

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 15 (1942)  
**Heft:** II

**Artikel:** Zur Paartheorie der Kernkräfte  
**Autor:** Wentzel, Gregor  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111296>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zur Paartheorie der Kernkräfte

von **Gregor Wentzel.**

(12. I. 1942.)

---

Ein vereinfachtes Verfahren zur exakten Lösung der Eigenwertprobleme der Paartheorien wird angegeben. In der skalaren Paartheorie wird das Verfahren angewendet zur Berechnung der Selbstenergie eines Protons, der Kräfte zwischen zwei Protonen, und der Volumenergie eines Protonen-Kristallgitters. Die Ergebnisse entsprechen qualitativ den Anforderungen der phänomenologischen Kerntheorie, wenn man die in den Kopplungsansatz der Feldtheorie eingehende Abschneidelänge grössenordnungsmässig mit der Kraftreichweite der phänomenologischen Theorie ( $\sim 10^{-13}$  cm) identifiziert, während die Comptonwellenlänge der Feldteilchen auch grösser angenommen werden kann.

In den Paartheorien<sup>1)</sup> bestimmen sich die Eigenwerte der Energie von Kernpartikeln und Feld bekanntlich durch die Eigenwerte einer quadratischen Form, und daher lassen sich solche Probleme in exakter Weise — d. h. ohne Verwendung der Störungsmethode — lösen. WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER<sup>2)</sup>, denen man diese Bemerkung verdankt, berechneten bereits die Selbstenergie, die ein ruhendes (unendlich schweres) Proton oder Neutron vermöge seiner Wechselwirkung mit dem Paarfelde besitzt, ferner die Selbstenergie von mehreren Protonen am gleichen Ort, woraus sich ein Hinweis auf den Sättigungscharakter der betreffenden Kernkräfte ergab. Betrachtet man mehrere ruhende Protonen an verschiedenen Orten, so hängt die Selbstenergie von den Protonenkoordinaten ab, d. h. man erhält die potentielle Energie der statischen Kernkräfte als Ortsfunktion<sup>3)</sup>. In einer früheren Arbeit des Verfassers<sup>4)</sup> (im folgenden als I zitiert) wurde gezeigt, wie man die Abstandsabhängigkeit der Zweikörperkräfte berechnen kann, ein Problem, das z. B. im Hinblick auf die Proton-Proton-Streuung von Interesse ist. In der vorliegenden Arbeit wird das Rechenver-

<sup>1)</sup> Wir denken in erster Linie an die „Elektronpaar-Theorie“, die zuerst von GAMOW und TELLER (Phys. Rev. **51**, 289, 1937) und gleichzeitig vom Verfasser (Helv. Phys. Acta **10**, 107, 1937) vorgeschlagen wurde, sodann an die „Mesonpaar-Theorie“ von MARSHAK und WEISSKOPF (Phys. Rev. **57**, 1101, 1940 und **59**, 130, 1941).

<sup>2)</sup> Phys. Rev. **56**, 530, 1939.

<sup>3)</sup> CRITCHFIELD und LAMB, Phys. Rev. **58**, 46, 1940.

<sup>4)</sup> ZS. f. Phys. **118**, 277, 1941. Vgl. auch JAUCH, Helv. Phys. Acta **15**, 175, 1942.

fahren vereinfacht und verallgemeinert. Um auch über die Energie eines Kerns von hohem Atomgewicht Auskunft zu erhalten, wird ferner das Problem sehr vieler Protonen in Kristallgitter-Anordnung behandelt.

Ob der Spin der Feldpartikeln ganz- oder halbzahlig gewählt wird, ist weder für den Gang der Rechnung noch für das qualitative Ergebnis entscheidend. Hat man ganzzahligen Spin und Bose-Einstein-Statistik, so betrachtet man die Energie der Nullpunktsschwingungen des Feldes und ihre Beeinflussung durch die anwesenden Kernpartikeln. Bei halbzahligem Spin und Quantisierung nach dem Pauli-Prinzip andererseits ist die Nullpunktsenergie durch die Energiewerte der besetzten Einzelzustände negativer Energie gegeben, und diese werden wieder durch die anwesenden Protonen beeinflusst. In Anbetracht dieser Analogie haben wir uns in der früheren Arbeit (I) damit begnügt, das Rechenverfahren am Beispiel des skalaren Feldes (Spin 0) zu erläutern, das natürlich den einfachsten Fall darstellt. Inzwischen hat JAUCH (l. c.) das Verfahren auf die Elektronpaartheorie (Spin  $\frac{1}{2}$ ) angewendet und bestätigt, dass die Situation, abgesehen von den Komplikationen, die durch die grössere Zahl der Freiheitsgrade bedingt sind, die gleiche ist (bei Wahl eines Wechselwirkungsansatzes, der den Protonspin nicht enthält). Wir beschränken uns daher auch hier einfacheitshalber wieder auf das Beispiel der skalaren Paartheorie.

