Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 17 (1944)
Heft: I

Artikel: Zur Theorie magnetisch geladener Teilchen
Autor: Fierz, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111493

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Theorie magnetisch geladener Teilchen

von **M. Fierz.**

(23. XII. 1943.)

Zusammenfassung. In dieser Arbeit wird ein neuer Beweis für das folgende, von DIRAC aufgestellte Theorem gegeben: Führt man in der Quantentheorie magnetisch geladene Teilchen ein, so muss deren magnetische Ladung p ein ganzzahliges Vielfaches einer Einheitsladung $\hbar c/2\,e$ betragen, wo e das elektrische Elementarquantum bedeutet. Weiter wird diese Aussage auch korrespondenzmässig gedeutet.

Einleitung. DIRAC[1]) hat im Jahre 1931 darauf hingewiesen, dass es in der Quantentheorie möglich ist, auch magnetisch geladene Teilchen („singuläre Magnetpole") zu behandeln. Es schien ihm merkwürdig, dass solche Teilchen, soweit wir wissen, in der Natur nicht vorkommen.

Auch in der klassischen Elektrodynamik ist es möglich, magnetische Ströme und Ladungen einzuführen, indem man auf der rechten Seite der homogenen Feldgleichungen

$$\mathfrak{rot}\,\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\dot{\mathfrak{H}} = 0; \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$$

eine magnetische Strom- bzw. Ladungsdichte $\mathfrak{m}$ und m einführt gemäss

$$\mathfrak{rot}\,\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\dot{\mathfrak{H}} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{m}; \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 4\pi m$$

Die Gesamtladung $\int \mathfrak{m}\,dv$ transformiert sich bei Lorentztransformationen wie ein Pseudoskalar. Während aber die die Stromdichte $\mathfrak{m}$ und die Ladungsdichte m erzeugenden Magnetpole klassisch eine beliebige magnetische Ladung p besitzen können, ist in der Quantentheorie, wie DIRAC gezeigt hat, diese Ladung p mit dem elektrischen Elementarquantum e der Grösse nach gekoppelt: Die dimensionslose Zahl

$$\mu = \frac{e\,p}{\hbar c}$$

kann hier nur die Werte $0, \pm {}^1/_2, \pm 1, \pm {}^3/_2 \ldots$ annehmen. Da nun die Feinstrukturkonstante $\frac{e^2}{\hbar\,c}$ den Wert ${}^1/_{137}$ hat, so müssen die

magnetischen Ladungen ganzzahlige Vielfache einer Einheit sein, die, in magnetostatischen *cgs*-Einheiten gemessen $^{137}/_{2}$mal grösser ist als die Elektronenladung, gemessen in elektrostatischen *cgs*-Einheiten.

Über die Masse dieser Teilchen lässt sich auf Grund unserer heutigen Kenntnisse nichts Zwingendes aussagen. Nimmt man jedoch an, sie hätten eine Ausdehnung von der Grössenordnung des klassischen Elektronenradius, so würde ihre magnetostatische Masse 4700mal grösser sein als die Elektronenmasse.

Wenn also die klassische Theorie formal durch Einführen magnetischer Ströme und Ladungen bezüglich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ völlig symmetrisiert werden kann, so ist das in der Quantentheorie unmöglich, da $\frac{e^2}{\hbar c}$ nicht gleich 1 ist. Nur in diesem Fall könnte ja $p = e$ gesetzt werden. Wir glauben daher, dass ein wirkliches Verständnis für das Fehlen magnetischer Ladungen in der Natur erst durch eine Theorie geliefert werden kann, die den zahlenmässigen Wert der Feinstrukturkonstanten zu berechnen gestattet.

Die Bedeutung des Dirac'schen Theorems, dass $\frac{2\,e\,p}{\hbar\,c}$ eine ganze Zahl sein müsse, liegt also darin, dass es die Frage nach der Existenz magnetischer Teilchen mit dem Problem der Feinstrukturkonstanten verknüpft.

