

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 16 (1943)
Heft: VI

Artikel: Zur Vektormesontheorie
Autor: Wentzel, Gregor
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111418>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Vektormesontheorie¹⁾

von Gregor Wentzel.

(1. XI. 1943.)

Die symmetrische Vektortheorie mit dem allgemeinen, zweiparametrischen Kopplungsansatz (statische Näherung) wird für den Fall starker Kopplung untersucht. Die Rechnung verläuft verschieden, je nachdem ob das Verhältnis f/g der beiden Kopplungsparameter dem Betrage nach unterhalb oder oberhalb eines kritischen Wertes liegt (§ 11). Im ersten Falle sind die Ergebnisse wesentlich dieselben wie beim speziellen Kopplungsansatz $f = 0$ (keine Kopplung der longitudinalen Mesonen). Für beide Fälle werden abgeleitet: die Isobaren-Energie (§§ 9, 13), der Mesonstreuquerschnitt (§§ 10, 13) und die statischen Kernkräfte für grosse Abstände (§§ 15, 16).

A. Allgemeines zum Ein-Nucleon-Problem.

§ 1. Problemstellung.

Beim Vergleich der Feldtheorien der Kernkräfte mit der Erfahrung darf man bekanntlich nicht die mittels der Störungsmethode abgeleiteten Formeln zugrundelegen; die tatsächliche Stärke der Kernkräfte nötigt vielmehr zur Annahme einer so starken Kopplung zwischen Feld und Nucleonen, dass die Entwicklungen nach steigenden Potenzen der Kopplungsparameter unbrauchbar werden. Zuverlässigere Ergebnisse verspricht die Methode der Entwicklung nach *fallenden* Potenzen der Kopplungsparameter²⁾. Jedenfalls müssen die verschiedenen Varianten der Mesontheorie unter der Annahme einer *starken Kopplung* mathematisch durchdiskutiert sein, bevor man darangehen kann, sie anhand der Erfahrungswerte einer mehr quantitativen Prüfung zu unterziehen.

Unter diesem Gesichtswinkel soll hier speziell die „*symmetrische Vektortheorie*“ in Angriff genommen werden. Es handelt sich also um Mesonen vom Spin 1 und mit den Ladungen ± 1 und 0, die mit Nucleonen (Proton-Neutronen) stark gekoppelt sind, und zwar wird sowohl für die longitudinal- als für die transversal-polarisierten Mesonen eine Kopplung angenommen, d.h. es wird der *allgemeinste* relativistisch zulässige *Wechselwirkungsansatz* ge-

¹⁾ Herrn A. SOMMERFELD zu seinem 75. Geburtstag gewidmet.

²⁾ G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **13**, S. 269, 1940 (im Folgenden als „I“ zitiert), ebenda **14**, S. 633, 1941 („II“), **15**, S. 685, 1942 („III“) und **16**, S. 222, 1943 („IV“). Weitere Zitate in der nächsten Fussnote.

macht. Dagegen wird durchweg nur die *statische Näherung* behandelt, d. h. die Nucleonen werden als unendlich schwer und ruhend betrachtet.

Die *Näherungsmethode* ist dieselbe, die sich bereits in der Skalartheorie bewährt hat (I, II). Die kompliziertere Struktur der Vektortheorie bedingt freilich in einigen Schritten der Rechnung eine etwas abweichende Darstellung. Dies betrifft namentlich den in den früheren Arbeiten eingeführten Gitterraum, dessen Verwendung in der Vektortheorie ganz unzweckmässig wäre. Die Einführung des Gitterraumes bedeutet nämlich die Entwicklung der Feldfunktionen nach einem speziellen Orthogonalfunktionensystem, welches dem Wechselwirkungstypus der Skalartheorie angepasst ist. Jeder Kopplungstypus stellt aber seine besonderen Anforderungen an das zweckmässig zu verwendende Orthogonalsystem, dessen Wahl im übrigen noch weitgehend der Willkür überlassen bleibt (vgl. §§ 3 und 14)¹⁾. Hiermit hängt zusammen, dass man insbesondere über die *Formfunktion des Nucleons* noch willkürlich verfügen kann, während die Einführung des Gitterraumes auch in dieser Hinsicht eine Spezialisierung bedeutet. In der Skalartheorie, wo man in den Endformeln (statische Näherung) ohne Schwierigkeit den Grenzübergang zum ausdehnungslosen Nucleon vollziehen kann (vgl. II), ist diese Beschränkung der Allgemeinheit von geringerer Bedeutung. Anders in der Vektortheorie (und übrigens auch in der Pseudoskalartheorie; vgl. IV), wo man mit einem nicht-verschwindenden Protonradius a zu rechnen gezwungen ist, weil der Grenzübergang $a \rightarrow 0$ zu absurd Folgerungen führen würde (schon in der statischen Näherung; z. B. geht die Isobaren-Anregungsenergie mit a gegen 0). Dies ist ein Mangel, der vermutlich allen Feldtheorien anhaftet, die spin-abhängige Kernkräfte liefern. Wir müssen diesen Mangel in Kauf nehmen, werden aber dann Wert darauf zu legen haben, dass die Freiheit in der Wahl der Formfunktion des Protons nicht unnötig eingeschränkt wird.

Das Vektormesonfeld der symmetrischen Theorie besteht aus 3 reellen Vektorfeldern $\vec{\psi}_\varrho(x)$ mit den 9 räumlichen Komponenten $\psi_{k\varrho}(x)$ ($k = 1, 2, 3$; $\varrho = 1, 2, 3$); der Index ϱ bezieht sich auf den „isotopen Spin“. $\pi_{k\varrho}(x)$ sei die zu $\psi_{k\varrho}(x)$ kanonisch konjugierte

¹⁾ Schon in den Rechnungen von OPPENHEIMER und SCHWINGER, deren Ergebnisse in Phys. Rev. **60**, S. 150, 1941, kurz zusammengefasst sind, wurde ein solches allgemeineres Orthogonalfunktionensystem verwendet; desgleichen in einer — hier bisher nicht erhältlichen — Arbeit von PAULI über die symmetrische Pseudoskalartheorie (Phys. Rev. 1942?). Diese Angaben verdanke ich Briefen von Herrn W. PAULI an Herrn M. FIERZ und an mich selbst.

Feldfunktion. Dann lautet die Hamiltonfunktion des kräftefreien Mesonfeldes bekanntlich:

$$H^0 = \frac{1}{2} \sum_e \int dX \left\{ |\tilde{\pi}_e|^2 + \frac{1}{\mu^2} (\operatorname{div} \tilde{\pi}_e)^2 + \mu^2 |\tilde{\psi}_e|^2 + |\operatorname{rot} \tilde{\psi}_e|^2 \right\}. \quad (1.1)$$

μ ist die Mesonruhmasse in reziproken Längen ausgedrückt (\hbar und c werden immer $= 1$ gesetzt). Den Wechselwirkungsterm der Hamiltonfunktion schreiben wir sogleich in statischer Näherung an, und zwar vorerst nur für das *Ein-Nucleon-Problem*: Es befindet sich ein einziges (ruhendes) Nucleon im Ursprung; seine Formfunktion sei δ_a :

$$\delta_a(x) = \text{reelle Funktion von } |x|, \quad \int dX \delta_a(x) = 1. \quad (1.2)$$

Die Pauli'schen Spinmatrizen des Nucleons werden mit σ_i , die analogen isotopen Spinmatrizen mit τ_e bezeichnet. Die Hamiltonfunktion schreibt sich dann¹⁾:

$$H = H^0 + H' + H'', \quad (1.3)$$

$$H' = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{ie} \sigma_i \tau_e \int dX \delta_a(x) \operatorname{rot}_i \tilde{\psi}_e - f \sum_e \tau_e \int dX \delta_a(x) \operatorname{div} \tilde{\pi}_e; \quad (1.4)$$

H'' ist ein Term $\sim f^2$, der aber im Ein-Nucleon-Problem konstant ist und ignoriert werden kann: $H'' = 0$. Die Dimensionen der (reellen) Kopplungsparameter sind: g = Länge, f = Fläche.

§ 2. Methode.

Unser Näherungsverfahren beruht auf folgendem Grundgedanken: H' ist, infolge der bilinearen Abhängigkeit von den zweireihigen Matrizen σ_i, τ_e , eine 4-reihige Matrix bezüglich der Spin- und isotopen Spin-Indices des Nucleons. Diese 4-reihige Matrix werde zunächst durch Transformation mit einer unitären Matrix S diagonal gemacht; wie sich zeigen wird, kann das Ergebnis wie folgt geschrieben werden:

$$S^* H' S = -\gamma \{ y_1 \tau_3 + y_2 \sigma_3 + y_3 \sigma_3 \tau_3 \}, \quad (2.1)$$

wo σ_3 und τ_3 diagonal gewählt sind (Eigenwerte ± 1); γ ist eine

¹⁾ Vgl. G. WENTZEL, Quantentheorie der Wellenfelder, Deuticke 1943 (im Folgenden zitiert als QdW), § 14; die dort für die nicht-symmetrische Theorie ($\tilde{\psi}_3 = 0$) angegebenen Formeln sind leicht gemäß der symmetrischen Theorie (s. § 10 daselbst) zu ergänzen.

positive Konstante, und die y_n sind in noch zu bestimmender Weise von den Feldfunktionen ψ, π abhängig. Die Eigenwerte von H' sind also:

$$\left. \begin{array}{ll} \gamma \lambda_0 = \gamma (-y_1 - y_2 - y_3) & (\tau_3 = +1, \sigma_3 = +1), \\ \gamma \lambda_1 = \gamma (-y_1 + y_2 + y_3) & (\tau_3 = +1, \sigma_3 = -1), \\ \gamma \lambda_2 = \gamma (+y_1 - y_2 + y_3) & (\tau_3 = -1, \sigma_3 = +1), \\ \gamma \lambda_3 = \gamma (+y_1 + y_2 - y_3) & (\tau_3 = -1, \sigma_3 = -1). \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

Werden die $y_n \geq 0$ gewählt, so ist $\gamma \lambda_0$ der tiefste Eigenwert (ausser wenn zwei der y_n verschwinden, welchen Fall wir ausschliessen können). In der Schrödingergleichung

$$(-E + H) F = 0 \quad (2.3)$$

substituieren wir für die (4-komponentige) Schrödingerfunktion F :

$$F = S \cdot F'. \quad (2.4)$$

Die transformierte Schrödingergleichung lässt sich dann, da S mit den y_n kommutiert, folgendermassen schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} S^* (-E + H^0 + H') S F' \\ \equiv (-E + S^* \{ H^0 - \gamma \sum_n y_n \} S \\ + \gamma \{ y_1 (1 - \tau_3) + y_2 (1 - \sigma_3) + y_3 (1 - \sigma_3 \tau_3) \}) F' = 0. \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

Die Grösse

$$H^0 - \gamma \sum_n y_n = K \quad (2.6)$$

hat, als Funktion der Feldvariablen, ein *Minimum* (ebenso auch $S^* K S$), und im Falle starker Kopplung genügt es, kleine Schwingungen um diese Minimallage zu betrachten. Die dieser Minimallage entsprechenden Werte der γy_n sind bei starker Kopplung sehr gross; genauer gesagt: mindestens zwei der Energiersterme γy_n sind sehr gross gegen die zu betrachtenden Anregungsenergien der kleinen Schwingungen. Wir denken uns nun die der Schrödingergleichung (2.5) entsprechenden Komponentengleichungen einzeln angeschrieben und beachten, dass die Diagonalmatrix

$$\gamma \{ y_1 (1 - \tau_3) + y_2 (1 - \sigma_3) + y_3 (1 - \sigma_3 \tau_3) \}$$

folgende Diagonalkomponenten hat:

$$\begin{aligned} 0 & \quad \text{für } \tau_3 = +1, \sigma_3 = +1; \\ 2\gamma(y_2 + y_3) & \quad \text{für } \tau_3 = +1, \sigma_3 = -1; \\ 2\gamma(y_3 + y_1) & \quad \text{für } \tau_3 = -1, \sigma_3 = +1; \\ 2\gamma(y_1 + y_2) & \quad \text{für } \tau_3 = -1, \sigma_3 = -1. \end{aligned}$$

Im Limes unendlich starker Kopplung (z. B. $g \rightarrow \infty$) gehen diese 4 Komponenten über in $0, \infty, \infty, \infty$. Die Eigenwerte E der Gleichung (2.5) zerfallen in 2 Gruppen, die in diesem Limes unendlich weit auseinanderliegen, und man erkennt leicht, dass die Eigen-

werte der tiefliegenden Gruppe durch eine *einkomponentige* Schrödingergleichung bestimmt werden, die wir wie folgt schreiben:

$$(-E + (S^* K S)_{00}) F'_0 = 0; \quad (2.7)$$

dabei bedeutet F'_0 diejenige der 4 Komponenten von F' , welche den Werten $\tau_3 = +1, \sigma_3 = +1$ der Spin- und isotopen Spin-Indices entspricht (d. h. dem Eigenwert $\gamma \lambda_0$ von H'), und analog ist unter $(S^* K S)_{00}$ dasjenige Diagonalelement der vierreihigen Matrix $S^* K S$ zu verstehen, das zu den Werten $\tau_3 = +1, \sigma_3 = +1$ gehört (K ist durch (2.6) definiert). Das Gesagte gilt streng im Limes unendlich starker Kopplung, *angenähert* aber auch bei endlicher, immer noch starker Kopplung; was dabei unter „starker Kopplung“ zu verstehen ist, kann erst später präzisiert werden (vgl. (5.13)). In der Tat zerfallen auch dann noch die Eigenwerte E in zwei Gruppen, die so weit auseinanderliegen, dass man sich nur für die tiefliegende Gruppe zu interessieren braucht, und diese tiefliegenden Eigenwerte bestimmen sich näherungsweise durch die *einkomponentige* Schrödingergleichung (2.7), vorausgesetzt, dass die Ausserdiagonalelemente $(S^* K S)_{0m}$ der Matrix $S^* K S$ klein sind gegen die nicht-verschwindenden Größen γy_n (bzw. gegen deren Werte in der Minimallage), was bei starker Kopplung zutrifft (vgl. § 8). Von (2.7) ausgehend, kann man leicht durch eine Störungsrechnung zu sukzessiv verbesserten Approximationen gelangen, was auf eine Entwicklung nach fallenden Potenzen der Kopplungsparameter hinausläuft¹⁾. Alle für die Theorie charakteristischen Aussagen sind aber schon aus (2.7) zu gewinnen, und wir beschränken uns deshalb in allem Folgenden auf diese Näherung. Die Hauptaufgabe reduziert sich dann auf die Berechnung des massgebenden Matrixelementes $(0,0)$ der Matrix $S^* K S = S^* (H^0 - \gamma \sum_n y_n) S$, wofür in erster Linie die Größen y_n sowie die Matrix S aus (2.1) zu bestimmen sind.

§ 3. Einführung passender Feldvariablen.

Die reellen Ortsfunktionen $U_s(x)$ ($s = 1 \dots \infty$) mögen ein vollständiges Orthogonalsystem bilden:

$$\int dX U_r(x) U_s(x) = \delta_{rs}, \quad \sum_s^\infty U_s(x) U_s(x') = \delta(x - x').^2) \quad (3.1)$$

¹⁾ Für die Skalartheorie wurde die Störungsrechnung in I, § 6 skizziert. In den dortigen Formeln (54) bis (57) (mit (29)) ist die den obigen Gleichungen (2.4 ff) entsprechende S-Transformation durchgeführt.

²⁾ \sum soll andeuten, dass die unter dem Σ -Zeichen stehenden Indices von 1 bis ∞ laufen, während sonst nur über 1, 2, 3 summiert wird.

Anstelle der Feldfunktionen $\psi_{k\varrho}(x)$, $\pi_{k\varrho}(x)$ führen wir neue kanonische Variable q , p ein durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \psi_{k\varrho}(x) &= \sum_s^\infty U_s(x) q_{sk\varrho}, \quad \pi_{k\varrho}(x) = \sum_s^\infty U_s(x) p_{sk\varrho}, \\ q_{sk\varrho} &= \int dX U_s(x) \psi_{k\varrho}(x), \quad p_{sk\varrho} = \int dX U_s(x) \pi_{k\varrho}(x). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

In den neuen Variablen ausgedrückt lautet H^0 (1.1):

$$H^0(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{rs}^\infty \sum_{kl\varrho} (A_{rk, sl} p_{rk\varrho} p_{sl\varrho} + B_{rk, sl} q_{rk\varrho} q_{sl\varrho}), \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{rk, sl} &= \int dX U_r \left(\delta_{kl} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \right) U_s, \\ B_{rk, sl} &= \int dX U_r \left(\delta_{kl} (\mu^2 - \Delta) + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \right) U_s. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Um andererseits für H' eine möglichst einfache Darstellung zu erhalten, wählen wir die Funktionen U_1 , U_2 , U_3 wie folgt:

$$U_i(x) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \delta_a(x)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3); \quad (3.5)$$

dabei bestimmt sich η durch die Normierungsbedingung $\int dX U_i^2 = 1$:

$$\eta^2 = \int dX \left(\frac{\partial \delta_a(x)}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{3} \int dX \delta_a(x) (-\Delta) \delta_a(x); \quad (3.6)$$

η ist von der Größenordnung $a^{-5/2}$. Die 3 Funktionen (3.5) sind offenbar aufeinander orthogonal. U_4 , U_5 , ... brauchen wir dann nur den Bedingungen (3.1) zu unterwerfen; eine genauere Kenntnis dieser Funktionen wird nicht vonnöten sein. Mit (3.2) und (3.5) wird

$$\begin{aligned} \int dX \delta_a(x) \operatorname{rot}_1 \tilde{\psi}_\varrho &= -\eta \int dX (U_2 \psi_{3\varrho} - U_3 \psi_{2\varrho}) = -\eta (q_{23\varrho} - q_{32\varrho}), \\ \int dX \delta_a(x) \operatorname{div} \tilde{\pi}_\varrho &= -\eta \int dX \sum_i U_i \pi_{i\varrho} = -\eta \sum_i p_{ii\varrho}; \end{aligned}$$

also nach (1.4):

$$\begin{aligned} H' = \eta \left\{ \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_\varrho \tau_\varrho [\sigma_1 (q_{23\varrho} - q_{32\varrho}) + \sigma_2 (q_{31\varrho} - q_{13\varrho}) + \sigma_3 (q_{12\varrho} - q_{21\varrho})] \right. \\ \left. + f \sum_\varrho \tau_\varrho \sum_i p_{ii\varrho} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Weiter definieren wir für $i = 1, 2, 3$:

$$\left. \begin{aligned} q_{(ik)\varrho} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{ik\varrho} + q_{ki\varrho}), & q_{[ik]\varrho} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{ik\varrho} - q_{ki\varrho}), \\ p_{(ik)\varrho} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{ik\varrho} + p_{ki\varrho}), & p_{[ik]\varrho} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{ik\varrho} - p_{ki\varrho}). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Für $i \neq k$ definieren diese Formeln neue kanonische Variablenpaare $q_{(ik)\varrho}, p_{(ik)\varrho}$ bzw. $q_{[ik]\varrho}, p_{[ik]\varrho}$, die wir gelegentlich auch als eigentliche kanonische Koordinaten verwenden werden; die Definitionsformeln (3.8) sollen aber auch für $i = k$ gelten. Allgemein verwenden wir bezüglich beliebiger Größen a, b die Bezeichnungen:

$$\left. \begin{aligned} a_{(ik)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{ik} + a_{ki}), & a_{[ik]} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{ik} - a_{ki}), \\ a_{(i)b_k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_i b_k + a_k b_i), & a_{[i]b_k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_i b_k - a_k b_i). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Z. B. wird nach (3.4), bei Berücksichtigung von (3.1 und 5):

$$A_{[ik], sl} = \delta_{s[i} \delta_{k]l} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_{si} \delta_{kl} - \delta_{sk} \delta_{il}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.10)$$

