Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 17 (1944)
Heft: I

Artikel: Über die Stabilität schwerer Kerne in der Mesontheorie
Autor: Coester, Fritz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111494

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Stabilität schwerer Kerne in der Mesontheorie

von **Fritz Coester.**

(25. XII. 43.)

Die Mesontheorie sagt bei Annahme starker Kopplung Protonisobaren höheren Spins und höherer Ladung voraus, die nach R. SERBER den Sättigungscharakter der Kernkräfte gefährden können. Es wird mit Hilfe einer Thomas-Fermi-Näherung gezeigt, dass für alle Kopplungsansätze, die ein positives Wechselwirkungspotential liefern, der Sättigungscharakter der Kernkräfte erhalten bleibt. (§ 4) Eine Diskussion der Stabilitätsverhältnisse liefert stark einschränkende Kriterien für die Wahl des Kopplungsparameters und der Isobarenanregungsenergie. (§ 5) Bei Berücksichtigung der Coulombenergie lässt sich die Kernladungszahl in Übereinstimmung mit der Erfahrung berechnen. (§ 6)

§ 1. Einleitung.

Die bisher meist verwendeten Methoden zur Berechnung der statischen Kernkräfte in der Mesontheorie enthalten Entwicklungen nach steigenden Potenzen des Kopplungsparameters. Der Vergleich mit der Erfahrung ergibt jedoch so grosse Werte für den Kopplungsparameter, dass diese Entwicklungen nicht oder nur sehr schlecht konvergieren. Deshalb wurde von WENTZEL[1]), zunächst am Beispiel des geladenen skalaren Feldes, eine Näherungsmethode für starke Kopplung ausgearbeitet, die einer Entwicklung nach fallenden Potenzen des Kopplungsparameters entspricht. Die Methode wurde dann in etwas vereinfachter Form von OPPENHEIMER und SCHWINGER[2]), PAULI, SERBER und DANCOFF[3]) und WENTZEL[4]) auf andere Feldtypen angewendet.

Die für das Verständnis des Folgenden wesentlichen Grundgedanken und Ergebnisse dieser Methode seien hier am Beispiel des neutralen Pseudoskalarfeldes kurz erläutert. Die Hamiltonfunktion

---

[1]) G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **13**, S. 269 (1940) u. **14**, S. 633 (1941).

[2]) OPPENHEIMER und SCHWINGER, Phys. Rev. **60**, S. 150 (1941).

[3]) DANCOFF und PAULI, DANCOFF und SERBER, Bull. Amer. Phys. Soc. **16**, Nr. 7, Noten 7 und 43. Dies sind nur kurze Mitteilungen. Amerikanische Veröffentlichungen seit Mai 1942 sind gegenwärtig in der Schweiz nicht erhältlich.

[4]) G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **16**, S. 222 (1943) und **16**, S. 551 (1943).

des mit N ruhenden Nucleonen gekoppelten neutralen Pseudoskalarfeldes ist

$$H = H^0 + H'$$

$$H^0 = \tfrac{1}{2} \int dx \, (\pi^2 + |\operatorname{grad} \psi|^2 + \mu^2 \psi^2)$$

$$H' = \sum_{\nu=0}^{N-1} H'^{(\nu)} = -\frac{g}{\mu} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(\nu)} \int dx \, \delta_a (x - x^{(\nu)}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \tag{1}$$

Mit den Bezeichnungen: $\sigma_i^{(\nu)}$ = Paulische Spinmatrizen, g = dimensionsloser Kopplungsparameter[5]), μ = Mesonmasse, $\hbar = 1$, $c = 1$, $\delta_a(x - x^{(\nu)})$ = zentralsymmetrische Formfunktion des $r$ten Nucleons. $\int dx \, \delta_a(x) = 1$. Der Protonradius a wird nach Oppenheimer und Schwinger[6]) definiert durch die Beziehung

$$\frac{1}{a} = \int dx \int dx' \frac{\delta_a(x) \, \delta_a(x')}{|x - x'|} \tag{2}$$

Damit eine Feldtheorie der Kernkräfte überhaupt einen Sinn hat, muss man fordern, dass der Protonradius klein gegen die Reichweite der Kernkräfte ist, d. h. $a\mu \ll 1$. Als Bedingung für die Brauchbarkeit der Methode ergibt sich $g \gg a\mu$.

Man führt als neue Feldvariablen die Entwicklungskoeffizienten p_s, q_s der Felder $\pi(x)$, $\psi(x)$ nach einem Orthogonalsystem $U_s(x)$ ein, von dem nur die ersten $3N$-Funktionen explizit angegeben werden müssen.

$$U_{3\nu+i} = \frac{g}{\mu\gamma} \frac{\partial \, \delta_a (x - x^{(\nu)})}{\partial x_i} \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, 3) \\ (\nu = 0, 1 \ldots N-1) \end{matrix} \tag{3}$$

Diese Funktionen sind nur orthogonal, wenn $|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}| \gg a$ ist. Das muss also immer vorausgesetzt werden. γ bestimmt sich aus der Normierungsbedingung der $U_{3\nu+i}$. Es ist $\gamma \approx \frac{g}{\mu} a^{-\frac{5}{2}}$. Damit wird

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_s p_s^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{rs} c_{rs} q_r q_s - \gamma \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(\nu)} q_{3\nu+i} \tag{4}$$

wo

$$c_{rs} = \int dx \, U_r(x) \, (\mu^2 - \Delta) \, U_s(x) \tag{5}$$

Bei starker Kopplung, wenn H' nicht als kleine Störung betrachtet werden kann, transformiert man H' als Matrix bezüglich

---

[5]) Gegenüber dem Zitat Fussnote 4 ist die Bezeichnungsänderung $g \to g/\mu$ vorgenommen worden.

[6]) Oppenheimer und Schwinger, l. c.

der Spinvariablen auf Diagonalform. Das bedeutet eine Drehung des Koordinatensystems im Spinraum jedes Nucleons, so dass die Vektoren $\vec{q}^{(\nu)} = \{q_{3\nu+1}, q_{3\nu+2}, q_{3\nu+3}\}$ in die 3-Achsen fallen. (σ_3 diagonal.) Die unitäre Matrix $S^{(\nu)}$, die $H'^{(\nu)}$ auf Diagonalform transformiert, hängt dementsprechend von den Polarwinkeln $\Theta^{(\nu)}$, $\Phi^{(\nu)}$ des Vektors $\vec{q}^{(\nu)}$ ab. H' wird durch $S = \prod_\nu S^{(\nu)}$ auf Diagonalform transformiert. Der tiefste Eigenwert von H' ist $-\gamma \sum_\nu |\vec{q}^{(\nu)}|$. Die Ausserdiagonalelemente von $S^* H^0 S$ (in H^0 kommutieren $p_\Theta^{(\nu)}$ und $p_\Phi^{(\nu)}$ nicht mit $S^{(\nu)}$) sind bei starker Kopplung vernachlässigbar klein, so dass die zu tiefen Eigenwerten der transformierten Hamiltonfunktion $S^* H S$ gehörigen Eigenfunktionen praktisch einkomponentig sind. Die ursprünglichen Freiheitsgrade der „nackten" Nucleonen verschwinden also; dafür treten die $\Theta^{(\nu)}$, $\Phi^{(\nu)}$ als neue Freiheitsgrade der Nucleonen auf. Denn ist $F'(q)$ eine einkomponentige Eigenfunktion von $S^* H S$ und sind $\chi_1^{(\nu)}$ und $\chi_2^{(\nu)}$ die beiden unabhängigen zweikomponentigen Spineigenfunktionen des νten nackten Nucleons, so ist die zugehörige Eigenfunktion von H

$$F = \prod_\nu \left(\cos \frac{\Theta^{(\nu)}}{2} e^{\frac{i\Phi^{(\nu)}}{2}} \chi_1^{(\nu)} - \sin \frac{\Theta^{(\nu)}}{2} e^{-i\frac{\Phi^{(\nu)}}{2}} \chi_2^{(\nu)} \right) F' \tag{6}$$

Die stationären Zustände sind demnach von $\Theta^{(\nu)}$, $\Phi^{(\nu)}$ abhängige Superpositionen der Spineigenzustände der nackten Nucleonen. Daraus ist ersichtlich, dass die $\Theta^{(\nu)}$, $\Phi^{(\nu)}$ als Freiheitsgrade der Nucleonen interpretiert werden müssen. Dass gewisse Variable des Mesonfeldes als Freiheitsgrade der Nucleonen interpretiert werden müssen, bedeutet offenbar, dass Mesonen an die Nucleonen gebunden sind. $p_\Phi^{(\nu)}$ erweist sich als der Beitrag dieser gebundenen Mesonen zur 3-Komponente des Nucleonspins. Aus der Bedingung, dass F eine stetige Funktion auf der Kugel $|\vec{q}^{(\nu)}| = \text{const}$ sein muss, folgt, dass $p_\Phi^{(\nu)}$ in Anwendung auf F ganzzahlig gequantelt ist, während es in Anwendung auf F', wegen dem Auftreten des Winkels $\Phi/2$ in S, halbzahlig gequantelt ist. Die Spinkomponente des νten Nucleons in der 3-Richtung ist jetzt $S^* (\sigma_3/2 + p_\Phi^{(\nu)}) S = p_\Phi^{(\nu)}$.