Der Beweis, den Dirac für sein Theorem gegeben hat, ist nun allerdings nicht sehr durchsichtig. Da es sich aber um einen grundlegenden Sachverhalt handelt, so soll in der vorliegenden Arbeit ein neuer Beweis gegeben werden, der auch eine korrespondenzmässige Deutung der Zusammenhänge ermöglicht.

1. Wir diskutieren zuerst die klassischen Bewegungsgleichungen, welche ein Teilchen der Masse m und der elektrischen Ladung e im Felde eines Magnetpols p beschreiben. Das magnetische Feld hat im Abstand r vom Pol p den Betrag p/r^2.

Die Gleichungen lauten, falls die magnetische Ladung im Koordinatenursprung ruht

$$m\,\ddot{\vec{x}} = \frac{e\,p}{c\,r^3}\,[\dot{\vec{x}}, \vec{x}] \tag{1.1}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die kinetische Energie konstant bleibt. Drei weitere Integrale sind durch die Komponenten des Vektors

$$\vec{d} = m\,[\vec{x}, \dot{\vec{x}}] - \frac{e\,p}{c}\,\frac{\vec{x}}{r} = \text{const.} \tag{1.2}$$

gegeben. Dies beweist man leicht, indem man (1.1) vektoriell mit $\vec{x}$

multipliziert. Der Vektor $\vec{d}$ spielt hier die Rolle des Impulsmomentes. Der 1. Term in (1.2) stellt das Impulsmoment der Teilchenbewegung dar. Der 2. Term, ein Vektor in der Verbindungsrichtung der elektrischen mit der magnetischen Ladung, hat den konstanten Betrag $\frac{ep}{c}$. Dieser Vektor ist gleich dem Impulsmoment $\vec{J}$, das durch die Überlagerung des elektrischen mit dem magnetischen Feld zustande kommt. Die beiden Felder geben nämlich zu einem Energiestrom (Poynting-Vektor) um die Verbindungslinie der beiden Ladungen Anlass. Das dem Energiestrom entsprechende Impulsfeld erzeugt das Impulsmoment $\vec{J}$.

Das Impulsmoment eines elektromagnetischen Feldes ist allgemein gegeben durch

$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi c}\int dv\,[\vec{x}, [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]] = \frac{1}{4\pi c}\int dv\,\{\mathfrak{E}(\vec{x}\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}(\vec{x}\mathfrak{E})\} \tag{1.3}$$

Denken wir uns die magnetische Ladung im Koordinatenursprung, die elektrische Ladung im Abstande a auf der Z-Achse, dann wird

$$J_z = -\frac{ep}{4\pi c}\int d\varphi \int d\vartheta \int dr \frac{a r \sin^3\vartheta}{[r^2\sin^2\vartheta + (r\cos\vartheta - a)^2]^{3/2}} \tag{1.4}$$

Aus Symmetriegründen sind $J_x = J_y = 0$.

Das Integral (1.4) lässt sich elementar auswerten und man findet in der Tat den von a unabhängigen Wert

$$J_z = -\frac{ep}{c}\,. \tag{1.5}$$

Der Massenpunkt m bewegt sich, wie aus (1.1) leicht folgt, auf einem Kreiskegel mit der Achsenrichtung $\vec{d}$. Sein Öffnungswinkel Θ ist durch die Gleichung

$$\cos\Theta = \frac{ep}{c\,|\vec{d}\,|}$$

gegeben. Rollt man den Kegel auf eine Ebene ab, so sind die Bahnkurven Geraden, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden.

2. Wir haben im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, dass durch Überlagern der von den beiden Ladungen erzeugten Felder ein Impulsmoment $\vec{J}$ entsteht, das zum Impulsmoment der Bahnbewegung addiert werden muss. Man kann nun das Dirac'sche Theorem auch so aussprechen: Der Betrag des Impulsmomentes $\vec{J}$,

der klassisch den Wert $\frac{e\,p}{c}$ besitzt, muss in der Quantentheorie gleich einem ganzen oder halbganzen Vielfachen von $\hbar$ sein.