Beachtet man dies, so schreiben sich die p -abhängigen Terme in H^0 (3.3) mit den Variablen (3.8) wie folgt:¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl\varrho} A_{rk, sl} p_{rk\varrho} p_{sl\varrho} &= \frac{1}{2} \sum_{rs}^{\infty''} \sum_{kl\varrho} A_{rk, sl} p_{rk\varrho} p_{sl\varrho} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_s^{\infty'} \sum_{ikl\varrho} A_{(ik), sl} p_{(ik)\varrho} p_{sl\varrho} + \frac{1}{8} \sum_{ijk\varrho} A_{(ik), (jl)} p_{(ik)\varrho} p_{(jl)\varrho} \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{ik\varrho} p_{[ik]\varrho}^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für die q -abhängigen Terme in H^0 gilt eine ähnliche Formel, doch wird diese im Folgenden nicht gebraucht. Schliesslich führen wir die Variablen (3.8) auch in H' (3.7) ein; schreiben wir zur Abkürzung

$$q_{[23]\varrho} = q_{1\varrho}, \quad q_{[31]\varrho} = q_{2\varrho}, \quad q_{[12]\varrho} = q_{3\varrho}, \quad (3.12)$$

so wird

$$H' = \eta \left\{ g \sum_{i\varrho} \sigma_i \tau_\varrho q_{i\varrho} + f \sum_{i\varrho} \tau_\varrho p_{ii\varrho} \right\}. \quad (3.13)$$

¹⁾ Ein Strich am Summenzeichen deutet an, dass die Indexwerte 1, 2, 3 auszulassen sind:

$$\sum_s^{\infty'} = \sum_{s=4}^{\infty}, \quad \sum_{rs}^{\infty''} = \sum_{r=4}^{\infty} \sum_{s=4}^{\infty}$$

Alternativ führen wir folgende Bezeichnungsweise ein: $\langle j k \rangle$ bedeute den zyklisch zu j, k gehörigen Index, also $\langle 23 \rangle = 1, \langle 31 \rangle = 2, \langle 12 \rangle = 3$; dann schreibt sich (3.7) oder (3.13):¹⁾

$$H' = \eta \left\{ g \sum_{\langle j k \rangle \varrho} \sigma_{\langle j k \rangle} \tau_\varrho q_{[j k] \varrho} + f \sum_{i \varrho} \tau_\varrho p_{i i \varrho} \right\}. \quad (3.14)$$

Zur Verwendung im Folgenden definieren wir hier noch Grössen $\bar{A}_{sl, rk}, \bar{B}_{sl, rk}$ durch die Formeln:

$$\sum_s^{\infty} \sum_l A_{rk, sl} \bar{A}_{sl, r' k'} = \sum_s^{\infty} \sum_l B_{rk, sl} \bar{B}_{sl, r' k'} = \delta_{rr'} \delta_{kk'}; \quad (3.15)$$

es sind also \bar{A}, \bar{B} die zu den Matrizen A, B inversen Matrizen. Dieser Forderung entsprechen die folgenden Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{sl, rk} &= \int dX U_s \left(\delta_{lk} + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \frac{1}{\mu^2 - \Delta} \right) U_r, \\ \bar{B}_{sl, rk} &= \int dX U_s \left(\delta_{lk} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \right) \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_r, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

wo der Operator $(\mu^2 - \Delta)^{-1}$ in bekannter Weise definiert ist durch

$$\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U(x) = \int dX' U(x') \frac{e^{-\mu |x' - x|}}{4\pi |x' - x|} \quad (3.17)$$

(die Operationen $(\mu^2 - \Delta)^{-1}$ und $\partial/\partial x_k$ sind in der Reihenfolge vertauschbar). Dass die Relationen (3.15) mit (3.4 und 16) erfüllt sind, verifiziert man leicht auf Grund der Identität:

$$\sum_l \left(\delta_{kl} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \right) \left(\delta_{lk'} + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_{k'}} \frac{1}{\mu^2 - \Delta} \right) = \delta_{kk'}.$$

Eine besondere Rolle spielen im Folgenden die Grössen $\bar{B}_{[jl], rk}$ ($j = 1, 2, 3$). Beachtet man (3.5), so ergibt sich aus (3.16):

$$\bar{B}_{[jl], rk} = \delta_{k[l} C_{j]r}, \text{ wo } C_{jr} = \int dX U_j \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_r. \quad (3.18)$$

Speziell für $r = i$ ($= 1, 2, 3$) wird nach (3.5) und (1.2) aus Symmetriegründen $C_{ji} = \delta_{ji} \cdot C$, also

$$\bar{B}_{[jl]ik} = C \cdot \delta_{k[l} \delta_{j]i}, \quad C = C_{11} = \frac{1}{3 \eta^2} \int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{\mu^2 - \Delta} \delta_a(x). \quad (3.19)$$

¹⁾ In der Summe $\sum_{\langle j k \rangle}$ kommt natürlich jede Indexkombination j, k ($j \neq k$) nur einmal vor; es ist also $\sum_{\langle j k \rangle} = \frac{1}{2} \sum_{jk}$.

B. Spezieller Kopplungsansatz: $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.**§ 4. Die Eigenwerte von H' .**

Für $f = 0$ haben wir nach (3.13):

$$H' = \gamma \sum_{i\varrho} \sigma_i \tau_\varrho q_{i\varrho}, \text{ mit } \gamma = \eta g. \quad (4.1)$$

Um diese 4-reihige Matrix, gemäss dem in § 2 skizzierten Programm, auf Diagonalform zu transformieren, führen wir zunächst einige Hilfsgrössen ein. Wir betrachten die zwei symmetrischen Tensoren

$$T_{\varrho\sigma} = \sum_i q_{i\varrho} q_{i\sigma}, \quad T'_{ij} = \sum_\varrho q_{i\varrho} q_{j\varrho} \quad (\varrho, \sigma, i, j = 1, 2, 3). \quad (4.2)$$

Man erkennt leicht, dass beide Tensoren die *gleichen* (positiven) Eigenwerte haben; wir nennen diese r_n^2 ($n = 1, 2, 3$) und bezeichnen die zugehörigen normierten Eigenvektoren mit s_n (Komponenten $s_{\varrho n}$) bzw. s'_n (Komponenten s'_{in}):

$$\sum_\sigma T_{\varrho\sigma} s_{\sigma n} = r_n^2 s_{\varrho n}, \quad \sum_j T'_{ij} s'_{jn} = r_n^2 s'_{in}; \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_\varrho s_{\varrho n} s_{\varrho m} &= \delta_{nm}, & \sum_i s'_{in} s'_{im} &= \delta_{nm}, \\ \sum_n s_{\varrho n} s_{\sigma n} &= \delta_{\varrho\sigma}, & \sum_n s'_{in} s'_{jn} &= \delta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Die Eigenvektoren s_n und s'_n hängen wie folgt zusammen:

$$s_{\varrho n} = \frac{1}{r_n} \sum_i s'_{in} q_{i\varrho}, \quad s'_{in} = \frac{1}{r_n} \sum_\varrho s_{\varrho n} q_{i\varrho}.$$

Wegen (4.4) folgt hieraus:

$$q_{i\varrho} = \sum_n r_n s'_{in} s_{\varrho n}. \quad (4.5)$$

In dieser Weise können also die 9 Grössen $q_{i\varrho}$ durch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Tensoren T , T' dargestellt werden.

Wir setzen (4.5) in (4.1) ein:

$$H' = \gamma \sum_n r_n \left(\sum_i \sigma_i s'_{in} \right) \left(\sum_\varrho \tau_\varrho s_{\varrho n} \right). \quad (4.6)$$

Da die Koeffizientenschemata $s_{\varrho n}$ bzw. s'_{in} Drehungen im dreidimensionalen Raum darstellen, kann man bekanntlich unitäre Matrizen Y , Y' konstruieren mit den Eigenschaften:

$$\sum_\varrho \tau_\varrho s_{\varrho n} = Y \tau_n Y^*, \quad \sum_i \sigma_i s'_{in} = Y' \sigma_n Y'^*. \quad (4.7)$$

Da Y nur von den τ_ϱ , Y' nur von den σ_i abhängt, gilt: $[Y, \sigma_i] = 0$, $[Y', \tau_\varrho] = 0$, $[Y, Y'] = 0$. Folglich gibt (4.6) mit (4.7):

$$H' = \gamma \cdot YY' \cdot \sum_n r_n \sigma_n \tau_n \cdot (YY')^*. \quad (4.8)$$

Es bleiben also nur noch die 3 Matrizen $\sigma_n \tau_n$ simultan diagonal zu machen. Dazu kann z. B. die unitäre Matrix

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 + i \tau_2) \quad (4.9)$$

dienen; in der Tat verifiziert man leicht:

$$\sigma_1 \tau_1 = -Z \tau_3 Z^*, \quad \sigma_2 \tau_2 = -Z \sigma_3 Z^*, \quad \sigma_3 \tau_3 = -Z \sigma_3 \tau_3 Z^* \quad (4.10)$$

(σ_3 und τ_3 seien wieder diagonal gewählt). Hiermit wird (4.8):

$$H' = -\gamma S (r_1 \tau_3 + r_2 \sigma_3 + r_3 \sigma_3 \tau_3) S^*, \text{ mit } S = Y Y' Z. \quad (4.11)$$

Dies stimmt mit (2.1) überein, wo

$$y_n = r_n \quad (4.12)$$

zu setzen ist. Die Eigenwerte von H' lassen sich also, wie behauptet, in der Form (2.2) darstellen, wo die $y_n = r_n$ als Quadratwurzeln der Eigenwerte der Tensoren (4.2) zu berechnen sind. Die Betrachtungen im § 2 setzen übrigens noch voraus, dass die $r_n \geq 0$ gewählt werden, ferner $\gamma = \eta g > 0$, was durch Wahl des Vorzeichens von η , d. h. des Normierungsfaktors in (3.5), zu erreichen ist.

§ 5. Minimallagen. Bedingung für starke Kopplung.

Die in (2.6) definierte Funktion K lautet jetzt, mit (4.12):

$$K = H^0 - \gamma \sum_n r_n. \quad (5.1)$$

In H^0 denken wir uns gemäß (3.8) die Variablen $q_{(ik)\varrho}$ und $q_{[ik]\varrho}$ eingeführt, wobei wir die $q_{[ik]\varrho}$ oder $q_{i\varrho}$ (vgl. (3.12)) gemäß (4.5) durch die r_n ausgedrückt denken:

$$q_{[ik]\varrho} = \sum_n r_n s'_{ik>n} s_{\varrho n} \quad (5.2)$$

(bezüglich der Bezeichnung $\langle i k \rangle$ vgl. (3.14)). Wir suchen nun das Minimum von K als Funktion der Variablen $q_{sl\varrho}$ und r_n , wobei die $q_{[ik]\varrho}$ mit den r_n durch (5.2) verknüpft sind; $s_{\varrho n}$ und $s'_{ik>n}$ gelten hierbei als konstant. Führen wir den Nebenbedingungen

(5.2) entsprechende Lagrange-Multiplikatoren $\alpha_{\langle ik \rangle \varrho}$ ein, so haben wir also das Variationsproblem:

$$dK - \sum_{\langle ik \rangle \varrho} \alpha_{\langle ik \rangle \varrho} \cdot d(q_{[ik] \varrho} - \sum_n r_n s'_{\langle ik \rangle n} s_{\varrho n}) = 0, \quad (5.3)$$

oder mit (5.1) und (3.3) (vgl. auch (3.8 und 9)):

$$\sum_r^{\infty} \sum_k B_{rk, sl} q_{rk \varrho} - \sum_{\langle ik \rangle} \alpha_{\langle ik \rangle \varrho} \delta_{s[i] \delta_{k] l} = 0, \quad (5.4)$$

$$\gamma - \sum_{\langle ik \rangle \varrho} \alpha_{\langle ik \rangle \varrho} s'_{\langle ik \rangle n} s_{\varrho n} = 0 \quad (n = 1, 2, 3). \quad (5.5)$$

(5.4) ergibt vermöge (3.15):

$$q_{rk \varrho} = \sum_s^{\infty} \sum_l \bar{B}_{sl, rk} \sum_{\langle i' k' \rangle} \alpha_{\langle i' k' \rangle \varrho} \delta_{s[i'] \delta_{k'] l} = \sum_{\langle i' k' \rangle} \alpha_{\langle i' k' \rangle \varrho} \bar{B}_{[i' k'], rk}. \quad (5.6)$$

Speziell für $r = i$ ($= 1, 2, 3$) folgt hieraus, bei Verwendung von (3.19):

$$q_{ik \varrho} = C \sum_{\langle i' k' \rangle} \alpha_{\langle i' k' \rangle \varrho} \delta_{k[k']} \delta_{i' i}, \quad q_{(ik) \varrho} = 0, \quad q_{[ik] \varrho} = C \alpha_{\langle ik \rangle \varrho}.$$

Die Multiplikatoren α haben also die Werte:

$$\alpha_{\langle ik \rangle \varrho} = \frac{1}{C} q_{[ik] \varrho} = \frac{1}{C} \sum_m r_m s'_{\langle ik \rangle m} s_{\varrho m}. \quad (5.7)$$

Wenn man dies in (5.5) einsetzt und dort die Summationen über die Indices ϱ und $\langle ik \rangle$ mit Hilfe von (4.4) ausführt, so folgt: $r_n = \gamma C$. Die Funktion K nimmt demnach ihren Minimalwert an für folgende Werte der r_n und $q_{rk \varrho}$:

$$\dot{r}_n = \gamma C, \quad \dot{q}_{rk \varrho} = \gamma \sum_{jl} \bar{B}_{[jl], rk} \sum_n s'_{\langle jl \rangle n} s_{\varrho n}, \quad (5.8)$$

insbesondere gilt für $r = i \leq 3$:

$$\dot{q}_{(ik) \varrho} = 0, \quad \dot{q}_{[ik] \varrho} = \gamma C \sum_n s'_{\langle ik \rangle n} s_{\varrho n}. \quad (5.9)$$

Vollziehen wir also im q -Raum die Translation

$$r_n = \dot{r}_n + r_n', \quad q_{rk \varrho} = \dot{q}_{rk \varrho} + q'_{rk \varrho}, \quad (5.10)$$

so wird K offenbar in eine quadratische Form plus additive Konstante verwandelt, nämlich:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl \varrho} (A_{rk, sl} p_{rk \varrho} p_{sl \varrho} + B_{rk, sl} q'_{rk \varrho} q'_{sl \varrho}) + \text{const.}; \quad (5.11)$$

hier sind die $q'_{[ik]\varrho}$ ($i \leqq 3$) durch die r'_n ausgedrückt zu denken gemäss der Formel

$$q'_{[ik]\varrho} = \sum_n r'_n s'_{\langle ik \rangle n} s_{\varrho n}. \quad (5.12)$$

Obwohl K von den r' und q' rein quadratisch abhängt, entsprechen die Lösungen von (2.7) doch nicht unter allen Umständen harmonischen Schwingungen. Dies liegt (ähnlich wie in der Skalartheorie; vgl. I, § 5, und II, 1. Abschnitt) daran, dass die Variablen r_n auf die Bereiche $r_n \geqq 0$, folglich die $r'_n = r_n - \gamma C$ auf die Bereiche $r'_n \geqq -\gamma C$ beschränkt sind. Nur wenn diese Ungleichungen die Bewegungsfreiheit der oszillatorischen Koordinaten r'_n nicht merklich einschränken, d. h. wenn der Erwartungswert von r'^2 klein gegen $(\gamma C)^2$ ist, kann man mit harmonischen Schwingungen als Lösungen rechnen. Für eine größenordnungsmässige Abschätzung genügt es, $\overline{r'^2}$ für die Nullpunktsschwingung zu berechnen. Ferner ist leicht zu sehen, dass $\overline{r'^2}$ durch den für kräftefreie Mesonen ($g = 0$) berechneten Erwartungswert von $q^2_{[ik]\varrho}$ ersetzt werden kann. Man findet so:

$$\overline{r'^2} \sim \int dX U_1 \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - \Delta}} U_1 \sim \begin{cases} \frac{1}{\eta^2 a^4} & \text{für } a\mu \ll 1, \\ \frac{1}{\eta^2 \mu a^5} & \text{für } a\mu \gg 1. \end{cases}$$

Andererseits ist nach (3.19)

$$\gamma C = g \eta C \sim \begin{cases} \frac{g}{\eta a^3} & \text{für } a\mu \ll 1, \\ \frac{g}{\eta \mu^2 a^5} & \text{für } a\mu \gg 1. \end{cases}$$

Die Bedingung $\overline{r'^2} \ll (\gamma C)^2$ lautet demnach:

$$\begin{cases} |g| \gg a & \text{für } a\mu \ll 1, \\ g^2 \gg a^5 \mu^3 & \text{für } a\mu \gg 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

Ungestörte harmonische Schwingungen gibt es also nur bei *genügend starker Kopplung*: Im wichtigeren Falle $a\mu \ll 1$ muss der *Kopplungsparameter* $|g|$ gross gegen den Protonradius a sein, damit unser Verfahren ohne weiteres anwendbar ist. Wie aus dem Folgenden hervorgeht, genügt dies auch, damit die ersten Schritte der Entwicklung nach fallenden Potenzen von g rasch konvergieren.

§ 6. Einführung von Winkelkoordinaten.

