

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 15 (1942)
Heft: III

Artikel: Bemerkungen zum Streuproblem in der Elektronenpaartheorie
Autor: Jauch, J.M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111302>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bemerkungen zum Streuproblem in der Elektronenpaartheorie

von J. M. Jauch.

(28. I. 1942.)

Die Schwierigkeiten, welche eine exakte Behandlung der spinabhängigen Kopplungstypen in der Elektronenpaartheorie der Kernkräfte verunmöglichen, werden an Hand der Streuung von Elektronen an schweren Teilchen diskutiert. Es zeigt sich, dass das Auftreten von unelastischen Streuungen mit Paarerzeugung die Ursache dieser Schwierigkeiten ist. Der Wirkungsquerschnitt für solche Streuprozesse wird durch eine störungstheoretische Rechnung zweiter Ordnung abgeschätzt. Er ist exakt gleich Null für die spinunabhängigen Kopplungsansätze.

§ 1. Einleitung.

Die Elektronenpaartheorie der Kernkräfte hat vor der Yukawa'schen Mesontheorie den Vorzug, dass einer Identifikation der (schweren) Elektronen mit den durchdringenden Höhenstrahlen nichts im Wege stünde¹⁾. Bei spinunabhängiger Kopplung hat sie ausserdem den praktischen Vorteil, dass sich die Kernkräfte ohne Störungstheorie berechnen lassen, durch die Hauptachsentransformation einer quadratischen Form²⁾. Der Energieunterschied zwischen Singlett- und Triplettzustand des Deuterons fordert aber einen beträchtlichen Anteil spinabhängiger Kräfte, und um Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erreichen, müssen auch spinabhängige Kopplungstypen eingeführt werden. Die Methode der Hauptachsentransformation ergibt aber für solche Wechselwirkungen keine exakten Lösungen mehr.

Die Schwierigkeiten, welche in diesen Fällen einer exakten Behandlung im Wege stehen, seien in dieser Arbeit am einfacheren Problem der Streuung von Elektronen an schweren Teilchen erläutert. Im § 2 wird zuerst die strenge Methode auf die zwei einfachsten spinunabhängigen Wechselwirkungsansätze angewendet. Im § 3 wird dann auf die Schwierigkeiten hingewiesen, welche eine analoge Behandlung des Streuproblems bei spinabhängigen Kräften verhindern, nämlich das Auftreten von Prozessen mit Paarerzeugung. Im § 4 soll der Wirkungsquerschnitt für die unelastische Streuung unter gleichzeitiger Emission eines Paars wenigstens störungsmässig berechnet werden. Dieser Prozess tritt nicht auf bei spinunabhängigen Wechselwirkungen.

¹⁾ CHRISTY und KUSAKA, Phys. Rev. **59**, 405, 414 (1941).

²⁾ JAUCH, Helv. Phys. Acta **15**, 175 (1942).

§ 2. Exakte Lösung des Streuproblems für die spinunabhängigen Kopplungstypen.

Ein im Koordinatenursprung ruhendes schweres Teilchen verursacht durch seine Wechselwirkung mit dem Elektronenfeld einen Zusatzterm in der Hamiltonfunktion dieses Feldes.

$$\bar{H}' = \int \psi^*(x) u^*(x) dV_x O \int \psi(x') u(x') dV_{x'} \quad (2.1)$$

ψ, ψ^* sind die nach dem Ausschliessungsprinzip quantisierten Wellenfunktionen des Elektronenfeldes. $u(x)$ stellt eine Quellenfunktion des schweren Teilchens dar, die man einführen muss, um die Konvergenz der auftretenden Integrale zu erzwingen. Wir wählen im folgenden eine spezielle Funktion, welche die Rechnung etwas vereinfacht, nämlich

$$u(x) = \left(\frac{K}{r}\right)^{3/2} J_{3/2}(Kr) = (2\pi)^{-3/2} \int_{|k| < K} e^{-i(k, x)} dV_k \quad (r = |x|) \quad (2.2)$$

Diese Wahl entspricht einem scharfen Abschneiden im Impulsraum mit dem Abschneideradius K . Es ist dann

$$\lim_{K \rightarrow \infty} u(x) = (2\pi)^{3/2} \delta(x)$$

Der Operator O ist für die spinunabhängigen Kopplungstypen einer der beiden Operatoren β oder 1 . η ist der Kopplungsparameter von der Dimension einer Fläche.