Wir führen also ein Pauli-Weisskopf'sches skalares komplexes Feld<sup>1)</sup>  $\psi$  ein mit der Vakuum-Hamiltonfunktion

$$H^0 = \int dX \{ \pi^* \pi + \psi^* (\mu^2 - \Delta) \psi \};$$

$\pi, \pi^*$  bedeuten die zu  $\psi, \psi^*$  kanonisch konjugierten Wellenfunktionen, und die Konstante  $\mu$  bestimmt die Ruhmasse der Feldteilchen (die Lichtgeschwindigkeit ist = 1 gesetzt). Das Feld sei räumlich periodisch, und zwar sei der Periodizitätsbereich ein Kubus vom Volumen  $V = L^3$ . Demgemäß setzen wir

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}};$$

der  $\mathbf{k}$ -Raum ist ein kubisches Gitter mit der Gitterkonstante  $2\pi/L$ . Bekanntlich wird dann

$$H^0 = \sum_{\mathbf{k}} \{ p_{\mathbf{k}}^* p_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}}^* q_{\mathbf{k}} \}, \quad \text{wo} \quad \omega_{\mathbf{k}}^2 = \mu^2 + |\mathbf{k}|^2.$$

---

<sup>1)</sup> PAULI und WEISSKOPF, Helv. Phys. Acta 7, 709, 1934.

Die Protonen, mit denen das  $\psi$ -Feld gekoppelt werden soll, betrachten wir als unendlich schwer und ruhend; ihre Ortsvektoren seien  $\mathbf{r}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, Z$ ). Ein der Paartheorie entsprechender Wechselwirkungsansatz lautet:

$$H' = \lambda \sum_{s=1}^Z \psi^*(\mathbf{r}_s) \psi(\mathbf{r}_s) = \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} q_{\mathbf{k}}^* q_{\mathbf{k}'} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_s},$$

denn dieser Hamilton-Term beschreibt, wenn er als kleine Störung betrachtet wird, Paar-Erzeugungs- und -Vernichtungsprozesse sowie Streuprozesse, wie die Formeln der Pauli-Weisskopf'schen Theorie unmittelbar erkennen lassen.  $\lambda$  ist ein Kopplungsparameter von der Dimension einer Länge; wir wählen

$$\lambda > 0,$$

damit der positiv-definite Charakter der Hamiltonfunktion garantiert ist<sup>1)</sup>. Wir müssen aber den obigen Wechselwirkungsansatz, der der Nahewirkungsvorstellung entspricht, noch abändern im Sinne einer „Abschneidung“ des  $|\mathbf{k}|$ -Spektrums, um endliche Ergebnisse zu erhalten. Dabei wählen wir dasselbe Abschneideverfahren wie WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER: in  $H'$  werde  $\psi(\mathbf{r}_s)$  durch einen Mittelwert  $\int dX f(|\mathbf{r}|) \psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_s)$  ersetzt. Die  $\mathbf{k}$ -Raum-Darstellung von  $H'$  ist dann von der Form

$$H' = \frac{\lambda}{V} \sum_{s=1}^Z \left| \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s} \right|^2 = \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}}^* g_{\mathbf{k}'} q_{\mathbf{k}}^* q_{\mathbf{k}'} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_s},$$

wo für die Gewichtsfunktion  $g$  gilt:

$$g_{\mathbf{k}} = g(|\mathbf{k}|) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathbf{k}| \ll A, \\ 0 & \text{für } |\mathbf{k}| \gg A \end{cases}$$

( $A^{-1}$  = Abschneidelänge).

In der Hamiltonfunktion  $H = H^0 + H'$  führen wir Normalkoordinaten ein:

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{k}} &= \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} Q_{\mathbf{k}'}, \quad p_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k} \mathbf{k}'}^* P_{\mathbf{k}'}, \\ \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k} \mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k} \mathbf{k}''} &= \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k} \mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'' \mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}'' \mathbf{k}'}, \\ H &= \sum_{\mathbf{k}} \{ P_{\mathbf{k}}^* P_{\mathbf{k}} + \Omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}}^* Q_{\mathbf{k}} \}. \end{aligned}$$

$Q_{\mathbf{k}}$ ,  $P_{\mathbf{k}}$  sind natürlich kanonische Variable mit den bekannten Vertauschungsrelationen. Die Transformationskoeffizienten  $a_{\mathbf{k} \mathbf{k}'}$  be-

<sup>1)</sup> Vgl. I, Fussnote 1, S. 284.

stimmen sich in bekannter Weise durch die Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$(\Omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) q_{\mathbf{k}} - \frac{\lambda}{V} g_{\mathbf{k}}^* \sum_{\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'} q_{\mathbf{k}'} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \mathbf{x}_s} = 0;$$

die zugehörige Säkulargleichung lautet:

$$\Delta(\Omega^2) \equiv \text{Det} \left| (\Omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} - \frac{\lambda}{V} g_{\mathbf{k}}^* g_{\mathbf{k}'} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \mathbf{x}_s} \right| = 0. \quad (1)$$