Mit der Abkürzung

$$\Gamma = \gamma C = g \eta C \quad (6.1)$$

schreiben wir die Formel (5.9) für $\dot{q}_{[ik]\varrho}$ (vgl. (3.12)):

$$\dot{q}_{i\varrho} = \Gamma S_{i\varrho}, \quad \text{wo } S_{i\varrho} = \sum_n s'_{in} s_{\varrho n}. \quad 6.2)$$

Die S_{i_0} definieren wiederum eine Drehung:

$$\sum_{\varrho} S_{i\varrho} S_{j\varrho} = \delta_{ij}, \quad \sum_i S_{i\varrho} S_{i\sigma} = \delta_{\varrho\sigma}. \quad (6.3)$$

Die allgemeine Drehung im dreidimensionalen Raum lässt sich durch 3 Euler'sche Winkel darstellen:

Ferner entnehmen wir aus (6.2) $s'_{in} = \sum_\sigma S_{i\sigma} s_{\sigma n}$ und setzen dies in (5.12) ein:

$$q'_{i\varrho} = \sum_{\sigma} S_{i\sigma} \xi_{\varrho\sigma}, \quad \text{wo} \quad \xi_{\varrho\sigma} = \sum_n r_n' s_{\varrho n} s_{\sigma n} = \xi_{\sigma\varrho}. \quad (6.5)$$

Als symmetrischer Tensor hat ξ sechs unabhängige Komponenten. Vermöge (6.2, 4 und 5) können wir nun die 9 Feldvariablen $q_{[jk]\varrho} = q_{i\varrho} = \dot{q}_{i\varrho} + q'_{i\varrho}$ durch 9 neue Variable

$$\Theta, \Phi, \Psi; \quad \xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}; \quad \xi_{23} = \xi_{32}, \xi_{31} = \xi_{13}, \xi_{12} = \xi_{21} \quad (6.6)$$

darstellen:

$$q_{i\varrho} = \Gamma S_{i\varrho}(\Theta \Phi \Psi) + \sum_{\sigma} \xi_{\varrho\sigma} S_{i\sigma}(\Theta \Phi \Psi). \quad (6.7)$$

Die zu den q -Variablen (6.6) kanonisch konjugierten Impulse nennen wir

$$p_\Theta, p_\Phi, p_\Psi; \pi_{11}, \pi_{22}, \pi_{33}; \pi_{23} = \pi_{32}, \pi_{31} = \pi_{13}, \pi_{12} = \pi_{21}. \quad (6.8)$$

Man erhält sie als Funktionen der p_{ie} ($= p_{[jk]e}$) mit Hilfe der „erzeugenden Funktion“

$$G = \sum_{i\sigma} (\Gamma S_{i\sigma} + \sum_{\sigma} \xi_{\sigma\sigma} S_{i\sigma}) p_{i\sigma}$$

durch die Gleichungen

$$p_{\Theta} = \frac{\partial G}{\partial \Theta}, \dots, \dots, \pi_{\varrho\sigma} = \frac{\partial G}{\partial \xi_{\varrho\sigma}}; \quad (6.9)$$

z. B. wird (wenn man $\xi_{\varrho\sigma} \equiv \xi_{\sigma\varrho}$ beachtet):

$$\pi_{\varrho\sigma} = \sum_i (S_{i\sigma} p_{i\varrho} + S_{i\varrho} p_{i\sigma} - \delta_{\varrho\sigma} S_{i\varrho} p_{i\varrho}).$$

Diese Gleichungen haben wir nach den $p_{i\varrho}$ aufzulösen. Dies kann durch Entwicklung nach den $\xi_{\varrho\sigma}$ geschehen. Man beachte, dass die Variablen $\xi_{\varrho\sigma}$ (nach ihrer Definition (6.5)) nur Schwingungen ausführen, deren Amplituden klein gegen Γ sind; denn dies war gerade die Aussage der „Bedingung für starke Kopplung“ (5.13). Diese Bedingung garantiert also die rasche Konvergenz einer Entwicklung nach $\xi_{\varrho\sigma} / \Gamma$. Für das Folgende genügt die Angabe der ξ -freien Terme.

Zur Darstellung des Ergebnisses führen wir folgende Operatoren ein:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= + \sin \Psi \cdot p_\Theta + \frac{\cos \Psi}{\sin \Theta} (p_\Phi + \cos \Theta \cdot p_\Psi), \\ P_2 &= - \cos \Psi \cdot p_\Theta + \frac{\sin \Psi}{\sin \Theta} (p_\Phi + \cos \Theta \cdot p_\Psi), \\ P_3 &= p_\Psi. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Dies sind hermitische Operatoren mit den Vertauschungsrelationen von Drehimpulsen:

$$[P_2, P_3] = i P_1, [P_3, P_1] = i P_2, [P_1, P_2] = i P_3. \quad (6.11)$$

Ferner gilt:

$$\left. \begin{aligned} [P_\varrho, S_{i\varrho}] &= 0, \\ i [P_3, S_{i2}] &= -i [P_2, S_{i3}] = S_{i1}, \dots, \dots \text{ (zyklisch)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Hiermit definieren wir weitere hermitische Operatoren:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i1} &= \frac{1}{2\Gamma} (S_{i3} P_2 - S_{i2} P_3 + i S_{i1}) \\ &= \frac{1}{2\Gamma} (P_2 S_{i3} - P_3 S_{i2} - i S_{i1}), \dots, \dots \text{ (zyklisch)}; \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\bar{\bar{p}}_{i1} = S_{i1} \pi_{11} + \frac{1}{2} S_{i2} \pi_{12} + \frac{1}{2} S_{i3} \pi_{13}, \dots, \dots \text{ (zyklisch)}. \quad (6.14)$$

Das Ergebnis der oben angedeuteten Rechnung lautet dann (in hermitisierter Form):

$$p_{i\varrho} = \bar{p}_{i\varrho} + \bar{\bar{p}}_{i\varrho} + \dots \quad (6.15)$$

(die Punkte deuten die ξ enthaltenden Terme an). In der Tat folgt aus (6.7, 12, 13, 14):

$$i [\bar{p}_{i\varrho}, q_{j\sigma}] = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{\varrho\sigma} - S_{i\sigma} S_{j\varrho}) + \dots, \quad (6.16)$$

$$i [\bar{\bar{p}}_{i\varrho}, q_{j\sigma}] = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{\varrho\sigma} + S_{i\sigma} S_{j\varrho}) + \dots, \quad (6.17)$$

so dass die Vertauschungsrelationen $i[p_{i\varrho}, q_{j\sigma}] = \delta_{ij} \delta_{\varrho\sigma}$ hinsichtlich der ξ -freien Terme erfüllt sind.

Wir kommen jetzt auf die in § 5 besprochene q -Raum-Translation zurück. Unter Verwendung von (5.8, 9) und (6.2, 5) können wir die Translation (5.10) folgendermassen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} q_{(jk)\varrho} &= q'_{(jk)\varrho}, \quad q_{[jk]\varrho} \equiv q_{i\varrho} = \Gamma S_{i\varrho} + \sum_{\sigma} \xi_{\varrho\sigma} S_{i\sigma}, \\ r > 3: \quad q_{rk\varrho} &= \dot{q}_{rk\varrho} + q'_{rk\varrho}, \quad \text{wo} \quad \dot{q}_{rk\varrho} = \gamma \sum_{\langle jl\rangle} \bar{B}_{[jl], rk} S_{\langle jl\rangle\varrho}. \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Neben den Variablen (6.6) denken wir uns nun die Grössen $q'_{(jk)\varrho}$ ($j \neq k$), $q'_{jj\varrho}$ und $q'_{rk\varrho}$ ($r > 3$) als Lagenkoordinaten eingeführt. Dabei ist zu beachten, dass die Verschiebung $\dot{q}_{rk\varrho}$ der q -Variablen mit $r > 3$ von den Winkelkoordinaten $\Theta \Phi \Psi$ abhängt. Man muss daher, um eine kanonische Transformation zu erhalten, noch eine lineare Transformation des p -Raumes vornehmen. Wir machen den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} p_{(jk)\varrho} &= p'_{(jk)\varrho}, \quad p_{[jk]\varrho} \equiv p_{i\varrho} = p'_{i\varrho} + \sum_s^{\infty} \sum_{l\sigma} \lambda_{i\varrho, sl\sigma} p'_{sl\sigma}, \\ r > 3: \quad p_{rk\varrho} &= p'_{rk\varrho}. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Dabei soll $p'_{i\varrho}$ denselben Operator bedeuten, der in (6.15) mit $p_{i\varrho}$ bezeichnet wurde:

$$p'_{i\varrho} = \bar{p}_{i\varrho} + \bar{\bar{p}}_{i\varrho} + \dots, \quad i[p'_{i\varrho}, q_{j\sigma}] = \delta_{ij} \delta_{\varrho\sigma} \quad (6.20)$$

Damit die kanonischen Vertauschungsrelationen für die alten und neuen Variablen gelten, muss man nur die Koeffizienten λ in (6.19) so wählen, dass

$$i[p_{i\varrho}, q_{rk\sigma}] = \lambda_{i\varrho, rk\sigma} + i[p'_{i\varrho}, \dot{q}_{rk\sigma}] = 0 \quad \text{für } r > 3.$$

Nach (6.18) ergibt dies, bis auf uninteressante ξ -Terme:

$$\lambda_{i\varrho, rk\sigma} = -i\gamma \sum_{\langle jl\rangle} \bar{B}_{[jl], rk} [\bar{p}_{i\varrho}, S_{\langle jl\rangle\sigma}] + \dots \quad (r > 3),$$

oder, da $S_{\langle jl\rangle\sigma} \cong (\gamma C)^{-1} q_{\langle jl\rangle\sigma}$, nach (6.16):

$$\lambda_{i\varrho, rk\sigma} = \begin{cases} -\frac{1}{2C} \sum_{\langle jl\rangle} \bar{B}_{[jl], rk} (\delta_{i\langle jl\rangle} \delta_{\varrho\sigma} - S_{i\sigma} S_{\langle jl\rangle\varrho}) + \dots & \text{für } r > 3, \\ 0 & \text{für } r \leq 3. \end{cases} \quad (6.21)$$

Es bleibt noch übrig, die neuen Variablen in die Funktion K (5.11) einzuführen. Da die Grössen $p_{i\varrho} \equiv p_{[jk]\varrho}$ nach (3.11) nur in dem Term

$$\frac{1}{4} \sum_{jk\varrho} p_{[jk]\varrho}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i\varrho} p_{i\varrho}^2$$

vorkommen, kann man das Ergebnis wie folgt darstellen:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl\varrho} (A_{rk, sl} p'_{rk\varrho} p'_{sl\varrho} + B_{rk, sl} q'_{rk\varrho} q'_{sl\varrho}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i\varrho} \left[-p'^2_{i\varrho} + \left\{ p'_{i\varrho} + \sum_s^{\infty} \sum_{l\sigma} \lambda_{i\varrho, sl\sigma} p'_{sl\sigma} \right\}^2 \right] + \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

In den q' -abhangigen Termen sind gemäss (5.12) bzw. (6.5) die Grössen $q'_{[jk]\varrho}$ durch $\sum_{\sigma} \xi_{\varrho\sigma} S_{<jk>\sigma}$ ersetzt zu denken.

§ 7. Aufspaltung von K in Isobareterm und Energie der freien Mesonen.

K (6.22) hängt quadratisch von den Drehimpuls-Operatoren P_n (6.10) ab, nämlich auf dem Wege über die $p'_{i\varrho}$ (vgl. (6.20 und 13)). Um eine Separation in P_n -abhängige und P_n -unabhängige Terme (die ersten werden die Isobaren-Energie liefern) zu erhalten, führen wir eine Translation im p -Raum durch:

$$p'_{(jk)\varrho} = p''_{(jk)\varrho} + \dot{p}_{(jk)\varrho}, \quad p'_{sl\sigma} = p''_{sl\sigma} + \dot{p}_{sl\sigma} \quad (s > 3) \quad (7.1)$$

(wobei also die $p'_{i\varrho}$ untransformiert bleiben und daher hier unter die „Konstanten“ gerechnet werden können), mit der Forderung, dass die in den p'' linearen Terme verschwinden sollen.

Die Bestimmung der Translation \dot{p} erfolgt am einfachsten durch Bestimmung des Minimums von K (6.22) bei festgehaltenen $p'_{[ij]\varrho}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p'_{sl\sigma}} (K - \sum_{<ij>\varrho} \beta_{<ij>\varrho} p'_{[ij]\varrho}) \\ = \sum_r^{\infty} \sum_k A_{rk, sl} p'_{rk\sigma} + \sum_{i\varrho} \lambda_{i\varrho, sl\sigma} p_{i\varrho} - \sum_{<ij>} \beta_{<ij>\sigma} \delta_{s[i]} \delta_{j]l} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

wo unter $p_{i\varrho}$ seine Darstellung aus (6.19) zu verstehen ist. Multipliziert man (7.2) mit $\bar{A}_{sl, rk}$, so folgt durch Summation nach s, l auf Grund von (3.15) und mit $\bar{A}_{[ij], rk} = \delta_{r[i]} \delta_{j]k}$ (vgl. 3.16)):

$$p'_{rk\sigma} = - \sum_s^{\infty} \sum_l \bar{A}_{sl, rk} \sum_{i\varrho} \lambda_{i\varrho, sl\sigma} p_{i\varrho} + \sum_{<ij>} \delta_{r[i]} \delta_{j]k} \beta_{<ij>\sigma}. \quad (7.3)$$

Bildet man speziell $p'_{[jk]\sigma}$, so verschwindet der Beitrag der ersten Summe in (7.3), da $\bar{A}_{sl, [jk]} = 0$ für $s > 3$ und $\lambda_{i\varrho, sl\sigma} = 0$ für $s \leq 3$; folglich:

$$\beta_{[jk]\sigma} = p'_{[jk]\sigma}. \quad (7.4)$$

Gehen wir mit (7.3) in $p_{i\varrho}$ (6.19) ein, so wird dort

$$\sum_s^{\infty} \sum_{l\sigma} \lambda_{i\varrho, sl\sigma} p'_{sl\sigma} = - \sum_{j\sigma} A_{i\varrho, j\sigma} p_{j\sigma}, \quad (7.5)$$

wo

$$A_{i\varrho, j\sigma} = \sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl\tau} \lambda_{i\varrho, rk\tau} \bar{A}_{rk, sl} \lambda_{j\sigma, sl\tau}. \quad (7.6)$$

(6.19) liefert somit folgendes Gleichungssystem für die $p_{i\varrho}$:

$$p_{i\varrho} + \sum_{j\sigma} A_{i\varrho, j\sigma} p_{j\sigma} = p'_{i\varrho}. \quad (7.7)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten A (7.6) auf Grund von (6.21) und (3.16) können folgende Formeln dienen:

$$\sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl} \bar{B}_{[ii']_r, rk} \bar{A}_{rk, sl} \bar{B}_{[jj']_s, sl} = (D - C^2) (\delta_{ij} \delta_{i'j'} - \delta_{ij'} \delta_{i'j}), \quad (7.8)$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_r^{\infty} \sum_i C_{ir}^2 = \frac{1}{3\eta^2} \int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{(\mu^2 - \Delta)^2} \delta_a(x) \quad (7.9)$$

(das Auftreten von $D - C^2$ statt D in (7.8) ist dadurch bedingt, dass die Summationsindices r, s nur von 4 bis ∞ laufen); ferner (vgl. (6.3)):

$$\sum_{k\tau} (\delta_{ik} \delta_{\varrho\tau} - S_{i\tau} S_{k\varrho}) (\delta_{jk} \delta_{\sigma\tau} - S_{j\tau} S_{k\sigma}) = 2 (\delta_{ij} S_{\varrho\sigma} - S_{i\sigma} S_{j\varrho}) \quad (7.10)$$

Mit (7.6, 8, 10) ergibt sich:

$$A_{i\varrho, j\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} - 1 \right) (\delta_{ij} \delta_{\varrho\sigma} - S_{i\sigma} S_{j\varrho}). \quad (7.11)$$

Hiermit lauten die Gleichungen (7.7):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} + 1 \right) p_{i\varrho} - \frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} - 1 \right) \sum_{j\sigma} S_{i\sigma} S_{j\varrho} p_{j\sigma} = p'_{i\varrho}.$$

Durch Multiplikation mit $S_{j\varrho} S_{i\sigma}$ und Summation über i, ϱ folgt:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} + 1 \right) \sum_{i\varrho} S_{j\varrho} S_{i\sigma} p_{i\varrho} - \frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} - 1 \right) p_{j\sigma} = \sum_{i\varrho} S_{j\varrho} S_{i\sigma} p'_{i\varrho}.$$

Aus diesen beiden Gleichungssystemen lassen sich die Doppelsummen auf den linken Seiten leicht eliminieren, und man findet schliesslich:

$$p_{i\varrho} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{C^2}{D} \right) p'_{i\varrho} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C^2}{D} \right) \sum_{j\sigma} S_{i\sigma} S_{j\varrho} p'_{j\sigma}. \quad (7.12)$$

Hiermit kann man nun in (7.3) eingehen, womit, in Verbindung mit (7.4), die durchzuführende Translation bestimmt ist. Für das Folgende ist namentlich der Minimalwert von K wichtig. Beachtet man, dass nach (7.2, 4) und (6.19)

$$\sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl\sigma} A_{rk, sl} p'_{rk\sigma} p'_{sl\sigma} = \sum_{i\varrho} \{ (p'_{i\varrho} - p_{i\varrho}) p_{i\varrho} + p'^2_{i\varrho} \},$$

so folgt für den Minimalwert:

$$K_0 = \frac{1}{2} \sum_{i\varrho} p'_{i\varrho} p_{i\varrho} + \text{const.}, \quad (7.13)$$

$$K_0 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{C^2}{D} \right) \sum_{i\varrho} p'_{i\varrho}^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{C^2}{D} \right) \sum_{ij\varrho\sigma} p'_{i\varrho} S_{i\sigma} S_{j\varrho} p'_{j\sigma} + \text{const.} \quad (7.14)$$

Für K (6.22) erhält man, mit Hilfe von (3.11):

$$\left. \begin{aligned} K &= K_0 + \frac{1}{2} \sum_{rs}^{\infty''} \sum_{kl\varrho} A_{rk,s} p''_{rk\varrho} p''_{sl\varrho} + \frac{1}{2} \sum_s^{\infty'} \sum_{ikl\varrho} A_{(ik),sl} p''_{(ik)\varrho} p''_{sl\varrho} \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{ijk\varrho} A_{(ik),(jl)} p''_{(ik)\varrho} p''_{(jl)\varrho} + \frac{1}{2} \sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl\varrho} B_{rk,sl} q'_{rk\varrho} q'_{sl\varrho} + K_S \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

wo

$$K_S = \frac{1}{2} \sum_{i\varrho} \left(\sum_s^{\infty'} \sum_{l\sigma} \lambda_{i\varrho,sl\sigma} p''_{sl\sigma} \right)^2. \quad (7.16)$$

Zu den vorstehenden Rechnungen ist zu bemerken, dass sie so ausgeführt sind, als seien die $\lambda_{i\varrho,sl\sigma}$ mit den $p'_{j\tau}$ vertauschbar. In Wirklichkeit sind in den Formeln noch gewisse Symmetrisierungen vorzunehmen, was aber in konsequenter Weise erst geschehen kann, nachdem die p -Raum-Translation (7.1) zu einer kanonischen Transformation ergänzt worden ist. Die Verschiebungen $\dot{p}_{rk\varrho}$ hängen nämlich (vgl. (7.3, 4 und 12) mit (6.13, 14 und 20)) von den Variablen (6.6, 8) ab, was zu ähnlichen Transformationsformeln wie (6.18, 19) führt, nur dass die Rollen von q - und p -Raum vertauscht sind. Die Durchführung dieser kanonischen Transformation interessiert aber erst, wenn man zur nächst höheren Näherung im Sinne der Entwicklung nach fallenden Potenzen von g übergeht; die aus der Transformation resultierenden K -Terme — sie beschreiben wie K_S (7.16) Wechselwirkungen zwischen freien Mesonen und den Proton-Isobaren — enthalten mindestens den Faktor g^{-1} , während der „Streuterm“ K_S von g frei ist, und sie können in erster Näherung vernachlässigt werden, sofern die „Bedingung für starke Kopplung“ (5.13) erfüllt ist. Wir wollen hier über diese Näherung nicht hinausgehen. Dies bedeutet, dass wir in K (7.15) einfach

$$q'_{rk\varrho} = q''_{rk\varrho} \quad (7.17)$$

setzen können, wobei gemäss früheren Bemerkungen (vgl. 5.12), (6.5))

$$q''_{[jk]\varrho} = \sum_{\sigma} \xi_{\varrho\sigma} S_{<jk>\sigma}, \quad (7.18)$$

während K_0 und K_S durch (7.14 und 16) definiert bleiben.