Im Impulsraum lautet die gesamte Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \bar{H}_0 + \bar{H}' \\ &= \int \varphi^*(k) \{(\alpha, k) + \mu \beta\} \varphi(k) dV_k + \eta \int_{|k'| < K} \varphi^*(k') dV_{k'} O \int_{|k| < K} \varphi(k) dV_k \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit

$$\varphi(k) = (2\pi)^{-3/2} \int \psi(x) e^{-i(k, x)} dV_x$$

μ ist die Masse der Elektronen in Einheiten cm^{-1} .

Die Normalkoordinaten, welche diese (kontinuierliche) quadratische Form auf Hauptachsen transformieren, stellen dann die Lösungen des Streuproblems dar. Sie sind erst eindeutig bestimmt, wenn wir noch die „Randbedingung“ hinzunehmen, dass sie asymptotisch von der Form einer ebenen plus auslaufenden Kugelwelle sind. Die Gleichung für diese Normalkoordinaten ergibt sich aus (2.3)

$$\{(\alpha, k) + \mu \beta - \Omega\} \varphi(k) + \eta O \int \varphi(k') dV_{k'} = 0 \quad (2.4)$$

Der Eigenwert Ω ist gleich der Energie $+\sqrt{(\mu^2 + k_0^2)^{1/2}}$ des einfallenden Elektrons mit dem Impuls k_0 . Durch Multiplikation mit dem Operator

$$\frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2}$$

wird aus (2.4):

$$\varphi(k) + \frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} \eta O \int_{|k'| < K} \varphi(k') dV_{k'} = (2\pi)^{3/2} \delta(k - k_0) \varphi_0(k) \quad (2.5)$$

Der Term rechter Hand ist so bestimmt, dass die Amplitude der ebenen Welle im x -Raum gleich 1 ist (vgl. (2.9)). $\varphi_0(k)$ sind die auf 1 normierten Komponenten der ebenen Welle

$$\{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega\} \varphi_0(k) = 0 \quad \varphi_0^* \varphi_0 = 1$$

Die lineare Integralgleichung (2.5) für $\varphi(k)$ lässt sich sehr einfach lösen, weil ihr Kern ausgeartet ist. Wir brauchen nur die ganze Gleichung über alle $|k| < K$ zu integrieren und erhalten dann für $\lambda = \int_{|k| < K} \varphi(k) dV_k$ die Gleichung

$$\{1 + \eta(\mu\beta + \Omega)OD\} \lambda = (2\pi)^{3/2} \varphi_0(k) \quad (2.6)$$

mit

$$D = 4\pi \int_0^K \frac{k^2}{k^2 - k_0^2} dk \quad (2.7)$$

Das Integral D divergiert an der Stelle $k = k_0$ und um ihm einen Sinn zu geben, werden wir den Integrationsweg so ins Komplexe deformieren, dass die $\psi(x)$ nur auslaufende Kugelwellen enthalten (s. u. (2.13)). Aus (2.6) ergibt sich

$$\lambda = (2\pi)^{3/2} \{1 + \eta(\mu\beta + \Omega)OD\}^{-1} \varphi_0(k_0) \quad (2.8)$$

und wenn wir diesen Ausdruck für λ in (2.5) einführen

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= (2\pi)^{3/2} \delta(k - k_0) \varphi_0(k_0) \\ &- (2\pi)^{3/2} \frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} O \{1 + \eta(\mu\beta + \Omega)OD\}^{-1} \varphi_0(k_0) \end{aligned}$$

Wenn wir in den x -Raum zurücktransformieren, wird daraus

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi_0(k_0) e^{i(k_0 x)} \\ &- \eta \left\{ \int_{|k| < K} \frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} e^{i(k, x)} dV_k \right\} O \{1 + \eta(\mu\beta + \Omega)OD\}^{-1} \varphi_0(k_0) \quad (2.9) \end{aligned}$$

