

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 15 (1942)
Heft: II

Artikel: Kernkräfte in der Elektronenpaartheorie
Autor: Jauch, J.M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111299>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kernkräfte in der Elektronenpaartheorie

von J. M. Jauch.

(13. XII. 1941.)

Es werden die Kernkräfte gerechnet in der Elektronenpaartheorie unter Zugrundelegung des skalaren Kopplungstyps. Es gelingt, exakte (nicht störungsmässige) Lösungen zu finden im Falle sehr schwacher und sehr starker Kopplung ($K^2 \eta \ll 1$ und $\eta \gg r^2$, wobei Kmc der Abschneideimpuls ist). Im ersten Falle stimmt der Ausdruck für das Kräftepotential im Bereich $Kr \gg 1$ mit dem störungstheoretischen überein. Im zweiten Falle lässt sich die Störungstheorie nicht mehr anwenden. In diesem Zusammenhang ist auch das Verhältnis der beiden Rechnungsarten für das zugehörige Streuproblem diskutiert. Die Bedingung für die Gültigkeit der Störungstheorie ist dort ebenfalls $K^2 \eta \ll 1$.

§ 1. Einleitung.

Unter den Feldtheorien, welche bis jetzt zur Beschreibung der Kernkräfte herangezogen worden sind, zeichnet sich die sogenannte Elektronenpaartheorie dadurch aus, dass sie eine exakte, d. h. nicht störungsmässige Behandlung gestattet. Das liegt an der Tatsache, dass in den Paartheorien die Wechselwirkungsenergie quadratisch in den Wellenfunktionen der Paarteilchen ist. Ganz abgesehen von der physikalischen Bedeutung, welche einer solchen Theorie zukommen mag, ist es von Interesse, das Verhältnis der exakten zur störungsmässigen Lösung zu diskutieren. Die mathematische Methode der exakten Behandlung läuft im wesentlichen auf die Bestimmung der Eigenwerte einer linearen Integralgleichung hinaus, und ist von WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER¹⁾ zur Berechnung der Selbstenergie eines einzelnen schweren Teilchens verwendet worden. Die Anwendung dieser Methode zur Berechnung der Kernkräfte durch CRITCHFIELD und LAMB²⁾ führte jedoch zu so verwickelten Rechnungen, dass von den Autoren kein expliziter Ausdruck für das Potential angegeben worden ist. Eine etwas modifizierte Methode, die von WENTZEL³⁾ am Beispiel der skalaren Paartheorie entwickelt worden ist, ergab dort eine gute Näherung für das Potential, welche für alle Werte des Kopplungsparameters η gültig bleibt. Sie stimmt für sehr kleine Werte von η mit dem

¹⁾ WIGNER CRITCHFIELD und TELLER, Phys. Rev. **56**, 531 (1939).

²⁾ CRITCHFIELD und LAMB, Phys. Rev. **58**, 46 (1940).

³⁾ WENTZEL, Zs. f. Phys. **118**, 277 (1941).

Ausdruck für das Kräftepotential überein, das man mittelst der Störungstheorie erhält. Die Anwendung dieser Methode auf die Elektronenpaartheorie gestattet, wenigstens für sehr schwache und sehr starke Kopplung, Näherungslösungen zu berechnen. Für schwache Kopplung erhalten wir wiederum Übereinstimmung mit dem Resultat aus der Störungstheorie¹⁾.

Die physikalischen Vorstellungen, welche man mit den beiden Rechnungsmethoden verknüpfen kann, sind grundsätzlich voneinander verschieden. Bei der störungsmässigen Rechnung erzeugt der Wechselwirkungsterm Übergänge des Systems: schweres Teilchen plus Elektronenfeld. Die Übergänge, welche zu einem Potential Anlass geben, sind dann die folgenden beiden Prozesse:

1. Das eine schwere Teilchen (N) emittiert ein Elektron-Positron-paar.
2. Dieses Paar wird vom andern Teilchen (P) absorbiert.



Bei der strengen Rechnung dagegen stellt man sich alle negativen Zustände besetzt und die positiven leer vor. Durch die Wechselwirkung mit einem schweren Teilchen erfahren nun alle Energieeigenwerte eine Verschiebung. Die Energie der Elektronen in den negativen Zuständen enthält also vermöge dieser Wechselwirkung einen Zusatzterm, den man als eine Selbstenergie des schweren Teilchens interpretieren kann.

Bei Anwesenheit zweier Teilchen ist nun diese Verschiebung nicht einfach das Doppelte der Verschiebung bei einem Teilchen, weil die Eigenfunktionen der Elektronen am Orte des einen Teilchens durch die Anwesenheit des andern gestört sind. Die Verschiebung und damit die Energie des Gesamtsystems hängt also vom Abstand ab, und das gibt zu einer Kraft zwischen den schweren Teilchen Anlass.

Wir beschränken uns im Folgenden auf den skalaren Kopp lungstyp, der sich durch grösste Einfachheit auszeichnet. Obwohl mit einem solchen Typ allein keine Übereinstimmung mit der Erfahrung erreicht werden könnte, da er nur spinunabhängige Kräfte liefert, haben wir ihn hier gewählt, da er sich zu einem Studium der mathematischen Methoden besonders gut eignet.

Die Paragraphen 2 bis 7 sind der Behandlung der Kernkräfte gewidmet, welche bei einer solchen Wechselwirkung auftreten. Paragraph 8 enthält eine kurze Diskussion des dazugehörigen Streuproblems. Alle Einheiten sind in \hbar , m und c gemessen.

¹⁾ MARSHAK, Phys. Rev. 57, 1101 (1940).

§ 2. Allgemeine Ansätze.