Wir haben schliesslich noch für die $p'_{i\varrho}$ in K_0 ihre Werte (6.20) zu substituieren, wobei die kleinen ξ -abhängigen Terme in

unserer Näherung vernachlässigbar sind. Mit Hilfe der Formeln (6.3, 13 und 14) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\sum_{i\varrho} p_i'^2 &= \sum_{i\varrho} (\bar{p}_{i\varrho}^2 + \bar{p}_{i\varrho}^2) = \frac{1}{2\Gamma^2} \left(\sum_n P_n^2 + \frac{3}{2} \right) + \sum_{\varrho} \pi_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varrho < \sigma} \pi_{\varrho\sigma}^2, \\ \sum_{ij\varrho\sigma} p_i' S_{i\sigma} S_{j\varrho} p_j' &= \sum_{ij\varrho\sigma} (\bar{p}_{i\varrho} S_{i\sigma} S_{j\varrho} \bar{p}_{j\sigma} + \bar{p}_{i\varrho} S_{i\sigma} S_{j\varrho} \bar{p}_{j\sigma}) \\ &= \frac{1}{2\Gamma^2} \left(- \sum_n P_n^2 + \frac{3}{2} \right) + \sum_{\varrho} \pi_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varrho < \sigma} \pi_{\varrho\sigma}^2.\end{aligned}$$

Dies in (7.14) eingesetzt, ergibt (mit $\Gamma = g \eta C$, vgl. (6.1)):

$$K_0 = \frac{1}{4g^2 \eta^2 D} \sum_n P_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varrho} \pi_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{4} \sum_{\varrho < \sigma} \pi_{\varrho\sigma}^2 + \text{const.} \quad (7.19)$$

Hier ist der erste Term der wichtigste, da er die Isobaren-Energie liefern wird. Bei der Berechnung seines Koeffizienten müssen wir die Fälle $a\mu \ll 1$ und $\gg 1$ unterscheiden. Für den Fall $a\mu \ll 1$ erkennt man leicht, dass in der Definitionsformel (7.9) für D der Operator $(\mu^2 - \Delta)$ durch $(-\Delta)$ ersetzt werden kann; definieren wir nun den Protonradius a quantitativ durch die Formel¹⁾

$$\frac{1}{a} = 4\pi \int dX \delta_a(x) \frac{1}{-\Delta} \delta_a(x) = \int dX \int dX' \frac{\delta_a(x) \delta_a(x')}{|x-x'|}, \quad (7.20)$$

so kommt:

$$\eta^2 D = \frac{1}{12\pi a}, \quad \frac{1}{4g^2 \eta^2 D} = \frac{3\pi a}{g^2} \text{ für } a\mu \ll 1. \quad (7.21)$$

Für den weniger interessanten Fall $a\mu \gg 1$ genüge die Angabe der Größenordnung:

$$\eta^2 D \sim \frac{1}{a^5 \mu^4}, \quad \frac{1}{4g^2 \eta^2 D} \sim \frac{a^5 \mu^4}{g^2} \text{ für } a\mu \gg 1. \quad (7.22)$$

§ 8. S-Transformation.

Für die Aufstellung der einkomponentigen Schrödingergleichung (2.7) haben wir nun noch den Operator K mit der unitären Matrix S zu transformieren und speziell das Diagonalelement $(S^* K S)_{00}$ zu bilden.

Obwohl wir im § 4 eine exakte Konstruktion der Matrix S für beliebige Werte der $q_{i\varrho}$ angegeben haben (vgl. (4.11)), ist es für den gegenwärtigen Zweck bequemer, mit einer Näherungsdarstellung zu arbeiten, die dem Umstände Rechnung trägt, dass die

¹⁾ Vgl. OPPENHEIMER und SCHWINGER, l. c. (Fussnote S. 552).

Variablen $\xi_{\varrho\sigma}$ in (6.7) nur kleine Schwingungen ausführen. Betrachten wir also zunächst den „Wert nullter Näherung“ von H' (4.1), den wir erhalten, wenn wir $\xi_{\varrho\sigma} = 0$, $q_{i\varrho} = \Gamma S_{i\varrho}$ setzen:

$$\mathring{H}' = \gamma \Gamma \sum_{i\varrho} \sigma_i \tau_\varrho S_{i\varrho}, \quad (8.1)$$

und bestimmen wir die Matrix \mathring{S} , die \mathring{H}' auf Diagonalform transformiert: Die Matrix

$$X = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Phi}{2} - i \sigma_3 \sin \frac{\Phi}{2} & \left(\cos \frac{\Theta}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\Theta}{2} \right) \\ \left(\cos \frac{\Psi}{2} + i \sigma_3 \sin \frac{\Psi}{2} \right) & \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

ist so gewählt, dass

$$\sum_i \sigma_i S_{i\varrho} (\Theta \Phi \Psi) = X \sigma_\varrho X^*; \quad (8.3)$$

daher wird nach (4.10)

$$\mathring{H}' = \gamma \Gamma \cdot X \cdot \sum_n \sigma_n \tau_n \cdot X^* = -\gamma \Gamma \cdot X Z (\tau_3 + \sigma_3 + \sigma_3 \tau_3) Z^* X^*.$$

Mit

$$\mathring{S} = XZ \quad (8.4)$$

wird also $\mathring{S}^* \mathring{H}' \mathring{S}$, wie verlangt, diagonal. Kehren wir jetzt zum vollständigen Ausdruck (4.1) für H' , mit (6.7), zurück, so wird wegen (8.3):

$$\mathring{S}^* H' \mathring{S} = -\gamma \Gamma (\tau_3 + \sigma_3 + \sigma_3 \tau_3) + \gamma \sum_{i\varrho} \xi_{i\varrho} \cdot (Z^* \sigma_i \tau_\varrho Z). \quad (8.5)$$

Die Matrix S kann mit der üblichen Störungsmethode durch Entwicklung nach den $\xi_{i\varrho}$ bestimmt werden. Schreiben wir $S = \mathring{S} \cdot S'$, so sind die Matrixelemente¹⁾ S'_{0m} und S'_{m0} ($m \neq 0$) höchstens von der Größenordnung $\xi_{i\varrho} / \Gamma$, also bei starker Kopplung (vgl. § 5) $\ll 1$.

Wir bilden jetzt $S^* K S = K + S^* [K, S]$. Die einzigen Terme in K (7.15), die mit S nicht kommutieren, sind in K_0 (7.19) enthalten:

$$S^* [K, S] = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} S^* \left[\sum_n P_n^2, S \right] + S'^* \left[\left(\frac{1}{2} \sum_\varrho \pi_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{4} \sum_{\varrho<\sigma} \pi_{\varrho\sigma}^2 \right), S' \right]. \quad (8.6)$$

Hier ist der zweite Term, der nur von den $\xi_{\varrho\sigma}$ und $\pi_{\varrho\sigma}$ abhängt, in unserer Näherung zu vernachlässigen; in der Tat ist sein Beitrag zum Diagonalelement $(S^* K S)_{00}$ in der Schrödinger-Gleichung

¹⁾ Der Index 0 bezieht sich (gemäß der Bezeichnung in § 2) auf den tiefsten Eigenwert von \mathring{H}' ($\tau_3 = \sigma_3 = 1$).

(2.7) von der Ordnung der bereits früher (§ 7) vernachlässigten Wechselwirkungsterme. Es bleibt also (vgl. (8.4)):

$$S^* [K, S] = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} S'^* Z^* X^* \left[\sum_n P_n^2, X \right] Z S' .$$

Nun folgt aber aus (6.10) und (8.2):

$$\left. \begin{aligned} X^* \cdot P_n \cdot X &= P_n + \frac{\sigma_n}{2} \\ X^* \cdot \sum_n P_n^2 \cdot X &= \sum_n \left(P_n + \frac{\sigma_n}{2} \right)^2 = \sum_n P_n^2 + \sum_n \sigma_n P_n + \frac{3}{4}, \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

$$S^* [K, S] = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} \left\{ \sum_n (S'^* Z^* \sigma_n Z S') P_n + \frac{3}{4} \right\}. \quad (8.8)$$

Berechnet man die Matrizen $Z^* \sigma_n Z$ nach (4.9), so zeigt sich, dass ihre Diagonalelemente verschwinden; infolgedessen sind die Diagonalelemente $(S'^* Z^* \sigma_n Z S')_{00}$ vernachlässigbar klein. In unserer Näherung ist daher $(S^* [K, S])_{00}$ eine Konstante, die in die additive Konstante in K_0 (7.19) einbezogen werden kann. Somit wird $(S^* K S)_{00} = K$, und die Schrödinger-Gleichung (2.7) lautet:

$$(-E + K) F'_o = 0. \quad (8.9)$$

Im § 2 wurde hervorgehoben, dass die Gültigkeit der einkomponentigen Gleichung (2.7), d. h. (8.9), auf der Voraussetzung beruht, dass die Ausserdiagonalelemente $(S^* K S)_{om}$ klein gegen die γy_n sind, d. h. hier: klein gegen $\gamma^2 C$ (vgl. (4.12) und (5.8)). Diese Ausserdiagonalelemente sind aber vollständig in den Ausdrücken (8.8) bzw. (8.6) enthalten, und man erkennt leicht, dass die Forderung ihrer Kleinheit gegen $\gamma^2 C$ wieder auf die „Bedingung für starke Kopplung“ (5.13) hinausläuft.

§ 9. Die Proton-Isobaren.

Für die Diskussion der Gleichung (8.9) empfiehlt sich eine Entwicklung nach den Eigenfunktionen des in K_0 stehenden Energieterms

$$H^I = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} \sum_n P_n^2 = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} \left\{ \frac{1}{\sin \Theta} p_\Theta \sin \Theta p_\Theta + \frac{p_\Phi^2 + 2 \cos \Theta p_\Phi p_\Psi + p_\Psi^2}{\sin^2 \Theta} \right\}, \quad (9.1)$$

der mit der Hamiltonfunktion eines Kugelkreisels übereinstimmt. In der Gleichung $(-E^I + H^I) f = 0$ sind Φ und Ψ zyklische Variablen, also

$$f = e^{i(m\Phi + n\Psi)} u(\Theta). \quad (9.2)$$

Dabei sind m und n halbzahlig; denn die ursprüngliche Schrödingerfunktion $F = SF'$ (vgl. (2.3, 4)), die in Φ und Ψ periodisch mit der Periode 2π sein muss, enthält nach (8.4 und 2) in ihren Komponenten die Faktoren

$$e^{\pm i/2 \Phi} \cdot e^{\pm i/2 \Psi} \cdot f \sim e^{i(m \pm \frac{1}{2}) \Phi} \cdot e^{i(n \pm \frac{1}{2}) \Psi}.$$

Mit $p_\Phi = m$, $p_\Psi = n$ sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Kugelkreisels (9.1) in bekannter Weise zu berechnen¹⁾. Die Eigenwerte sind:

$$\left. \begin{aligned} E_j^I &= \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} \cdot j(j+1), \quad \text{wo } j \geq |m|, j \geq |n|, \\ &\quad m, n \text{ und } j \text{ halbzahlig.} \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

(Bezüglich des Koeffizienten $(4 g^2 \eta^2 D)^{-1}$ vgl. (7.21, 22).) Damit sind die stationären Zustände bestimmt, die durch Bindung von Mesonen an das Nucleon entstehen können²⁾. Die Eigenfunktionen $u_{jmn}(\Theta)$ werden wir erst später — bei der Berechnung der Kernkräfte — benötigen.

Die Bedeutung der Quantenzahlen j, m, n ergibt sich durch die Betrachtung der Gesamtladung und des Gesamtdrehimpulses³⁾:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{2}(1 + \tau_3) + \int dX \sum_k (\psi_{k1} \pi_{k2} - \psi_{k2} \pi_{k1}), \\ M_{\langle ij \rangle} &= \frac{1}{2} \sigma_{\langle ij \rangle} - \int dX \sum_\varrho \left\{ \sum_k \pi_{k\varrho} \left(x_i \frac{\partial \psi_{k\varrho}}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial \psi_{k\varrho}}{\partial x_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\pi_{i\varrho} \psi_{j\varrho} - \pi_{j\varrho} \psi_{i\varrho}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Diese Größen spalten sich, nach Einführung der in unserer Näherung zuletzt verwendeten Variablen, in Beiträge des (zusammengesetzten) Nucleons und der „freien“ Mesonen. Wir geben nur die Nucleon-Beiträge an, und zwar sogleich mit der Matrix S transformiert, d. h. als auf die Schrödingerfunktion F' anzuwendende Operatoren. Für die Nucleon-Ladung erhält man:

$$e^I = \hat{S}^* \left\{ \frac{1}{2}(1 + \tau_3) + P_3 \right\} \hat{S} = \frac{1}{2} + P_3 + \frac{1}{2} Z^* (\tau_3 + \sigma_3) Z$$

(vgl. (8.4, 7)), oder, da F' praktisch einkomponentig ist und da die Diagonalelemente von $Z^* \tau_3 Z$ und $Z^* \sigma_3 Z$ verschwinden:

$$e^I = \frac{1}{2} + p_\Psi = \frac{1}{2} + n. \quad (9.5)$$

¹⁾ Vgl. etwa A. SOMMERFELD, Atombau und Spektrallinien, 2. Band, S. 161 ff.

²⁾ Vgl. IV, wo die Isobaren-Energie gleichzeitig auch für die symmetrische Pseudoskalarttheorie und die Møller-Rosenfeld-Mischung angegeben ist.

³⁾ Vgl. QdW, § 12; insbesondere (12.44, 56, 57, 58).

Der Drehimpuls des Nucleons wird (vgl. (8.3, 7) und (6.12)):

$$\begin{aligned} M_i^I &= \dot{S}^* \left\{ \frac{1}{2} \sigma_i - \sum_n S_{in} P_n \right\} \dot{S} = - \sum_n S_{in} P_n; \\ M_3^I &= p_\varphi = m, \quad \sum_i (M_i^I)^2 = \sum_n P_n^2 = j(j+1). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Es sind also j, m die Spinquantenzahlen, $n + \frac{1}{2}$ die Ladungszahl des Nucleons. Hieraus folgt insbesondere, dass die 4 Grundzustände des Nucleons $j = \frac{1}{2}, m = \pm \frac{1}{2}, n = \pm \frac{1}{2}$ (vgl. (9.3)) den empirisch bekannten Proton-Neutron-Zuständen zugeordnet werden können.

§ 10. Die Streuung der Mesonen am Nucleon.

Zieht man die Isobaren-Energie H^I von K (7.15 bis 19) ab, so entspricht der Rest ($K - H^I$) der Hamiltonfunktion der „freien“ Mesonen, einschliesslich ihrer Wechselwirkung mit dem Nucleon. Diese Wechselwirkung äussert sich formelmässig in zweierlei Art: erstens im Auftreten des „Streuterms“ K_S , zweitens darin, dass anstelle der in H^0 (3.3, 11) auftretenden Variablen $q_{[ik]\varrho}, p_{[ik]\varrho}$ jetzt in ($K - H^I$) die Variablen $\xi_{\varrho\sigma}, \pi_{\varrho\sigma}$ mit etwas anderen Koeffizienten erscheinen. Schon hierdurch würde, auch wenn der K_S -Term nicht vorhanden wäre, eine Mesonstreuung bewirkt, doch ist diese sehr schwach verglichen mit der durch K_S bedingten Streuung, vorausgesetzt, dass die Meson-Energie $\omega_k = \sqrt{\mu^2 + k^2} \ll a^{-1}$ ist¹⁾. Wir vernachlässigen diese schwache Streuung, indem wir $K - H^I$ durch $H^0(p'', q'') + K_S$ ersetzen. Ferner sei die kinetische Energie des Mesons $\omega_k - \mu$ so gross angenommen, dass die Energieunterschiede der beim Streuprozess mitspielenden Isobaren-Zustände dagegen vernachlässigt werden können ($H^I \rightarrow \text{const.}$). In dieser Approximation wird die Hamiltonfunktion:

$$K = H^0(p'', q'') + K_S + \text{const.} \quad (10.1)$$

Zum Übergang in den Impulsraum setzen wir:

$$\begin{aligned} q''_{sl\varrho} &= - \int dK V_s(k) \omega_k^{-1} P_{l\varrho}(k), \quad p''_{sl\varrho} = \int dK V_s^*(k) \omega_k Q_{l\varrho}(k), \\ V_s(k) &= (2\pi)^{-3/2} \int dX U_s(x) e^{ikx}, \quad \alpha_{i\varrho, l\sigma}(k) = \omega_k \sum_s \lambda_{i\varrho, s l\sigma} V_s^*(k), \\ K_S &= \frac{1}{2} \sum_{i\varrho} \left| \int dK \sum_{l\sigma} \alpha_{i\varrho, l\sigma}(k) Q_{l\sigma}(k) \right|^2. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass $\sum_l k_l \alpha_{i\varrho, l\sigma}(k) = 0$ ist, und dies bedeutet,

¹⁾ Der Sachverhalt ist also ähnlich wie in der Skalartheorie; für diese wurde der entsprechende Beweis in I, Anhang 1, ausgeführt.

dass die longitudinal polarisierten Mesonen keine Streuung erfahren. Dann wird, bei Beschränkung auf transversale Mesonen:

$$\sum_l k_l P_{l\varrho} = \sum_l k_l Q_{l\varrho} = 0, \quad K = \frac{1}{2} \int dK \sum_{l\varrho} \{ |P_{l\varrho}|^2 + \omega_k^2 |Q_{l\varrho}|^2 \} + K_S.$$

K ist hiernach gleich der Hamiltonfunktion eines Oszillatoren-systems, dessen Eigenschwingungen durch das Gleichungssystem

$$(-\omega^2 + \omega_k^2) Q_{l\sigma}(k) + \sum_{i\varrho} \alpha_{i\varrho, l\sigma}^*(k) \int dK' \sum_{l'\sigma'} \alpha_{i\varrho, l'\sigma'}(k') Q_{l'\sigma'}(k') = 0 \quad (10.2)$$

bestimmt sind. Die Lösungen ergeben sich aus dem Ansatz¹⁾:

$$Q_{l\sigma}(k) = \delta(\vec{k} - \vec{k}_0) \delta_{ll_0} \delta_{\sigma\sigma_0} - \sum_{i\varrho} p_{i\varrho} \frac{\alpha_{i\varrho, l\sigma}^*(k)}{k^2 - k_0^2} \quad (\omega^2 = \mu^2 + k_0^2), \quad (10.3)$$

wo l_0 die Spinpolarisation und σ_0 die „Ladungspolarisation“ der einfallenden ebenen Mesonwelle charakterisiert; erstere ist natürlich transversal zu wählen: wenn \vec{k}_0 parallel der x_1 -Achse, $l_0 = 2$ oder 3. Durch Einsetzen von (10.3) in (10.2)²⁾ erhält man für die Koeffizienten $p_{i\varrho}$ wieder die Gleichungen (7.7) mit (7.6) bzw. (7.11), nur ist auf der rechten Seite von (7.7) $p_{i\varrho}'$ durch $\alpha_{i\varrho, l_0 \sigma_0}(k_0)$ ersetzt; mit dieser Änderung kann die Lösung (7.12) übernommen werden. Schliesslich erhält man für die Eigenschwingungen im Ortsraum (asymptotisch für grosse $|x|$):

$$\left. \begin{aligned} \int dK Q_{l\sigma}(k) e^{ikx} &= e^{ik_0 x} \delta_{ll_0} \delta_{\sigma\sigma_0} - \frac{3}{2} a \beta^2 \frac{e^{i|k_0||x|}}{|x|} f_{l\sigma, l_0 \sigma_0} \\ f_{l\sigma, l_0 \sigma_0} &= \sum_{\langle ii' \rangle} \sum_{\langle jj' \rangle} \delta_{l[i'] s_{i]} \delta_{l_0[j'] s_{0j]} \{ \delta_{\langle ii' \rangle \langle jj' \rangle} \delta_{\sigma\sigma_0} - S_{\langle ii' \rangle \sigma_0} S_{\langle jj' \rangle \sigma} \}, \\ s &= \frac{\vec{x}}{|x|}, \quad s_0 = \frac{\vec{k}_0}{|k_0|}, \quad \beta^2 = \frac{k_0^2}{\mu^2 + k_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Hier ist der Protonradius a wieder durch (7.20 oder 21) definiert (die obige Annahme $a\omega \ll 1$ bedingt $a\mu \ll 1$).

