> Durch die Berücksichtigung der Zahlfaktoren in (42) und (35) wird nämlich die Bedingung (44) beträchtlich abgeschwächt. Selbst für  $\sqrt{\varepsilon V(0)} \approx \mu^2/M_p$  werden die Eigenwerte  $E$  durch die Kopplung der  $W_{(n)}$ -Kurven sicher nicht stärker gestört als durch eine Verschiebung dieser Kurven um einige MeV im Innenbereich.

<sup>3)</sup> COESTER berücksichtigte dabei auch die Bedingungen, die der Mesontheorie durch die Annahme starker Kopplung auferlegt sind. — Man beachte, dass COESTER's „ $\varepsilon$ “ gleich unserem  $\varepsilon/2$  ist.

Adiabaten-Näherung nur bei nicht zu kleinen  $\varepsilon$ -Werten verlangen können. Trotzdem dürften die qualitativen Aussagen über den Verlauf der Potentialkurven auch bei kleineren  $\varepsilon$ -Werten wenigstens einen heuristischen Wert haben.

### B. Variationsmethode.

Da die HARTREE-Näherung eher diskrete Energie-Eigenwerte als Eigenfunktionen zu bestimmen gestattet, wird uns das Variationsverfahren hinsichtlich der wirklichen Deuteronzustände mit  $J = K = 0$  wenig dienlich sein können. Um das Verfahren trotzdem an diesem einfachsten Fall zu erproben, wollen wir für den Moment — entgegen der Wirklichkeit —  $\varepsilon$  und  $V(r)$  so gewählt denken, dass stabile Zustände mit  $J = K = 0$  zustandekommen.

Wird der durch (26) definierte Mittelwert  $\bar{V}$  als gross gegen  $\varepsilon$  vorausgesetzt, so sind die Eigenwerte  $\bar{W}$  des Gleichungssystems (25) aus (35) zu entnehmen:

$$\bar{W}_{(n)} = -\bar{V} + \sqrt{\varepsilon \bar{V}} (2n + 1) - \varepsilon \left( \frac{n(n+1)}{8} + \frac{17}{16} \right) + \dots \quad (45)$$

Setzt man dies in (27) ein, so führt das Extremalproblem für  $\bar{H}$  auf folgende Gleichung für die Funktion  $f(\mathbf{r})$ :

$$\left\{ -\bar{E}_n + \frac{-A}{M_p} - V(r) [1 - \sqrt{\varepsilon/\bar{V}}(n + \frac{1}{2}) + \dots] \right\} f = 0, \quad (46)$$

und der zugehörige Extremalwert von  $\bar{H}$  wird

$$E = \bar{E}_n + \sqrt{\varepsilon \bar{V}}(n + \frac{1}{2}) - \varepsilon \left( \frac{n(n+1)}{8} + \frac{17}{16} \right) + \dots \quad (47)$$

(46) ist, streng genommen, keine lineare Gleichung für  $f$ , da  $\bar{V}$  gemäss (26) von  $f$  abhängt; da aber der Term  $\sim \sqrt{\varepsilon/\bar{V}}$  in (46) (für  $n \sim 1$ ) nur eine kleine Korrektur darstellt, kann man in ihm  $f$  durch einen Näherungswert ersetzen; dann ist (46) eine Schrödingergleichung mit der Potentialfunktion

$$-V(r) [1 - \sqrt{\varepsilon/\bar{V}}(n + \frac{1}{2}) + \dots]. \quad (48)$$

Dies entspricht wieder anziehenden Kräften. Um abzuschätzen, wie die Energien  $E$  von den Oszillationsquantenzahlen  $n$  abhängen, ersetzen wir das Potential (48) in noch etwas vergrößerter Näherung durch

$$-V(r) + \sqrt{\varepsilon \bar{V}}(n + \frac{1}{2}) + \dots \quad (49)$$

Dann wird nach (47)

$$E \cong C + \sqrt{\varepsilon \bar{V}}(2n+1) + \dots, \quad (50)$$

wo  $C$  ein dem Potential  $-V(r)$  entsprechender Energie-Eigenwert ist:

$$\left\{ -C + \frac{-A}{M_p} - V(r) \right\} f = 0. \quad (51)$$

Dieses Ergebnis stimmt im wesentlichen überein mit demjenigen, das man aus der adiabatischen Näherung durch Extrapolation auf kleine  $\varepsilon$ -Werte erhält<sup>1)</sup>.

Die Gleichung (38), in der  $V$  jetzt die Bedeutung  $\bar{V}$  hat, besagt:  $j^2 \sim \sqrt{\bar{V}/\varepsilon} \gg 1$ , d. h. die wesentlichen Komponenten  $a_j$  gehören zu hohen  $j$ -Werten. Wenn überdies der Schwankungsbereich der Variablen  $j$  relativ klein ist, wie es nach (39) für den tiefsten Term  $n=1$  der Fall ist, so ist anzunehmen, dass der dem Variationsverfahren zugrundeliegende Ansatz (23) eine brauchbare Näherung ergibt. Denkt man sich nämlich die exakte Lösung in der Form  $F(j, r) = a_j f(j, r)$  geschrieben, so wird man, falls  $a_j$  nur in einem kleinen  $j$ -Intervall merklich von 0 verschieden ist,  $F(j, r)$  näherungsweise durch  $a_j f(j, r)$  ersetzen können, was eben (23) entspricht. Wenigstens für die Berechnung von Erwartungswerten wie  $\bar{H}$  dürfte dies keinen grossen Fehler mit sich bringen. Freilich tendiert das relative Schwankungsquadrat von  $j$  nach (39) auch im Limes  $\bar{V}/\varepsilon \rightarrow \infty$  nicht gegen Null. Eine Verbesserung des HARTREE-FOCK-Ansatzes (23) im Sinne einer Zuziehung allgemeinerer Funktionentypen  $F(j, r)$  soll hier nicht versucht werden.

\*\*\*

In der Fortsetzung dieser Arbeit sollen die Zustände mit  $J + K \neq 0$  mit denselben beiden Näherungsmethoden diskutiert werden. Es wird sich zeigen, dass die zu verschiedenen  $J$ - und  $K$ -Werten gehörigen tiefsten Eigenwerte bzw. Potentialkurven in ihrer relativen Lage recht genau bestimmt werden können.

Basel, Physikal. Anstalt der Universität.

Zürich, Physikal. Institut der Universität.

<sup>1)</sup> In der Gl. (19) (mit  $B_{mm} \rightarrow 0$ ) kann dann nämlich im massgebenden  $r$ -Bereich  $W_m$  gemäss (35) ausgedrückt werden; betrachtet man nun den Term  $\sqrt{\varepsilon \bar{V}(r)}(2n+1)$  als eine kleine Störung — wie es dem Übergang von (48) zu (49) entspricht —, so folgt für die Eigenwerte wieder die Formel (50), mit dem einzigen Unterschied, dass  $\sqrt{\bar{V}}$  durch  $\sqrt{V}$  ersetzt ist.