Eine analoge Aussage gilt z. B. auch für das Impulsmoment um die Figurachse eines symmetrischen Kreisels. Man beweist solche Sätze am einfachsten, indem man von der Drehinvarianz der betreffenden Schrödingergleichung Gebrauch macht.

Die im folgenden entwickelte Beweisführung beruht auf einem Grundsatz, den zuerst PAULI[2]) in seiner Arbeit über die Frage der Ein- oder Zweiwertigkeit der Eigenfunktionen in der Wellenmechanik aufgestellt hat. PAULI fordert, dass in dieser Theorie für die Drehimpulse ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Operatoren- und Matrizenkalkül bestehen soll. Da die Drehimpulse in der Wellenmechanik zugleich die Operatoren der infinitesimalen Drehungen eines rotationssymmetrischen Problems darstellen, so bedeutet dies, dass die Eigenfunktionen des Problems eine Darstellung der Drehgruppe bilden müssen.

Wenn wir das Magnetfeld $\frac{p\vec{x}}{r^3}$ durch folgendes Vektorpotential beschreiben

$$A_x = -\frac{p}{r}\,\frac{y}{r+z}\,; \qquad A_y = \frac{p}{r}\,\frac{x}{r+z}\,; \qquad A_z = 0\,, \tag{2.1}$$

dann lautet die den Bewegungsgleichungen (1.1) entsprechende Schrödingergleichung in Polarkoordinaten

$$\Delta\Psi + \left\{\frac{2\,\mu}{r^2\,(1+\cos\vartheta)}\,\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\mu^2}{r^2}\,\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}\Psi = -2\,m\,E\Psi. \tag{2.2}$$

Dabei ist $\mu = \frac{e\,p}{\hbar\,c}$ eine dimensionslose Zahl.

Diese Gleichung ist von *Tamm*[3]) gelöst worden. Dabei hat er jedoch nach DIRAC vorausgesetzt, dass $2\,\mu = \pm\,n$, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Da wir das aber gerade beweisen wollen, so werden wir vorläufig über den Zahlenwert von μ nichts voraussetzen.

Den Integralen $\vec{d}$ (1.2) entsprechen in der Wellenmechanik die folgenden Operatoren

$$d_z = \frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \mu$$

$$d_x \pm i\,d_y = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\,\mathrm{cotg}\,\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\mu\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right) \tag{2.3}$$

Diese Operatoren können durch Ausführen einer infinitesimalen Drehung aus der Hamiltonfunktion gewonnen werden. Da die Po-

tentiale (2.1) nicht drehinvariant sind, so hat man nach der Drehung durch eine Eichtransformation die Potentiale auf die ursprüngliche Form (2.1) zu bringen. Dieser entsprechen die Zusätze proportional μ in (2.3).

Die Operatoren $\vec{d}$ erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[d_i, d_k] = i d_l \tag{2.4}$$

Man findet, dass

$$\begin{aligned}\sum_k d_k^2 = &-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \\ &-\frac{2\mu}{1+\cos\vartheta}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\mu^2(1-\cos\vartheta)}{1+\cos\vartheta} + \mu^2\end{aligned} \tag{2.5}$$

Daher kann man die Schrödingergleichung (2.2) in der Form

$$-2mE\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\left\{\sum_k d_k^2 - \mu^2\right\}\Psi \tag{2.2'}$$

schreiben. Hieraus ist ersichtlich, dass wegen (2.4) die d_k mit der Hamiltonfunktion vertauschbar sind.

Um die Gleichung (2.2′) zu lösen, machen wir für Ψ den Ansatz

$$\Psi = R(r)\, Y_m(\cos\vartheta)\, e^{i(m+\mu)\varphi} \tag{2.6}$$

m ist der Eigenwert von d_z und braucht keine ganze Zahl zu sein. Aus

$$\sum_k d_k^2\, \Psi = \lambda\Psi$$

folgt für die Funktion $Y_m(x)$, mit $x = \cos\vartheta$, die Gleichung

$$(1-x^2)\, Y_m'' - 2x\, Y_m' - \frac{\mu^2+m^2+2\mu m x}{1-x^2}\, Y_m + \lambda\, Y_m = 0 \tag{2.7}$$

Diese Gleichung ist identisch mit derjenigen eines symmetrischen Kreisels (siehe z. B. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien II (1939), S. 162, Gl. (11)).