¹⁾ Dieser Ansatz ist demjenigen nachgebildet, den J. W. WEINBERG (Phys. Rev. **59**, S. 776, 1941) in der „Paartheorie“ zur Berechnung der Streuung verwendet hat.

²⁾ In dem Integral

$$\int dK \frac{\sum_{l\sigma} \alpha_{i\varrho, l\sigma}(k) \alpha_{i'\varrho', l\sigma}^*(k)}{k^2 - k_0^2} \equiv A$$

ist bei der Integration nach $|k|$ der Pol $|k| = |k_0|$ in der negativ-imaginären Halbebene zu umgehen (ebenso wie bei der Fouriertransformation in den Ortsraum, die eine auslaufende Streuwelle liefern soll; s. (10.4)). Der im obigen Integral A auftretende Nenner $k^2 - k_0^2$ kann aber, bei Vernachlässigung von Termen, die relativ klein sind wie $a\omega$ gegen 1, durch $k^2 + \mu^2 = \omega_k^2$ ersetzt werden; dann wird A gleich der in (7.6 oder 11) definierten Grösse $A_{i\varrho, i'\varrho'}$.

Die Amplitude der Streuwelle in (10.4) hängt von den Winkeln $\Theta \Phi \Psi$ ab; sie ist also als ein auf die Nucleon-Eigenfunktionen (9.2) wirkender Operator aufzufassen; die zugehörige Matrix beschreibt die mit dem Streuprozess verbundenen Nucleon-Übergänge. Was den Wirkungsquerschnitt für die Streuung in den Raumwinkel $d\Omega$ anlangt, wollen wir ihn hier nur angeben in der Summe über alle Endpolarisationen l, σ und im Mittel über alle Anfangspolarisationen l_0, σ_0 (wobei die nicht gestreuten longitudinalen Mesonen mitgezählt sind):

$$\frac{dQ}{d\Omega} = (\frac{3}{2} a \beta^2)^2 \cdot \frac{1}{9} \sum_{l\sigma, l_0\sigma_0} f_{l\sigma, l_0\sigma_0}^2 = a^2 \beta^4 \cdot \frac{1}{16} \{5 + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_0)^2\}.^1 \quad (10.5)$$

Schliesslich ist zu bemerken, dass die der Schwingungsenergie $K - H'$ entsprechende „Nullpunktsenergie“, da sie von derjenigen des kräftefreien Mesonfeldes abweicht, einen Beitrag zur Selbstenergie des Nucleons liefert, der jedoch spin- und ladungsunabhängig und daher ohne Interesse ist.

C. Allgemeiner Kopplungsansatz.

§ 11. Die Extremallagen.

Wir kehren zum allgemeinen Fall $f \neq 0, g \neq 0$ zurück und bestimmen zunächst wieder die Eigenwerte von H' (3.13). Für den Term $\sim g$ können die Formeln (4.2 bis 8) unverändert übernommen werden; die Hinzufügung des Terms $\sim f$ in (4.8) ergibt dann:

$$H' = \gamma \cdot YY' \cdot \left\{ \sum_n r_n \sigma_n \tau_n + \sum_n u_n \tau_n \right\} \cdot (YY')^*, \quad (11.1)$$

$$u_n = \frac{f}{g} \sum_{i\varrho} p_{i\varrho} s_{\varrho n} \quad (11.2)$$

(vgl. (4.4, 7)). Das Eigenwertproblem dieser 4-reihigen Matrix hat folgende charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -\lambda + r_3 + u_3 & u_1 - i u_2 & 0 & r_1 - r_2 \\ u_1 + i u_2 & -\lambda - r_3 - u_3 & r_1 + r_2 & 0 \\ 0 & r_1 + r_2 & -\lambda - r_3 + u_3 & u_1 - i u_2 \\ r_1 - r_2 & 0 & u_1 + i u_2 & -\lambda + r_3 - u_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.3)$$

Die 4 Wurzeln λ_m dieser biquadratischen Gleichung sind in der

¹⁾ In IV (letzte Formel) wurde dieser Streuquerschnitt um einen Faktor 3 zu gross angegeben. — Wenn, statt über die Anfangsladungen des Mesons, über die Anfangszustände des Nucleons gemittelt wird, ist das Ergebnis das gleiche.

Form (2.2) darstellbar, wo y_1^2, y_2^2, y_3^2 sich als Wurzeln der kubischen Gleichung („Resolvente“)

$$z^3 - z^2 \sum_n (r_n^2 + u_n^2) + z \left\{ \sum_{n < m} r_n^2 r_m^2 + \sum_n r_n^2 u_n^2 \right\} - r_1^2 r_2^2 r_3^2 = 0 \quad (11.4)$$

berechnen lassen; d. h. die y_n können durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_n y_n^2 &= \sum_n (r_n^2 + u_n^2) \\ \sum_{n < m} y_n^2 y_m^2 &= \sum_{n < m} r_n^2 r_m^2 + \sum_n r_n^2 u_n^2 \\ y_1 y_2 y_3 &= r_1 r_2 r_3 \quad (y_n \geq 0) \end{aligned} \quad (11.5)$$

bestimmt werden. Berechnet man nämlich mit Hilfe von (2.2) und (11.5) die Größen $-\sum_i \lambda_i$, $\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$, $-\sum_{i < j < k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k$ und $\prod_i \lambda_i$, so ergeben sich gerade die Koeffizienten der Gleichung (11.3). Wir denken uns die y_n vermöge (11.5) als Funktionen der r_n und u_n berechnet; eine allgemeine explizite Darstellung dieser Funktionen wird sich erübrigen.

Zur Bestimmung des Minimums von K (2.6) gehen wir wieder von dem Variationsproblem (5.3) aus, wo aber in K jetzt $\sum y_n$ anstelle von $\sum r_n$ auftritt. Während die Gleichungen (5.4), und damit auch (5.6 und 7), unverändert gelten, hat man anstelle von (5.5):

$$\gamma \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial r_m} - \sum_{\langle i k \rangle \varrho} \alpha_{\langle i k \rangle \varrho} s'_{\langle i k \rangle m} s_{\varrho m} = 0;$$

oder mit (5.7) und (6.1):

$$r_m = \Gamma \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial r_m}. \quad (11.6)$$

Andererseits ist K jetzt nicht mehr rein quadratisch von den $p_{s l \varrho}$ abhängig, und wir haben deshalb $\partial K / \partial p_{s l \varrho} = 0$ zu setzen, d. h. nach (2.6), (3.3) und (11.2):

$$\sum_r^\infty \sum_k A_{r k, s l} p_{r k \varrho} - \gamma \frac{f}{g} \delta_{s l} \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial u_m} s_{\varrho m} = 0. \quad (11.7)$$

Mit (3.15) ergibt dies:

$$p_{r k \varrho} = \gamma \frac{f}{g} \left(\sum_l \bar{A}_{l l, r k} \right) \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial u_m} s_{\varrho m}. \quad (11.8)$$

Bildet man hiermit u_m nach (11.2), so folgt:

$$u_m = \Gamma' \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial u_m}, \quad (11.9)$$

$$\Gamma' = \gamma \left(\frac{f}{g} \right)^2 \sum_{k,l} \bar{A}_{ll,kk} = 3 \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 \Gamma. \quad (11.10)$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus (3.16), mit (3.5), (3.19) und (6.1), durch Verwendung der Identität $\Delta + \Delta^2 (\mu^2 - \Delta)^{-1} = \mu^2 \Delta (\mu^2 - \Delta)^{-1}$. Als Wert von K in der so bestimmten Extremallage findet man, mit Hilfe von (5.4, 7), (11.2, 7, 9):

$$\dot{K} = \frac{\gamma}{2} \sum_m \left(\frac{r_m^2}{\Gamma} + \frac{u_m^2}{\Gamma'} - 2 y_m \right). \quad (11.11)$$

Die Gleichungen (11.6 und 9), die uns zur Bestimmung der möglichen Extremallagen dienen werden, kann man noch umformen, indem man die auf ihren rechten Seiten stehenden Ableitungen der y_n nach den r_m bzw. u_m mit Hilfe von (11.5) ausrechnet:

$$r_m \left\{ 1 - \Gamma \frac{\sum_{n < n'} y_n y_{n'} + \sum_n r_n^2 - r_m^2 + u_m^2 + \frac{r_1 r_2 r_3}{r_m^2} \sum_n y_n}{(y_2 + y_3)(y_3 + y_1)(y_1 + y_2)} \right\} = 0, \quad (11.12)$$

$$u_m \left\{ 1 - \Gamma' \frac{\sum_{n < n'} y_n y_{n'} + r_m^2}{(y_2 + y_3)(y_3 + y_1)(y_1 + y_2)} \right\} = 0. \quad (11.13)$$

Hier sind natürlich die y_n gemäss (11.5) als Funktionen der r_m und u_m zu betrachten.

Die Gleichungen (11.6, 9 bzw. 12, 13) haben mehrere Lösungen, deren \dot{K} -Werte wir vergleichen müssen, um das eigentliche Minimum zu finden.

Fall I: Alle $u_m = 0$. Wie in §§ 4 und 5 ist dann

$$y_n = r_n = \Gamma, \quad \dot{K}^I = -\frac{1}{2} \gamma \cdot 3 \Gamma. \quad (11.14)$$

Fall II: $u_1 = u_2 = 0, u_3 \neq 0$. Nach (11.4 oder 5) ist dann

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} (\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + u_3^2} \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + u_3^2}), \quad y_3 = r_3;$$

$$\text{nach (11.13), } m = 3: \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + u_3^2} = \Gamma';$$

$$\text{nach (11.12), } m = 3: r_3 = \Gamma;$$

(11.12) mit $m = 1, 2$ gibt zwei linear-homogene Gleichungen für

r_1 und r_2 , deren Determinante nur für $\Gamma' = 2\Gamma$ verschwindet. Es ist also

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = \Gamma, \quad u_3 = \Gamma' \quad (\text{wenn } \Gamma' \neq 2\Gamma). \quad (11.15)$$

Nach (11.11) ist $\mathring{K}^{\text{II}} = -\frac{1}{2}\gamma \cdot (\Gamma + \Gamma')$;

$$\mathring{K}^{\text{I}} \leq \mathring{K}^{\text{II}}, \quad \text{je nachdem } \Gamma' \leq 2\Gamma. \quad (11.16)$$

Fall III: $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$. Dann ist nach (11.13) mit $m = 1, 2$: $r_1 = r_2 = r$. Unter der Voraussetzung $r \neq 0$ folgt weiter aus (11.12) mit $m = 1, 2$: $u_1 = \pm u_2 = u$. (11.4 oder 5) ergibt dann

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}(\sqrt{(r+r_3)^2 + 2u^2} \pm \sqrt{(r-r_3)^2 + 2u^2}), \quad y_3 = r;$$

$$(11.13) \text{ mit } m = 1, 2: \sqrt{(r+r_3)^2 + 2u^2} = \Gamma';$$

$$(11.12), m = 1, 2, 3: \quad r = \frac{\Gamma(\Gamma' - \Gamma)}{2\Gamma' - 3\Gamma}, \quad r_3 = \frac{\Gamma^2}{2\Gamma' - 3\Gamma}.$$

Damit u reell wird, muss $r + r_3 \leq \Gamma'$ sein, d. h. $\Gamma' \geq 2\Gamma$; andernfalls existiert das Extremum III (mit $r \neq 0$) nicht. Nach (11.11):

$$\mathring{K}^{\text{III}} = -\frac{1}{2}\gamma \cdot \left(\Gamma' + \frac{\Gamma(\Gamma' - \Gamma)}{2\Gamma' - 3\Gamma} \right).$$

Im Sonderfall $r = 0$ wird $y_1 = y_2 = 0, y_3 = \sqrt{r_3^2 + u_1^2 + u_2^2}$; damit gibt (11.6, 9): $y_3 = \Gamma'$ und (falls $\Gamma' \neq \Gamma$) $r_3 = 0$, d. h. alle $r_n = 0$. Dies ist der später zu behandelnde Fall V.

Fall IV: Alle $u_m \neq 0$. Dann ist nach (11.13): $r_1 = r_2 = r_3 = r$, und nach (11.12), sofern $r \neq 0$: $u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = u^2$. ($r = 0$ führt wieder auf Fall V.) Für $r \neq 0$ wird

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}(\sqrt{4r^2 + 3u^2} \pm \sqrt{3u^2}), \quad y_3 = r;$$

$$\text{nach (11.13): } \sqrt{4r^2 + 3u^2} = \Gamma', \quad \text{nach (11.12): } r = \frac{\Gamma\Gamma'}{3\Gamma' - 4\Gamma}.$$

Das Extremum IV existiert nur, wenn $2r \leq \Gamma'$, d. h. wieder: $\Gamma' \geq 2\Gamma$. Nach (11.11): $\mathring{K}^{\text{IV}} = -\frac{1}{2}\gamma \cdot \Gamma' \left(1 + \frac{\Gamma}{3\Gamma' - 4\Gamma} \right)$.

Falls die Extrema III, IV überhaupt existieren ($\Gamma' \geq 2\Gamma$), gilt:

$$\mathring{K}^{\text{IV}} \geq \mathring{K}^{\text{III}} \geq \mathring{K}^{\text{II}}.$$

Die Fälle III, IV kommen daher für das Minimum nicht in Betracht, ausser in dem Sonderfall $\Gamma' = 2\Gamma$, wo die Extremalwerte \mathring{K} für I bis IV alle zusammenfallen.

Fall V: Alle $r_m = 0$. Man hat dann $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = \sqrt{\sum_m u_m^2} = \Gamma'$ (nach (11.9)); $\dot{K}^V = -\frac{1}{2}\gamma \cdot \Gamma' > K^{\text{II}}$; auch dieser Fall scheidet also aus.

Nach (11.16) (vgl. auch (11.10)) lautet das Ergebnis: *Das stabile Gleichgewicht des Systems entspricht*

$$\text{Fall I, wenn } \frac{\Gamma'}{2\Gamma} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 < 1,$$

$$\text{Fall II, wenn } \frac{\Gamma'}{2\Gamma} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 > 1.$$

Wir nehmen im Folgenden $\Gamma' / 2\Gamma$ so weit verschieden von 1 an, dass das tiefste Minimum genügend tief unterhalb des nächst höheren Extremums liegt, dass die Schwingungen um die Gleichgewichtslage als harmonisch gelten können. Ist $a\mu \ll 1$, so trifft dies jedenfalls für alle wichtigen Anwendungen zu, wenn

$$\frac{\Gamma'}{2\Gamma} - 1 < -\left(\frac{a}{g}\right)^2 \text{ (Fall I)} \text{ oder } \frac{\Gamma'}{2\Gamma} - 1 > \frac{a}{g} \text{ (Fall II).}$$

Zur Behandlung der kleinen Schwingungen müssen wir die Wurzel $\lambda_0 = -\sum_n y_n$ der Gleichung (11.3) nicht nur im Minimum, sondern auch in dessen Umgebung kennen. Dazu genügt eine Störungsrechnung, und zwar eine „zweite Näherung“, da ja die Anharmonizitäten vernachlässigt werden sollen. Zur Durchführung der Rechnung setzt man zweckmäßig (vgl. (4.9, 10)):

$$\begin{aligned} & \sum_n r_n \sigma_n \tau_n + \sum_n u_n \tau_n \\ &= \begin{cases} -Z(r_1 \tau_3 + r_2 \sigma_3 + r_3 \sigma_3 \tau_3) Z^* + \left\{ \sum_n u_n \tau_n \right\} & \text{im Fall I,} \\ (r_3 \sigma_3 \tau_3 + u_3 \tau_3) + \left\{ \sum_{n=1,2} (r_n \sigma_n \tau_n + u_n \tau_n) \right\} & \text{im Fall II,} \end{cases} \end{aligned}$$

wo jeweils der zweite, in geschweifter Klammer geschriebene Term als kleine „Störungsmatrix“ zu betrachten ist. Bei Berücksichtigung von (11.14, 15) ergibt die Störungsrechnung:

$$\gamma \lambda_0 = -\gamma \sum_n y_n = \begin{cases} -\gamma \left[\sum_n r_n + \frac{1}{4\Gamma} \sum_m u_m^2 \right] & \text{für } \Gamma' < 2\Gamma \text{ (Fall I),} \\ -\gamma \left[r_3 + u_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{(r_1 + r_2)^2}{\Gamma'} + \frac{u_1^2 + u_2^2}{\Gamma + \Gamma'} \right) \right] & \text{für } \Gamma' > 2\Gamma \text{ (Fall II).} \end{cases} \quad (11.17)$$

Im Falle $\Gamma' < 2\Gamma$ ist der Energieterm

$$-\frac{\gamma}{4\Gamma} \sum_m u_m^2 = -\frac{1}{4C} \left(\frac{f}{g}\right)^2 \sum_\varrho \left(\sum_i p_{i i \varrho}\right)^2 \quad (11.18)$$

der *einzig* Zusatz, der zu den für $f = 0$ berechneten K -Termen (§§ 5 bis 10) hinzukommt (nach (6.19) und (7.3) ist $p_{i i \varrho} = p''_{i i \varrho}$), und zwar beschreibt dieser Term eine Kopplung der longitudinalen Mesonen an das Nucleon. Er lässt die Eigenfrequenzen $\omega_k = \sqrt{\mu^2 + k^2}$ der kleinen Schwingungen unverändert, ausser der tiefsten Frequenz ω_0 , die, wenn man $\Gamma'/2\Gamma$ von 0 gegen 1 anwachsen lässt, bei einem bestimmten Werte von $\Gamma'/2\Gamma$ sich vom kontinuierlichen Spektrum ablöst¹⁾ und von μ gegen 0 abnimmt; für $\Gamma'/2\Gamma > 1$ wird ω_0^2 negativ, d. h. das Gleichgewicht I wird instabil. Im hauptsächlich interessierenden Falle $a\mu \ll 1$ tritt aber die Ablösung der Frequenz ω_0 vom kontinuierlichen Spektrum erst ein, wenn $\Gamma'/2\Gamma$ dem Werte 1 sehr nahe gekommen ist:

$$1 - \frac{\Gamma'}{2\Gamma} < \varepsilon, \text{ wo } \varepsilon \sim (a\mu)^2 \ll 1. \quad (11.19)$$

Ferner bewirkt der Zusatzterm (11.18) — ähnlich wie K_s in § 10 — eine Abänderung der Normalschwingungen, die dem Auftreten von Streuwellen im Ortsraum entspricht, und zwar handelt es sich hier um eine *Streuung der longitudinalen Mesonen*. Diese Streuung ist aber sehr schwach im Vergleich zu der in § 10 berechneten K_s -Streuung der transversalen Mesonen (der Streuquerschnitt ist mindestens um einen Faktor $\sim (a\omega)^4$ kleiner, wenn wie in § 10 $a\omega \ll 1$ vorausgesetzt wird), ausser in dem Sonderfall (11.19), wo die Streuung der longitudinalen mit derjenigen der transversalen Mesonen vergleichbar werden kann, nämlich wenn $(a\omega)^2 \approx 1 - \Gamma'/2\Gamma$.