Wir betrachten zwei ruhende schwere Teilchen an den Orten ξ und $-\xi$ ($2|\xi| = r$)¹⁾. Die Hamiltonfunktion für das Elektronenfeld lautet dann

$$\bar{H} = \bar{H}^0 + \bar{H}^1$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{H}_0 &= \int \psi^* \{ (\alpha, p) + \beta \} \psi dV_x \\ \bar{H}^1 &= \frac{\eta}{2} \{ \psi^*(-\xi) \beta \psi(-\xi) + \psi^*(\xi) \beta \psi(\xi) \}\end{aligned}\quad (2.1)$$

η ist der Kopplungsparameter. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist aus Bequemlichkeitsgründen beigegeben. Es ist bekannt und wird sich auch im Laufe der Rechnung ergeben, dass ein solcher Term, welcher einer Nahewirkung entspricht, zu Divergenzschwierigkeiten Anlass gibt. Um das zu vermeiden, haben WIGNER et al.²⁾ unter Verzicht auf die relativistische Invarianz der Theorie, den Term (2.1) ersetzt durch

$$\begin{aligned}\bar{H}^1 &= \frac{\eta}{2} \int dV_x \psi^*(x) u^*(x - \xi) \beta \int dV_{x'} \psi(x') u(x' - \xi) \\ &\quad + \frac{\eta}{2} \int dV_x \psi^*(x) u^*(x + \xi) \beta \int dV_{x'} \psi(x') u(x' + \xi)\end{aligned}$$

worin $u(x)$ eine Funktion von $|x|$ allein ist, welche nur innerhalb eines sehr kleinen Bereiches wesentlich von Null verschieden sein soll. Wir wählen in der folgenden Rechnung für diese Funktion

$$u(x) = \left(\frac{K}{x} \right)^{3/2} J_{3/2}(Kx) = (2\pi)^{-3/2} \int_{|k|<K} e^{-ikx} dV_k$$

worin K eine Konstante ist, welche in dieser Theorie die Rolle eines Abschneideimpulses spielt. K betrachten wir als einen neuen Parameter der Theorie. Es ist dann

$$\lim_{K \rightarrow \infty} u(x) = (2\pi)^{3/2} \delta(x)$$

Die Verwendung dieser speziellen Funktion vereinfacht nun die

¹⁾ Wir lassen im Folgenden den Pfeil zur Bezeichnung der Vektoren weg. Den Betrag eines Vektors werden wir, wo es nötig ist, durch Absolutstriche bezeichnen.

²⁾ loc. cit.

Behandlung des Hamiltonoperators im Impulsraum ganz wesentlich. Wir transformieren in den Impulsraum mittelst

Dann wird $\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \varphi(k) e^{ik \cdot x} dV_k$

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \int \varphi^*(k) \{ (\alpha, k) + \beta \} \varphi(k) dV_k \\ &\quad + \eta \iint_{\substack{|k| \leq K \\ |k'| \leq K}} \cos(k - k', \xi) \varphi^*(k) \beta \varphi(k') dV_k dV_{k'} \end{aligned}$$

\bar{H} stellt, wenn die Integrale durch Summen ersetzt werden, eine quadratische Form dar. Um sie auf Hauptachsen zu transformieren, bestimmt man die Normalkoordinaten aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \{ (\alpha, k) + \beta - \Omega \} \varphi(k) + \eta \cos(k, \xi) \beta \int_{|k'| < K} \cos(k', \xi) \varphi(k') dV_{k'} \\ + \eta \sin(k, \xi) \beta \int_{|k'| < K} \sin(k', \xi) \varphi(k') dV_{k'} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Wir interessieren uns nicht für die Normalkoordinaten selbst, sondern nur für die dazugehörigen Eigenwerte $\Omega(\eta)$, welche von den Vakuum-eigenwerten $\Omega(0) \equiv \omega = (1 + k^2)^{\frac{1}{2}}$ verschieden sein können. Multiplizieren wir die Gleichung (2.2) einmal mit

$$\frac{(\alpha, k) + \beta + \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(k, \xi)$$

und einmal mit

$$\frac{(\alpha, k) + \beta + \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(k, \xi)$$

und integrieren wir jedesmal über das Innere einer Kugel $|k| < K$, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für die Größen $\lambda = \int \cos(k, \xi) \varphi(k) dV_k$ und $\mu = \int \sin(k, \xi) \varphi(k) dV_k$

$$\begin{aligned} (1 + \eta A)\lambda + \eta B\mu &= 0 \\ \eta B\lambda + (1 + \eta C)\mu &= 0 \end{aligned}$$

Die A , B und C sind vierreihige Matrizen, welche auf die vierkomponentigen Größen λ und μ operieren:

$$\begin{aligned} A &= \int \{ (\alpha, k) + \beta + \Omega \} \beta \frac{\cos^2(k, \xi)}{\omega^2 - \Omega^2} dV_k \\ B &= \int \{ (\alpha, k) + \beta + \Omega \} \beta \frac{\cos(k, \xi) \sin(k, \xi)}{\omega^2 - \Omega^2} dV_k \\ C &= \int \{ (\alpha, k) + \beta + \Omega \} \beta \frac{\sin^2(k, \xi)}{\omega^2 - \Omega^2} dV_k \end{aligned}$$

Alle Integrale sind auf das Innere der Kugel $|k| < K$ zu erstrecken. Durch Ausführung der Richtungsintegration in A , B und C erhält man, wenn die Verbindungsgeraden der beiden schweren Teilchen die x_3 -Richtung ist

$$A = (1 + \beta \Omega) D \quad B = \alpha_3 \beta E \quad C = (1 + \beta \Omega) F$$

$$D = \frac{2\pi}{r^2} \int_0^K \frac{k^2 r^2 + k r \sin kr}{\omega^2 - \Omega^2} dk$$

$$E = \frac{2\pi}{r^2} \int_0^K \frac{\sin kr - kr \cos kr}{\omega^2 - \Omega^2} k dk$$

$$F = \frac{2\pi}{r^2} \int_0^K \frac{k^2 r^2 - kr \sin kr}{\omega^2 - \Omega^2} dk$$