Wir denken uns die Wurzeln  $\Omega^2$  dieser Gleichung bestimmt (als Funktionen der  $\mathbf{x}_s$ ) und numerieren sie wieder mit einem Index  $\mathbf{k}$  (etwa so, dass  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}$ ). Mit den  $\Omega_{\mathbf{k}}$  kennt man sogleich die Eigenwerte der Energie  $H$ :

$$\sum_{\mathbf{k}} \hbar \Omega_{\mathbf{k}} (N_{\mathbf{k}}^+ + N_{\mathbf{k}}^- + 1)$$

( $N_{\mathbf{k}}^+$ ,  $N_{\mathbf{k}}^-$  = Anzahlen der positiven bzw. negativen Feldteilchen in den Einzelzuständen  $\mathbf{k}$ ), und damit insbesondere die hier interessierende Nullpunktsenergie  $\hbar \sum_{\mathbf{k}} \Omega_{\mathbf{k}}$ . Ihren Überschuss über die Nullpunktsenergie des Vakuumfeldes nennen wir  $E$ :

$$E = \hbar \sum_{\mathbf{k}} (\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}).$$

Die Energie  $E$ , die von den Protonenkoordinaten  $\mathbf{x}_s$  abhängt, enthält ausser der gesuchten Energie der Kernkräfte noch die Selbstenergie der  $Z$  Protonen. Sei  $E(\infty)$  der Wert von  $E$  bei paarweisen unendlichen Abständen der Protonen, so gibt

$$U = E - E(\infty)$$

das Potential der statischen Kräfte, welche die Protonen durch Vermittlung des  $\psi$ -Feldes aufeinander ausüben.

Die Berechnung der einzelnen Eigenwerte  $\Omega_{\mathbf{k}}^2$  kann man auf folgende Weise umgehen: Indem wir

$$\Omega^2 = \zeta$$

setzen, schreiben wir die Determinante (1) in der Form:

$$\Delta(\zeta) = \prod_{\mathbf{k}} (\zeta - \Omega_{\mathbf{k}}^2).$$

Im Limes  $\lambda = 0$  (Vakuumfeld) geht  $\Delta(\zeta)$  über in

$$\Delta_0(\zeta) = \prod_{\mathbf{k}} (\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2).$$

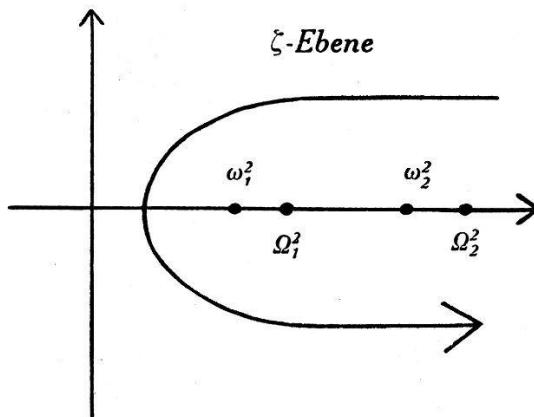
Wir bilden nun die rational-gebrochene Funktion

$$\varphi(\zeta) = \frac{\Delta(\zeta)}{\Delta_0(\zeta)}, \quad (2)$$

deren Nullstellen und Pole in der komplexen  $\zeta$ -Ebene alle auf die positiv-reelle  $\zeta$ -Achse fallen. Ferner sei  $f(\zeta)$  eine Funktion, die sich in der Umgebung dieser positiv-reellen Achse regulär verhält. Dann gilt offenbar:

$$\begin{aligned} \sum_t \{f(\Omega_t^2) - f(\omega_t^2)\} &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \cdot f(\zeta) \sum_t \left( \frac{1}{\zeta - \Omega_t^2} - \frac{1}{\zeta - \omega_t^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \cdot f(\zeta) \frac{d \log \varphi(\zeta)}{d\zeta}, \end{aligned}$$

wo der Integrationsweg im positiven Sinne um alle Nullstellen und Pole von  $\varphi(\zeta)$  herumführt (vgl. die Figur)<sup>1)</sup>. Bei einem Um-



lauf um diese Kurve kehrt  $\log \varphi(\zeta)$  zum Ausgangswert zurück, da gleich viele Nullstellen ( $\Omega_t^2$ ) wie Pole ( $\omega_t^2$ ) im Innern liegen; daher kommt durch partielle Integration:

$$\sum_t \{f(\Omega_t^2) - f(\omega_t^2)\} = -\frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \cdot f'(\zeta) \log \varphi(\zeta).$$

Mit  $f(\zeta) = \sqrt{\zeta}$  wird also

$$E = -\frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \log \varphi(\zeta). \quad (3)$$

(Bei einer Verschiebung des Integrationsweges ist natürlich auf den Verzweigungspunkt  $\zeta = 0$  zu achten.) Für die Berechnung der Energie  $E$  und des Potentials  $U$  ist also die Kenntnis der  $\Omega_t^2$  nicht erforderlich. Die Formel (3) ermöglicht auch unmittelbar den Grenzübergang zum kontinuierlichen  $t$ -Raum ( $V \rightarrow \infty$ ), wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

<sup>1)</sup> Wenn  $g_t$  oberhalb eines gewissen  $|t|$ -Wertes nullgesetzt wird, so liegen alle Nullstellen und Pole von  $\varphi$  im Endlichen.