Im übrigen bleiben, wie leicht zu sehen ist, alle Formeln der §§ 5 bis 10 unverändert gültig. Wir kommen also zu dem merkwürdigen Ergebnis, dass *der zu f proportionale Term im H'-Ansatz (1.4) bei starker Kopplung (vgl. (5.13)) praktisch wirkungslos bleibt, solange $(\mu f / g)^2 < 2/3$* , und dies gilt, wie sich zeigen wird, auch für die Kernkräfte. Lässt man aber $|f|$ über den kritischen Wert

¹⁾ Diese Erscheinung ist aus der „Paartheorie“ bekannt; vgl. CRITCHFIELD, Phys. Rev. **59**, S. 48, 1941. Die Frequenz ω_0 bestimmt sich durch die Gleichung

$$\int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{(\mu^2 - \Delta) - \omega_0^2} \delta_a(x) = \frac{2\Gamma}{\Gamma'} \int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{\mu^2 - \Delta} \delta_a(x);$$

sie ist eine dreifachzählende Eigenfrequenz (entsprechend den 3 Werten von ϱ).

$\sqrt{2/3} |g| / \mu$ hinaus anwachsen, so ändert sich die Situation grundlegend; diesem Fall wenden wir jetzt unsere Aufmerksamkeit zu:

$$\frac{\Gamma'}{2\Gamma} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 > 1. \quad (11.20)$$

§ 12. Translation und Einführung von Winkelkoordinaten.

Im „Falle II“ ist die Gleichgewichtslage nach (11.15) bestimmt durch

$$\ddot{r}_1 = \ddot{r}_2 = \ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = 0, \quad \ddot{r}_3 = \Gamma, \quad \ddot{u}_3 = \Gamma'. \quad (12.1)$$

Damit die Schwingung der Variablen $r_3' = r_3 - \Gamma$ sich trotz der Begrenzung $r_3 \geq 0$ ungestört ausbilden kann, muss wieder die Bedingung (5.13) erfüllt sein, wie eine sinngemäße Übertragung der Überlegung aus § 5 lehrt. Nach (11.20) ist dann auch $\mu|f| \gg a$ für $a\mu \ll 1$ bzw. $f^2 \gg a^5 \mu$ für $a\mu \gg 1$, und der Erwartungswert von $u_3'^2 = (u_3 - \Gamma')^2$ ergibt sich als klein gegen Γ'^2 .

Nach (4.5) und (12.1) wird

$$\dot{q}_{[ijk]\varrho} \equiv \dot{q}_{i\varrho} = \Gamma s_{i3}' s_{\varrho 3}.$$

s_{13}, s_{23}, s_{33} bilden die Komponenten eines Einheitsvektors \vec{e} :

$$s_{13} = e_1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad s_{23} = e_2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad s_{33} = e_3 = \cos \vartheta; \quad (12.2)$$

analog:

$$s'_{13} = e'_1 = \sin \vartheta' \cos \varphi', \quad s'_{23} = e'_2 = \sin \vartheta' \sin \varphi', \quad s'_{33} = e'_3 = \cos \vartheta'. \quad (12.3)$$

Für die übrigen Komponenten der orthogonalen Transformation $s_{\varrho n}$ können wir dann schreiben:

$$s_{\varrho 1} = \cos \psi \frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi}, \quad s_{\varrho 2} = \sin \psi \frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi};$$

entsprechend für s'_{i1} und s'_{i2} ; die Relationen (4.4) sind damit nämlich erfüllt wegen

$$\sum_\varrho e_\varrho \frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} = \sum_\varrho e_\varrho \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi} = \sum_\varrho \frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi} = 0, \quad \sum_\varrho \left(\frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \sum_\varrho \left(\frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi} \right)^2 = 1; \quad (12.4)$$

$$e_\varrho e_\sigma + \frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} \frac{\partial e_\sigma}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi} \frac{\partial e_\sigma}{\partial \varphi} = \delta_{\varrho \sigma}. \quad (12.5)$$

Setzen wir noch zur Abkürzung $r_3 = \Gamma + r_3' = r$, so schreibt sich die Gleichung (4.5):

$$\begin{aligned} q_{i\varrho} &= r e_i' e_\varrho + \xi_1 \frac{\partial e_i'}{\partial \vartheta'} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} + \xi_2 \frac{\partial e_i'}{\partial \vartheta'} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi} \\ &\quad + \xi_3 \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial e_i'}{\partial \varphi'} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} + \xi_4 \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial e_i'}{\partial \varphi'} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= +r_1 \cos \psi' \cos \varphi + r_2 \sin \psi' \sin \varphi, \\ \xi_2 &= -r_1 \cos \psi' \sin \varphi + r_2 \sin \psi' \cos \varphi, \\ \xi_3 &= -r_1 \sin \psi' \cos \varphi + r_2 \cos \psi' \sin \varphi, \\ \xi_4 &= +r_1 \sin \psi' \sin \varphi + r_2 \cos \psi' \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Anstelle der 9 Variablen $q_{i\varrho}$ führen wir nun die neuen Variablen ein:

$$\vartheta, \quad \varphi, \quad \vartheta', \quad \varphi', \quad r, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4; \quad (12.8)$$

die dazu konjugierten Impulse seien

$$p_\vartheta, \quad p_\varphi, \quad p'_\vartheta, \quad p'_\varphi, \quad p_r, \quad \pi_1, \quad \pi_2, \quad \pi_3, \quad \pi_4.$$

Die (12.6) entsprechende p -Transformation kann man ähnlich wie in § 6 durch Entwicklung nach den ξ erhalten; das Ergebnis entspricht der Formel (6.15) mit

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_{i\varrho} &= \frac{1}{r} \left\{ e'_i \left(\frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} p_\vartheta + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi} p_\varphi \right) \right. \\ &\quad \left. + e_\varrho \left(\frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} p'_\vartheta + \frac{1}{\sin^2 \vartheta'} \frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} p'_\varphi \right) \right\}, \\ \bar{p}_{i\varrho} &= e'_i e_\varrho p_r + \frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} \pi_1 + \frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi} \pi_2 \\ &+ \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \vartheta} \pi_3 + \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_\varrho}{\partial \varphi} \pi_4. \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

Mit der Transformation (12.6) ist jetzt wieder die Translation in den anderen q - und p -Richtungen, gemäss (5.6, 7) und (11.8, 9) mit (12.1), zu kombinieren:

$$\left. \begin{aligned} q_{rk\varrho} &= q'_{rk\varrho} + \gamma \sum_{\langle j l \rangle} \bar{B}_{[j l], rk} e'_{\langle j l \rangle} e_\varrho \quad (r > 3), \\ q_{(jk)\varrho} &= q'_{(jk)\varrho}, \quad q_{ii\varrho} = q'_{ii\varrho}; \\ p_{rk\varrho} &= p'_{rk\varrho} + \gamma \frac{f}{g} \sum_l \bar{A}_{ll, rk} e_\varrho \quad (r > 3), \\ p_{(jk)\varrho} &= p'_{(jk)\varrho} \quad (j \neq k), \quad p_{ii\varrho} = p'_{ii\varrho} + \gamma \frac{f}{g} \sum_l \bar{A}_{ll, ii} e_\varrho, \\ p_{[jk]\varrho} &= p_{i\varrho} = p'_{i\varrho} + \sum_s \sum_{l\sigma} (\lambda_{i\varrho, sl\sigma} p'_{sl\sigma} + \mu_{i\varrho, sl\sigma} q'_{sl\sigma}), \\ \text{wo } p'_{i\varrho} &= \bar{p}_{i\varrho} + \bar{\bar{p}}_{i\varrho} + \dots \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

Diese Formeln, dazu (12.6), stellen eine kanonische Transformation dar, wenn durch Wahl der Koeffizienten λ, μ dafür gesorgt

wird, dass $[p_{i\varrho}, q_{rk\sigma}] = [p_{i\varrho}, p_{rk\sigma}] = 0$; beachtet man (12.5), so kommt (bis auf Terme $\sim \xi$ oder r'_3):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{i\varrho, rk\sigma} &= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{C} \sum_{\langle j l \rangle} \overline{B}_{[j l], rk} [e'_i e'_{\langle j l \rangle} (\delta_{\varrho\sigma} - e_\varrho e_\sigma) \\ \quad + e_\varrho e_\sigma (\delta_{i\langle j l \rangle} - e'_i e'_{\langle j l \rangle})] + \dots \text{ für } r > 3, \\ 0 \text{ für } r \leq 3; \end{array} \right. \\ \mu_{i\varrho, rk\sigma} &= \frac{1}{C} \frac{f}{g} \sum_l \overline{A}_{ll, rk} e'_i (\delta_{\varrho\sigma} - e_\varrho e_\sigma) + \dots \text{ (für alle } r). \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

Man sieht leicht ein, dass die beiden Einheitsvektoren \vec{e} und \vec{e}' unabhängig voneinander alle Richtungen durchlaufen müssen, damit der System-Bildpunkt im Raum der q und p alle Minimallagen durchläuft. Es variieren also ϑ und ϑ' zwischen 0 und π , φ und φ' zwischen 0 und 2π .

Die Einführung der neuen Variablen in K gibt die (6.22) entsprechende Formel

$$\left. \begin{aligned} K &= H^0(p', q') + K'_S + \frac{1}{2} \sum_{i\varrho} \left[-p'^2_{i\varrho} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ p'_{i\varrho} + \sum_s \sum_{l\sigma} (\lambda_{i\varrho, sl\sigma} p'_{sl\sigma} + \mu_{i\varrho, sl\sigma} q'_{sl\sigma}) \right\}^2 \right] + \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

Mit K'_S ist der quadratische Term aus (11.17) (Fall II) gemeint, der sich nach (11.2, 10) und (12.7) wie folgt schreibt:

$$\left. \begin{aligned} K'_S &= -\frac{1}{2C} \left\{ \frac{g^2}{3(\mu f)^2} [(\xi_1 + \xi_4)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{f^2}{g^2 + 3(\mu f)^2} \left[\sum_{i\varrho} \left(\sum_i p'_{i i\varrho} \right)^2 - \left(\sum_{i\varrho} p'_{i i\varrho} e_\varrho \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$

§ 13. Isobaren-Energie und Streuterme.

Es folgt, ähnlich wie in § 7, eine weitere (schwächere) Translation des q - p -Raumes, die zur Abseparation der Isobaren-Energie führen soll. Zur Bestimmung dieser Translation suchen wir wieder das Minimum von K bei konstant gehaltenen $p'_{i\varrho}$, wobei wir den Term K'_S in (12.12) vorläufig beiseite lassen. Es gelten dann wieder die Formeln (7.2, 3, 4), wo nur $p_{i\varrho}$ jetzt gemäss (12.10) zu interpretieren ist. Dazu kommen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial q'_{sl\sigma}} &= \sum_r \sum_k B_{rk, sl} q'_{rk\sigma} + \sum_{i\varrho} \mu_{i\varrho, sl\sigma} p_{i\varrho} = 0, \text{ oder:} \\ q'_{rk\sigma} &= -\sum_s \sum_l \overline{B}_{sl, rk} \sum_{i\varrho} \mu_{i\varrho, sl\sigma} p_{i\varrho}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

*

Wird dies mit (7.3) in $p_{i\varrho}$ (12.10) eingesetzt, so ergibt sich wieder das Gleichungssystem (7.7) für die $p_{i\varrho}$, aber mit folgender Bedeutung der Koeffizienten Λ (anstelle von (7.6 und 11)):

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{i\varrho, j\sigma} &= \sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl\tau} (\lambda_{i\varrho, rk\tau} \bar{A}_{rk, sl} \lambda_{j\sigma, sl\tau} + \mu_{i\varrho, rk\tau} \bar{B}_{rk, sl} \mu_{j\sigma, sl\tau}) \\ &= \alpha \cdot e_i' e_j' (\delta_{\varrho\sigma} - e_\varrho e_\sigma) + \beta \cdot e_\varrho e_\sigma (\delta_{ij} - e_i' e_j') , \\ \text{wo } \alpha &= \frac{D}{C^2} \left[1 + 3 \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 \right] - 1 , \quad \beta = \frac{D}{C^2} - 1 . \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Die Auflösung der Gleichungen (7.7) nach den $p_{i\varrho}$ ergibt:

$$\left. \begin{aligned} p_{i\varrho} &= p_{i\varrho}' - \frac{\alpha}{1+\alpha} e_i' \sum_j e_j' p_{j\varrho}' - \frac{\beta}{1+\beta} e_\varrho \sum_\sigma e_\sigma p_{i\sigma}' \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta} \right) e_i' e_\varrho \sum_{j\sigma} e_j' e_\sigma p_{j\sigma}' . \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

Für den Minimalwert von K gilt wieder die Formel (7.13); setzt man dort $p_{i\varrho}$ nach (13.3) ein und drückt man die $p_{i\varrho}' = \bar{p}_{i\varrho} + \bar{\bar{p}}_{i\varrho}$ gemäss (12.9) aus, so erhält man mittels der Formeln (12.4):

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2 \Gamma^2} \left(\frac{\Delta}{1+\alpha} + \frac{\Delta'}{1+\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \sum_{\nu=1}^4 \pi_\nu^2 \right) , \\ \Delta &\equiv \frac{1}{\sin \vartheta} p_\vartheta \sin \vartheta p_\vartheta + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}, \quad \Delta' \equiv \frac{1}{\sin \vartheta'} p'_\vartheta \sin \vartheta' p'_\vartheta + \frac{p'^2_\varphi}{\sin^2 \vartheta'} \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Schliesslich kann man noch zeigen, dass die nachträgliche Hinzufügung des Terms K'_S (12.13) in (12.12) an Lage und Wert des Minimums nichts ändert, da nämlich in der Minimallage nach (7.3) $p'_{ii\varrho} = 0$ ist, und ebenso nach (13.1) $q'_{[jk]\sigma} = 0$, daher nach (12.6) $\xi_\nu = 0$.

Verschiebt man jetzt den Ursprung des q - p -Raumes in die Minimallage, so kommt analog zu (7.15, 16):

$$\left. \begin{aligned} K &= K_0 + \frac{1}{2} \sum''_{rs} \sum_{kl\varrho} A_{rk, sl} p''_{rk\varrho} p''_{sl\varrho} + \frac{1}{2} \sum'_{s} \sum_{ikl\varrho} A_{(ik), sl} p''_{(ik)\varrho} p''_{sl\varrho} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{ijk\varrho} A_{(ik), (jl)} p''_{(ik)\varrho} p''_{(jl)\varrho} + \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{kl\varrho} B_{rk, sl} q''_{rk\varrho} q''_{sl\varrho} + K_S + K'_S , \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

$$K_S = \frac{1}{2} \sum_{i\varrho} \left[\sum_s^{\infty} \sum_{l\sigma} (\lambda_{i\varrho, sl\sigma} p''_{sl\sigma} + \mu_{i\varrho, sl\sigma} q''_{sl\sigma}) \right]^2 \quad (13.6)$$

Die weiteren Überlegungen in § 7 lassen sich sinngemäss übertragen.

Der nächste Schritt ist die Bildung von $S^* K S$. Wir setzen wieder $S = \mathring{S} \cdot S'$, wo \mathring{S} die Matrix \mathring{H}' (d. h. den Wert von H' in

der Minimallage (12.1)) diagonal macht. Setzt man die r_n - und u_n -Werte aus (12.1) in (11.1) ein, so wird

$$\hat{S}^* \hat{H}' \hat{S} = \gamma (\Gamma \sigma_3 \tau_3 + \Gamma' \tau_3) \text{ mit } \hat{S} = Y Y', \quad (13.7)$$

wo Y und Y' den Gleichungen (4.7) für $n = 3$ genügen müssen, also mit (12.2, 3):

$$\sum_{\varrho} \tau_{\varrho} e_{\varrho} = Y \tau_3 Y^*, \quad \sum_i \sigma_i e'_i = Y' \sigma_3 Y'^*.$$

Dies leisten die Matrizen

$$\left. \begin{aligned} Y &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} - i \tau_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - i \tau_2 \sin \frac{\vartheta}{2} \right), \\ Y' &= \left(\cos \frac{\varphi'}{2} - i \sigma_3 \sin \frac{\varphi'}{2} \right) \left(\cos \frac{\vartheta'}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\vartheta'}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

Damit ist $\hat{S} = Y Y'$ bestimmt, und $S' = \hat{S}^{-1} S$ kann störungsmässig durch Entwicklung nach den ξ , und r'_3 bestimmt werden, spielt aber wie in § 8 keine Rolle.