Das Verschwinden der Determinante Δ des Gleichungssystems für λ, μ ergibt uns die Säkulargleichung für Ω .

$$\begin{aligned} \Delta \equiv & \{1 + \eta(1 + \Omega)D + \eta(1 - \Omega)F + \eta^2(1 - \Omega^2)DF + \eta^2E^2\}^2 \\ & + \{1 + \eta(1 - \Omega)D + \eta(1 + \Omega)F + \eta^2(1 - \Omega^2)DF + \eta^2E^2\}^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nach dem Vorgehen von WIGNER et al. ersetzen wir das kontinuierliche Spektrum im k -Raum durch ein diskontinuierliches.

$$\begin{aligned} k &= n\kappa \quad n = 0, 1, \dots, N \quad \omega^2 = 1 + n^2\kappa^2 \\ K &= N\kappa \quad N \gg 1 \quad \Omega^2 = 1 + \nu^2\kappa^2 \end{aligned}$$

Die Integrale D , E und F gehen dann in Summen über.

$$\begin{aligned} D &= 2\pi\kappa \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \left\{ 1 + \frac{\sin n\kappa r}{n\kappa r} \right\} \\ E &= \frac{2\pi\kappa}{r} \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \left\{ \frac{\sin n\kappa r}{n\kappa r} - \cos n\kappa r \right\} \\ F &= 2\pi\kappa \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \left\{ 1 - \frac{\sin n\kappa r}{n\kappa r} \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wir setzen $\nu = n + \varepsilon_n$. Die Bestimmungsgleichung für ε_n ist $\Delta = 0$; zu jedem n gibt es acht Lösungen ε_{ns} ($s = 1, 2, \dots, 8$) dieser Gleichung. In den langsam veränderlichen Termen in Δ können wir Ω durch ω ersetzen, da die Abweichung von den Vakuum-eigen-

werten nur infinitesimal ist¹⁾. Aus dem gleichen Grunde können wir für die Gesamtenergie des Systems schreiben

$$U(r, \eta, K) = -\kappa^2 \sum_{n=1}^N \frac{n}{(1 + \kappa^2 n^2)^{1/2}} \sum_s \varepsilon_{ns}$$

Das Minuszeichen steht hier, weil es sich um die Verschiebung der negativen Energieniveaux handelt. Der Nullpunkt der Energie ist gleich der Energie des Vakuums gewählt. In der Grenze $\kappa \rightarrow 0$ kann man diese Summe über n durch ein Integral ersetzen

$$U(r, \eta, K) = - \int_0^K \frac{k}{(1 + k^2)^{1/2}} \left\{ \sum_s \varepsilon_{ns}(k) \right\} dk \quad (2.5)$$

§ 3. Auswertung der Summen.

Die Summen, die in (2.4) auftreten, lassen sich mit Hilfe der folgenden Fourier'schen Reihe auswerten²⁾. Sei $\varphi(\varrho) = \cos \nu(\pi - \varrho)$ für $0 \leq \varrho \leq 2\pi$ und sonst periodisch, mit der Periode 2π , dann gilt für $\varphi(\varrho)$ die Fourier'sche Reihe

$$\varphi(\varrho) = \cos \nu(\pi - \varrho) = \frac{\nu}{\pi} \sin \nu\pi \left\{ \frac{1}{\nu^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varrho}{n^2 - \nu^2} \right\}$$

Daraus gewinnt man für $\varrho = 0$ die bekannte Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \nu^2} = \frac{1}{2\nu^2} - \frac{\pi}{2\nu} \cotg \nu\pi$$

Ferner erhält man für die Ableitung

$$\varphi'(\varrho) = \nu \sin \nu(\pi - \varrho) = \frac{2\nu}{\pi} \sin \nu\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\varrho}{n^2 - \nu^2}$$

daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\varrho}{n^2 - \nu^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \nu(\pi - \varrho)}{\sin \nu\pi} \quad \text{für } 0 < \varrho < 2\pi$$

¹⁾ Dies gilt allerdings nicht für die äussersten Eigenwerte ($n = 0$ und $n = N$), die sich bei wachsender Kopplungsstärke η vom kontinuierlichen Spektrum ablösen können. In § 7 wird aber gezeigt, dass diese diskreten Eigenwerte in den hier interessierenden Grenzfällen keinen Beitrag zu den Kernkräften liefern.

²⁾ WENTZEL, loc. cit.

Wir setzen also

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \frac{n \sin n \kappa r}{n^2 - \nu^2} &= \frac{\pi}{2} \frac{\sin \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} - R(\nu) \\ \sum_{n=1}^N \frac{n^2 \cos n \kappa r}{n^2 - \nu^2} &= -\frac{\nu \pi}{2} \frac{\cos \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} - T(\nu) \\ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 - \nu^2} &= \frac{1}{2 \nu^2} - \frac{\pi}{2 \nu} \cot \nu \pi - S(\nu) \\ \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} &= N + \frac{1}{2} - \frac{\pi \nu}{2} \cot \nu \pi - \nu^2 S(\nu)\end{aligned}$$