<sup>2)</sup> Ihre Bestimmung machte den Hauptinhalt der früheren Arbeiten aus.

### 1. Ein einziges Proton.

Für  $Z = 1$  lautet die Säkulardeterminante (1), wenn man den Koordinatenursprung einfacheheitshalber an den Ort des Protons legt ( $\mathbf{r}_1 = 0$ ):

$$\begin{aligned}\Delta(\zeta) &= \text{Det} \left| (\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \frac{\lambda}{V} g_{\mathbf{k}}^* g_{\mathbf{k}'} \right| \\ &= \prod_{\mathbf{k}} (\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2) \cdot \left\{ 1 - \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{|g_{\mathbf{k}'}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}'}^2} \right\}.\end{aligned}$$

Für  $\varphi(\zeta)$  erhält man also in diesem Falle die Funktion

$$\varphi_1(\zeta) = 1 - \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2}. \quad (4)$$

Im Limes  $V \rightarrow \infty$  geht die  $\mathbf{k}$ -Summe in ein  $\mathbf{k}$ -Raum-Integral über:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \varphi_1(\zeta) = 1 - \lambda \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \int_0^\infty dk \frac{k^2 |g(k)|^2}{\zeta - (\mu^2 + k^2)}.$$

Die Nullstellen und Pole von  $\varphi_1(\zeta)$  fallen alle auf die reell-positive  $\zeta$ -Achse, und zwar auf den Abschnitt  $\zeta \geq \mu^2$  (denn für reelles  $\zeta < \mu^2$  ist  $\varphi_1 > 0$ ); wir setzen daher

$$\zeta = \mu^2 + \xi + i\eta$$

und führen das Integral (3) in der  $\xi\eta$ -Ebene in einer Schleife um die positive  $\xi$ -Achse herum, wobei wir die Schleife dieser Achse unbegrenzt annähern ( $\xi \geq 0, \eta \rightarrow \pm 0$ ). Dann erhält man für  $E$  den Wert:

$$E_1 = \frac{\hbar}{4\pi i} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\mu^2 + \xi}} \log \frac{\varphi_+(\xi)}{\varphi_-(\xi)},$$

wo

$$\varphi_{\pm}(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow \pm 0} \varphi_1(\mu^2 + \xi + i\eta). \quad (5)$$

Im Limes  $V = \infty$  bilden wir zunächst:

$$\frac{\varphi_+(\xi) + \varphi_-(\xi)}{2} \equiv \bar{\varphi}(\xi) = 1 + \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 |g(k)|^2}{k^2 - \xi}. \quad (6)$$

(Hauptwert)

Dann findet man (wir setzen  $\xi = \kappa^2$ ):

$$\varphi_{\pm}(\kappa^2) = \bar{\varphi}(\kappa^2) \pm i \frac{\lambda}{4\pi} \kappa |g(\kappa)|^2, \quad (7)$$

also

$$\log \frac{\varphi_+(\kappa^2)}{\varphi_-(\kappa^2)} = 2i \arctg \frac{\lambda \kappa |g(\kappa)|^2}{4\pi \bar{\varphi}(\kappa^2)}.$$

Somit erhalten wir für die Selbstenergie eines Protons den Wert:

$$E_1 = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\kappa \cdot \kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda \kappa |g(\kappa)|^2}{4\pi \varphi(\kappa^2)}. \quad (8)$$

Dieses Ergebnis stimmt überein mit demjenigen, das man auf Grund des Rechenverfahrens von WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER (l. c.) erhält (Ersetzung des kontinuierlichen  $|\mathbf{k}|$ -Spektrums durch eine Folge äquidistanter Punkte und Berechnung der  $\Omega_{\mathbf{k}}$ ).

## 2. Zwei Protonen.

Im Falle  $Z = 2$  erhält man durch Ausrechnung der Determinante (1) für die Funktion  $\varphi(\zeta)$  (2):

$$\begin{aligned} \varphi_2(\zeta) = 1 - \frac{2\lambda}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2} \\ + \left( \frac{\lambda}{V} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2 |g_{\mathbf{k}'}|^2 (1 - \cos(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))}{(\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2)(\zeta - \omega_{\mathbf{k}'}^2)}, \end{aligned}$$

d. h. bei Verwendung der durch (4) definierten Funktion  $\varphi_1(\zeta)$ :

$$\varphi_2(\zeta) = [\varphi_1(\zeta)]^2 - \left( \frac{\lambda}{V} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2 |g_{\mathbf{k}'}|^2 \cos(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{(\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2)(\zeta - \omega_{\mathbf{k}'}^2)}.$$