Wir haben nun das in die Schrödinger-Gleichung (2.7) eingehende Matrixelement $(S^* K S)_{00}$ zu berechnen. Dabei ergibt sich die Isobaren-Energie aus den Termen $\sim \Delta$ und Δ' in K_0 (13.4):

$$H^{\text{II}} = \frac{1}{2 \Gamma^2} \left\{ \frac{1}{1 + \alpha} (Y^* \Delta Y)_{00} + \frac{1}{1 + \beta} (Y'^* \Delta' Y')_{00} \right\}. \quad (13.9)$$

Mit (13.4 und 8) wird

$$Y^* [\Delta, Y] = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left\{ \frac{1}{4} - (\tau_3 \cos \vartheta - \tau_1 \sin \vartheta) p_{\varphi} \right\} - \tau_2 (p_{\vartheta} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \vartheta)$$

Hier liefern die Terme $\sim \tau_1$ und τ_2 keinen Beitrag zum massgebenden Diagonalelement, in dem überdies $\tau_3 = +1$ zu setzen ist:

$$(Y^* \Delta Y)_{00} = \frac{1}{\sin \vartheta} p_{\vartheta} \sin \vartheta p_{\vartheta} + \frac{p_{\varphi}^2 - \cos \vartheta p_{\varphi} + \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{4}. \quad (13.10)$$

Entsprechend wird

$$(Y'^* \Delta' Y')_{00} = \frac{1}{\sin \vartheta'} p'_{\vartheta} \sin \vartheta' p'_{\vartheta} + \frac{p'^2_{\varphi} - \cos \vartheta' p'_{\varphi} + \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta'} + \frac{1}{4}. \quad (13.11)$$

Abgesehen von der anderen Bezeichnung der Winkel und von der additiven Konstanten 1/4 gleichen die Operatoren (13.10 und 11) dem Operator $\sum_n P_n^2$ in (9.1) mit $p_{\varPsi} = -\frac{1}{2}$. Die Eigenfunktionen von H^{II} sind daher wieder durch die Kugelkreisel-Eigenfunktionen darstellbar:

$$f = e^{i(n\varphi + m\varphi')} u(\vartheta) u(\vartheta'), \quad (13.12)$$

wo n und m halbzahlig sein müssen, damit $F = SF'$ die zu fordernde Periodizität in φ und φ' besitzt; und die Eigenwerte von H^{II} sind:

$$\left. \begin{aligned} E_{k,j}^{\text{II}} &= \frac{1}{2\Gamma^2} \left\{ \frac{k(k+1)}{1+\alpha} + \frac{j(j+1)}{1+\beta} \right\} + \text{const}, \\ \text{wo } k &\geq |n|, j \geq |m|, m, n, j, k \text{ halbzahlig.} \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

Hier haben die Koeffizienten von $k(k+1)$ und $j(j+1)$ nach (13.2) mit (6.1) und (7.21, 22) folgende Werte:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } a\mu \ll 1: \frac{1}{2\Gamma^2(1+\alpha)} &= \frac{6\pi a}{g^2 + 3(\mu f)^2}, \quad \frac{1}{2\Gamma^2(1+\beta)} = \frac{6\pi a}{g^2}; \\ \text{für } a\mu \gg 1: \frac{1}{2\Gamma^2(1+\alpha)} &\sim \frac{a^5 \mu^4}{g^2 + 3(\mu f)^2}, \quad \frac{1}{2\Gamma^2(1+\beta)} \sim \frac{a^5 \mu^4}{g^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.14)$$

Die Untersuchung der Ladungs- und Drehimpulsgrößen (9.4) ergibt als Nucleon-Beiträge:

$$\begin{aligned} e^{\text{II}} &= Y^* \left\{ \frac{1}{2} (1 + \tau_3) + p_\varphi \right\} Y = \frac{1}{2} + p_\varphi = \frac{1}{2} + n; \\ M_i^{\text{II}} &= Y'^* \left\{ \frac{1}{2} \sigma_i + \frac{1}{\sin \vartheta'} \left(\frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} p_{\vartheta'} - \frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} p_{\varphi'} \right) \right\} Y' \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta'} \left(\frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} p_{\vartheta'} - \frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} p_{\varphi'} \right) + \frac{\sigma_3}{2} \left(e'_i + \operatorname{ctg} \vartheta' \frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} \right), \end{aligned} \quad (13.15)$$

$$M_3^{\text{II}} = p'_\varphi = m, \quad (13.16)$$

$$\sum_i (M_i^{\text{II}})^2 = \frac{1}{\sin \vartheta'} p'_\vartheta \sin \vartheta' p'_s + \frac{p'^2_\varphi - \sigma_3 \cos \vartheta' p'_\varphi + \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta'},$$

oder, da das massgebende Diagonalelement von $\sum_i (M_i^{\text{II}})^2$ mit demjenigen von $(Y'^* \Delta' Y' - \frac{1}{4})$ (vgl. (13.11)) übereinstimmt:

$$\sum_i (M_i^{\text{II}})^2 = j(j+1). \quad (13.17)$$

Es sind also auch hier j, m die Spinquantenzahlen und $n + \frac{1}{2}$ die Ladungszahl des Nucleons. Die Zahl k , die im „Ladungsspinraum“ die Rolle des Gesamtspins j spielt, hat keine unmittelbare physikalische Bedeutung. — Die 4 Grundzustände, die das Nucleon nach (13.13) besitzt ($k = j = \frac{1}{2}, n = \pm \frac{1}{2}, m = \pm \frac{1}{2}$), können nach dem Gesagten den bekannten Proton-Neutron-Zuständen zugeordnet werden.

Im Falle $g^2 \ll (\mu f)^2$ wird nach (13.14) der Koeffizient von $j(j+1)$ in E^{II} gross gegen denjenigen von $k(k+1)$. Würde man,

entgegen der Bedingung für starke Kopplung (5.13), g gegen null gehen lassen, so würde die Anregungsenergie der Isobaren vom Spin $j > \frac{1}{2}$ gegen ∞ gehen, d. h. der Spin würde in dieser Grenze auf den Wert $j = \frac{1}{2}$ ($m = \pm \frac{1}{2}$) beschränkt sein, und man könnte statt (13.13, 14), z. B. für $a \mu \ll 1$, einfach schreiben:

$$E^{\text{II}} = \frac{2\pi a}{(\mu f)^2} \cdot k(k+1), \quad \text{wo } k \geq |n|.$$

Dies ist aber die Isobaren-Energie nach der Theorie mit dem speziellen Kopplungsansatz, den man durch Nullsetzen von g in H' (1.4) erhält (mit $\mu/f \gg a$). Hiernach scheint es, dass die Gültigkeit der Formeln (13.13, 14) nur eine starke f -Kopplung voraussetzt, während g — abgesehen von der durch die Ungleichung (11.20) festgesetzten oberen Schranke — willkürlich wählbar wäre.

Was schliesslich die *Mesonstreuung* anlangt, so kann man ähnlich wie in § 10 — unter denselben Voraussetzungen — begründen, dass das Streuproblem näherungsweise auf Grund der Hamiltonfunktion (10.1) behandelt werden kann, wobei aber K_S jetzt durch (13.6) gegeben ist. Insbesondere liefert auch der Term K'_S (12.13) keinen wesentlichen Beitrag zur Streuung, solange $a \omega \ll 1$.¹⁾ Wir begnügen uns hier mit der Angabe des Resultats für die Streuung *longitudinaler* Mesonen im Sonderfall $g^2 \ll (\mu f)^2$: Mit den gleichen Bezeichnungen wie in (10.4) haben die Eigenschwingungen im Ortsraum folgendes Aussehen:

$$\tilde{\psi}_\sigma(x) = s_0 e^{ik_0 x} \delta_{\sigma\sigma_0} - a \beta^2 \cdot s \frac{e^{i|k_0| |x|}}{|x|} \cdot (\delta_{\sigma\sigma_0} - e_\sigma e_{\sigma_0}). \quad (13.18)$$

Die Streuung ist also isotrop; Meson und Nucleon können Ladung austauschen, aber keinen Spin. Der Wirkungsquerschnitt, summiert über die Endladungen und gemittelt über die Anfangsladungen des Mesons, hat den Wert

$$\frac{dQ}{d\Omega} = \frac{2}{3} a^2 \beta^4. \quad (13.19)$$

¹⁾ Hier ist strenggenommen (wie auf S. 580) der Fall $\Gamma'/2 \Gamma \approx 1$ auszunehmen. — Der erste Term in K'_S (12.13) ($\sim [(\xi_1 + \xi_4)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2] = (r_1 + r_2)^2$) beschreibt eine Kopplung der transversalen Mesonen an das Nucleon; dieser Term ist es, der bewirkt, dass für $\Gamma'/2 \Gamma < 1$ das Gleichgewicht II instabil wird; die dafür massgebende Eigenfrequenz ω_0 (sie ist einfach zählend) bestimmt sich durch die Gleichung

$$\int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{(\mu^2 - \Delta) - \omega_0^2} \delta_a(x) = \frac{\Gamma'}{2\Gamma} \int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{\mu^2 - \Delta} \delta_a(x).$$

D. Die Kernkräfte.

§ 14. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen.

Indem wir N ruhende Nucleonen an den Orten x_ν ($\nu = 0 \cdots N - 1$) annehmen, setzen wir in der Hamiltonfunktion (1.3), bei gleichbleibendem H^0 (1.1):¹⁾

$$\left. \begin{aligned} H' &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_\nu \sum_{i,\varrho} \sigma_i^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \int dX \delta_a(x - x_\nu) \operatorname{rot}_i \vec{\psi}_\varrho \\ &\quad - f \sum_\nu \sum_\varrho \tau_\varrho^{(\nu)} \int dX \delta_a(x - x_\nu) \operatorname{div} \vec{\pi}_\varrho = \sum_\nu H'_\nu, \\ H'' &= \frac{1}{2} (\mu f)^2 \sum_{\mu,\nu} \left(\sum_\varrho \tau_\varrho^{(\mu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \right) \int dX \delta_a(x - x_\mu) \delta_a(x - x_\nu). \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Wir entwickeln $\vec{\psi}$ und $\vec{\pi}$ wieder gemäss (3.1, 2) nach einem Orthogonalfunktionensystem, über dessen $3N$ erste Funktionen wir wie folgt verfügen:

$$U_{3\nu+i}(x) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \delta_a(x - x_\nu)}{\partial x_i} \quad (\nu = 0, 1 \cdots N - 1; i = 1, 2, 3). \quad (14.2)$$

Dabei sind die Abstände $|x_\mu - x_\nu|$ je zweier Nucleonen so gross angenommen, dass die Formfunktionen δ_a verschiedener Nucleonen nicht überlappen:

$$\delta_a(x - x_\mu) \delta_a(x - x_\nu) = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu. \quad (14.3)$$

Dann sind die $3N$ Funktionen (14.2) automatisch aufeinander orthogonal und normiert (vgl. (1.2), (3.6)). Mit (14.2) ergibt sich für H'_ν (vgl. (14.1)) die (3.14) entsprechende Darstellung:

$$H'_\nu = \eta \left\{ g \sum_{\langle j,k \rangle \varrho} \sigma_{\langle j,k \rangle}^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} q_{3\nu + [j,k], \varrho} + f \sum_{i,\varrho} \tau_\varrho^{(\nu)} p_{3\nu + i, i, \varrho} \right\}, \quad (14.4)$$

wobei, im Sinne der Bezeichnung (3.9)

$$q_{3\nu + [i,k], \varrho} = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{3\nu + i, k, \varrho} - q_{3\nu + k, i, \varrho}).$$

Der Term H'' (14.1) kann wegen (14.3) ignoriert werden.

Sei S_ν die (von den $\sigma_i^{(\nu)}$, $\tau_\varrho^{(\nu)}$ des ν -ten Nucleons allein abhängende) unitäre Matrix, die $S_\nu^* H'_\nu S_\nu$ diagonal macht, so wird offenbar die 4^N -reihige Matrix $H' = \sum_\nu H'_\nu$ durch Transformation mit der unitären Matrix

$$S = \prod_\nu S_\nu \quad (14.5)$$

¹⁾ Vgl. QdW, § 14, speziell die dortigen Formeln (14.2, 3 und 10, 11).

auf Diagonalform gebracht. Die Eigenwerte von H' sind Summen der nach § 11 zu berechnenden Eigenwerte der H'_ν ; speziell der hauptsächlich interessierende tiefste H' -Eigenwert wird $= -\gamma \sum_\nu \sum_n y_n^{(\nu)}$, wo die $y_n^{(\nu)}$ sich wie folgt berechnen: man setze gemäss (5.2) und (11.2)

$$q_{3\nu + [i,k],\varrho} = \sum_n r_n^{(\nu)} s'_{ikn} s_{\varrho n}^{(\nu)}, \quad u_n^{(\nu)} = \frac{f}{g} \sum_{i,\varrho} p_{3\nu + i, i, \varrho} s_{\varrho n}^{(\nu)}; \quad (14.6)$$

dann ist $y_n^{(\nu)}$ als Funktion der $r_m^{(\nu)}$ und $u_m^{(\nu)}$ durch die (für jedes ν einzeln geltenden) Gleichungen (11.5) bestimmt. Die Überlegungen des § 2 — entsprechend ergänzt — führen dann wieder auf die einkomponentige Schrödinger-Gleichung (2.7) mit

$$K = H^0 - \gamma \sum_\nu \sum_n y_n^{(\nu)}, \quad (14.7)$$

und bei starker Kopplung reduziert sich das Problem wiederum auf die Aufgabe, die kleinen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage zu untersuchen. Um die *Kernkräfte* in einer ersten Näherung zu bestimmen, genügt sogar schon die Bestimmung der Gleichgewichtslage und des entsprechenden K -Wertes. Denn die potentielle Energie der statischen Kräfte ist nichts anderes als der abstandsabhängige Teil der „Selbstenergie“ des Nucleonensystems, und die Selbstenergie ist in einer ersten Näherung (Beschränkung auf die Terme höchster Ordnung in g und f) durch den Minimalwert von $(S^* K S)_{00}$ oder von K gegeben. Nur in dieser Näherung sollen die Kernkräfte hier untersucht werden.

Zur Bestimmung des Minimums variieren wir zunächst wieder die Variablen $q_{sl\varrho}$ und $r_m^{(\nu)}$ unter Berücksichtigung der „Nebenbedingungen“ (14.6) ($s'_{in} s_{\varrho n}^{(\nu)} = \text{const}$):

$$\begin{aligned} dK - \sum_\nu \sum_{\langle ik \rangle \varrho} \alpha_{\langle ik \rangle \varrho}^{(\nu)} \cdot d(q_{3\nu + [i,k],\varrho} - \sum_n r_n^{(\nu)} s'_{ikn} s_{\varrho n}^{(\nu)}) &= 0, \\ \sum_r \sum_k B_{rk, sl} q_{rk\varrho} - \sum_\nu \sum_{\langle ik \rangle} \alpha_{\langle ik \rangle \varrho}^{(\nu)} \delta_{s, 3\nu + [i]} \delta_{k, l} &= 0, \end{aligned} \quad (14.8)$$

$$\gamma \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial r_m^{(\nu)}} - \sum_{\langle ik \rangle \varrho} \alpha_{\langle ik \rangle \varrho}^{(\nu)} s'_{ikm} s_{\varrho m}^{(\nu)} = 0. \quad (14.9)$$

Bei der Variation der $p_{sl\varrho}$ andererseits sind die $u_n^{(\nu)}$ gemäss (14.6) als Funktionen der p zu betrachten (vgl. (11.7)):

$$\frac{\partial K}{\partial p_{sl\varrho}} = \sum_r \sum_k A_{rk, sl} p_{rk\varrho} - \gamma \frac{f}{g} \sum_\nu \delta_{s, 3\nu + l} \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial u_m^{(\nu)}} s_{\varrho m}^{(\nu)} = 0. \quad (14.10)$$

Aus (14.6, 8, 9, 10) folgt, dass im Minimum

$$\sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl\varrho} B_{rk, sl} q_{rk\varrho} q_{sl\varrho} = \gamma \sum_{\nu} \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial r_m^{(\nu)}} r_m^{(\nu)},$$

$$\sum_{rs}^{\infty} \sum_{kl\varrho} A_{rk, sl} p_{rk\varrho} p_{sl\varrho} = \gamma \sum_{\nu} \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial u_m^{(\nu)}} u_m^{(\nu)};$$

folglich wird nach (14.7) und (3.3) der Minimalwert von K :

$$K_{\min} = \frac{\gamma}{2} \sum_{\nu} \sum_m \left(\frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial r_m^{(\nu)}} r_m^{(\nu)} + \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial u_m^{(\nu)}} u_m^{(\nu)} - 2 y_m^{(\nu)} \right) \quad (14.11)$$

Analog zu (5.6, 7) schliessen wir aus (14.8):

$$q_{rk\varrho} = \sum_{\nu} \sum_{\langle jl \rangle} \bar{B}_{3\nu+[j, l], rk} \alpha_{\langle jl \rangle \varrho}^{(\nu)},$$

$$q_{3\mu+[i, k], \varrho} = \sum_m r_m^{(\mu)} s'_{\langle ik \rangle m} s_{\varrho m}^{(\mu)} = \sum_{\nu} \sum_{\langle jl \rangle} \bar{B}_{3\nu+[j, l], 3\mu+[i, k]} \alpha_{\langle jl \rangle \varrho}^{(\nu)}. \quad (14.12)$$

Die $9N$ Gleichungen (14.12) können zur Berechnung der Lagrange-Multiplikatoren $\alpha_{\langle jl \rangle \varrho}^{(\nu)}$ dienen, worauf diese in (14.9) einzusetzen sind. Andererseits folgt aus (14.10), in Analogie zu (11.9):

$$u_m^{(\mu)} = \gamma \left(\frac{f}{g} \right)^2 \sum_{\nu} \left(\sum_{kl} \bar{A}_{3\nu+l, l, 3\mu+k, k} \right) \sum_{m'} \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial u_{m'}^{(\nu)}} \sum_{\varrho} s_{\varrho m'}^{(\nu)} s_{\varrho m}^{(\mu)}. \quad (14.13)$$

Aus den Gleichungen (14.9, 12 und 13) sind die $q_{rk\varrho}$ und $p_{rk\varrho}$ mit $r > 3N$ eliminiert.

Im Folgenden sollen diese Gleichungen näherungsweise gelöst werden unter der Annahme, dass die Abstände aller Nucleonenpaare gross gegen den Nucleonradius a sind:

$$|x_{\mu} - x_{\nu}| \gg a \text{ für } \mu \neq \nu. \quad (14.14)$$

Im Limes unendlich grosser Abstände verschwinden nämlich $\bar{B}_{3\nu+[j, l], 3\mu+[i, k]}$ und $\sum_{kl} \bar{A}_{3\nu+l, l, 3\mu+k, k}$ für $\nu \neq \mu$ (vgl. die folgenden Formeln (15.7) und (16.6)) und die Lösungen von (14.9, 12, 13) entsprechen dann denjenigen des Ein-Nucleonproblems: $\alpha_{i\varrho}^{(\nu)} \rightarrow \dot{\alpha}_{i\varrho}$, $r_n^{(\nu)} \rightarrow \dot{r}_n$, $u_n^{(\nu)} \rightarrow \dot{u}_n$. Im Falle (14.14) genügt es daher in erster Näherung, in den Gleichungen (14.12 und 13) auf den rechten Seiten in den „kleinen“ Termen $\nu \neq \mu$ die α und $\partial y / \partial u$ durch ihre Werte nullter Näherung zu ersetzen; d. h. mit (5.7) (auch für $f \neq 0$ gültig!) und (11.9, 10) (vgl. auch (3.19) und (4.4)):

$$\sum_m r_m^{(\mu)} s'_{\langle ik \rangle m} s_{\varrho m}^{(\mu)} = C \alpha_{\langle ik \rangle \varrho}^{(\mu)}$$

$$+ \frac{1}{C} \sum_{\nu} \sum_{\langle jl \rangle} \bar{B}_{3\nu+[j, l], 3\mu+[i, k]} \sum_n \dot{r}_n s'_{\langle jl \rangle n} s_{\varrho n}^{(\nu)}, \quad (14.15)$$

$$u_m^{(\mu)} = \Gamma' \frac{\partial \sum_n y_n^{(\mu)}}{\partial u_m^{(\mu)}} + \frac{\gamma}{\Gamma'} \left(\frac{f}{g} \right)^2 \sum_{\nu} \left(\sum_{k l} \bar{A}_{3\nu+l, l, 3\mu+k, k} \right) \sum_n \ddot{u}_n \sum_{\varrho} s_{\varrho n}^{(\nu)} s_{\varrho m}^{(\mu)}. \quad (14.16)$$

Setzt man die α aus (14.15) in (14.9) ein, so folgt (vgl. (4.4), (6.1)):

$$\begin{aligned} r_m^{(\mu)} = \Gamma & \frac{\partial \sum_n y_n^{(\mu)}}{\partial r_m^{(\mu)}} + \frac{1}{C} \sum_{\nu} \sum_{\langle i k \rangle \times \langle j l \rangle} \bar{B}_{3\nu+[j, l], 3\mu+[i, k]} \sum_n \dot{r}_n s_{\langle j l \rangle n}^{(\nu)} s_{\langle i k \rangle m}^{(\mu)} \\ & \cdot \sum_{\varrho} s_{\varrho n}^{(\nu)} s_{\varrho m}^{(\mu)}. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Diese Gleichungen (14.16, 17) treten jetzt an die Stelle der Gleichungen (11.9, 6) des Ein-Nucleon-Problems. Setzen wir in ihnen

$$\dot{r}_n^{(\nu)} = \dot{r}_n + \delta r_n^{(\nu)}, \quad \dot{u}_n^{(\nu)} = \dot{u}_n + \delta u_n^{(\nu)}, \quad (14.18)$$

so haben wir konsequenterweise alle in den δr , δu quadratischen und höheren Terme zu vernachlässigen. Was die \dot{r}_n , \dot{u}_n anlangt, werden wir wieder die beiden Fälle $\Gamma' \leq 2\Gamma$ zu unterscheiden haben; denn die Frage, welches der in § 11 diskutierten Extrema das eigentliche Minimum darstellt, wird — (14.14) vorausgesetzt — schon in der „nullten Näherung“ entschieden.