Wegen der Vertauschbarkeit der Operatoren d_k mit der Hamiltonfunktion (d. h. wegen der Drehinvarianz des Problems) erhält man durch Anwendung des Operators $d_x + i\, d_y$ auf eine Lösung Y_m von (2.7) eine neue Lösung Y_{m+1}, die zum selben Eigenwert λ gehört. Der Operator $d_x + i\, d_y$ hat in der Variablen $x = \cos\vartheta$ die Form

$$\sqrt{1-x^2}\left(\frac{d}{dx} + \frac{mx+\mu}{1-x^2}\right) Y_m = Y_{m+1} \tag{2,8}$$

Nun gilt allgemein

$$Y' + f\,Y = e^{-\int f\,dx}\,\frac{d}{dx}\left(e^{\int f\,dx}\cdot Y\right)$$

Das gibt, auf (2.8) angewendet, mit $f = \frac{m\,x + \mu}{1 - x^2}$

$$_{m+1} = (1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\mu/2}\frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot Y_m\right\} \tag{2.9}$$

Entsprechend kann man die Operation $d_x - i\,d_y$ behandeln, wodurch man eine Formel für Y_{m-1} gewinnt.

Hieraus folgen durch wiederholtes Anwenden die beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned} Y_{m+n} &= (1-x^2)^{\frac{m+n}{2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\,Y_m\right] \\ Y_{m-n} &= (1-x^2)^{\frac{n-m}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,Y_m\right] \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich aus Y_m im allgemeinen beliebig viele Lösungen $Y_{m\pm n}(x)$ gewinnen, die alle zum selben Eigenwert λ gehören. Nach dem zu Anfang dieses Abschnitts aufgestellten Grundsatz müssen alle diese Lösungen zugelassen werden, da sonst die Operatoren d_k nicht als lineare Abbildungen im Raume der $Y_m(x)$, d. h. als Matrizen geschrieben werden können. Dazu ist aber notwendig, dass die Integrale

$$\int_{-1}^{+1} |\,Y_m(x)\,|^2\,dx$$

existieren. Wegen der in (2.10) in den zu differenzierenden Ausdrücken vorkommenden Irrationalitäten wird dies aber im allgemeinen für hinreichend grosse n nicht mehr der Fall sein.

Die Lösungen sind nur dann sämtlich regulär, wenn sowohl

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\,Y_m \tag{2.11}$$

als auch

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,Y_m \tag{2.12}$$

beides Polynome sind. Dann ist die Anzahl der Funktionen $Y_{m\pm n}$ für ein gegebenes λ endlich.

Sei nun der Ausdruck (2.11) ein Polynom $\mathfrak{P}$, dann ist (2.12) offenbar gleich

$$(1+x)^{m-\mu} \cdot (1-x)^{m+\mu} \cdot \mathfrak{P} .$$

Das ist nur dann ein Polynom, wenn m und μ beide gleichzeitig ganze oder halbganze Zahlen sind.

Das Dirac'sche Theorem ist dadurch bewiesen.

Weiter erhält man mittels der Gleichungen (2.10) eine einfache Darstellung für die Lösungen von (2.7). Man suche nämlich eine Lösung Y_m, für die gemäss (2.9) Y_{m+1} verschwindet. In diesem Falle ist der Ausdruck (2.11) eine Konstante und wir erhalten, indem wir dieses maximale m wie üblich l heissen

$$Y_{l,l,\mu} = (1+x)^{\frac{l-\mu}{2}} (1-x)^{\frac{l+\mu}{2}} \tag{2.13}$$

Das ist eine reguläre Lösung von (2.7) mit $l = m$, falls $l \geqslant |\mu|$. Durch Einsetzen ergibt sich der zugehörige Eigenwert:

$$\lambda = l(l+1)$$

l ist gleichzeitig mit μ ganz oder halbganz.