Gehen wir sogleich zur Grenze  $V = \infty$  über, so können wir in den  $\mathbf{k}$ - und  $\mathbf{k}'$ -Raum-Integralen die Richtungsintegrationen unmittelbar ausführen und erhalten:

$$\varphi_2(\zeta) = [\varphi_1(\zeta)]^2 - [\chi(r, \zeta)]^2,$$

wo

$$\begin{aligned} \chi(r, \zeta) &= \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 |g(k)|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2} \frac{\sin kr}{kr} \\ &= \frac{\lambda i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{k |g(k)|^2 e^{ikr}}{k^2 - (\zeta - \mu^2)}; \end{aligned} \quad (9)$$

hier bedeutet  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  den Abstand der beiden Protonen. Lässt man diesen Abstand gegen  $\infty$  gehen, so wird offenbar  $\chi = 0$ , also  $\varphi_2 = \varphi_1^2$ , und man erhält nach (3) den Energiewert:

$$E_2(\infty) = 2E_1,$$

d. h. die Energie zweier Protonen in unendlichem Abstand ist das

doppelte der Selbstenergie des einzelnen Protons. Für das Potential  $U$  der Zweikörperkraft kommt hiermit:

$$U_2(r) = E_2(r) - E_2(\infty) = -\frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \log \left\{ 1 - \left[ \frac{\chi(r, \zeta)}{\varphi_1(\zeta)} \right]^2 \right\}. \quad (10)$$

Für die weitere Rechnung wollen wir die Gewichtsfunktion  $|g|^2$  speziell wählen:

$$|g(k)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{A^2}}. \quad (11)$$

Dann lässt sich  $\chi$  (9) durch Verschiebung des  $k$ -Integrationsweges in die positiv-imaginäre Halbebene leicht berechnen. Man findet, mit  $\zeta = \mu^2 + \kappa^2$ :

$$\chi(r, \mu^2 + \kappa^2) = -\frac{\lambda}{4\pi} |g(\kappa)|^2 \cdot \frac{e^{\pm i\kappa r} - e^{-Ar}}{r}; \quad (12)$$

dabei gilt in  $e^{\pm i\kappa r}$  das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem ob  $\kappa$  einen positiven oder negativen Imaginärteil hat. Führen wir in (10)  $\kappa$  als Integrationsvariable ein, so können wir den Integrationsweg beiderseits der positiv-reellen  $\kappa$ -Achse entlang führen; unter Verwendung der durch (5) definierten Funktionen  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$  können wir dann schreiben:

$$U_2(r) = \frac{\hbar}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{d\kappa \cdot \kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \log \frac{1 - \left[ \frac{\lambda |g(\kappa)|^2}{4\pi \varphi_+(\kappa^2)} \cdot \frac{1}{r} (e^{+i\kappa r} - e^{-Ar}) \right]^2}{1 - \left[ \frac{\lambda |g(\kappa)|^2}{4\pi \varphi_-(\kappa^2)} \cdot \frac{1}{r} (e^{-i\kappa r} - e^{-Ar}) \right]^2} \quad (13)$$

Für  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$  erhält man bei Verwendung der Gewichtsfunktion (11) und auf Grund von (6) und (7) (oder auch direkt durch komplexe Integration<sup>1)</sup>):

$$\varphi_\pm(\kappa^2) = 1 + \frac{\lambda}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A \pm i\kappa). \quad (14)$$

Bei der Diskussion der Formel (13) beschränken wir uns auf grosse  $r$ -Werte: der Protonen-Abstand  $r$  sei gross gegen die Abschneidelänge  $A^{-1}$ . Dann sind die Terme  $\sim e^{-Ar}$  vernachlässigbar. Da ferner nach (14)

$$4\pi |\varphi_\pm(\kappa^2)| > \lambda |g(\kappa)|^2 \cdot A,$$

ist das Argument des Logarithmus im Integranden in (13) nahezu

<sup>1)</sup> Es gilt:  $\varphi_\pm(\kappa^2) = 1 - \lim_{r \rightarrow 0} \chi(r, \mu^2 + \kappa^2)$ .

$= 1$ , nämlich bis auf Terme der Ordnung  $(Ar)^{-1}$ ; man kann also den Logarithmus entwickeln:

$$U_2(r) = - \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \frac{\hbar}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{d\kappa \cdot \kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} |g(\kappa)|^4 \left( \frac{e^{2i\kappa r}}{[\varphi_+(\kappa^2)]^2} - \frac{e^{-2i\kappa r}}{[\varphi_-(\kappa^2)]^2} \right) + \dots$$

Zu diesem Fourier-Integral kann für  $r \gg A^{-1}$  nur der Integrationsbereich  $\kappa \ll A$  einen wesentlichen Beitrag liefern; in diesem Bereich ist aber  $|g(\kappa)| \approx 1$  und nach (14)

$$\varphi_\pm(\kappa^2) \approx 1 + \frac{\lambda}{4\pi} \cdot A.$$

Somit wird

$$U_2(r) = - \frac{\hbar}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{4\pi}{\lambda} + A\right)^2} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^\infty \frac{d\kappa \cdot \kappa \sin 2\kappa r}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} (1 - \dots) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (15)$$

$$\approx \frac{1}{2} \hbar \mu \frac{1}{\left(\frac{4\pi}{\lambda} + A\right)^2} \cdot \frac{1}{r^2} H_1^{(1)}(2i\mu r).$$