Der erste Term ist die einfallende ebene Welle und der zweite Term die gestreute Kugelwelle. Nach Ausführung der Richtungsintegration wird das Integral

$$\int \frac{(\alpha, k) + \mu \beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} e^{i(k, x)} dV_k = \frac{4\pi}{r} \left\{ (\mu \beta + \Omega) \int_0^K \frac{k \sin kr}{k^2 - k_0^2} dk + \frac{i}{r^2} (\alpha, x) \int_0^K \frac{k \sin kr - k^2 r \cos kr}{k^2 - k_0^2} dk \right\} \quad (2.10)$$

worin wir $r = |x|$ gesetzt haben. Damit die Gleichung (2.9) einen Sinn hat, muss man in diesen Integralen für k denselben Integrationsweg wählen wie in D . Da wir uns nur für das asymptotische Verhalten der Kugelwelle interessieren, können wir $k_0 r \gg 1$ setzen. Das erlaubt verschiedene Vereinfachungen. Zunächst können wir den Term mit $k \sin kr$ neben dem mit $k^2 r \cos kr$ im zweiten Integral vernachlässigen. Es bleiben dann noch die beiden Integrale

$$I = \int_0^K \frac{k^2 \cos kr}{k^2 - k_0^2} dk \quad II = \int_0^K \frac{k \sin kr}{k^2 - k_0^2} dk$$

Wegen $I = \frac{dII}{dr}$ können wir uns auf die Berechnung von II beschränken.

$$II = \frac{1}{2i} \int_{-K}^{+K} \frac{ke^{ikr}}{k^2 - k_0^2} dk.$$

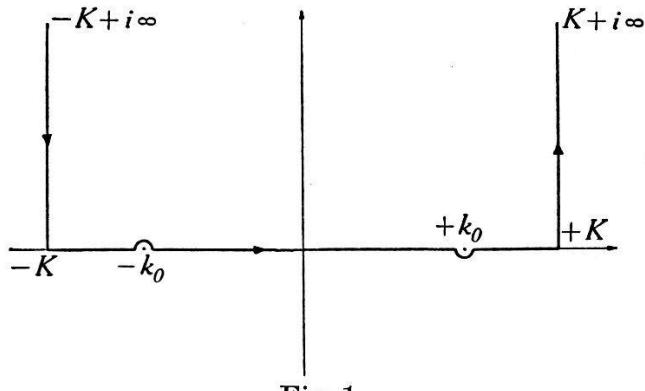


Fig. 1.
Integrationsweg in der komplexen k -Ebene.

Wir addieren zum Integrationsweg noch zwei Stücke, nämlich von $+i\infty$ bis $-K$ und von $+K$ bis $+i\infty$. Dem Pol bei $k = -k_0$ weichen wir nach links aus und dem Pol $k = +k_0$ entsprechend nach rechts (Fig. 1). Wegen der Exponentialfunktion ist der Beitrag zum Integral auf diesen beiden Stücken um eine Größen-

ordnung $k_0 r \gg 1$ kleiner, als auf dem Hauptteil des Weges. Das Integral kann man nun mittelst des Residuensatzes ausrechnen:

$$I = \frac{i\pi}{2} k_0 e^{ik_0 r} \quad II = \frac{\pi}{2} e^{ik_0 r}$$

Das ergibt in (2.10) eingesetzt

$$\int \frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} e^{i(k, x)} dV_k = \frac{2\pi^2}{r} \{(\alpha, n) k_0 + \mu\beta + \Omega\} e^{ik_0 r} \quad (2.11)$$

n ist der Einheitsvektor in der Streurichtung: $n = x/r$. Ferner ergibt sich nun für D auf demselben Integrationsweg

$$D = 4\pi \int_0^K \frac{k^2}{k^2 - k_0^2} dk = 4\pi K + 2\pi^2 i k_0 + 2\pi k_0 \ln \frac{K - k_0}{K + k_0} \quad (2.12)$$

Der Ausdruck für die Streuwelle lautet also (vgl. (2.9))

$$2\pi^2 \eta \frac{e^{ik_0 r}}{r} \{(\alpha, n) k_0 + \mu\beta + \Omega\} O \{1 + \eta(\beta + \Omega) O D\}^{-1} \varphi_0(k_0) \\ = \frac{e^{ik_0 r}}{r} \Gamma \varphi_0(k_0) \quad (2.13)$$