Um die Energie des Nucleonensystems zu erhalten, hat man $K \equiv H^0 - \gamma \sum_\nu |\vec{q}^{(\nu)}|$ durch geeignete kanonische Transformationen in einen nur von den $p_\Theta^{(\nu)}$, $p_\Phi^{(\nu)}$, $\Theta^{(\nu)}$, $\Phi^{(\nu)}$ und einen von den Feldvariablen der freien Mesonen abhängigen Anteil (Energie der freien Mesonen + Streuterm) zu separieren. Danach muss mit S transformiert, und das für die Bestimmung von F' massgebende Diagonalelement genommen werden. Die potentielle Energie der Kernkräfte ist dann der abstandsabhängige Anteil der Selbstenergie des

Nucleonensystems, d. h. des Minimalwertes von K, den man erhält, wenn man $q_{3\nu+i} = |\vec{q}^{(\nu)}|\, \mathfrak{e}_i^{(\nu)}$ einsetzt und die $\mathfrak{e}_i^{(\nu)}$ konstant hält. Unter der Voraussetzung $|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}| \gg a$ hat sie die Form $\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu}' V_{\mu\nu}$, wo

$$V_{\mu\nu} = -\left(\frac{g}{\mu}\right)^2 (\mathfrak{e}^{(\nu)} \cdot \mathrm{grad}^{(\nu)})\, (\mathfrak{e}^{(\mu)} \cdot \mathrm{grad}^{(\mu)})\, \frac{e^{-\mu\,|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|}}{4\pi\,|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|} \tag{7}$$

Terme niederer Ordnung in g werden vernachlässigt. Diese Form des Wechselwirkungspotentials ist aus Symmetrie- und Invarianzgründen plausibel, wenn man beachtet, dass die zu c_{rs} inverse Matrix

$$(c^{-1})_{rs} = \int dx \int dx'\, U_r(x)\, U_s(x')\, \frac{e^{-\mu\,|x-x'|}}{4\pi\,|x-x'|} \quad \text{ist.}$$

Aus $\frac{1}{2} \sum_s p_s^2$ erhält man einen von $p_\Theta^{(\nu)}$, $p_\Phi^{(\nu)}$ abhängigen Beitrag zur Nucleonenenergie. Sie setzt sich additiv aus den Beiträgen der einzelnen Nucleonen zusammen[7]). Der Beitrag eines Nucleons ist vor der S-Transformation von der Form der kinetischen Energie eines sphärischen Pendels; nachher ist

$$H_I^{(\nu)} = \frac{6\pi a \mu^2}{g^2} \left\{ \frac{1}{\sin\Theta^{(\nu)}}\, p_\Theta^{(\nu)} \sin\Theta^{(\nu)} + \frac{1}{\sin^2\Theta^{(\nu)}} \left(p_\Phi^{(\nu)\,2} + \cos\Theta^{(\nu)}\, p_\Phi^{(\nu)} + \tfrac{1}{4}\right) \right\} \tag{8}$$

Die Terme

$$\frac{6\pi a \mu^2}{g^2} \left(\frac{\cos\Theta^{(\nu)}}{\sin^2\Theta^{(\nu)}}\, p_\Phi^{(\nu)} + \frac{1}{4\sin^2\Theta^{(\nu)}} \right)$$

kommen durch die S-Transformation hinzu. Die Eigenwerte von $H_I^{(\nu)}$ sind

$$E_{I,j}^{(\nu)} = \frac{6\pi a \mu^2}{g^2} \cdot j^{(\nu)} (j^{(\nu)} + 1) \qquad (j^{(\nu)} = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \ldots) \tag{9}$$

Die Eigenwerte $m^{(\nu)}$ von $p_\Phi^{(\nu)}$ sind für festes $j^{(\nu)}$ auf den Bereich $|m^{(\nu)}| \leqslant j^{(\nu)}$ beschränkt. j und m sind Spinquantenzahlen (m = Spinkomponente, j = Quantenzahl des Gesamtspins). Für $j = \frac{1}{2}$ kann m nur $\pm \frac{1}{2}$ sein. Die Zustände des untersten Isobarenniveaus entsprechen also genau den beiden Spinzuständen eines nackten Nucleons.

Bei den anderen Feldtypen liegen die Verhältnisse ähnlich. Man entwickelt nach einem Orthogonalsystem, so dass in H' nur gewisse q auftreten. Diese q bestimmen gewisse Winkel, die die Rolle von Drehwinkeln bei der Transformation von H' spielen und als

---

[7]) Abstandsabhängige Terme werden hier vernachlässigt: $|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}| \to \infty$.

Freiheitsgrade der Nucleonen zu interpretieren sind. In den symmetrischen Theorien hat man entweder drei „Eulersche Winkel", wobei den beiden zyklischen Winkeln Spin und Ladung zugeordnet sind, oder zwei Paar Polarwinkel, deren eines zum Spin, das andere zur Ladung gehört. Die Isobarenenergie hat entsprechend die Form der mit S transformierten kinetischen Energie eines Kugelkreisels oder zweier unabhängiger sphärischer Pendel. Die zu den zyklischen Winkeln konjugierten Impulse sind halbzahlig gequantelt und haben die Bedeutung einer Spinkomponente und der Ladung des Nucleons. Die Zustände des tiefsten Isobarenniveaus entsprechen genau den Spin- und Ladungszuständen eines nackten Nucleons. Die in $V_{\mu\nu}$ auftretenden winkelabhängigen Funktionen verschwinden im Integral über alle Winkel. Das muss so sein, da $H'^{(\nu)}$ etwa von der Form $\sum_{i\varrho} \sigma_i^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} T_{i\varrho}^{(\nu)}$ ist und $T_{i\varrho}^{(\nu)}$ im Mittel über alle möglichen Orientierungen der Koordinatensysteme im Spin- und isotopen Spinraum verschwindet.

§ 2. Ansätze.

Die im folgenden als typische Beispiele zu betrachtenden Kopplungstypen seien durch den Wechselwirkungsterm der Hamiltonfunktion charakterisiert.

a) Neutrale Pseudoskalartheorie.

$$H' = -\frac{g}{\mu} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(\nu)} \int dx\, \delta_a (x - x^{(\nu)}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \tag{10a}$$

b) Symmetrische Pseudoskalartheorie.

$$H' = -\frac{g}{\mu} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{3} \sum_{\varrho=1}^{3} \sigma_i^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \int dx\, \delta_a (x - x^{(\nu)}) \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial x_i} \tag{10b}$$

($\tau_\varrho^{(\nu)}$ = isotope Spinmatrizen)

c) Symmetrische Vektortheorie.

$$H' = -\frac{g}{\sqrt{2}\,\mu} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{3} \sum_{\varrho=1}^{3} \sigma_i^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \int dx\, \delta_a (x - x^{(\nu)}) \operatorname{rot}_i \vec{\psi}_\varrho$$
$$- \frac{f}{\mu^2} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\varrho=1}^{3} \tau_\varrho^{(\nu)} \int dx\, \delta_a (x - x^{(\nu)}) \operatorname{div} \vec{\pi}_\varrho \tag{10c}$$

f ist ein zweiter dimensionsloser Kopplungsparameter.

d) Mischung der Feldtypen (b) und (c) mit $f = 0$ [8]).

$$H' = -\sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{3} \sum_{\varrho=1}^{3} \sigma_i^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \int dx\, \delta_a (x - x^{(\nu)}) \left(\frac{g_{PS}}{\mu_{PS}} \frac{\partial \psi_\varrho^{PS}}{\partial x_i} + \frac{g_V}{\mu_V} \operatorname{rot}_i \vec{\psi}_\varrho^V \right) \tag{10d}$$

Für diese Kopplungstypen liefert die Methode für starke Kopplung folgende Isobaren- und Wechselwirkungsenergien.

a) Neutrale Pseudoskalartheorie.

$$H_I^{(\nu)} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sin \Theta^{(\nu)}} p_\Theta^{(\nu)} \sin \Theta^{(\nu)} p_\Theta^{(\nu)} + \frac{1}{\sin^2 \Theta^{(\nu)}} \left(p_\Phi^{(\nu)2} + \cos \Theta^{(\nu)} p_\Phi^{(\nu)} + \tfrac{1}{4} \right) \right\} \tag{11a}$$

$$E_{Ij}^{(\nu)} = \varepsilon \cdot j^{(\nu)} (j^{(\nu)} + 1) \qquad \varepsilon = \frac{6 \pi a \mu^2}{g^2} \tag{12a}$$

$j^{(\nu)}$ durchläuft alle positiven halbzahligen Werte. Von der anderen Spinquantenzahl $m^{(\nu)}$ ($| m^{(\nu)} | \leqslant j^{(\nu)}$) hängen die Energieeigenwerte nicht ab, so dass ein Isobarenniveau $2j + 1$-fach entartet ist.

$$V_{\mu\nu} = \left(\frac{g}{\mu} \right)^2 \sum_{ij} \mathfrak{e}_i (\Theta^{(\nu)}, \Phi^{(\nu)})\, \mathfrak{e}_j (\Theta^{(\mu)}, \Phi^{(\mu)}) \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \frac{e^{-\mu |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4 \pi |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \tag{13a}$$

b) Symmetrische Pseudoskalartheorie.

$$H_I^{(\nu)} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sin \Theta^{(\nu)}} p_\Theta^{(\nu)} \sin \Theta^{(\nu)} p_\Theta^{(\nu)} + \frac{1}{\sin^2 \Theta^{(\nu)}} \left(p_\Phi^{(\nu)\,2} + 2 \cos \Theta^{(\nu)} p_\Phi^{(\nu)} p_\Psi^{(\nu)} + p_\Psi^{(\nu)\,2} \right) \right\} \tag{11b}$$

$p_\Phi^{(\nu)}$ (Eigenwert $m^{(\nu)}$) ist eine Spinkomponente, $p_\Psi^{(\nu)} + \frac{1}{2}$ (Eigenwert $n^{(\nu)} + \frac{1}{2}$) die Ladung des νten Nucleons.

$$E_{Ij}^{(\nu)} = \varepsilon \cdot j^{(\nu)} (j^{(\nu)} + 1) \qquad \varepsilon = \frac{3 \pi a \mu^2}{g^2} \tag{12b}$$

$j^{(\nu)}$ und $m^{(\nu)}$ haben die gleiche Bedeutung wie im Fall (a). Die Ladungsquantenzahl $n^{(\nu)}$ ist ebenfalls halbzahlig. Es muss auch $| n^{(\nu)} | \leqslant j^{(\nu)}$ sein, so dass ein Isobarenniveau hier $(2j + 1)^2$-fach entartet ist.

$$V_{\mu\nu} = \left(\frac{g}{\mu} \right)^2 \sum_{ij} \sum_{\varrho} s_{i\varrho} (\Theta^{(\nu)}, \Phi^{(\nu)}, \Psi^{(\nu)})\, s_{j\varrho} (\Theta^{(\mu)}, \Phi^{(\mu)}, \Psi^{(\mu)}) \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \frac{e^{-\mu |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4 \pi |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \tag{13b}$$

---

[8]) Eine solche Mischung wurde zuerst von Møller und Rosenfeld (Kgl. Danske Vidensk. S., Math.-fys. Medd. XVII, 8.) mit $\mu_{PS} = \mu_V$ und dann von Schwinger (Bull. Amer. Phys. Soc. **16**, Nr. 7, Note 8) mit $\mu_{PS} < \mu_V$ vorgeschlagen, um die wie $1/r^3$ singulären Tensorkräfte zu eliminieren.