$$\text{§ 15. Fall I: } \frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 < 1.$$

In diesem Falle ist nach § 11

$$\dot{r}_n = \Gamma = \gamma C, \quad \dot{u}_n = 0 \quad \text{für alle } n. \quad (15.1)$$

Es ist also $u = \delta u$, und die in den $u_n^{(\nu)}$ quadratischen Terme sind zu vernachlässigen. Für $\sum_n y_n^{(\nu)}$ können wir dann die in (11.17) angegebene Näherungsformel heranziehen (für jedes ν einzeln):

$$\sum_n y_n^{(\nu)} = \sum_n r_n^{(\nu)}, \quad \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial r_m^{(\nu)}} = 1, \quad \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial u_m^{(\nu)}} = \frac{u_m^{(\nu)}}{2\Gamma}. \quad (15.2)$$

Hiermit und mit (15.1) gibt (14.16): $u_m^{(\mu)} = 0$, und (14.17):

$$\sum_m r_m^{(\mu)} = 3\Gamma + \gamma \sum_{\nu} \sum_{\langle i k \times j l \rangle} \bar{B}_{3\nu+[j, l], 3\mu+[i, k]} \sum_{\varrho} S_{\langle j l \rangle \varrho}^{(\nu)} S_{\langle i k \rangle \varrho}^{(\mu)}, \quad (15.3)$$

wo gemäss (6.2)

$$S_{i \varrho}^{(\nu)} = \sum_n s_{i n}^{(\nu)} s_{\varrho n}^{(\nu)}. \quad (15.4)$$

Für den Minimalwert von K , d. h. die Selbstenergie des Nucleonen-systems, erhält man aus (14.11) mit (15.2, 3):

$$K_{\min} = -\frac{\gamma}{2} \sum_{\mu} \sum_m r_m^{(\mu)} = -\frac{3}{2} \gamma \Gamma N + \frac{1}{2} \sum_{\mu \nu} V^{(\mu \nu)}, \quad (15.5)$$

$$V^{(\mu \nu)} = -\gamma^2 \sum_{\langle i k \times j l \rangle} \bar{B}_{3\nu+[j, l], 3\mu+[i, k]} \sum_{\varrho} S_{\langle j l \rangle \varrho}^{(\nu)} S_{\langle i k \rangle \varrho}^{(\mu)}: \quad (15.6)$$

$V^{(\mu\nu)}$ ist die statische Wechselwirkungsenergie des Nucleonen-paares μ, ν in erster Näherung. Die Fortsetzung der Entwicklung nach Potenzen von $a / |x_\mu - x_\nu|$ würde in (15.5) höhere Terme liefern, die u. a. Mehrkörperkräften entsprechen¹⁾.

Die Koeffizienten \bar{B} in (15.6) berechnen wir auf Grund der Formeln (3.16, 17) und (14.2) unter der Annahme $a \mu \ll 1$, die bewirkt, dass die Formfunktion δ_a in diesen Formeln durch die singuläre δ -Funktion ersetzt werden darf:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_{3\nu+[j,l], 3\mu+[i,k]} &= -\frac{1}{2\eta^2} \left\{ \delta_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ki} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \right. \\ &\quad \left. - \delta_{il} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}, \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

wo $r = |x_\mu - x_\nu|$, $x_i = x_{\mu,i} - x_{\nu,i}$; $\mu \neq \nu$.

Hiermit wird $V^{(\mu\nu)}$ (15.6):

$$V^{(\mu\nu)} = \frac{g^2}{2} \sum_q \left\{ \left(\sum_i S_{i,q}^{(\mu)} S_{i,q}^{(\nu)} \right) A - \left(\sum_i S_{i,q}^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j S_{j,q}^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}. \quad (15.8)$$

Die Grössen $S_{i,q}^{(\nu)}$ (15.4), die wir uns gemäss (6.4) als Funktionen Euler'scher Winkel $\Theta_\nu, \Phi_\nu, \Psi_\nu$ dargestellt denken können — zu jedem Nucleon ν gehören 3 Euler'sche Winkel —, haben als Operatoren zu gelten, die auf die Eigenfunktionen der Isobaren-Energien H_ν^I (vgl. (9.1)) der verschiedenen Nucleonen anzuwenden sind; nach diesen Eigenfunktionen sollte ja die Schrödingerfunktion F_0' immer entwickelt werden. Nach (15.6 oder 8) ist also $V^{(\mu\nu)}$ ein Operator oder eine Matrix bezüglich der Ladungs- und Spin-Zustände der Nucleonen μ und ν ; damit ist der *Austauschcharakter* der Kräfte gekennzeichnet.

Wir berechnen speziell die Untermatrix von $V^{(\mu\nu)}$, die sich auf die *Grundzustände beider Nucleonen* μ, ν , d. h. auf deren normale Proton- und Neutron-Zustände bezieht. Dazu benötigen wir die Eigenfunktionen (9.2) für die Grundzustände $j = \frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$, $n = \pm \frac{1}{2}$, die wir der bekannten Theorie des symmetrischen Kreisels entnehmen können²⁾:

$$\left. \begin{aligned} f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= c \cdot e^{\frac{i}{2}(\Phi + \Psi)} \sin \frac{\Theta}{2}, & f_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} &= c \cdot e^{\frac{i}{2}(\Phi - \Psi)} \cos \frac{\Theta}{2}, \\ f_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= -c \cdot e^{\frac{i}{2}(-\Phi + \Psi)} \cos \frac{\Theta}{2}, & f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} &= c \cdot e^{\frac{i}{2}(-\Phi - \Psi)} \sin \frac{\Theta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

¹⁾ Wie in der Skalartheorie: vgl. I, § 9, insbesondere Gleichung (133).

²⁾ Vgl. z. B. A. SOMMERFELD, l. c. (Fussnote ¹⁾ S. 572), Gleichung (15) auf S. 162. Die Vorzeichen der f_{mn} in (15.9) sind zweckmässig gewählt.

$(c = (2\pi^3)^{-\frac{1}{2}})$. Bildet man hiermit für ein bestimmtes Nucleon — der Index ν werde für den Moment fortgelassen — die entsprechende 4-reihige Matrix

$$(m' n' | S_{i_\varrho} | m'' n'') = \int_0^\pi d\Theta \sin\Theta \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{2\pi} d\Psi f_{m' n'}^* S_{i_\varrho} f_{m'' n''},$$

so kann das Ergebnis geschrieben werden:

$$(m' n' | S_{i_\varrho} | m'' n'') = -\frac{1}{3} \cdot (m' | \sigma_i | m'') \cdot (n' | \tau_\varrho | n''), \quad (15.10)$$

wo die zweireihigen Matrizen σ_i und τ_ϱ , die sich auf die Spinquantenzahl $m = \pm \frac{1}{2}$ bzw. auf die Ladungsquantenzahl $n = \pm \frac{1}{2}$ allein beziehen, die Pauli'schen Matrizen in üblicher Darstellung sind:

$$\begin{matrix} \sigma_1 \\ \tau_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \sigma_2 \\ \tau_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \sigma_3 \\ \tau_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15.11)$$

Abkürzend schreiben wir für (15.10), indem wir den Nucleon-Index ν wieder hinzufügen:

$$S_{i_\varrho}^{(\nu)} = -\frac{1}{3} \sigma_i^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)}. \quad (15.12)$$

Damit ergibt sich für $V^{(\mu\nu)}$ (15.8), genauer gesagt für die auf die Grundzustände beider Nucleonen bezügliche Untermatrix:

$$\begin{aligned} V^{(\mu\nu)} = \frac{1}{9} \cdot \frac{g^2}{2} & \left(\sum_\varrho \tau_\varrho^{(\mu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \right) \left\{ \left(\sum_i \sigma_i^{(\mu)} \sigma_i^{(\nu)} \right) \Delta \right. \\ & \left. - \left(\sum_i \sigma_i^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j \sigma_j^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}. \quad (15.13) \end{aligned}$$

Dies ist $\frac{1}{9}$ des Wertes, den man bei Annahme schwacher Kopplung mit der Störungsmethode erhält, wenn der Kopplungsansatz (1.4) mit $f = 0$ gewählt wird.¹⁾ — Wenn die Anregungsenergie der Zustände $j = 3/2$ als gross gelten kann gegenüber den bei einem Nucleonen-Wechselwirkungsproblem ins Spiel kommenden Energien, so wird man V näherungsweise durch die Untermatrix (15.13) darstellen können, unter Vernachlässigung der übrigen Matrixelemente (z. B. $j = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$). In diesem Grenzfall sind also die Kräfte bei starker Kopplung die gleichen wie bei schwacher Kopplung, abgesehen vom Zahlfaktor und abgesehen vom Fehlen des in der Störungsrechnung auftretenden Termes $\sim f^2$.

¹⁾ Zu beachten ist, dass der eine Kopplungsparameter in (1.4) mit $g/\sqrt{2}$ bezeichnet wurde, für den man sonst etwa g schreibt. Vgl. auch IV, S. 224, wo $|g_V|^2 = g^2/2$.

$$\text{§ 16. Fall II: } \frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 > 1.$$

In diesem Falle sind die \dot{r}_n , \dot{u}_n in (14.18) durch (12.1) bestimmt. Bei Vernachlässigung quadratischer Terme in den δr und δu gibt (11.17):

$$\left. \begin{aligned} \sum_n y_n^{(\nu)} &= r_3^{(\nu)} + u_3^{(\nu)}, \quad \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial r_3^{(\nu)}} = \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial u_3^{(\nu)}} = 1, \\ \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial r_1^{(\nu)}} &= \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial r_2^{(\nu)}} = \frac{r_1^{(\nu)} + r_2^{(\nu)}}{\Gamma'}, \quad \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial u_m^{(\nu)}} = \frac{u_m^{(\nu)}}{\Gamma + \Gamma'} \text{ für } m = 1, 2. \end{aligned} \right\} (16.1)$$

Hiermit und mit (12.1) ergeben die Gleichungen (14.16, 17) für $m = 3$:

$$\left. \begin{aligned} r_3^{(\mu)} &= \Gamma + \gamma \sum'_{\nu} \sum_{\langle i k \rangle \langle j l \rangle} \bar{B}_{3\nu+[j,l], 3\mu+[i,k]} e'_{\langle j l \rangle} e'_{\langle i k \rangle} \sum_{\varrho} e_{\varrho}^{(\nu)} e_{\varrho}^{(\mu)}, \\ u_3^{(\mu)} &= \Gamma' + \gamma \left(\frac{f}{g} \right)^2 \sum'_{\nu} \left(\sum_{k l} \bar{A}_{3\nu+l, l, 3\mu+k, k} \right) \sum_{\varrho} e_{\varrho}^{(\nu)} e_{\varrho}^{(\mu)}, \end{aligned} \right\} (16.2)$$

wo gemäss (12.2, 3)

$$e_{\varrho}^{(\nu)} = s_{\varrho 3}^{(\nu)}, \quad e_i'^{(\nu)} = s_{i 3}^{(\nu)} \quad (16.3)$$

Bei konsequenter Vernachlässigung der in $r_1^{(\nu)}$, $r_2^{(\nu)}$, $u_1^{(\nu)}$, $u_2^{(\nu)}$ quadratischen Terme gibt (14.11) mit (12.1) und (16.1, 2):

$$K_{\min} = -\frac{\gamma}{2} \sum_{\mu} (r_3^{(\mu)} + u_3^{(\mu)}) = -\frac{\gamma}{2} (\Gamma + \Gamma') N + \frac{1}{2} \sum'_{\mu \nu} V^{(\mu \nu)}, \quad (16.4)$$

$$\left. \begin{aligned} V^{(\mu \nu)} &= V_g^{(\mu \nu)} + V_f^{(\mu \nu)}, \\ V_g^{(\mu \nu)} &= -\gamma^2 \sum_{\langle i k \rangle \langle j l \rangle} \bar{B}_{3\nu+[j,l], 3\mu+[i,k]} e'_{\langle j l \rangle} e'_{\langle i k \rangle} \sum_{\varrho} e_{\varrho}^{(\nu)} e_{\varrho}^{(\mu)}, \\ V_f^{(\mu \nu)} &= -\gamma^2 \left(\frac{f}{g} \right)^2 \left(\sum_{k l} \bar{A}_{3\nu+l, l, 3\mu+k, k} \right) \sum_{\varrho} e_{\varrho}^{(\nu)} e_{\varrho}^{(\mu)}. \end{aligned} \right\} (16.5)$$

Aus (3.16) und (14.2) folgt:

$$\sum_{k l} \bar{A}_{3\nu+l, l, 3\mu+k, k} = \frac{\mu^2}{\eta^2} \int dX \delta_a(x - x_{\nu}) \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu^2 - \Delta} \right) \delta_a(x + x_{\mu}).$$

Hier kann der einer „Nahewirkung“ entsprechende Term $\sim \int dX \delta_a(x - x_{\nu}) \delta_a(x + x_{\mu})$ mit Rücksicht auf die Annahmen (14.3 und 14) weggelassen werden¹⁾; es bleibt:

$$\sum_{k l} \bar{A}_{3\nu+l, l, 3\mu+k, k} = -\frac{\mu^4}{\eta^2} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} (r = |x_{\mu} - x_{\nu}| \gg a). \quad (16.6)$$

¹⁾ Im übrigen würde sich dieser Term in V_f gegen den Beitrag von H'' (vgl. (14.1)) bzw. von $(S^* H'' S)_{00}$ gerade wegheben, analog wie in der Störungsrechnung (vgl. QdW, S. 94).

Hiermit und mit (15.7) ergibt (16.5):

$$\left. \begin{aligned} V_g^{(\mu\nu)} &= \frac{g^2}{2} \left(\sum_{\varrho} e_{\varrho}^{(\mu)} e_{\varrho}^{(\nu)} \right) \left\{ \left(\sum_i e_i'^{(\mu)} e_i'^{(\nu)} \right) \Delta \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_i e_i'^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j e_j'^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}, \\ V_f^{(\mu\nu)} &= (\mu^2 f)^2 \left(\sum_{\varrho} e_{\varrho}^{(\mu)} e_{\varrho}^{(\nu)} \right) \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}. \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

Die Einheitsvektoren $\vec{e}^{(\nu)}$, $\vec{e}'^{(\nu)}$ denken wir uns wieder gemäss (12.2, 3) durch Polarwinkel $\vartheta_\nu, \varphi_\nu$ bzw. $\vartheta'_\nu, \varphi'_\nu$ dargestellt, und wir fassen sie als Operatoren auf, die auf die Eigenfunktionen der Isobaren-Energien H_ν^{II} (vgl. (13.9, 10, 11)) wirken. Nach (13.12 bis 17) beschreibt der Operator $\sum_{\varrho} e_{\varrho}^{(\mu)} e_{\varrho}^{(\nu)}$ einen Ladungsaustausch zwischen den Nucleonen μ und ν , während die geschweifte Klammer in V_g einen Spin-Austausch-Operator darstellt. Wir berechnen wieder die den Nucleon-Grundzuständen entsprechende Untermatrix $V^{(\mu\nu)}$. Den 4 Grundzuständen eines Nucleons ($k = j = \frac{1}{2}$, $n = \pm \frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$) entsprechen folgende 4 Eigenfunktionen f (s. die Fussnote ² S. 592):

$$\left. \begin{aligned} f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= c e^{\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta'}{2}, \quad f_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = c e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta'}{2}, \\ f_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= c e^{\frac{i}{2}(-\varphi + \varphi')} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta'}{2}, \quad f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = c e^{\frac{i}{2}(-\varphi - \varphi')} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta'}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

($c = (2\pi)^{-1}$). Mit denselben Bezeichnungen wie in (15.10, 11) wird $(n' | e_{\varrho} | n'') = \frac{1}{3} (n' | \tau_{\varrho} | n'')$, $(m' | e_i' | m'') = \frac{1}{3} (m' | \sigma_i | m'')$, (16.9) oder in der Schreibweise (15.12): $e_{\varrho}^{(\nu)} = \frac{1}{3} \tau_{\varrho}^{(\nu)}$, $e_i'^{(\nu)} = \frac{1}{3} \sigma_i^{(\nu)}$. Somit werden die auf die Grundzustände der beiden Nucleonen μ, ν bezüglichen Untermatrizen von V_g und V_f (16.7):

$$\left. \begin{aligned} V_g^{(\mu\nu)} &= \frac{1}{81} \cdot \frac{g^2}{2} \left(\sum_{\varrho} \tau_{\varrho}^{(\mu)} \tau_{\varrho}^{(\nu)} \right) \left\{ \left(\sum_i \sigma_i^{(\mu)} \sigma_i^{(\nu)} \right) \Delta \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_i \sigma_i^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j \sigma_j^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}, \\ V_f^{(\mu\nu)} &= \frac{1}{9} \cdot (\mu^2 f)^2 \left(\sum_{\varrho} \tau_{\varrho}^{(\mu)} \tau_{\varrho}^{(\nu)} \right) \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}. \end{aligned} \right\} \quad (16.10)$$

Hiernach ist V_g gleich $\frac{1}{81}$, V_f gleich $\frac{1}{9}$ des störungstheoretischen Wertes. Qualitativ haben also die Kräfte wieder die gleichen

Eigenschaften wie bei schwacher Kopplung, vorausgesetzt dass die Isobaren-Anregungsenergie so gross ist, dass die höheren Isobaren keine Rolle spielen. Dazu ist aber zu bemerken, dass V_g — wegen der Zahlfaktoren in (16.10) und in Anbetracht der Ungleichung (11.20) — nur klein im Vergleich zu V_f sein kann, wenigstens für Abstände r der Grössenordnung μ^{-1} ; *die Kräfte können also nur recht schwach spin-abhängig sein.*

Obwohl also die Kräfte — genügende Höhe der Isobaren-Anregungsenergie vorausgesetzt — eine ausgeprägte Ähnlichkeit mit den Kräften bei schwacher Kopplung aufweisen, dürfen doch auch die Unterschiede nicht übersehen werden: Während man es bei schwacher Kopplung durch Wahl des Quotienten $\mu f / g$ erreichen kann, dass die Kräfte vom V_f - und V_g -Typus in einem beliebig vorgebbaren Mischungsverhältnis auftreten, hat man bei starker Kopplung entweder reine V_g -Kräfte (Fall I, vgl. (15.13)) oder eine Mischung mit relativ schwachem V_g -Anteil (Fall II). Es bleibt allerdings noch zu untersuchen, wie die Kräfte sich in dem — hier ausgeschlossenen — schmalen Übergangsgebiet $(\mu f / g)^2 \cong 2 / 3$ verhalten.¹⁾

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

¹⁾) R. SERBER hat bemerkt, dass die Existenz der höheren Isobaren den Sättigungscharakter der Kernkräfte gefährdet, d. h. zu einem Zusammenbruch der schweren Kerne Anlass geben könnte. Wie F. COESTER (auf Grund der in III vorgeschlagenen Thomas-Fermi-Näherung) gezeigt hat, ist die Vektor- wie auch die Pseudoskalartheorie diesem Einwand nicht ausgesetzt (Diss. Univ. Zürich).