Aus den Gleichungen (2.13) und (2.10) erhalten wir weiter mit $m = l - n$ die Darstellung

$$Y_{l,m,\mu} = (1+x)^{-\frac{m-\mu}{2}} (1-x)^{-\frac{m+\mu}{2}} \frac{d^{l-m}}{d\,x^{l-m}} [(1+x)^{l-\mu} (1-x)^{l+\mu}] \tag{2.14}$$

für die Lösungen der Gleichung (2.7), die zum Eigenwert $\lambda = l(l+1)$ gehört. Als Normierungsfaktor findet man

$$\int_{-1}^{+1} |Y_{l,m,\mu}|^2 \, d\,x = N^2 = \frac{2^{2l+1}}{2l+1} (l+\mu)!\,(l-\mu)!\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \tag{2.15}$$

Da (2.7) bei gleichzeitigem Vertauschen von m mit $-m$ und μ mit $-\mu$ ungeändert bleibt, so erhalten wir für die gleichen Lösungen eine zweite Darstellung, indem wir die genannte Substitution in (2.14) und (2.15) vornehmen:

$$Y'_{l,m,\mu} = (1+x)^{\frac{m-\mu}{2}} (1-x)^{\frac{m+\mu}{2}} \frac{d^{l+m}}{d^{l+m}} [(1+x)^{l+\mu} (1-x)^{l-\mu}] \tag{2.14'}$$

$$N'^2 = \frac{2^{2l+1}}{2l+1} (l+\mu)!\,(l-\mu)!\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \tag{2.15'}$$

$Y_{l,m,\mu}$ und $Y'_{l,m,\mu}$ unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor.

Diese Formeln sind im wesentlichen schon von TAMM[3]) angegeben worden. Seine Darstellung ist jedoch etwas unübersichtlich, da Fallunterscheidungen je nach dem Vorzeichen von m und $m - \mu$ gemacht werden, was aber überflüssig ist.

Für $\mu = 0$ gehen sämtliche, in diesem Abschnitt angegebenen Formeln in diejenigen für die Kugelfunktionen über. Für $\mu = \pm {}^1/_2$ erhält man Funktionen, welche bei der Behandlung des Dirac'schen Wasserstoffatoms in Polarkoordinaten, wie das SCHRÖDINGER[3]) gezeigt hat, auftreten. Man erkennt das am einfachsten, wenn man in den von PAULI[2]) angegebenen Gleichungen (S. 159, Gl.32a,b)

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{d}{d\vartheta}(\sqrt{\sin\vartheta}\, g) + \frac{m}{\sin\vartheta} g - k f = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{d}{d\vartheta}(\sqrt{\sin\vartheta}\, f) - \frac{m}{\sin\vartheta} f + k g = 0$$

zu den Gleichungen zweiter Ordnung für f und g übergeht und $x = \cos\vartheta$ setzt. Man findet, mit $k - {}^1/_2 = l$

$$f = Y_{l,m,-\frac{1}{2}}\,; \qquad g = Y_{l,m,+\frac{1}{2}}$$

In unserer Diskussion der Gleichung (2.7) ist der von PAULI gegebene Beweis enthalten, dass in diesem Falle m und l halbganz sein müssen.

Schliesslich sei darauf hingewiesen, dass die Gleichung (2.7) mit halbzahligen m und μ auch in der von WENTZEL[5]) entwickelten Theorie der Kernkräfte auftritt.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

Literatur.

1) P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. London **133** (1931) 60.
2) W. PAULI, Helv. Phys. Acta XII (1939) 147.
3) J. TAMM, ZS. f. Ph. **71** (1931) 141.
4) E. SCHRÖDINGER, Pontificia Acad. Scient. **2** (1938) 321.
5) G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta XVI (1943) 222.