Dabei sind die $s_{i\varrho}$ die 9 Koeffizienten einer orthogonalen Transformation in Abhängigkeit von drei Eulerschen Winkeln[9]).

c) Symmetrische Vektortheorie.

I. $\frac{3}{2}(f/g)^2 < 1$

(11cI) = (11b), (12cI) = (12b)

$$V_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\mu}\right)^2 \sum_{\varrho} \sum_{ij} s_{j\varrho}^{(\nu)} s_{i\varrho}^{(\mu)} \left(\delta_{ij} \Delta^{(\nu)} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}}\right) \frac{e^{-\mu|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|}}{4\pi|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|} \quad \text{(13c I)}$$

Die Bedeutung der Winkel und der $s_{i\varrho}$ ist gleich wie im Fall (b).

II. $\frac{3}{2}(f/g)^2 > 1$

$$\begin{aligned} H_I^{(\nu)} = \varepsilon_l &\left\{\frac{1}{\sin\Theta_l^{(\nu)}} p_{\Theta_l}^{(\nu)} \sin\Theta_l^{(\nu)} p_{\Theta_l}^{(\nu)} + \frac{1}{\sin^2\Theta_l^{(\nu)}} \left(p_{\Phi_l}^{(\nu)\,2} + \cos\Theta_l^{(\nu)} p_{\Phi_l}^{(\nu)} + \tfrac{1}{4}\right)\right\} \\ + \varepsilon_s &\left\{\frac{1}{\sin\Theta_s^{(\nu)}} p_{\Theta_s}^{(\nu)} \sin\Theta_s^{(\nu)} p_{\Theta_s}^{(\nu)} + \frac{1}{\sin^2\Theta_s^{(\nu)}} \left(p_{\Phi_s}^{(\nu)\,2} + \cos\Theta_s^{(\nu)} p_{\Phi_s}^{(\nu)} + \tfrac{1}{4}\right)\right\} \end{aligned} \quad \text{(11c II)}$$

$p_{\Phi_s}^{(\nu)}$ (Eigenwert $m^{(\nu)}$) ist eine Spinkomponente, $p_{\Phi_e}^{(\nu)} + \frac{1}{2}$ (Eigenwert $n^{(\nu)} + \frac{1}{2}$) ist die Ladung des νten Nucleons.

$$E_{I,kj}^{(\nu)} = \varepsilon_l \cdot k^{(\nu)}(k^{(\nu)}+1) + \varepsilon_s \cdot j^{(\nu)}(j^{(\nu)}+1) \qquad \varepsilon_l = \frac{6\pi a \mu^2}{g^2 + 3f^2}, \quad \varepsilon_s = \frac{6\pi a \mu^2}{g^2} \quad \text{(12c II)}$$

j und m haben die gleiche Bedeutung wie oben; $|m| \leqslant j$. k durchläuft wie j alle positiven halbzahligen Werte und es ist $|n| \leqslant k$. Der Entartungsgrad eines Isobarenniveaus ist demnach $(2k+1)(2j+1)$.

$$V_{\mu\nu} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\mu}\right)^2 \left[(\mathfrak{e}_s^{(\mu)} \cdot \mathfrak{e}_s^{(\nu)}) \Delta^{(\nu)} - (\mathfrak{e}_s^{(\mu)} \cdot \mathrm{grad}^{(\nu)})(\mathfrak{e}_s^{(\nu)} \cdot \mathrm{grad}^{(\nu)})\right] + f^2\right\}$$

$$(\mathfrak{e}_l^{(\mu)} \cdot \mathfrak{e}_l^{(\nu)}) \frac{e^{-\mu|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|}}{4\pi|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|} \text{ [10])} \quad \text{(13c II)}$$

---

[9]) $s_{11} = \cos\Theta \cos\Phi \cos\Psi + \sin\Phi \sin\Psi, \ldots, s_{33} = \cos\Theta$.

[10]) Die Indizes l und s sollen auf Ladung und Spin hinweisen; sie bedeuten hier natürlich keine Komponentenbildung. Z. B. $\mathfrak{e}_{l3}^{(\nu)} = \cos\Theta_l^{(\nu)}$.

d) Mischung der Feldtypen (b) und (c) mit $f = 0$.

(11d) = (11b), (12d) = (12d), wobei $g \equiv \sqrt{g_{PS}^2 + 2\, g_V^2}$

$$V_{\mu\nu} = \sum_{ij} \sum_{\varrho} s_{i\varrho}^{(\nu)} s_{j\varrho}^{(\mu)} \left\{ \left(\frac{g_{PS}}{\mu_{PS}} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \frac{e^{-\mu_{PS} |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{g_V}{\mu_V} \right)^2 \left(\delta_{ij} \Delta^{(\nu)} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \right) \frac{e^{-\mu_V |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \right. \tag{13d}$$

Diese Formeln sind unter Voraussetzung ruhender Nucleonen abgeleitet. Im folgenden sollen sie auch auf Kerne, in denen die Nucleonen natürlich nicht ruhen, angewendet werden, in der Meinung, dass die Geschwindigkeiten von unrelativistischer Grössenordnung sind.

§ 3. Die statistische Näherung.

Wir diskutieren die Energie schwerer Kerne in der statistischen Näherung. Steht q für sämtliche Koordinaten eines Nucleons, und ist $V(q', q'')$ die Wechselwirkungsenergie zweier Nucleonen mit den Koordinaten q' und q'', so ist die potentielle Energie nach Hartree und Fock

$$E_{\text{Pot}} = \tfrac{1}{2} \int dq' \int dq'' \left[\varrho(q')\, \varrho(q'') - \varrho(q', q'')\, \varrho(q'', q') \right] V(q', q'') \tag{14}$$

wo

$$\varrho(q', q'') = \sum_{\nu=0}^{N-1} (q' \mid \nu)\, (\nu \mid q''), \quad \varrho(q) = \varrho(q, q) \tag{15}$$

und $(q \mid \nu)$ die Eigenfunktion des νten Nucleons ist. Aus § 2 entnehmen wir die Bedeutung von q:

$$q = \{q^1 = x_1, q^2 = x_2, q^3 = x_3, q^4 = \cos\Theta, q^5 = \Phi\} \text{ [11]} \tag{16a}$$

$$q = \{q^1 = x_1, q^2 = x_2, q^3 = x_3, q^4 = \cos\Theta, q^5 = \Phi, q^6 = \Psi\}$$

(16b) = (16cI) = (16d)

$$q = \{q^1 = x_1, q^2 = x_2, q^3 = x_3, q^4 = \cos\Theta, q^5 = \Phi_l, q^6 = \cos\Theta_s, q^7 = \Phi_s\}$$

$$dq \equiv \prod_{i=1}^{n} dq^i \tag{16c II}$$

[11]) In diesem Fall hängen die Dichten streng genommen noch von einer zweiwertigen Ladungsvariablen ab, während $\int dq' \int dq''$ die Summation über diese einschliesst. Unter der Annahme, dass jeder Zustand durch ein Proton und ein Neutron besetzt ist (Vernachlässigung der Coulombenergie), kann man diese Ladungsvariable jedoch einfach weglassen.