Die Reste schätzen wir durch Integrale ab

$$\begin{aligned}R(\nu) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n \sin n \kappa \nu}{n^2 - \nu^2} \underset{N}{\approx} \int_N^{\infty} \frac{\sin n \kappa r}{n} \frac{dn}{1 - \frac{n^2}{N^2}} = \frac{\cos Kr}{Kr \left(1 - \frac{N^2}{N^2}\right)} + \dots \\ T(\nu) &= \frac{d}{d(\kappa r)} R(\nu) \underset{N}{\approx} -\frac{\sin Kr}{\kappa r \left(1 - \frac{N^2}{N^2}\right)} + \dots\end{aligned}$$

In $T(\nu)$ und $R(\nu)$ sind nur die ersten Terme einer Entwicklung nach fallenden Potenzen von Kr angeschrieben. Weitere Terme erhält man durch partielle Integration. Wir werden im Folgenden Terme von der relativen Größenordnung $(Kr)^{-1}$ vernachlässigen und beschränken uns damit für r auf den Bereich $r \gg 1/K$. In dieser Näherung können wir R vernachlässigen. (Ausgenommen davon ist die Diskussion des Spezialfalles $r = 0$, s. u.). Mit den so gewonnenen Ausdrücken gehen wir in (2.3) ein und ersetzen überall, ausser in der trigonometrischen Funktion ν durch n . Dann wird

$$\begin{aligned}D &= Z - \pi^2 k \cot \nu \pi + \frac{\pi^2}{r} \frac{\sin \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} \\ E &= Y + \frac{\pi^2}{r^2} \frac{\sin \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} + \frac{k \pi^2}{r} \frac{\cos \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} \quad (3.1) \\ F &= Z - \pi^2 k \cot \nu \pi - \frac{\pi^2}{r} \frac{\sin \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi}\end{aligned}$$

mit

$$Z = 2 \pi \left(K - \frac{k}{2} \ln \frac{K+k}{K-k} \right)$$

$$Y = \frac{2 \pi}{r^2} \frac{\sin Kr}{1 - \frac{k^2}{K^2}}$$

§ 4. Diskussion zweier Spezialfälle.

Bevor wir zur Berechnung der Kernkräfte übergehen, wollen wir zwei Spezialfälle diskutieren.

1. $r \sim 0$. Bei sehr kleinem Abstand sind die vorstehenden Formeln nicht gültig, denn wir haben darin Terme von der relativen Größenordnung $(Kr)^{-1}$ vernachlässigt. Wir gehen deshalb von den exakten Formeln (2.4) aus und entwickeln darin nach Potenzen von κr .

$$\begin{aligned} D &= 2\pi\kappa \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \{2 - 1/6 n^2 \kappa^2 r^2 + \dots\} = 2D_0 \\ E &= \frac{\pi\kappa^2 r}{3} \sum \frac{n^4}{n^2 - \nu^2} + \dots \sim r \\ F &\sim r^2 \end{aligned}$$

Die Säkulargleichung (2.3) lautet im Limes $r = 0$:

$$\{1 + 2\eta(1 + \omega)D_0\}^2 \{1 + 2\eta(1 - \omega)D_0\}^2 = 0$$

Es gibt nur zwei ε_{ns} -Werte, welche von Null verschieden sind, aber jeder zählt doppelt.

$$U(o, \eta, K) = -2\kappa^2 \sum \frac{n}{(1 + \kappa^2 n^2)^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_{n1} + \varepsilon_{n2})$$

Man hätte dasselbe Resultat erhalten, wenn man mit einem einzigen schweren Teilchen gerechnet, aber in der Hamiltonfunktion η durch 2η ersetzt hätte, wie man unmittelbar aus (2.2) entnimmt. Bezeichnen wir die Selbstenergie eines schweren Teilchens mit $U(\eta, k)$, so gilt folglich

$$U(o, \eta, K) = U(2\eta, K)$$

2. $r \rightarrow \infty$. In D und F verschwinden für diesen Grenzfall die Terme mit dem Sinus, während E überhaupt verschwindet. $D = F = D_0, E = 0$

$$\Delta = \{1 + \eta(1 - \omega)D_0\}^4 \{1 + \eta(1 + \omega)D_0\}^4 \quad (4.1)$$

Wir erhalten in diesem Fall also wiederum dieselben Wurzeln, wie für ein einziges Teilchen, aber jede der Wurzeln zählt jetzt vierfach statt zweifach

$$U(\infty, \eta, K) = -4\kappa^2 \sum \frac{n}{(1 + \kappa^2 n^2)^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_{n1} + \varepsilon_{n2}) = 2U(\eta, K)$$

Zwei Teilchen, die unendlich weit entfernt sind, haben also die doppelte Selbstenergie eines einzigen Teilchens. Setzen wir gemäss (3.1) für

$$D_0 \equiv 2\pi\kappa \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{n^2 - v^2} \approx Z - \pi^2 k \cotg v\pi$$

so wird nach (4.1)

$$\begin{aligned} 1 + \eta(1 \mp \omega)D_0 &= 0 \\ \cotg v\pi &= \frac{1}{\pi^2 k} \left\{ \frac{1 \pm \omega}{\eta(1 - \omega^2)} + Z \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wir setzen wieder $v = n + \varepsilon$ und unterscheiden die beiden Lösungen von (4.2) als ε_1 und ε_2 . Dann wird vermöge der Formel

$$\begin{aligned} \tg(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi &= \frac{\cotg \varepsilon_1 \pi + \cotg \varepsilon_2 \pi}{\cotg \varepsilon_1 \pi \cotg \varepsilon_2 \pi - 1} \\ \tg(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi &= 2\eta\pi^2 k \frac{1 - Z\eta k^2}{1 + 2Z\eta - (Z^2 - k^2\pi^4)\eta^2 k^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Für die Gesamtenergie erhalten wir