Der Strom dieser Streuwelle ist

$$\vec{i} = \frac{1}{r^2} \varphi_0^* \Gamma^* \vec{\alpha} \Gamma \varphi_0 = \frac{1}{r^2} \frac{k_0}{\Omega} \vec{n} \varphi_0^* \Gamma^* \Gamma \varphi_0$$

während der Strom der ebenen Welle $= k_0/\Omega$ ist. Der differentielle Streuquerschnitt für die Streuung in den Winkelbereich $d\sigma = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ ist somit, wenn wir noch über die Spinzustände mitteln

$$\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{sp} V \Gamma^* \Gamma$$

mit

$$\Gamma = 2\pi^2 \eta \{(\alpha, n) k_0 + \mu\beta + \Omega\} O \{1 + \eta(\mu\beta + \Omega) O D\}^{-1}$$

$$V(k_0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{(\alpha, k_0) + \mu\beta}{\Omega} \right\}$$

Die Ausrechnung der Spuren bietet keine Schwierigkeit und ergibt

$$\sigma = \frac{16 \pi^4 \eta^2}{| (1 + \eta \mu O)^2 - \eta^2 \Omega^2 D^2 |} \begin{cases} \Omega^2 + k_0^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} (-1 - \eta \mu (D + D^*) + \eta^2 k_0^2 D D^*) \\ \text{für } O = \beta \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\sigma = \frac{16 \pi^4 \eta^2}{| (1 + \eta \Omega D)^2 - \eta^2 \Omega^2 D^2 |} \begin{cases} \mu^2 + k_0^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \eta \Omega (D + D^*) + \eta^2 k_0^2 D D^*) \\ \text{für } O = 1 \end{cases}$$

Man entnimmt aus diesen Formeln, dass im Limes $K \rightarrow \infty$ die Streuung verschwindet. Bei punktförmigen schweren Teilchen gibt es also keine Streuung. Im Grenzfall $K^2 \eta \ll 1$ dagegen gehen diese beiden Streuquerschnitte in die störungsmässig berechneten über¹⁾. Die erste dieser Formeln ist schon von WEINBERG mit etwas anderer Bezeichnung angegeben worden²⁾.

Wir haben in einer früheren Arbeit³⁾ die Eigenfunktionen berechnet mit einer andern Art der Abschneidung, indem wir dort statt (2.11) geschrieben haben

$$\bar{H}^1 = \eta \int \Delta(r) \psi^*(x) O \psi(x) dV_x \quad (2.15)$$

worin

$$\Delta(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} \frac{1}{r_0^3} & \text{für } r < r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

bedeutet. Es ist dann $\lim_{r_0 \rightarrow 0} \Delta(r) = \delta(r)$ und in dieser Grenze ist \bar{H}' mit der relativistisch invarianten Grenzfunktion identisch. Wir haben aber dort für den Fall $O = 1$ ein anderes Resultat erhalten, als mit der hier verwendeten Abschneidemethode. Das zu (2.4) entsprechende Eigenwertproblem war nämlich äquivalent mit dem Problem eines einzelnen Elektrons, das sich in einem Δ -Potential

¹⁾ Das sieht man am leichtesten, wenn man in dem Ausdruck für Γ nur die niedersten Potenzen in η beibehält.

$$\begin{aligned} \Gamma &\cong 2\pi^2 \eta \{(\alpha, k) + \mu \beta + \Omega\} O = 4\pi^2 \eta \Omega V(k) O \\ \sigma &= \frac{1}{2} \text{sp } V \Gamma^* \Gamma \cong (2\pi)^4 \eta^2 \frac{\Omega^2}{2} \text{sp } V(k_0) O V(k) O, \end{aligned}$$

was mit dem störungsmässig berechneten übereinstimmt.

²⁾ WEINBERG, Phys. Rev. **59**, 776 (1941).