Aus (14) ist ersichtlich, dass nur das Richtungsmittel von $V(q', q'')$ eine Rolle spielt, so dass in (13) überall folgende Vereinfachung angebracht werden kann:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^{(\nu)}\,\partial x_j^{(\nu)}}\,\frac{e^{-\mu|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|}}{4\pi|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|} \to \tfrac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\Delta^{(\nu)}\,\frac{e^{-\mu|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|}}{4\pi|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|}$$

$$\to \tfrac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\mu^2\,\frac{e^{-\mu|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|}}{4\pi|x^{(\mu)}-x^{(\nu)}|}\ ^{12)} \tag{17}$$

Damit wird $V(q', q'')$ von der Form

$$V(q', q'') = J\,(|\,x' - x''\,|)\sum_k s_k(\omega')\,s_k(\omega'') \tag{18}$$

(ω steht für die Gesamtheit der Winkelkoordinaten: $\omega = \{q^4, \ldots, q^n\}$), wobei

$$J\,(|x' - x''|) = \frac{e^{-\mu|x'-x''|}}{4\pi\,|\,x' - x''\,|} \qquad \text{(a), (b), (c)} \tag{19}$$

$$J\,(|x' - x''|) = \left(\frac{g_{PS}}{g}\right)\frac{e^{-\mu_{PS}|x'-x''|}}{4\pi|x'-x''|} + 2\left(\frac{g_V}{g}\right)\frac{e^{-\mu_V|x'-x''|}}{4\pi\,|x'-x''|} \tag{19d}$$

und

$$s_k(\omega) = \frac{g}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{e}_k(\omega) \tag{20a}$$

$$s_k(\omega) = \frac{g}{\sqrt{3}}\,s_{i\varrho}(\omega) \qquad (20b) = (20c\,\mathrm{I}) = (20d)$$

Die Paare $i\varrho$ sind durch einen einfachen Index k durchnumeriert zu denken.

$$s_k(\omega) = \frac{g}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{e}_{si}(\omega)\,\mathfrak{e}_{l\varrho}(\omega) \quad \text{für } k = 1, 2 \ldots 9 \tag{20c II}$$

$$s_{10}(\omega) = f\,\mathfrak{e}_{l1}(\omega), \quad s_{11}(\omega) = f\,\mathfrak{e}_{l2}(\omega), \quad s_{12} = f\,\mathfrak{e}_{l3}(\omega)$$

Damit ist immer

$$\int d\omega\, s_k(\omega) = 0 \quad \left(d\omega \equiv \prod_{i=4}^{n} dq^i\right) \tag{21}$$

und

$$\sum_k s_k^2 = \begin{cases} \dfrac{g^2}{3} & \text{(a)} \\ g^2 & \text{(b), (c I) und (d)} \\ \dfrac{g^2}{3} + f^2 & \text{(c II)} \end{cases} \tag{22}$$

---

[12]) Hier kommt streng genommen noch $^1/_3\,\delta_{ij}\,\delta(x^{(\mu)} - x^{(\nu)})$ hinzu. Solange $|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}| \gg a$ ist, für welchen Fall $V_{\mu\nu}$ nur abgeleitet ist, verschwindet dies. In der statistischen Näherung wird jedoch über alle Abstände integriert. Man hat daher $V_{\mu\nu}$ für kleine Abstände zu extrapolieren, was in der Weise geschieht, dass man diesen Nahewirkungsterm weglässt. Man kann ihn immer durch einen ad hoc gemachten Zusatz in H' kompensiert denken.

Die näherungsweise Berechnung der Dichte gelingt einfach in zwei Grenzfällen:

1) Grenzfall grosser Kernradien:

Ist der Kernradius so gross, dass die maximale kinetische Energie eines Nucleons $P^2/2M$ klein gegen die Isobarenanregungsenergie ($\sim \varepsilon$) ist, so werden sich praktisch alle Nucleonen auf dem untersten Isobarenniveau befinden. Man kann dann $(q \mid \nu) = (x \mid \nu)(\omega \mid \nu)$ setzen, wo $(\omega \mid \nu)$ eine zum tiefsten Eigenwert gehörige Eigenfunktion von $H_{\mathrm{I}}^{(\nu)}$ ist. Unter der Annahme, dass in jedem Translationszustand alle vier Spin-Ladungszustände des tiefsten Isobarenniveaus realisiert sind (Vernachlässigung der Coulombenergie) wird dann die Dichte

$$\varrho(q', q'') = \varrho(x', x'')\, \tfrac{1}{4} \sum_{\varkappa=1}^{2} \sum_{\lambda=1}^{2} (\omega' \mid \lambda\varkappa)(\varkappa\lambda \mid \omega''), \quad \varrho(q) = \varrho(q, q) \tag{23}$$

wenn $(\omega \mid \lambda\varkappa)$ die vier unabhängigen Eigenfunktionen des untersten Isobarenniveaus sind. $\varkappa$ numeriert die Spinzustände, λ die Ladungszustände. Aus Symmetriegründen ist $\sum_{\varkappa\lambda} (\omega \mid \lambda\varkappa)(\varkappa\lambda \mid \omega)$ von ω unabhängig, so dass wegen (18) und (21) der erste Term in (14) verschwindet. Durch Einsetzen von (23) in (14) wird

$$E_{\mathrm{Pot}} = -\tfrac{1}{2} \int dx' \int dx''\, \varrho(x', x'')\, J(|x' - x''|)$$
$$\tfrac{1}{16} \sum_{k} \sum_{\varkappa'\lambda'} \sum_{\varkappa''\lambda''} (\varkappa'\lambda' \mid s_k \mid \lambda''\varkappa'')(\varkappa''\lambda'' \mid s_k \mid \lambda'\varkappa') \tag{24}$$

wenn $(\varkappa'\lambda' \mid s_k \mid \lambda''\varkappa'') = \int d\omega\, (\varkappa'\lambda' \mid \omega)\, s_k(\omega)\, (\omega \mid \lambda''\varkappa'')$ ist.

Diese Matrizen bestimmt man nach (20) aus den Matrizen der $\mathfrak{e}_i$ bzw. $s_{i\varrho}$, für die man findet

$$\begin{aligned}
(\varkappa'\lambda' \mid \mathfrak{e}_i \mid \lambda''\varkappa'') &= \tfrac{1}{3}\, \delta_{\lambda'\lambda''}\, (\varkappa' \mid \sigma_i \mid \varkappa'') \\
(\varkappa'\lambda' \mid s_{i\varrho} \mid \lambda''\varkappa'') &= -\tfrac{1}{3}\, (\varkappa' \mid \sigma_i \mid \varkappa'')(\lambda' \mid \tau_\varrho \mid \lambda'') \\
(\varkappa'\lambda' \mid \mathfrak{e}_{si}\, \mathfrak{e}_{e\varrho} \mid \lambda''\varkappa'') &= \tfrac{1}{9}\, (\varkappa' \mid \sigma_i \mid \varkappa'')(\lambda' \mid \tau_\varrho \mid \lambda'') \\
(\varkappa'\lambda' \mid \mathfrak{e}_{e\varrho} \mid \lambda''\varkappa'') &= \tfrac{1}{3}\, \delta_{\varkappa'\varkappa''}\, (\lambda' \mid \tau_\varrho \mid \lambda'')
\end{aligned} \tag{25}$$

Nach (20) und (25) ist somit

$$\tfrac{1}{16} \sum_{k} \sum_{\varkappa'\lambda'} \sum_{\varkappa''\lambda''} (\varkappa'\lambda' \mid s_k \mid \lambda''\varkappa'')(\varkappa''\lambda'' \mid s_k \mid \lambda'\varkappa') = \begin{cases} \tfrac{1}{36}\, g^2 & \text{(a)} \\ \tfrac{1}{12}\, g^2 & \text{(b), (cI) und (d)} \\ \tfrac{1}{108}\, g^2 + \tfrac{1}{12}\, f^2 & \text{(cII)}\ ^{13)} \end{cases} \tag{26}$$

[13]) Hier ist die Bedingung für den Grenzfall grosser Kernradien

$$\frac{P^2}{2M} \ll \varepsilon_l < \varepsilon_s .$$

2) Grenzfall kleiner Kernradien $P^2/2\,M \gg \varepsilon$ (bzw. $P^2/2\,M \gg \varepsilon_s > \varepsilon_e$).

Ist umgekehrt der Kernradius so klein, dass die maximale kinetische Energie eines Nucleons gross gegen die Isobarenanregungsenergie ist, so dass viele höhere Isobaren im Kern angeregt sind, so kann man die Dichten, wie WENTZEL[14]) gezeigt hat, in einfacher Weise mit der Thomas-Fermi-Methode berechnen, wobei die q aus (16) zusammen mit den zu ihnen konjugierten Impulsen den Phasenraum bilden. Die Metrik des q-Raumes ist natürlich nicht euklidisch; sie ist im wesentlichen dadurch bestimmt, dass die Winkelvariable Koordinaten auf einer Kugelfläche (a), auf einer dreidimensionalen Hypersphäre[15]) ((b), (cI) und (d)) oder auf zwei Kugelflächen (cII) sind. Über den Radius dieser Kugeln kann man noch willkürlich verfügen. Es ist bequem, den Radius der zweidimensionalen Kugelflächen gleich $\frac{1}{\sqrt{2\,M\,\varepsilon}}$ und den der dreidimensionalen Hypersphären gleich $\frac{1}{2\sqrt{2\,M\,\varepsilon}}$ zu setzen. Wir erhalten dann folgende Metriken:

$$g_{ik} = \delta_{ik} \text{ wenn } i \text{ oder } k \leqslant 3 \text{ ist.}$$

Für i und $k > 3$ wird

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\,M\,\varepsilon\,(1-(q^4)^2)} & 0 \\ 0 & \frac{1-(q^4)^2}{2\,M\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (g^{ik}) = \begin{pmatrix} 2\,M\varepsilon\,(1-(q^4)^2) & 0 \\ 0 & \frac{2\,M\,\varepsilon}{1-(q^4)^2} \end{pmatrix} \tag{26a}$$

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\,M\,\varepsilon\,(1-(q^4)^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\,M\,\varepsilon} & \frac{-q^4}{2\,M\,\varepsilon} \\ 0 & \frac{-q^4}{2\,M\,\varepsilon} & \frac{1}{2\,M\,\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$(26\text{b}) = (26\,\text{cI}) = (26\,\text{d})$$

$$(g^{ik}) = \begin{pmatrix} 2\,M\,\varepsilon\,(1-(q^4)^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\,M\,\varepsilon}{1-(q^4)^2} & \frac{2\,M\,\varepsilon\,q^4}{1-(q^4)^2} \\ 0 & \frac{2\,M\,\varepsilon\,q^4}{1-(q^4)^2} & \frac{2\,M\,\varepsilon}{1-(q^4)^2} \end{pmatrix}$$

---

[14]) G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **15**, S. 685 (1942). Im folgenden als l. c. 1942 zitiert.