$$\begin{aligned} U(\infty, \eta, k) &= +2U(\eta, k) = \\ -\frac{2}{\pi} \int_0^K \frac{k dk}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} \arctg 2\pi^2\eta k &\frac{1 - Z\eta k^2}{1 + 2Z\eta - (Z^2 - k^2\pi^4)\eta^2 k^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Formel (4.4) ist identisch mit der Formel (10) in der Arbeit von CRITCHFIELD und LAMB, wenn man in dieser η durch $-\eta/2$, $f(q)$ durch $-2Z$ und $v(p)$ durch die Funktion $v(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } p < K \\ 0 & \text{für } p > K \end{cases}$ ersetzt. Man sieht, dass die Verschiebung der Energieniveaux und auch die Selbstenergie für sehr kleine η proportional zu η ist. In der Störungstheorie entspricht diesem Term das Diagonalelement der Störungsfunktion \bar{H} .

§ 5. Potential bei schwacher Kopplung.

Zur Berechnung der Energie des Systems, bestehend aus schweren Teilchen in endlichem Abstand und Elektronenfeld, gehen wir aus von den Ausdrücken (3.1), welche wir in die Säkular-

gleichung (2.3) einsetzen. Wenn wir noch mit $\sin^2 \nu$ durchmultiplizieren, lautet die Säkulargleichung

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 \nu \pi \{1 + \eta(D+F) \pm \eta \omega(D-F) + \eta^2(1-\omega^2)DF + \eta^2 E^2\} \\
 &= \sin^2 \nu \pi + 2 \eta \sin \nu \pi (Z \sin \nu \pi - \pi^2 k \cos \nu \pi) \\
 &\quad \pm 2 \eta \omega \frac{\pi^2}{r} \sin \nu \pi \sin \nu(\pi - \varkappa r) \\
 &- \eta^2 k^2 (Z \sin \nu \pi - \pi^2 k \cos \nu \pi)^2 + \eta^2 \frac{\pi^4}{r^2} k^2 + \eta^2 \frac{\pi^4 k}{r^3} \sin 2 \nu (\pi - \varkappa r) \\
 &+ \eta^2 \frac{\pi^4}{r^4} \sin^2 \nu (\pi - \varkappa r) + \eta^2 Y^2 \sin^2 \nu \pi + 2 Y \eta^2 \frac{\pi^2}{r^2} \sin \nu \pi \sin \nu(\pi - \varkappa r) \\
 &+ 2 \eta^2 Y \frac{k \pi^2}{r} \sin \nu \pi \cos \nu(\pi - \varkappa r) = 0 \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

Wir haben nur einen der Faktoren von (2.3) angeschrieben. Wir setzen nun $\nu = n + \varepsilon$, dann geht ε mit η nach Null, und entwickeln alles nach Potenzen von η bis zur dritten Ordnung in η . Wenn wir nur bis zur zweiten Ordnung gingen, erhalten wir ein r -unabhängiges Potential, nämlich die Selbstenergie zweier unendlich weit entfernter Teilchen (Spezialfall 2 in § 4). Wir vernachlässigen $\varkappa \nu$ gegen 1 und erhalten für (5.1)

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^2 A_2 + \varepsilon A_1 + A_0 = 0 \\
 A_0 &= \eta^2 \pi^4 k^2 \left(\frac{1}{k^4 r^4} \sin^2 kr - \frac{1}{k^3 r^3} \sin 2kr + \frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \\
 A_1 &= -2 \eta \left\{ \eta \pi^3 k \left(1 + \omega \frac{\sin kr}{kr} \right) - \eta^2 \left[\pi^3 k^3 Z + \frac{\pi^5 k}{r^3} \cos 2kr \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\pi^5}{2 r^2} \sin 2kr + Y \frac{\pi^3 k}{r} \left(\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right) \right] \right\} \\
 A_2 &= \pi^2 + 2 \eta \pi^2 \left(Z + \frac{\omega \pi^2}{r} \cos kr \right)
 \end{aligned}$$

Eine Abschätzung der höhern Terme zeigt, dass diese verschwindend sind, falls $K^2 \eta \ll 1$ ist, was wir im folgenden immer voraussetzen. Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist immer positiv, die Wurzeln sind also reell. Wir benötigen nur die Summe der beiden Wurzeln $-A_1/A_2$. Wegen $Z \eta \ll 1$ können wir in A_2 nach η entwickeln. In dem so erhaltenen Ausdruck nehmen wir nur die r -abhängigen Terme und summieren über alle Lösungen der Säkulargleichung. Ferner können wir die

Terme mit $Y \left(\sim \frac{\sin Kr}{r^2} \right)$ streichen. Sie geben nämlich zu kurz-periodischen Schwankungen des Potentials Anlass, welche nur von unserer scharfen Abschneidegrenze herrühren, und denen offenbar keine physikalische Bedeutung zukommen kann. Wir können sie durch eine Mitteilung über einen r -Bereich von der Grössenordnung $1/K$ beseitigen. Das so gemittelte Potential wird schliesslich mittelst (2.5)

$$V(r) = \bar{U}(r, \eta, K) = + \frac{8\pi^3 \eta^2}{r^2} \int_0^K \frac{k dk}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left(1 + k^2 - \frac{1}{2r^2} \right) \sin 2kr + \frac{k}{r} \cos 2kr \right\}$$

Die vorkommenden Integrale lassen sich alle durch Differentiation nach r aus dem einen ableiten

$$\int_0^K \frac{\cos 2kr dk}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(2ir)$$

wo $H_0^{(1)}$ die Hankel'sche Zylinderfunktion ist. Aus den bekannten Differentialbeziehungen der Zylinderfunktionen folgt

$$V(r) = 6\pi^4 \eta^2 \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{r^2} H_1^{(1)}(2ir) - \frac{i}{r} H_0^{(1)}(2ir) \right\}$$

Dieses Resultat stimmt mit dem störungsmässig berechneten überein¹⁾. Die Bedingungen für die Gültigkeit dieser Näherung sind $\eta K^2 \ll 1$ und $Kr \gg 1$.