³⁾ JAUCH, Helv. Phys. Acta **14**, 465 (1941).

bewegt. Bekanntlich hat in der Dirac'schen Theorie ein δ -Potential wegen des Klein'schen Paradoxons keinen Sinn, da die Grenzfunktionen nicht existieren. Es ist auch anschaulich verständlich, dass die beiden Methoden zu verschiedenen Ergebnissen führen müssen, denn im einen Fall (2.15) mittelt man das Quadrat der Wellenfunktion über den Δ -Bereich, während man im andern (2.1) die Wellenfunktionen zuerst mittelt und dann das Produkt bildet. Wenn die Wellenfunktionen im Innern oszillatorisch verlaufen, ist das Resultat dieser beiden Mittelungen natürlich verschieden. Wir müssen also schliessen, dass das Resultat noch von der Art des Grenzüberganges zur δ -Funktion abhängt. Diese Tatsache erhellt in drastischer Weise die Fragwürdigkeit solcher Abschneidemethoden.

§ 3. Spinabhängige Kopplung.

Man könnte nun versucht sein, das Verfahren des vorigen Paragraphen auf die spinabhängigen Kopplungstypen auszudehnen. Doch ergibt das nicht mehr exakte Lösungen, weil sich das quantisierte Problem nicht mehr durch eine Hauptachsentransformation auf ein Einkörperproblem reduzieren lässt. Entwickeln wir ψ in H nach ebenen Wellen $\psi = \sum_n a_n \psi_n$, so wird $\bar{H} \equiv \bar{H}^0 + \bar{H}^1$

$$\bar{H}^0 = \sum_n E_n a_n^* a_n \quad \bar{H}' = \sum_{m,n} a_m^* a_n O_{mn}$$

worin wir die Zustände k, λ durch eine einzige Quantenzahl n numeriert denken. O_{mn} ist ein Operator bezüglich der Spinindizes ϱ des schweren Teilchens, von denen das Schrödingerfunktional abhängt:

$$F = F_\varrho (N_1^+, N_2^+, \dots; N_1^-, N_2^-, \dots)$$

N_1^+, N_2^+, \dots sind die Besetzungszahlen (0 oder 1) der Zustände mit positiver Energie, und N_1^-, N_2^-, \dots sind die Besetzungszahlen der Zustände mit negativer Energie. a_n, a_n^* sind die bekannten Operatoren, die die Besetzungszahlen um ± 1 ändern, mit den Vertauschungsrelationen

$$[a_m, a_n^*]_+ = \delta_{mn}$$

Beim Streuproblem werden wir nun von einem Anfangszustand ausgehen, bei dem F nur dann von Null verschieden ist, wenn ein Zustand (n) im positiven Energiebereich und alle Zustände im negativen Energiebereich besetzt und alle übrigen Zustände unbesetzt sind:

$$F_\varrho (0, \dots, 0, \overset{n}{\underset{1}{\text{---}}}, 0, \dots; 1, 1, \dots, 1) = 1$$

während alle übrigen Komponenten gleich 0 sind.

Die Kopplung \bar{H}' bewirkt dann einerseits Übergänge $n \rightarrow m$ des Elektrons positiver Energie, d. h. das Auftreten von F -Komponenten vom Typus

$$F_\varrho \left(0, \dots, 0, \overbrace{1}^m, 0, \dots; 1, 1, \dots \right)$$

andererseits treten aber auch F -Komponenten vom Typus

$$F_\varrho \left(0, \dots, 1, \overbrace{0}^m, \dots, \overbrace{1}^n, 0, \dots; 1, 1, \dots, 1, \overbrace{0}^l, 1, \dots \right)$$

auf, die der Erzeugung von Paaren entsprechen.

Wenn wir Übergänge vom letzteren Typus weglassen (also die betreffenden F -Komponenten Null setzen), dann ist das Problem ein Einkörperproblem und kann nach derselben Methode behandelt werden, nach der im vorigen Paragraphen die spinunabhängigen Typen behandelt worden sind. Wir brauchen dann einfach

$$F_\varrho \left(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^m, 0, \dots, 0; 1, 1, \dots \right) = \varphi_\varrho(m) = \varphi_\varrho(\lambda, k) \quad (\text{vgl. } \S 4)$$

zu setzen. Dieses Problem ist, wenn man wieder in den Ortsraum transformiert und die Abschneidung mittels der $\Delta(r)$ -Funktion wählt, identisch mit dem vom Verfasser in der oben erwähnten Arbeit behandelten Problem. Die mit dieser Rechenmethode erhaltenen Lösungen sind zwar nicht exakt, stellen aber dann eine gute Näherung dar, wenn das Auftreten von Paaren z. B. aus energetischen Gründen ausgeschlossen oder unbedeutend ist. Die Situation dürfte ähnlich sein wie in der bekannten „exakten“ Theorie der Elektronenstreuung in Atomfeldern (FAXÉN-HOLTSMARK), wo die der unelastischen Streuung entsprechenden Anteile der Schrödingerfunktion vernachlässigt werden; von derselben Art werden die Fehler sein, die wir in unserm Problem begehen, wenn wir die unelastische Streuung mit Paarerzeugung vernachlässigen. Eine störungsmässige Berechnung dieser Paarerzeugung durch spinabhängige Kopplung soll im nächsten Paragraphen gegeben werden.