[15]) Es ist eine in der Kreiseltheorie bekannte Tatsache, dass man die Eulerschen Winkel als Koordinaten auf einer dreidimensionalen Hypersphäre auffassen kann und dass ein Kugelkreisel einem sphärischen Pendel auf dieser Hypersphäre äquivalent ist. (Vgl. z. B. Hund ZS. f. Phys. **51**, S. 1, 1928.)

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2M\varepsilon_l(1-(q^4)^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(q^4)^2}{2M\varepsilon_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2M\varepsilon_s(1-(q^6)^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-(q^6)^2}{2M\varepsilon_s} \end{pmatrix} \tag{26cII}$$

Vernachlässigt man die Kommutatoren der p und q, was man in der Thomas-Fermi-Näherung immer macht, so schreibt sich die Isobarenenergie in allen Fällen in der Form

$$H_I^{(\nu)} = \frac{1}{2M} \sum_{i=4}^{n} \sum_{k=4}^{n} g^{(\nu)\,ik} p_i^{(\nu)} p_k^{(\nu)} \equiv \frac{1}{2M} \left| p_\omega^{(\nu)} \right|^2 \tag{27}$$

§ 4. Sättigungscharakter der Kräfte.

Es soll in diesem § gezeigt werden, dass der von WENTZEL[16]) in der Skalartheorie festgestellte Kernzusammenbruch in den hier betrachteten Theorien nicht stattfindet. Für eine Erläuterung des Problems beschränken wir uns vorläufig wieder auf das Beispiel des neutralen Pseudoskalarfeldes (a), um dann den gewünschten Beweis in einer für alle Fälle gültigen Form durchzuführen.

Greifen wir zunächst zwei „festgehaltene" Nucleonen aus einem schweren Kern heraus. Ihre Energie ist nach (18) und (27)

$$H = \frac{1}{2M} \left| p_\omega^{(1)} \right|^2 + \frac{1}{2M} \left| p_\omega^{(2)} \right|^2 + \frac{g^2}{3} J(r_{12}) \left(\mathfrak{e}(\omega^{(1)}) \cdot \mathfrak{e}(\omega^{(2)}) \right) \tag{28}$$

Durch Einführen des Winkels zwischen $\mathfrak{e}^{(1)}$ und $\mathfrak{e}^{(2)}$ ($(\mathfrak{e}^{(1)} \cdot \mathfrak{e}^{(2)}) = \cos \vartheta_{12}$) wird H separiert. Für kleine Abstände ($| J(r_{12}) | \gg \varepsilon$, vgl. (26a), (27)) sind die tiefsten stationären Zustände Nullpunktsschwingungen in einer tiefen Potentialmulde und die entsprechenden Energieeigenwerte sind angenähert gleich der Tiefe dieser Potentialmulde, d. h. gleich $- | J(r_{12}) |$. Die Potentialmulde liegt bei $\vartheta_{12} = 0$ für $J(r_{12}) < 0$ und bei $\vartheta_{12} = \pi$ für $J(r_{12}) > 0$. Letzteres ist hier der Fall, während das Wechselwirkungspotential in der Skalartheorie das andere Vorzeichen hat. Betrachtet man N Nucleonen ($N \gg 1$), so unterscheiden sich die beiden Fälle wesentlich. Im Fall $J(r_{12}) < 0$ können alle Winkel bei Null „einfrieren": Man bekommt gewöhnliche Kräfte ohne Sättigungscharakter. In der Skalartheorie hat WENTZEL[16]) gezeigt, dass die kinetische Energie eine

[16]) l. c. 1942.

Schrumpfung des Kerns und damit das „Einfrieren" der Winkel nicht zu verhindern vermag. Etwas ähnliches kann jedoch im Fall $J(r_{12}) > 0$ nicht eintreten. $\vartheta_{12} = \pi$ bedeutet: Die beiden Nucleonen befinden sich in zwei diametralen Punkten der Kugelfläche. Es ist klar, dass bei Anwesenheit von N Nucleonen nicht jedes Paar den Winkelabstand π haben kann. Dagegen werden die Nucleonen möglichst grosse relative Winkelabstände haben: Die Nucleonen „stossen sich ab". Das führt zu einer homogenen Verteilung der Nucleonen über die ganze Kugelfläche. Wegen (18) und (21) folgt daraus das Verschwinden des ersten Terms in (14). Ein Kernzusammenbruch ist damit ausgeschlossen.

Bei den anderen Feldtypen lassen sich im Prinzip ähnliche Überlegungen durchführen; nur sind die geometrischen Verhältnisse komplizierter und weniger anschaulich. Die Konstanz der Dichte im Winkelbereich hat immer das Verschwinden des ersten Terms in (14) zur Folge.

Es soll nun allgemein gezeigt werden, dass in allen Theorien mit $J(r) > 0$ die nach der Thomas-Fermi-Methode berechnete Dichte von ω unabhängig ist. Es ist

$$\varrho(q) = \int dp\, \varrho(q, p) \quad \left(dp \equiv \prod_{i=1}^{n} dp_i\right)$$

wenn $\varrho(q, p)$ die Dichte im Phasenraum ist, die sich aus der Bedingung bestimmt, dass innerhalb einer Fläche konstanter Energie jede Phasenraumzelle vom Volumen $h^n = (2\pi)^n$ β-fach besetzt ist, und ausserhalb alle Zellen leer sind. ($\beta = 1$ in den symmetrischen Theorien; $\beta = 2$ in der neutralen Theorie entsprechend den beiden Ladungszuständen des Nucleons.)

$$\varrho(q, p) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{(2\pi)^n} \text{ für } H(q, p) = \dfrac{1}{2M} \mid p \mid^2 + U(q) \leqslant W \\ \qquad \text{und } x \text{ im Kerninnern} \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{29}$$

wo das Thomas-Fermi-Potential

$$\begin{aligned} U(q) &= \int dq'\, \varrho(q')\, V(q', q) \\ &= \int dx' \int d\omega'\, \varrho(x', \omega')\, J(\mid x' - x \mid) \sum_k s_k(\omega')\, s_k(\omega) \text{ ist.} \end{aligned} \tag{30}$$

Folglich

$$\varrho(q) = \begin{cases} \text{const.}\, (W - U(q))^{\frac{n}{2}} \text{ für } W - U(q) > 0 \\ \qquad \text{und } x \text{ im Kerninnern} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{31}$$

Bei Vernachlässigung von Oberflächeneffekten können wir annehmen, dass

$$\begin{aligned} \varrho(q) &= \begin{cases} \varrho(\omega) \text{ im Kerninnern} \\ 0 \text{ ausserhalb} \end{cases} \\ U(q) &= \begin{cases} U(\omega) \text{ im Kerninnern} \\ 0 \text{ ausserhalb} \end{cases} \end{aligned} \tag{32}$$

Dann wird aus (30)

$$U(\omega) = A \int d\omega' \, \varrho(\omega') \sum_k s_k(\omega') \, s_k(\omega) = \sum_k C_k \, s_k(\omega) \tag{33}$$

wo

$$A = \int d(x' - x) \, J(|\, x' - x \,|)$$

und

$$C_k = A \int d\omega \, \varrho(\omega) \, s_k(\omega)$$

Multipliziert man dies mit C_k und summiert über k, so wird mit (33)

$$\sum_k C_k^2 = A \int d\omega \, \varrho(\omega) \, U(\omega) \tag{34}$$

Wir behaupten, dass für $A > 0$[17]) und $\varrho(\omega) \neq \text{const}$ die rechte Seite von (34) immer negativ ist, so dass (34) nur durch $\varrho(\omega) \equiv \text{const}$, $U(\omega) \equiv 0$ befriedigt wird.

Beweis:

Seien Ω^+ und Ω^- diejenigen Teilbereiche des gesamten Winkelbereiches Ω, in denen $U(\omega) > 0$ bzw. < 0 ist. Dann ist wegen $\int\limits_\Omega d\omega \, s_k(\omega) = 0$ und (33)

$$\int\limits_{\Omega^+} d\omega \, U(\omega) = - \int\limits_{\Omega^-} d\omega \, U(\omega)$$

Mit dem Mittelwertsatz ist dann

$$\int\limits_\Omega d\omega \, \varrho(\omega) \, U(\omega) = \big(\varrho(\omega^+) - \varrho(\omega^-)\big) \int\limits_{\Omega^+} d\omega \, U(\omega) \quad (\omega^+ \subset \Omega^+, \ \omega^- \subset \Omega^-)$$

Der zweite Faktor ist nach Voraussetzung positiv, der erste ist nach (31) immer negativ, wenn nicht $\varrho(\omega) \equiv \text{const}$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. Die hier vernachlässigte Austauschenergie ist für hinreichend kleine Kernradien sicher vernachlässigbar klein, so dass jedenfalls kein Kernzusammenbruch eintritt.

---

[17]) Dies ist in allen hier betrachteten Theorien der Fall.

§ 5. Diskussion der Stabilitätsverhältnisse unter Berücksichtigung der Austauschenergie.

Im folgenden werden wir die Stabilitätsverhältnisse in den beiden im § 3 behandelten Grenzfällen kleiner und grosser Kernradien diskutieren. Es wird sich zeigen, dass eine Interpolation im Zwischengebiet sinnvoll ist. Im Fall (cII) haben die Isobaren höheren Spins und höherer Ladung verschiedene Anregungsenergien, so dass die Diskussion in diesem Fall komplizierter wird. Der Fall (cII) soll deshalb der Einfachheit halber nicht mehr berücksichtigt werden, zumal dieser Kopplungsansatz wegen der schwachen Spinabhängigkeit der Kernkräfte, die wahrscheinlich keine befriedigende Beschreibung des Deuterons erlaubt, für die Beschreibung der Wirklichkeit weniger in Frage kommt.