Die hier auftretende Hankel'sche Funktion hat folgendes asymptotische Verhalten:

$$H_1^{(1)}(2i\mu r) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi\mu r} + \dots & \text{für } r \ll \mu^{-1}, \\ -\frac{e^{-2\mu r}}{\sqrt{\pi\mu r}} + \dots & \text{für } r \gg \mu^{-1}. \end{cases}$$

$U_2(r)$  entspricht einer anziehenden Kraft, die eine „Reichweite“ der Größenordnung  $\mu^{-1}$  besitzt. Die Formel (15) stimmt überein mit der Formel (30) der früheren Arbeit (I)<sup>1)</sup>. Im Grenzfalle „schwacher Kopplung“, d. h. für  $\lambda \ll 4\pi A^{-1}$ , wird

$$U_2(r) \approx \lambda^2 \cdot \frac{\hbar\mu}{32\pi^2} \cdot \frac{1}{r^2} H_1^{(1)}(2i\mu r),$$

<sup>1)</sup> Zu beachten ist die etwas andere Bedeutung von  $\lambda$  und  $A$ : Der Parameter  $\lambda$  der gegenwärtigen Arbeit wurde in I mit  $\lambda'$  bezeichnet und gleich  $\lambda \cdot (2\pi)^3$  gesetzt. Ferner wurde in I das Impulsspektrum „scharf“ abgeschnitten:

$$g_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathbf{k}| < A, \\ 0 & \text{für } |\mathbf{k}| > A, \end{cases}$$

während hier die Abschneidevorschrift (11) verwendet wurde. — Die in I, S. 290 und im Anhang erwähnten schwachen Kräfte grosser Reichweite sind offenbar durch die scharfe Abschneidung bedingt. Für den Hauptterm (15) dagegen ist die Wahl der Gewichtsfunktion  $g$  ohne Bedeutung.

in Übereinstimmung mit der störungstheoretischen Rechnung (zweite Näherung; vgl. I, Anhang). Bei stärkerer Kopplung ( $\lambda \gtrsim 4 \pi A^{-1}$ ) liefert die exakte Rechnung die gleiche  $r$ -Abhängigkeit des Potentials wie die Störungsmethode (für  $r \gg A^{-1}$ ), aber für den konstanten Faktor ergibt sich ein kleinerer Wert. Lässt man den Abschneide-Impuls  $A$  gegen  $\infty$  gehen, so verschwindet das Potential  $U$  (für  $r \neq 0$ )<sup>1)</sup>.

Für Protonabstände  $r \sim A^{-1}$  lässt sich die Formel (13) kaum vereinfachen. Im Grenzfall  $r \ll A^{-1}$  dagegen ist das Ergebnis wieder einfach, da in  $H'$

$$e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \approx 1$$

gesetzt werden kann. In dieser Näherung erhält man dasselbe Eigenwertproblem wie bei Anwesenheit nur *eines* Protons, wobei lediglich  $\lambda$  durch  $2\lambda$  ersetzt ist. Es ist also

$$E_2(r, \lambda) \approx E_1(2\lambda) \quad \text{für } r \ll A^{-1};$$

folglich

$$U_2(r) \approx E_1(2\lambda) - 2E_1(\lambda) \quad \text{für } r \ll A^{-1}.$$

### 3. Protonen-Gitter.

Der Periodizitätskubus  $V = L^3$  enthalte  $Z = N^3$  Protonen in kubischer Gitteranordnung, d. h. die Protonenkoordinaten  $\mathbf{x}_{si}$  seien ganze Vielfache der Gitterkonstanten  $a = L/N$ . Die in der Säkulardeterminante (1) auftretende Summe

$$\sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_s}$$

ist dann nur von Null verschieden, wenn  $\mathbf{k}' - \mathbf{k}$  ein Vektor des reziproken Gitters ist. Bezeichnen wir diese Vektoren mit  $\mathbf{b}_h$  ( $b_{hi} = \frac{2\pi}{a} \cdot h_i$ ), so wird also

$$\frac{1}{V} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_s} = \begin{cases} a^{-3}, & \text{wenn } \mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{b}_h \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (16)$$

In jeder Zelle des reziproken Gitters (Volumen  $(2\pi/a)^3$ ) liegen  $(L/a)^3 = Z$  Punkte des  $\mathbf{k}$ -Gitters; die Wechselwirkung  $H'$  koppelt nur solche  $\mathbf{k}$ -Punkte miteinander, die in verschiedenen Zellen des reziproken Gitters an äquivalenten Stellen liegen. Infolgedessen

<sup>1)</sup> Wie in I, § 9 bemerkt wurde, verschwindet im Limes  $A \rightarrow \infty$  auch die Streuung der Feldpartikeln an einem Proton (auf Grund des gleichen Wechselwirkungsansatzes  $H'$ ).

zerfällt die Säkulardeterminante (1) in ein Produkt von  $Z$  Determinanten der Form