Im Falle $O = 1$ oder $O = \beta$ gelingt es, durch eine unitäre Transformation der ψ_n , O diagonal zu machen: $O_{mn} = O_n \delta_{mn}$. Die ψ_n sind dann aber keine ebenen Wellen mehr, sondern enthalten eine Streuwelle. Das ist die Methode des Paragraphen 2. \bar{H}' wird dann

$$\bar{H}' = \sum_n O_n a_n^* a_n \text{ und } \bar{H} F = F \sum_n (O_n + E_n) N_n;$$

daraus erkennt man sofort, dass in diesen Fällen keine Paarerzeugung auftreten kann. Dieses Resultat wird im nächsten Paragraphen auch durch die störungstheoretische Rechnung bestätigt.

Diese Komplikation durch Paarerzeugung dürfte eine exakte, auch für starke Kopplung gültige Berechnung der spinabhängigen Kernkräfte in dieser Theorie verunmöglichen. Dieser Umstand scheint von CRITCHFIELD in seiner Berechnung spinabhängiger Kernkräfte übersehen worden zu sein¹⁾.

§ 4. Störungsmässige Berechnung der unelastischen Streuung für spinabhängige Kopplungstypen.

Wir transformieren den Störungsoperator in den Impulsraum, indem wir setzen

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \sum_{\lambda} a(\lambda, k) \varphi(\lambda, k) e^{i(k \cdot x)} dV_k \quad (3.1)$$

die $\varphi(\lambda, k)$ sind die auf 1 normierten Komponenten der Lösungen von

$$\{(\alpha, k) + \mu\beta - \Omega\} \varphi(\lambda, k) = 0 \quad \Omega = \pm(\mu^2 + k^2)^{1/2} \quad (3.2)$$

λ numeriert die vier Zustände der beiden Spinorientierungen und der beiden Vorzeichen der Energie. Die $a(\lambda, k)$ sind die Operatoren mit den Vertauschungsrelationen

$$[a^*(\lambda, k), a(\lambda', k')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k') \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}' = \eta \int \sum_{\lambda\lambda'} a^*(\lambda, k) O(\varrho\lambda k; \sigma\lambda' k') a(\lambda', k') dV_k dV_{k'} \\ O(\varrho\lambda k; \sigma\lambda' k') = \varphi^*(\lambda, k) O_{\varrho\sigma} \varphi(\lambda' k') \end{aligned} \quad (3.4)$$

bezeichnen die Matrixelemente des Wechselwirkungsoperators. ϱ, σ beziehen sich auf den Spin des schweren Teilchens. Für die beiden in § 2 betrachteten Wechselwirkungstypen ist $O(\varrho\lambda k; \sigma\lambda' k')$ von der Form $\delta_{\varrho\sigma} O(\lambda k; \lambda' k')$. Die Tensor- und Pseudovektorkopplung dagegen sind von der Form $O = (\vec{\Sigma}, \vec{P})$ mit $\vec{P} = \beta\vec{\sigma}$ bzw. $\vec{P} = \vec{\sigma}$ für die beiden Fälle. (Der Pseudoskalar verschwindet in der Näherung des ruhenden schweren Teilchens.)