A) Grenzfall kleiner Kernradien $\frac{P^2}{2M\varepsilon} \gg 1$:

Nach § 4 ist die für die Bestimmung der Phasenraumdichte in der Thomas-Fermi-Näherung massgebende Fläche $H(q, p) = \text{const}$ bei Vernachlässigung der Austauschenergie eine Kugel im p-Raum. Dies gilt zwar in Strenge nicht mehr, wenn man die Austauschenergie berücksichtigt, da dann nach DIRAC[18]) $H(q, p) = \frac{1}{2M} |p|^2 - U_A(q, p)$ $(U = 0)$ ist. Begnügt man sich aber mit einer groben Abschätzung des Austauscheffektes, so kann man die Fläche $H(q, p) = \text{const}$ wieder durch eine Kugel im p-Raum ersetzen, indem man die p-Abhängigkeit von U_A vernachlässigt: $U_A(q, p) \to U_A(q, 0)$. Dass nämlich $U_A(q, p)$ nicht stark von p abhängt, kann man folgendermassen einsehen. Wenn man in (14) die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten q und $\overline{q}$ des Punktepaares q' und q'' einführt und die Dichtematrix $\varrho(q', q'')$ darstellt durch das Fourierintegral

$$\varrho(q', q'') = \int dp\, \varrho(q, p)\, e^{i(p \cdot \overline{q})} = \varrho(q, \overline{q}) \tag{35}$$

$$(p \cdot q) \equiv \sum_k p_k q^k = |p|\, |q| \cos(p, q)$$

so wird

$$E_{\text{Pot}} = -\tfrac{1}{2} \int dq \int dp\, \varrho(q, p)\, U_A(q, p) \tag{36}$$

mit

$$U_A(q, p) = \int d\overline{q}\, e^{-i(p\overline{q})}\, \varrho(q, \overline{q})\, V(\overline{q}) \tag{37}$$

Die Dichtematrix hat ein ausgeprägtes Maximum für $\overline{q} = 0$ und fällt bei $\overline{q} \approx 1/P$ rasch ab. Im Integrationsbereich des $\int d\overline{q}$ ist dann $(pq) \lesssim 1$. Damit ist die behauptete schwache p-Abhängigkeit von U_A evident. Was die q-Abhängigkeit anlangt, ist $U_A(q, 0)$ im ω-

[18]) DIRAC, Proc. Camr. Phil. Soc. **26**, S. 376 (1930).

Raum aus Symmetriegründen konstant, und die x-Abhängigkeit ist konsequenterweise wie in U zu ignorieren, im Sinne der Vernachlässigung von Oberflächeneffekten. Damit wird $U_A(q, p) \approx$ const (sofern x im Kerninnern).

Für die Dichte erhalten wir dann

$$\varrho(q, p) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{(2\pi)^n} & \text{für } |p| \leqslant P \text{ und } x \text{ im Kerninnern} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{38}$$

$$\varrho(q) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{|p|<P} dp = \dfrac{\beta}{(2\pi)^n} \dfrac{K_n P^n}{\sqrt{\det g^{ik}}} = \dfrac{\beta}{(2\pi^n)} \dfrac{K_n P^n}{(2 M \varepsilon)^{\frac{n-3}{2}}} \\ \qquad = \dfrac{N}{v\Omega} \text{ im Kerninnern} \\ 0 \text{ sonst} \qquad (v = \text{Kernvolumen}, \ \Omega = \int d\omega) \end{cases} \tag{39}$$

wobei K_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

$$K_n = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} & \text{für gerade } n \\ \dfrac{2 \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n} & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

Damit ist P als Funktion von v/N gegeben.

Mit dieser Dichte berechnet sich die Kernenergie wie folgt:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{Pot}}$$

(E_{kin} = kinetische Energie + Isobarenenergie.)

$$E_{\text{kin}} = \frac{\beta}{(2\pi)^n} \int_{|p|<P} dp \, \frac{1}{2M} |p|^2 = N \frac{n}{n+2} \frac{P^2}{2M} \tag{40}$$

Bei der Berechnung der potentiellen Energie nach (35), (36) und (37) ersetzen wir wieder $U_A(q, p)$ durch $U_A(q, 0)$ und beachten, dass wegen der Bedingung für unsere Thomas-Fermi-Näherung, $P^2 \gg 2 M \varepsilon$, $\varrho(q, \bar{q})$ als Funktion von $\bar{q}$ ein so schmales Maximum hat, dass in U_A $V(\bar{x}, \bar{\omega}) \approx V(\bar{x}, 0)$ gesetzt werden kann:

$$E_{\text{Pot}} = -\frac{N}{2} \frac{\beta}{(2\pi)^n} \int d\bar{q} \sum_k s_k^2 \frac{e^{-\mu|\bar{x}|}}{4\pi|\bar{x}|} \int_{|p|<P} dp \, e^{i(p \cdot \bar{q})} \approx$$

$$-\frac{N}{2} \frac{\beta}{(2\pi)^3} \sum_k s_k^2 \int d\bar{x} \int_{|p_x|<P} d p_x \, e^{i(p_x \cdot \bar{x})} \frac{e^{-\mu|\bar{x}|}}{4\pi|\bar{x}|} \text{ [19]} \tag{41}$$

[19]) Im Fall (d) (Mischung pseudoskalarer und vektorieller Mesonen) gilt dies nur, wenn $\mu_V = \mu_{PS} = \mu$ ist. Andernfalls hat man $J(|\bar{x}|)$ aus (19d) einzusetzen. Wir berücksichtigen den Fall $\mu_V \neq \mu_{PS}$ der Einfachheit halber nicht mehr.

Dabei wurde näherungsweise über p_x und p_ω unabhängig integriert. Führt man hierin zuerst die Integration über $\overline{x}$ und dann über p_x aus, so wird

$$E_{\text{Pot}} = -\frac{N}{2}\frac{\beta}{(2\pi)^2}\sum_k s_k^2 P\left(1 - \frac{\mu}{P}\operatorname{arctg}\frac{P}{\mu}\right)^{20)} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} P \gg \mu: \frac{E_{\text{Pot}}}{N} &= -\frac{1}{2}\frac{\beta}{(2\pi)^2}\sum_k s_k^2 P \\ P \ll \mu: \frac{E_{\text{Pot}}}{N} &= -\frac{1}{2}\frac{\beta}{(2\pi)^2}\sum_k s_k^2 \frac{P^3}{3\mu^2} \end{aligned} \tag{43}$$

B) Grenzfall grosser Kernradien $\frac{P^2}{2M\varepsilon} \ll 1$.

Aus (24) berechnen wir die potentielle Energie mit

$$\varrho(x', x'') = \begin{cases} \frac{4}{(2\pi)^3}\int\limits_{|p_x|<P} dp_x\, e^{i(p_x \cdot x' - x'')} \text{ für } \frac{x'+x''}{2} \text{ im Kerninnern} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{44}$$

analog wie oben zu

$$E_{\text{Pot}} = -\frac{N}{2}\frac{4}{(2\pi)^2}\frac{1}{16}\sum_k\sum_{\varkappa'\lambda'}\sum_{\varkappa''\lambda''}(\varkappa'\lambda'|s_k|\lambda''\varkappa'')(\varkappa''\lambda''|s_k|\lambda'\varkappa')$$
$$P\left(1 - \frac{\mu}{p}\operatorname{arctg}\frac{P}{\mu}\right) \tag{45}$$

$$E_{\text{kin}} = N \cdot \frac{3}{5}\frac{P^2}{2M} \tag{46}$$

Die Beziehung zwischen P und v/N ergibt sich durch

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{4}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}P^3 = \frac{N}{v} \text{ im Kerninnern} \\ 0 \text{ ausserhalb} \end{cases} \tag{47}$$

Zusammenfassend ergibt sich in den symmetrischen Theorien (b), (cI), (d) $(\mu_{PS} = \mu_V)$:

A) $\frac{P^2}{2M\varepsilon} \gg 1$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{4}\frac{P^2}{2M}\frac{1}{2}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 P\left(1 - \frac{\mu}{P}\operatorname{arctg}\frac{P}{\mu}\right) \tag{48 A}$$

nach (38), (42) und (22)

---

[20]) Für diese P-Abhängigkeit der potentiellen Energie, insbesondere für den linearen Anstieg bei grossen P, ist es wesentlich, dass bei uns $J(|\overline{x}|)$ das Yukawa-Potential ist. Schneidet man das Yukawa-Potential bei kleinen Abständen ab, so wird E_{Pot} konstant für P-Werte, die gross gegen die reziproke Abschneidelänge sind.

$$\left(\frac{v}{N}\right)^{\frac{1}{3}} = (48\,\pi)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{P^2}{2\,M\,\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{P} \quad \text{nach (39)} \tag{49A}$$

B) $\frac{P^2}{2\,M\,\varepsilon} \ll 1$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5}\,\frac{P^2}{2\,M} - \frac{1}{6}\left(\frac{g}{2\,\pi}\right)^2 P\left(1 - \frac{\mu}{P}\,\mathrm{arctg}\,\frac{P}{\mu}\right) \tag{48B}$$

nach (46), (45) und (26)

$$\left(\frac{v}{N}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3\,\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{P} \quad \text{nach (47)} \tag{49B}$$

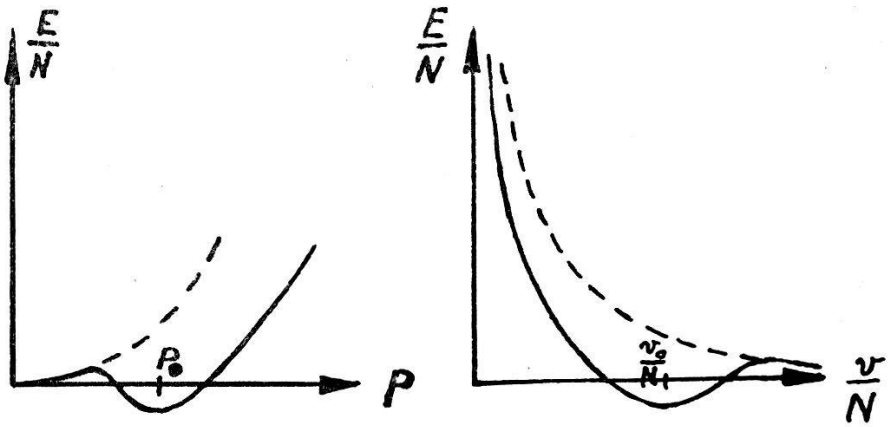

Fig. 1.