§ 6. Potential bei starker Kopplung.

In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf den Fall der starken Kopplung, insbesondere auf den Grenzfall $\eta \rightarrow \infty$. In diesem Grenzfall können wir uns in der Säkulargleichung (2.3) auf die Terme beschränken, welche η^2 enthalten. Das Resultat der Rechnung ist dann das erste Glied einer Entwicklung nach fallenden Potenzen von η .

$$\Delta = \eta^2 \Delta_0^4 + \dots = b_2 \eta^2 + b_1 \eta + \dots$$

¹⁾ MARSHAK, Phys. Rev. 57, 1101 (1940), Formel (7) erster Term. Es ist nur zu beachten, dass η in unserer Formel durch 2η zu ersetzen ist, um Übereinstimmung zu erhalten, da wir in Gleichung (2.1) einen Faktor $1/2$ explizite eingeführt haben.

$r^2 b_2$ und b_1 sind von derselben Größenordnung. Unser erstes Glied stellt also dann eine gute Näherung dar, wenn $\eta \gg r^2$ ist.

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (1 - \Omega^2) DF + E^2 \\ &= \left\{ (Z - \pi^2 k \cot \nu \pi)^2 - \frac{\pi^4}{r^2} \frac{\sin^2 \nu (\pi - \kappa r)}{\sin^2 \nu \pi} \right\} (1 - \Omega^2) \\ &\quad + \left\{ Y + \frac{\pi^2}{r^2} \frac{\sin \nu (\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} + \frac{k \pi^2}{r} \frac{\cos \nu (\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} \right\}^2 = 0 \end{aligned}$$

Wir schreiben diese Gleichung

$$\begin{aligned} \{Z \sin \nu \pi - \pi^2 k \cos \nu \pi\}^2 &= \frac{\pi^4}{r^2} \sin^2 \nu (\pi - \kappa r) \\ &+ \frac{1}{k^2} \left\{ Y \sin \nu \pi + \frac{\pi^2}{r^2} \sin \nu (\pi - \kappa r) + \frac{k \pi^2}{r} \cos \nu (\pi - \kappa r) \right\}^2 \equiv B(r, \nu) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Der Term auf der linken Seite ist unabhängig von r , und $\lim_{r \rightarrow \infty} B(r, \nu) = 0$.

Die Verschiebung des n -ten Eigenwertes bei unendlichem Abstand der beiden Kerne ist $\nu_0 = n + \epsilon_n$ und bestimmt sich aus

$$Z \sin \nu_0 \pi - \pi^2 k \cos \nu_0 \pi = 0 \quad \operatorname{tg} \nu_0 \pi = \frac{\pi^2 k}{Z} \quad (6.2)$$

Man hätte dasselbe auch aus der Formel (4.2) durch den Grenzübergang $\eta \rightarrow \infty$ erhalten können. Bei endlichem Abstand der beiden Kerne betrachten wir $B(r, \nu)$ als eine Störung und setzen $\nu = \nu_0 + \delta$. Wir entwickeln dann linke und rechte Seite von (6.1) nach Potenzen von δ . Die linke Seite wird wegen (6.2) mit einem quadratischen Term beginnen, wir gehen deshalb auf der rechten Seite bis zum linearen Term.

$$(Z \sin \nu \pi - \pi^2 k \cos \nu \pi)^2 = C \delta^2 + \dots$$

$$B(r, \nu) = B_0 + \delta B_1 + \dots$$

$$C = \pi^2 (Z^2 + \pi^4 k^2)$$

$$B_0 = \frac{\pi^4}{r^2} \sin^2 \nu_0 (\pi - \kappa r) + \frac{1}{k^2 r^4} \left\{ r^2 Y \sin \nu_0 \pi + \pi^2 \sin \nu_0 (\pi - \kappa r) + \pi^2 k r \cos \nu_0 (\pi - \kappa r) \right\}^2 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\pi^5}{r^2} \sin 2 \nu_0 (\pi - \kappa r) + \frac{2 \pi}{k^2 r^4} \left\{ r^2 Y \sin \nu_0 \pi + \pi^2 \sin \nu_0 (\pi - \kappa r) + \pi^2 k r \cos \nu_0 (\pi - \kappa r) \right\} \\ &\quad \times \left\{ r^2 Y \cos \nu_0 \pi + \pi^2 \cos \nu_0 (\pi - \kappa r) - \pi^2 k r \sin \nu_0 (\pi - \kappa r) \right\} \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{B_1 \pm (B_1^2 + 4 B_0 C)^{\frac{1}{2}}}{2 C}$$

Damit $\delta \ll 1$ ist, müssen sowohl B_1/C als auch $B_0/C \ll 1$ sein. Für B_0/C ist das wegen $Kr \gg 1$ für alle k , welche nicht zu nahe an K liegen erfüllt, denn für kleine k ist die quadrierte geschweifte Klammer rechterhand $\sim k^2$ und hebt den Faktor $1/k^2$ im Limes $k \rightarrow 0$ weg. Das ist jedoch nicht der Fall für B_1/C . Durch die Differentiation von B_0 werden einige der Sinusfunktionen durch Kosinusfunktionen ersetzt, so dass jetzt das Produkt der geschweiften Klammern rechterhand nur noch $\sim k$ ist. Der Ausdruck B_1/C ist deshalb nur noch klein, solange $k \gg 1/K^3 r^4$. Der Fehler, den wir machen, wenn wir trotzdem mit unserer Näherung für δ bis $k = 0$ weiterrechnen, ist aber höchstens von der Größenordnung $1/K^6 r^8$ und kann neben dem Hauptterm vernachlässigt werden. Wir benötigen wiederum nur die Summe der beiden Wurzeln: $\delta_1 + \delta_2 = B_1/C$.