Die unelastischen Prozesse mit Paarerzeugung treten erst in der Störungstheorie zweiter Ordnung auf. Im Ausgangszustand (A)

¹⁾ CRITCHFIELD, Phys. Rev. **56**, 540 (1939). Ausserdem ist bei der Transformation der ψ auf die Singlett- und Tripletzustände des Operators $1 + \lambda(\sigma, \sigma k)$ nicht berücksichtigt worden, dass diese Transformation mit $\varrho(\sigma, \sigma p)$ nicht vertauschbar ist. Die Zurückführung des Problems auf zwei spinunabhängige mit den Kopplungskonstanten $\eta(1 + \lambda)$ und $\eta(1 - 3\lambda)$ ist deshalb nicht möglich.

sind alle negativen Zustände besetzt und ausserdem ein Elektron mit dem Impuls k_0 im Spinzustand λ_0 mit der positiven Energie $+(\mu^2 + k_0^2)^{1/2}$ anwesend. Das streuende schwere Teilchen befindet sich im Spinzustand ϱ . Als Zwischenzustände (Z) können die folgenden auftreten:

I. Das Elektron $k_0\lambda_0$ bleibt unverändert. Aber es entsteht ein Paar, indem ein Elektron aus dem Zustand $l'\mu'$ im negativen Kontinuum in den Zustand $k'\lambda'$ im positiven Kontinuum gehoben wird. Der Spin des schweren Teilchens geht dabei über in σ .

II. Das Elektron und der Kernspin gehen in den Zustand k, λ bzw. σ . Aber es ist noch kein Paar anwesend.

Beide Zwischenzustände führen zum Endzustand (B): $k\lambda\varrho$ für das gestreute Elektron, bzw. Kernspin und $k'\lambda'$ bzw. $l'\mu'$ für das Elektron-Positronpaar.

Zwei weitere Zwischenzustände I' und II' ergeben sich, wenn man in den Zuständen I und II die Rollen von $k\lambda$ und $k'\lambda'$ vertauscht. Sie führen zu demselben Endzustand B , da durch die Messung nicht festgestellt werden kann, welches der beiden Elektronen das gestreute und welches das Paarelektron ist. Jeder der vier Zustände I, II, I', II' wird noch verdoppelt durch die beiden Spinzustände des schweren Teilchens. Es gibt also im ganzen 16 Zwischenzustände Z . Wegen der Energieerhaltung muss

$$(\mu^2 + k_0^2)^{1/2} = (\mu^2 + k^2)^{1/2} + (\mu^2 + k'^2)^{1/2} + (\mu^2 + l'^2)^{1/2} \quad (3.5)$$

sein. Für die Zwischenzustände gilt keine Energieerhaltung, sondern es ist

$$\left. \begin{aligned} E_A - E_I &= -(\mu^2 + k'^2)^{1/2} - (\mu^2 + l'^2)^{1/2} = \varepsilon \\ E_A - E_{II} &= (\mu^2 + k_0^2)^{1/2} - (\mu^2 + k^2)^{1/2} = -\varepsilon \\ E_A - E_{I'} &= -(\mu^2 + k^2)^{1/2} - (\mu^2 + l'^2)^{1/2} = \varepsilon' \\ E_A - E_{II'} &= (\mu^2 + k_0^2)^{1/2} - (\mu^2 + k'^2)^{1/2} = -\varepsilon' \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Das Matrixelement für die Übergänge $A \rightarrow B$ ist dann

$$\begin{aligned} H_{AB} = \sum_Z \frac{H_{AZ} H_{ZB}}{E_A - E_Z} &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\sigma} \{ H_{AI} H_{IB} - H_{AII} H_{IIB} \} \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon'} \sum_{\sigma} \{ H_{AI'} H_{I'B} - H_{AII'} H_{I'I'B} \} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Das negative Vorzeichen im zweiten Term röhrt von den Vertauschungsrelationen (3.3) her. Es sorgt dafür, dass für $k, \lambda = k', \lambda'$ das Matrixelement verschwindet, wie es nach dem Ausschliessungsprinzip sein muss.