In der neutralen Pseudoskalartheorie hat man etwas andere Zahlkoeffizienten. Die folgende Diskussion kann jedoch in der gleichen Weise durchgeführt werden und liefert qualitativ die gleichen Ergebnisse. E/N hat als Funktion von P in beiden Grenzfällen den gleichen allgemeinen Verlauf, und die Zahlkoeffizienten haben die gleiche Grössenordnung. Es erscheint daher vernünftig für $P^2/2\,M\,\varepsilon \approx 1$ zu interpolieren. Der qualitative Verlauf von E/N ist in Fig. 1 dargestellt. Die punktierte Kurve gilt für kleine g, die ausgezogene für grosse g. Stabile Kerne sind nur möglich, wenn E/N ein Minimum hat. Das liefert eine einschränkende Bedingung für die Wahl von g. Da nach (48A) und (43) das Minimum der Energie nur bei $P \gtrsim \mu$ liegen kann, ist für $P_0 \gg \sqrt{2\,M\,\varepsilon}$

$$\left(\frac{v_0}{N}\right)^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{\mu}\,,$$

im Widerspruch zur Erfahrung. Werte von g und ε, die $P_0 \gg \sqrt{2\,M\,\varepsilon}$ liefern, sind daher auszuschliessen. Aus (48) ergibt sich

$$P_0^{(A)} = \tfrac{1}{3}\,M\left\{\left(\frac{g}{2\,\pi}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{g}{2\,\pi}\right)^4 - 9\left(\frac{\mu}{M}\right)^2}\right\} \tag{50A}$$

$$P_0^{(B)} = \tfrac{5}{36} M \left\{ \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{g}{2\pi}\right) - \left(\frac{36}{5}\frac{\mu}{M}\right)^2} \right\} \tag{50B}$$

Stabilität haben wir danach nur, wenn

$$\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \gtrsim 5\frac{\mu}{M} \tag{51}$$

Damit die Näherungsformeln für starke Kopplung überhaupt anwendbar sind, muss $g \gg a\mu$ angenommen werden, d. h. nach (12b)

$$\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{g}{2\pi} \ll 1 \tag{52}$$

Ferner sollte der Protonradius klein gegen die Reichweite der Kernkräfte sein ($a\mu \ll 1$) d. h. nach (12b)

$$\frac{\varepsilon}{\mu}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \ll 1 \tag{53}$$

Die Bedingung (52) ist immer erfüllt, wenn (51) und (53) erfüllt sind, und braucht daher nicht weiter berücksichtigt zu werden. Sei $(g/2\pi)^2 > 1$. Dann folgt aus (53) $\varepsilon \ll \mu$.

$$\frac{P_0^{(A)}}{\sqrt{2M\varepsilon}} \cong \sqrt{\frac{2M}{9\varepsilon}}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \gg 1$$

Erfahrungsgemäss ist $\mu \approx \frac{1}{10} M$. $\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 > 1$ ist also auszuschliessen. Sei $\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \approx 5\,\frac{\mu}{M}$. Dann folgt aus (53) $\varepsilon \ll \mu$.

$$\frac{P_0^{(A)}}{\sqrt{2M\varepsilon}} \cong \frac{1}{4}\sqrt{\frac{M}{\varepsilon}}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \approx \frac{\mu}{\sqrt{M\varepsilon}} \gtrsim 1$$

$$\left(\frac{v_0^{(A)}}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \cong 64\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^{-4}\frac{\mu}{M}\cdot\frac{1}{\mu} \lesssim \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{P_0^{(B)}}{\sqrt{2M\varepsilon}} \cong \frac{1}{10}\sqrt{\frac{M}{\varepsilon}}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \gtrsim 1$$

$$\left(\frac{v_0^{(B)}}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \cong 2\left(\frac{g}{2\pi}\right)^{-2}\frac{\mu}{M}\cdot\frac{1}{\mu} \approx \frac{1}{\mu}$$

Für $10^{-3}\,M \lesssim \varepsilon \lesssim 10^{-2}\,M$, d. h. $1\,\text{MeV} \lesssim \varepsilon \lesssim 10\,\text{MeV}$ sind alle Bedingungen erfüllt, und man erhält Kernradien der richtigen Grössenordnung. Es ist dann $\frac{P^2}{2M\varepsilon} \approx 1$, so dass einige höhere Isobaren im Kern vorhanden sind. Die Bindungsenergie pro Par-

tikel ergibt sich $< 10^{-2}\, M$. Das ist befriedigend, da die statistische Näherung immer zu kleine Werte für die Bindungsenergie gibt. $\varepsilon > 10\,\mathrm{MeV}$ ist nach (52) und (53) nur möglich, wenn g entsprechend kleiner ist, was durch (51) verboten wird. (51) ist jedoch nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für Stabilität, da die statistische Näherung immer zu hohe Energiewerte liefert. Man wird also $\varepsilon > 10\,\mathrm{MeV}$, $\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 < 5\,\frac{\mu}{M}$ nicht ohne weiteres ausschliessen dürfen. Jedenfalls ist gezeigt, dass die Annahme einer starken Kopplung in den betrachteten Mesontheorien mit der Stabilität und den tröpfchenartigen Eigenschaften der Kerne verträglich ist.

§ 6. Berücksichtigung der Coulombenergie.

A) Grenzfall kleiner Kernradien $\frac{P^2}{2\,M\,\varepsilon} \gg 1$.

In den symmetrischen Theorien (b), (cI) und (d) ist die Kernladungszahl für $\frac{P^2}{2\,M\,\varepsilon} \gg 1$

$$Z = \int dq \int dp\; \varrho(q, p)\,(p_\Psi + \tfrac{1}{2}) \quad (p_\Psi \equiv p_6) \tag{54}$$

da $p_\Psi + \frac{1}{2}$ die Ladung eines Nucleons ist. Setzt man hierin die unter Vernachlässigung der Coulombenergie berechnete Dichte ein, so liefert p_Ψ aus Symmetriegründen keinen Beitrag und es wird $Z = N/2$. Die Abweichung von $N/2$ erhält man durch Berücksichtigung der Coulombenergie in (28)

$$\varrho(q, p) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^6} & \text{im Innern der Fläche } H(q, p) = \text{const} \\ & \text{und } |x| < R \qquad (R = \text{Kernradius}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{55}$$

wobei in $H(q, p)$ die Coulombenergie mitzuberücksichtigen ist. Wir setzen das Coulombpotential einer homogen geladenen Kugel ein und vernachlässigen die Coulombaustauschenergie.

$$H(q, p) = \frac{1}{2\,M}\,|p|^2 + U_A(q, 0) + \frac{3}{2}\,\frac{Z\,e^2}{R}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{|x|}{R}\right)^2\right)(p_\Psi + \tfrac{1}{2}) = \text{const} \tag{56}$$

Hierin vernachlässigen wir noch den Term $\frac{1}{3}\,(|x|/R)^2$. Die Fläche $H(q, p) = \text{const}$ ist demnach eine Kugel im p-Raum mit der Gleichung

$$\frac{1}{2\,M} \sum_{ik} g^{ik}\, p_i\, p_k + \frac{3}{2}\,\frac{Z\,e^2}{R}\, p_6 = \text{const} \tag{57}$$

Wir setzen $p_i = p_i' + d_i$ und bestimmen die d_i so, dass die Gleichung der Kugelfläche (57) $|p'| = \text{const}$ lautet.

$$\frac{1}{M}\sum_k g^{ik} d_k + \delta_{i6}\frac{3}{2}\frac{Ze^2}{R} = 0$$

$$\frac{1}{M} d_e + g_{e6}\frac{3}{2}\frac{Ze^2}{R} = 0$$

$$d_6 = \frac{1}{2\varepsilon}\frac{3}{2}\frac{Ze^2}{R}$$

Mit

$$\varrho(q, p') = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^6} & \text{für } |p'| < P,\ |x| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird

$$Z = \frac{1}{(2\pi)^6}\int dq \int dp'\, \varrho(q,p')\,(p_6' + \tfrac{1}{2} + d_6) = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\frac{3}{2}\frac{Ze^2}{R}\right)$$

und daraus

$$\frac{N - 2Z}{Z} = \frac{3}{2}\frac{e^2}{r_0\,\varepsilon} N^{\frac{2}{3}} \qquad (R \equiv r_0 N^{\frac{1}{3}}) \tag{58}$$

Bei passender Wahl von ε gibt diese Formel Z als Funktion von N in Übereinstimmung mit der Erfahrung[21]). Setzt man nach § 5 $\varepsilon \approx 10$ MeV, so erhält man für $N = 200$ (Hg) eine zu kleine Kernladung $Z \approx 30$. Der wirkliche Wert $Z = 80$ würde $\varepsilon \approx 100$ MeV erfordern. Werte von ε und g, für die $P_0^2 \gg 2\,M\varepsilon$ wird, wurden in § 5 bereits ausgeschlossen, da sie zu kleine Kernradien liefern. Wie man sieht würden sie zudem eine viel zu kleine Kernladung ergeben. Im Fall $P_0^2 \approx 2\,M\varepsilon$, der nach § 5 der Wirklichkeit ungefähr entsprechen sollte, wird man kaum erwarten dürfen, dass die Formel (58) noch brauchbar ist, zumal die Betrachtung des anderen Grenzfalles B eine Formel mit wesentlich anderen Zahlkoeffizienten liefern wird, sodass eine Interpolation für das Zwischengebiet nicht ohne weiteres möglich erscheint.