Wenn wir mit den Ausdrücken (6.3) $U(r, \eta, K)$ ausrechnen, so erhalten wir wieder kurzperiodische Schwankungen, welche von der scharfen Abschneidegrenze herrühren. Wenn wir sie wieder durch eine Mitteilung über einen r -Bereich von der Größenordnung $\sim 1/K$ beseitigen, so hat das zur Folge, dass wir im Ausdruck für δ die in Y linearen Terme streichen können. Ferner können wir uns auf die kleinen k -Werte beschränken ($k \ll K$). Der Term mit Y^2 , der noch stehen bleibt, gibt zu einem Potential langer Reichweite Anlass. Innerhalb der Reichweite des Potentials der beiden andern Terme ist er jedoch um eine Größenordnung Kr kleiner als dieses. Wir lassen ihn deshalb ebenfalls weg. In den übrigbleibenden Termen können wir noch ν_0 durch n ersetzen, denn die oben erwähnte Mitteilung über einen r -Bereich der Grösse $1/K$ hat zur Folge, dass nur aus dem Bereich $k \ll K$ ein wesentlicher Beitrag zum Potential geliefert wird. Für diesen Bereich ist aber gemäss (6.2) $\varepsilon_n \ll 1$.

Die Summation über alle k Werte ersetzen wir durch eine Integration

$$U = 4 \int_0^K \frac{dk}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{B_1}{C}$$

Gemäss (6.3) wird daraus mit den oben erwähnten Vereinfachungen

$$\begin{aligned} V(r) = \bar{U}(r, \eta, k) &= -\frac{\pi}{K^2 r^3} \int_0^\infty \left(\cos 2kr - \frac{\sin 2kr}{2kr} \right) \frac{dk}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{i\pi^2}{2K^2 r^3} \left\{ H_0^{(1)}(2ir) + \frac{1}{r} \int_r^\infty H_0^{(1)}(2i\varrho) d\varrho \right\} \end{aligned}$$

$V(r)$ stellt ein anziehendes Potential von der Reichweite 1 dar. Der Gültigkeitsbereich der Näherung ist $\eta \gg r^2$. $V(r)$ strebt im Limes $K \rightarrow \infty$ nach Null. Wenn $r > 1$ ist, dann müsste der schwache Zusatzterm langer Reichweite mitberücksichtigt werden, den wir weggelassen haben. Doch wird ihm kaum eine physikalische Bedeutung zukommen.

§ 7. Diskussion der diskreten Zustände.

Wenn die Kopplung stark genug ist, dann können sich diskrete Eigenwerte vom kontinuierlichen Spektrum sowohl am oberen als auch am unteren Ende ablösen. Die Verschiebung, welche diese diskreten Eigenwerte bei einer Abstandsänderung der beiden schweren Teilchen erfahren, ist dann nicht mehr infinitesimal und kann deshalb zum Potential einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag geben.

Wie im Folgenden gezeigt werden soll, ist dieser Beitrag für die beiden von uns betrachteten Grenzfälle gerade Null. Das braucht aber durchaus nicht für den allgemeineren Fall beliebiger η zuzutreffen.

Für das obere Ende ($|\Omega| < 1$) kann man sofort sehen, dass bei unendlich starker Kopplung keine diskreten Zustände auftreten können. In der Gleichung $(1 - \Omega^2)DF + E^2 = 0$ sind nämlich beide Summanden positiv und auch für $|\Omega| = 1$ wird E^2 nicht gleich Null. Es gibt also keine Lösung dieser Gleichung für $|\Omega| \leq 1$.

Für endliche Werte des Kopplungsparameters kann man bei unendlichem Abstand der beiden schweren Teilchen das diskrete Ω leicht berechnen. Ω ist dann die Lösung der Gleichung

$$1 + 2\eta D_0 + \eta^2(1 - \Omega^2)D_0 \equiv \{1 + \eta(1 + \Omega)D_0\}\{1 + \eta(1 - \Omega)D_0\} = 0$$

die man erhält, indem man in (2.3) $r = \infty$ setzt

$$(1 \pm \Omega)D_0 = -\frac{1}{\eta}$$

Diese Gleichung ist bei CRITCHFIELD¹⁾ eingehend diskutiert. Sie hat zwei Lösungen, welche mit wachsendem η nach ± 1 streben. Eine genauere Analyse zeigt, dass bei festgehaltenem η aber abnehmendem Abstand der beiden Teilchen die beiden Lösungen ebenfalls nach ± 1 streben.