Der Streuquerschnitt für die unelastische Streuung ist

$$\sigma = 8 \frac{(2\pi)^4}{v} \varrho_B |H_{AB}|^2 \quad (3.8)$$

Der Strich bedeutet die Mittelung über alle Zustände der Spins der drei leichten und des schweren Teilchens. ϱ_B ist die Dichte der Endzustände mit der Energie $E_B = (\mu^2 + k_0^2)^{1/2}$. Da wegen der Anwesenheit des festgehaltenen schweren Teilchens keine Impulserhaltung gilt, ist ϱ_B das Produkt der drei Dichten der Teilchen k, k', l' .

$$\varrho_B = k E_k k' E_{k'} l' E_{l'} dE_k dE_{k'} do_k do_{k'} \quad (3.9)$$

do sind die Raumwinkeldifferentiale der drei Teilchen. Bei spinabhängiger Kopplung wird vermöge der speziellen Form $(\vec{\Sigma}, \vec{P})$ von O für H_{AB}

$$H_{AB} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{r, s, \sigma} P^{(r)}(\mu' l'; \lambda' k') P^{(s)}(\lambda_0 k_0; \lambda k) \left\{ \sum_{\varrho_0 \sigma}^{(r)} \sum_{\sigma \varrho}^{(s)} - \sum_{\varrho_0 \sigma}^{(s)} \sum_{\sigma \varrho}^{(r)} \right\} - \frac{1}{\varepsilon'} \sum_{r, s, \sigma} P^{(r)}(\mu' l'; \lambda k) P^{(s)}(\lambda_0 k_0; \lambda' k') \left\{ \sum_{\varrho_0 \sigma}^{(r)} \sum_{\sigma \varrho}^{(s)} - \sum_{\varrho_0 \sigma}^{(s)} \sum_{\sigma \varrho}^{(r)} \right\}$$

Durch Benutzung der Vertauschungsrelationen der $\Sigma^{(r)}$ kommt

$$H_{AB} = \frac{i}{\varepsilon} \left(\sum_{\varrho_0 \varrho} \left[\vec{P}(\mu' l'; \lambda' k') \times \vec{P}(\lambda_0 k_0; \lambda k) \right] \right) - \frac{i}{\varepsilon'} \left(\sum_{\varrho_0 \varrho} \left[\vec{P}(\mu' l'; \lambda k) \times \vec{P}(\lambda_0 k_0; \lambda' k') \right] \right) \quad (3.10)$$

Das Nichtverschwinden dieses Matrixelementes liegt wesentlich an der Nichtvertauschbarkeit der Operatoren für den Kernspin. Bei spinabhängiger Kopplung $O = \beta$ oder $O = 1$ verschwindet H_{AB} . Die Mittelung von $|H_{AB}|^2$ über alle Spinzustände, einschliesslich des Kernspins, kann man in bekannter Weise mittels der Vernichtungsoperatoren durch Spurenbildung ersetzen.

Der Wirkungsquerschnitt für die unelastische Streuung in den Winkelbereich do_k unter gleichzeitiger Emission eines Elektron-Positronpaars in die Winkel- und Energiebereiche $do_{k'}, do_{\nu}$ bzw. $dE_{k'}, dE_{\nu}$ ist dann

$$\sigma_n = 128 \pi^4 \eta^4 k k' l' E_{k'} E_{\nu} E_k E_{k_0} \frac{1}{k_0} \times \left\{ \frac{F_1}{(E_k + E_{\nu})^2} + \frac{F_2}{(E_k + E_{\nu})(E_{k'} + E_{\nu})} + \frac{F_3}{(E_{k'} + E_{\nu})^2} \right\} do_k do_{k'} do_{\nu} dE_{k'} E_{\nu} \quad (3.11)$$

*

Die drei Funktionen $F_1 F_2 F_3$ sind von der Größenordnung 1 und hängen in komplizierter Weise von den vier Energien und allen Winkeln zwischen den Impulsen der ausgesandten Teilchen ab.

Die unelastischen Streuungen mit Paarerzeugung treten also erst in zweiter Näherung auf und können für alle Energien neben den elastischen vernachlässigt werden, falls $K^2 \eta \ll 1$ ist. Für solche Werte des Parameters η ist dann auch die Störungstheorie gültig. Wenn dagegen $K^2 \eta \gtrsim 1$ ist, dann können durch Prozesse höherer Ordnung auch mehrere Paare gleichzeitig durch das einfallende Teilchen erzeugt werden, sofern die Energie dazu ausreicht. Der unelastische Streuquerschnitt wird dann für hohe Energien von derselben Größenordnung sein, wie der elastische. Doch lässt sich mit der Störungstheorie nichts Quantitatives darüber aussagen.

Herrn Prof. WENTZEL möchte ich hier danken für viele anregende Diskussionen über die Elektronenpaartheorie.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.