Für die Energie erhalten wir bei Vernachlässigung der Coulombaustauschenergie

$$\frac{E}{N} = \frac{E^0}{N} + \frac{1}{2M}\sum_{ik} g^{ik} d_i d_k + \frac{3}{4}\frac{Ze^2}{R}(d_6 + \tfrac{1}{2}) = \frac{E^0}{N} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{Ze^2}{R} \tag{59}$$

E^0 ist die früher mit E bezeichnete Energie. Der Zahlfaktor $\frac{3}{4}$ statt

[21]) Vgl. z. B. Bethe und Bacher, Rev. of mod. Phys. (1936), S. 97.

$\frac{3}{5}$ rührt von der Vernachlässigung von $\frac{1}{3}\left(\frac{|x|}{R}\right)^2$ her. Korrigiert man dies, so wird mit (58)

$$\frac{E}{N} = \frac{E^0}{N} + \tfrac{1}{5}\,\varepsilon\left(\frac{N-2Z}{N}\right)^2 + \frac{3}{5}\,\frac{Z^2 e^2}{RN} \tag{60}$$

B) Grenzfall grosser Kernradien $\frac{P^2}{2M\varepsilon} \ll 1$.

In diesem Fall erhält man in bekannter Weise[22]):

$$\frac{E_{\text{kin}}}{N} = \frac{E^0_{\text{kin}}}{N}\,\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2Z}{N}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{2(N-Z)}{N}\right)^{\frac{5}{3}}\right\}$$
$$\cong \frac{3}{5}\,\frac{P^2}{2M}\left\{1 + \frac{5}{9}\left(\frac{N-2Z}{N}\right)^2\right\} \tag{61}$$

wo P durch (49B) definiert ist. Die potentielle Energie als Funktion von Z/N berechnen wir analog wie im § 3, wobei die Annahme, dass in jedem Translationszustand beide Ladungszustände realisiert sind, fallen zu lassen ist. Bezeichnet $\lambda = 1$ den Protonzustand und $\lambda = 2$ den Neutronzustand, so wird nach § 3 in den symmetrischen Theorien

$$\begin{aligned} E_{\text{Pot}} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{g^2}{3}\int dx' \int dx'' \Big\{ & |\varrho_p(x', x'')|^2 \sum_{i\varrho}\sum_{\varkappa'\varkappa''} (\varkappa' 1|s_{i\varrho}|1\,\varkappa'')\,(\varkappa'' 1|s_{i\varrho}|1\varkappa') \\ & + |\varrho_n(x', x'')|^2 \sum_{i\varrho}\sum_{\varkappa'\varkappa''} (\varkappa' 2\,|s_{i\varrho}|\,2\,\varkappa'')\,(\varkappa'' 2\,|s_{i\varrho}|\,2\,\varkappa') \\ & + 2\,\varrho_p(x', x'')\,\varrho_n(x'', x') \sum_{i\varrho}\sum_{\varkappa'\varkappa''} (\varkappa' 1|s_{i\varrho}|\,2\,\varkappa'')\,(\varkappa'' 2|s_{i\varrho}|1\,\varkappa') \Big\} J(|x'-x''|) \end{aligned} \tag{62}$$

Die Indizes p und n unterscheiden die zu den Protonen und Neutronen gehörigen Grössen. Nach (25) ist dann

$$\begin{aligned} E_{\text{Pot}} = -\tfrac{1}{36}\,g^2 \int dx' \int dx'' \{ & |\varrho_p(x', x'')|^2 + |\varrho_n(x', x'')|^2 \\ & + 4\,\varrho_p(x', x'')\,\varrho_n(x'', x')\}\, J(|x' - x''|) \end{aligned} \tag{63}$$

Berechnet man dies analog wie in § 5, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{\text{Pot}} = -\frac{1}{18}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \Big\{ & \frac{2N-Z}{N}\,P_p\left(1 - \frac{\mu}{P_p}\,\text{arctg}\,\frac{P_p}{\mu}\right) \\ & + \frac{N+Z}{N}\,P_n\left(1 - \frac{\mu}{P_n}\,\text{arctg}\,\frac{P_n}{\mu}\right)\Big\} \end{aligned} \tag{64}$$

---

[22]) Vgl. Bethe und Bacher, l. c., S. 155ff. Bei Bethe und Bacher wird an Stelle des Yukawa-Potentials die Potentialfunktion $e^{-\mu^2 r^2}$ zugrunde gelegt; sonst ist die Rechnung im Prinzip die gleiche.

wobei $P_p = P\left(1 - \frac{N-2Z}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ und $P_n = P\left(1 + \frac{N-2Z}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ ist. Setzt man darin $\left(\frac{v_0}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{1}{\mu}$ ein, und entwickelt nach Potenzen von $\frac{N-2Z}{N}$, so wird

$$\frac{E_{0\,\mathrm{Pot}}}{N} \cong -\frac{1}{6}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \mu \left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{N-2Z}{N}\right)^2\right) \tag{65}$$

$$\frac{E_0}{N} \cong \frac{E^0}{N} + \left(\frac{\mu}{M} + \frac{1}{24}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2\right) \mu \left(\frac{N-2Z}{N}\right)^2 + \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{RN} \tag{66}$$

Für die wirkliche Kernladungszahl muss dies ein Minimum werden. Man erhält somit

$$\frac{N-2Z}{N} = \frac{1}{2\left(\frac{\mu}{M} + \frac{1}{24}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2\right)\mu} \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0} N^{\frac{2}{3}} \tag{67}$$

Dies gibt Z als Funktion von N in Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn

$$\left(\frac{\mu}{M} + \frac{1}{24}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2\right)\mu \approx 10\,\mathrm{MeV} \text{ ist.}$$

Das ist für den in § 5 gefundenen Wert $\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \approx 5\frac{\mu}{M}$ und für kleinere g erfüllt. Dieses Ergebnis spricht dafür, dass in den wirklichen Kernen nur sehr wenige höhere Isobaren vorhanden sein können, sodass eher eine Approximation vom Fall B her tunlich erscheint.

In der neutralen Theorie berechnet man die Kernladungszahl in beiden Grenzfällen analog wie hier im Grenzfall grosser Kernradien (B); nur treten infolge des fehlenden Ladungsaustausches keine gemischten Produkte der Dichtematrizen in der potentiellen Energie auf. Das hat zur Folge, dass die potentielle Energie mit wachsendem Neutronenüberschuss abnimmt. Diese Abnahme ist jedoch für die Grössenordnung von g, die man nach § 5 fordern muss, klein gegen die entsprechende Zunahme der kinetischen Energie.

§ 7. Zusammenfassung.

In der statistischen Näherung ist die potentielle Energie eines schweren Kernes allgemein von der Form (14)

$$E_{\mathrm{Pot}} = \tfrac{1}{2}\int dq' \int dq'' \left[\varrho(q')\,\varrho(q'') - \varrho(q', q'')\,\varrho(q'', q')\right] V(q', q'')$$

Die Dichten lassen sich einfach berechnen, wenn entweder sehr

viele oder praktisch keine höheren Isobaren angeregt sind (kleine oder grosse Kernradien), im ersten Fall mit der Thomas-Fermi-Methode, im zweiten aus den „kraftfreien" Eigenfunktionen. Da $\int d\omega' \, V(q', q'') = 0$ ist, verschwindet der erste Term von E_{Pot}, wenn die Dichteverteilung im Winkelraum homogen ist. Dies ist immer der Fall, wenn sich praktisch alle Nucleonen auf dem untersten Isobarenniveau befinden, da die zu einem vollbesetzten Isobarenniveau gehörige Dichteverteilung aus Symmetriegründen homogen sein muss. Auch im anderen Grenzfall ist, wie wir im § 4 gezeigt haben, die Dichteverteilung im Winkelraum homogen, wenn sich die Nucleonen im Winkelraum abstossen ($J(r) > 0$). Die Berechnung des verbleibenden Terms zeigt, dass es vernünftig ist, zwischen beiden Grenzfällen zu interpolieren. Für hinreichend kleine Kernradien ist die so berechnete potentielle Energie klein gegen die kinetische Energie plus Isobarenenergie, so dass jedenfalls kein Kernzusammenbruch eintritt. Existenz und Radius stabiler Kerne hängen von den Werten des Kopplungsparameters und der Isobarenanregungsenergie ab, die durch die Bedingungen (52) und (53) eingeschränkt sind. Für grosse g und kleine ε erhält man zu kleine Kernradien und zu grosse Bindungsenergien. Für $g \approx 1$ und $\varepsilon \approx 10$ MeV hat man Übereinstimmung mit der Erfahrung, soweit sie in der statistischen Näherung erwartet werden kann. Die stabilen Kerne fallen dann in das Gebiet zwischen den beiden Grenzfällen, wo nur wenige höhere Isobaren angeregt sind. Auch die Berechnung der Kernladung lässt darauf schliessen, dass in den wirklichen Kernen nur wenige höhere Isobaren angeregt sein dürften. Für wesentlich grössere ε-Werte und entsprechend kleinere g-Werte liefert die statistische Näherung keine stabilen Kerne mehr. Wenn überhaupt Stabilität besteht, sind Volumen und Energie des Kerns proportional zu N.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Gregor Wentzel, der diese Arbeit angeregt hat, möchte ich für das lebhafte Interesse und die vielen freundlichen Ratschläge, mit denen er ihre Ausführung gefördert hat, herzlichst danken.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.