Unterhalb des kontinuierlichen Spektrums ($\Omega < -\sqrt{1 + K^2}$)

¹⁾ CRITCHFIELD, Phys. Rev. **59**, 48 (1941).

tritt für alle Werte von η ein vierfach entarteter diskreter Eigenwert auf, welcher im Grenzfalle $r \rightarrow \infty$ aus der Gleichung

$$\{1 + \eta(1 - \Omega)D_0\}^4 \{1 + \eta(1 + \Omega)D_0\}^4 = 0$$

zu berechnen ist.

$$\Omega = -(1 + L^2)^{\frac{1}{2}} \quad L > K$$

$$D_0 = 2\pi \int_0^K \frac{k^2}{k^2 - L^2} = 2\pi \left((K - \frac{L}{2} \ln \frac{L+K}{L-K}) - \frac{1}{\eta} \right) = y(L) \equiv \pm 2\pi L \left(K - \frac{L}{2} \ln \frac{L+K}{L-K} \right)$$

Für $L \gg K$ verhält sich der Ausdruck rechts wie $1/L$. Daraus folgt, dass für grosse η L wie η nach unendlich geht. Wir können also für endliche η eine Potenzreihe nach fallenden Potenzen von η ansetzen, deren erstes Glied proportional η ist.

$$L(\eta) = a_1 \eta + a_0 + \text{Glieder mit } 1/\eta$$

Um nun die r -Abhängigkeit der beiden Koeffizienten a_1, a_0 zu untersuchen, welche einen Zusatzterm zum Potential ergäbe, gehen wir mit diesem Ansatz in die Säkulargleichung mit den r -abhängigen Termen ein. Da wir den Grenzfall $\eta \rightarrow \infty$ untersuchen wollen, entwickeln wir in den Integralen alles nach fallenden Potenzen von η . Der höchste Term von Δ (2.3) ist dann unabhängig von η und ist, wenn wir $Kr \gg 1$ voraussetzen $= 1 - \frac{4\pi^2}{9} \frac{K^6}{a_1^2}$.

Daraus folgt, wenn wir ihn gleich Null setzen: $a_1 = \frac{2\pi}{3} K^3$.

Der Koeffizient von $1/\eta$ ist proportional zu $1 - \frac{2\pi}{3} K_3 \frac{a_0}{a_1}$. Daraus ergibt sich $a_0 = \frac{3}{2\pi} \frac{a_1}{K^3} = 1$.

Es wird somit für endlichen Abstand r

$$L(\eta) \approx \frac{2\pi}{3} K^3 \eta + 1 + \text{Glieder mit } \frac{1}{\eta}$$

Die beiden Koeffizienten a_1 und a_0 sind also r -unabhängig und der diskrete Eigenwert unterhalb des Spektrums trägt im Limes $\eta \rightarrow \infty$ ($\eta \gg 1$) nichts zum Potential bei.

Im Grenzfall der schwachen Kopplung ($K^2 \eta \ll 1$) kann am oberen Ende des Spektrums ($|\Omega| < 1$) kein diskreter Eigenwert auftreten, wie schon CRITCHFIELD in der oben zitierten Arbeit gezeigt hat. Am untern Ende tritt zwar ein solcher auf, doch ist seine Abweichung von K nur infinitesimal, nämlich von der Größenordnung $e^{-1/K^2|\eta|}$, und er trägt deshalb nichts zum Potential bei.

§ 8. Berechnung der Streuung für $K^2 \eta \ll 1$.

Für schwache Kopplung lässt sich die Streuung entweder mittels der Störungstheorie, oder durch strenge Lösung der Wellengleichung im x -Raum und nachherige Entwicklung nach Potenzen von η berechnen. Beide Methoden ergeben dasselbe Resultat.

In der Störungstheorie ist der Streuquerschnitt proportional dem Matrixelement der Störungsfunktion.

$$I(\vartheta) = \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)^2 |(p | H' | p_0)|^2$$

$H' = \eta \beta$ (Es ist jetzt nur ein schweres Teilchen anwesend.)

$$|(p | H' | p_0)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{(\lambda, \lambda_0)} |(\lambda p | H' | \lambda_0, p_0)|^2$$

p_0 ist der Anfangsimpuls und p der Impuls nach der Streuung. λ, λ_0 numeriert die beiden Spinzustände

$$(\lambda, p | H' | \lambda_0 p_0) = a^{*(\lambda)}(p) \beta a^{(\lambda_0)}(p_0) \quad |p - p_0| < K$$

darin sind $a^{(\lambda)}(p)$ die Amplituden der ebenen Welle mit dem Impuls p und dem Spin λ .

Es ist also

$$\begin{aligned} |(p | H' | p_0)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{(\lambda, \lambda_0)} (a^{*(\lambda)}(p) \beta a^{(\lambda_0)}(p_0)) (a^{*(\lambda_0)}(p_0) \beta a^{(\lambda)}(p)) \\ &= \frac{1}{2} \text{sp} \{ V(p) \beta v(p_0) \beta \} \end{aligned}$$

worin

$$V = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\alpha, p) + \beta}{\omega} \right)$$

Die Ausrechnung ist elementar und ergibt direkt

$$I(\vartheta) = \left(\frac{\eta}{2\pi} \right)^2 \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 - \beta^2} \quad (7.1)$$

worin ϑ den Streuwinkel und β die Geschwindigkeit darstellt.

Die Streuung ist nach der „exakten“ Methode von WEINBERG gerechnet worden¹⁾. Sein Resultat lautet in unserer Bezeichnung

$$\sigma_\omega = \left(\frac{\eta}{2\pi} \right)^2 \frac{k^2 \left(1 - \cos \frac{2\vartheta}{2} \right) + 1 + k^2 (|\eta k F|^2 - 2\eta f)}{|1 + 2\eta F - |\eta k F|^2|^2}$$

mit

$$f = -\frac{K}{2\pi^2} \quad F = -\frac{2k + \pi i}{4\pi^2}$$

und geht für $K^2 \eta \ll 1$ in die Formel (7.1) über.

¹⁾ WEINBERG, Phys. Rev. 59, 776 (1941).

Der Gültigkeitsbereich der Störungsrechnung ist somit für Kernkräfte und Streuung $K^2\eta \ll 1$.

Herr Prof. WENTZEL hat durch seine unermüdliche Bereitschaft zu Diskussionen und Ratschlägen diese Arbeit wesentlich gefördert. Ihm sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Physikalisches Institut der E.T.H., Zürich.