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \text{Det} \left| (\Omega^2 - \omega_{\mathbf{k}+b_h}^2) \delta_{hh'} - \frac{\lambda}{a^3} g_{\mathbf{k}+b_h}^* g_{\mathbf{k}+b_{h'}} \right|.$$

Es wird also

$$\log \Delta = \sum_{[\mathbf{k}]} \log \Delta_{\mathbf{k}},$$

wo die Summe nur über die  $\mathbf{k}$ -Punkte innerhalb *einer* Zelle des reziproken Gitters zu erstrecken ist. Jede einzelne Determinante  $\Delta_{\mathbf{k}}$  ist von derselben Struktur wie die oben behandelte Determinante  $\Delta$  beim Problem eines einzelnen Protons; daher erhält man für die Funktion  $\varphi(\zeta)$  (2) (vgl. (4)):

$$\left. \begin{aligned} \log \varphi(\zeta) &= \sum_{[\mathbf{k}]} \log \varphi_{[\mathbf{k}]}(\zeta), \\ \text{wo } \varphi_{[\mathbf{k}]}(\zeta) &= 1 - \frac{\lambda}{a^3} \sum_h \frac{|g_{\mathbf{k}+b_h}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}+b_h}^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Nach (16) kann man hierfür auch schreiben:

$$\varphi_{[\mathbf{k}]}(\zeta) = 1 - \frac{\lambda}{V} \sum_{s=1}^Z e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}_s} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i \mathbf{k}' \mathbf{x}_s} \frac{|g_{\mathbf{k}'}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}'}^2}$$

(dabei läuft die  $\mathbf{k}'$ -Summe wieder über den *ganzen*  $\mathbf{k}'$ -Raum). In der Summe über die Gitterpunkte  $s$  spalten wir den Term „ $s=1$ “ ab, der dem Proton im Koordinatenursprung entspricht ( $\mathbf{x}_1 = 0$ ); durch Vergleich mit (4) folgt

$$\varphi_{[\mathbf{k}]}(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - \frac{\lambda}{V} \sum_{s=2}^Z e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}_s} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i \mathbf{k}' \mathbf{x}_s} \frac{|g_{\mathbf{k}'}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}'}^2}$$

(in dieser  $s$ -Summe fehlt also der Term  $s=1$ ). Wir schreiben hierfür abkürzend:

$$\varphi_{[\mathbf{k}]}(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - \sum_{s=2}^Z e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}_s} \cdot \chi(\mathbf{x}_s, \zeta), \quad (18)$$

wo  $\chi$  die folgende Bedeutung hat:

$$\chi(\mathbf{x}, \zeta) = \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2}. \quad (19)$$

Im Limes  $V = \infty$  (d.h.  $Z = \infty$ ) wird  $\chi(\mathbf{x}, \zeta)$  mit der durch (9) definierten Funktion  $\chi(|\mathbf{x}|, \zeta)$  identisch. Setzt man (18) in (17) und (3) ein, so kommt für  $E$ :

$$E_Z = -\frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \sum_{[\mathbf{k}]} \log \left\{ \varphi_1(\zeta) - \sum_{s=2}^Z e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}_s} \chi(\mathbf{x}_s, \zeta) \right\}. \quad (20)$$

$E_Z$  gibt für das unendliche Kristallgitter den Energieinhalt des Bereichs  $V$  an, d.h.  $E_Z/V$  ist die Dichte der Volumenergie des Kristalls.

Wir wollen untersuchen, wie  $E_Z$  von der Gitterkonstanten  $a$  abhängt. Dabei wollen wir das Periodizitätsvolumen  $V$  proportional zu  $a^3$  variieren lassen, so dass  $Z$ , die Anzahl der Protonen in  $V$ , konstant bleibt. Im Limes  $a \rightarrow \infty$  ( $|\mathfrak{x}_s| \rightarrow \infty$  für  $s \neq 1$ ) verschwindet  $\chi(\mathfrak{x}_s, \zeta)$  (und zwar quasi-exponentiell für nicht-reelle  $\zeta$ , vgl. (12)); nach (20) wird also (da die Summe über die  $\mathfrak{k}$ -Punkte in einer Zelle des reziproken Gitters  $Z$  Terme enthält):

$$E_Z(\infty) = Z \cdot E_1.$$

Mit zunehmender Gitterkonstante strebt also die Volumenergie gegen die Summe der Selbstenergien der einzelnen Protonen. Für endliches  $a$  wird

$$U_Z(a) = E_Z(a) - E_Z(\infty) = -\frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \sum_{[\mathfrak{k}]} \log \left\{ 1 - \sum_{s=2}^Z e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{x}_s} \frac{\chi(\mathfrak{x}_s, \zeta)}{\varphi_1(\zeta)} \right\}. \quad (21)$$

$U_Z$  stellt die potentielle Energie der Kernkräfte pro Volumen  $V$  dar.

Sei  $a$  zunächst so gross, dass der Logarithmus in (21) nach Potenzen von  $\chi/\varphi_1$  entwickelt werden kann. Der lineare Term dieser Entwicklung gibt keinen Beitrag zu  $U_Z$ , da

$$\sum_{[\mathfrak{k}]} e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{x}_s} = 0 \quad \text{für } \mathfrak{x}_s \neq 0 \quad (s = 2 \text{ bis } Z).$$

Im quadratischen Term steht der Faktor

$$\sum_{[\mathfrak{k}]} e^{-i\mathfrak{k}(\mathfrak{x}_s + \mathfrak{x}_{s'})} = \begin{cases} Z & \text{für } \mathfrak{x}_s + \mathfrak{x}_{s'} = 0 \pmod{L}^1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der grösste Term der Entwicklung lautet also:

$$U_Z = \frac{Z}{2} \sum_{s=2}^Z \frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \frac{\chi(\mathfrak{x}_s, \zeta) \chi(-\mathfrak{x}_s, \zeta)}{[\varphi_1(\zeta)]^2}.$$

Lassen wir nun  $Z$  und damit  $V = Za^3$  gegen  $\infty$  gehen, so geht  $\chi(\mathfrak{x}_s, \zeta)$ , wie oben bemerkt wurde, in die durch (9) definierte Funktion  $\chi(|\mathfrak{x}_s|, \zeta)$  über, und damit wird

$$U_Z = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} \frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \left[ \frac{\chi(|\mathfrak{x}_s|, \zeta)}{\varphi_1(\zeta)} \right]^2.$$

<sup>1)</sup> „ $\mathfrak{x} = 0 \pmod{L}$ “ soll heissen: die Komponenten von  $\mathfrak{x}$  sind ganze Vielfache von  $L = V^{1/3}$ .

Andererseits erhielten wir aber für das Potential der Zweikörperkräfte in der gleichen Näherung ( $r \gg A^{-1}$ ; vgl. (10) mit entwickeltem Logarithmus):

$$U_2(r) = \frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \left[ \frac{\chi(r, \zeta)}{\varphi_1(\zeta)} \right]^2;$$

d. h. es gilt asymptotisch für grosse  $Z$ :

$$U_Z = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} U_2(|\mathfrak{x}_s|).$$

In dieser Näherung ist also  $U_Z$  gleich der potentiellen Energie der Zweikörperkräfte aller Paare pro Volumen  $V$ .

Bei weiterer Entwicklung des Logarithmus in (21) treten Terme höherer Ordnung in  $\chi/\varphi_1$  auf, die Mehrkörperkräften entsprechen. Beispielsweise enthält  $U_Z$  die folgenden Terme dritter Ordnung:

$$\frac{Z}{3} \sum \frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \frac{\chi(\mathfrak{x}_s, \zeta) \chi(\mathfrak{x}_{s'}, \zeta) \chi(\mathfrak{x}_{s''}, \zeta)}{[\varphi_1(\zeta)]^3},$$

wo die Summe über alle nicht-verschwindenden Gittervektoren  $\mathfrak{x}_s, \mathfrak{x}_{s'}, \mathfrak{x}_{s''}$  zu erstrecken ist, für die

$$\mathfrak{x}_s + \mathfrak{x}_{s'} + \mathfrak{x}_{s''} = 0 \pmod{L}^1$$

ist. Analog ist der Bau der Terme höherer Ordnung. Die so erhaltene Entwicklung von  $U_Z$  nach  $n$ -Körperkräften hat also folgendes Aussehen:

$$U_Z = Z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{s_1>1} \sum_{s_2>1} \cdots \sum_{s_n>1} \delta_{s_1 s_2 \cdots s_n} U_n(\mathfrak{x}_{s_1}, \mathfrak{x}_{s_2}, \dots, \mathfrak{x}_{s_n}) \right\} \quad (22)$$

wo  $\delta_{s_1 s_2 \cdots s_n} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathfrak{x}_{s_1} + \mathfrak{x}_{s_2} + \cdots + \mathfrak{x}_{s_n} = 0 \pmod{L}^1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Ist die Gitterkonstante  $a$  gross gegen die Abschneidelänge  $A^{-1}$ , so kann man die  $n$ -Körperpotentiale  $U_n$  ebenso abschätzen, wie dies oben speziell für  $U_2$  geschah (vgl. die Formeln (11) bis (15)). Man findet:

$$U_n(\mathfrak{x}_{s_1}, \mathfrak{x}_{s_2}, \dots, \mathfrak{x}_{s_n}) \cong (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \hbar \mu \frac{1}{\left( \frac{4\pi}{\lambda} + A \right)^n} \cdot \left. \begin{aligned} & \cdot \frac{1}{|\mathfrak{x}_{s_1}| |\mathfrak{x}_{s_2}| \cdots |\mathfrak{x}_{s_n}|} H_1^{(1)}(i\mu \{|\mathfrak{x}_{s_1}| + |\mathfrak{x}_{s_2}| + \cdots + |\mathfrak{x}_{s_n}|\}) \\ & \quad (\text{für } a \gg A^{-1}, Z \rightarrow \infty). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

<sup>1)</sup> Vgl. die letzte Fussnote.

Ein Term  $U_n(\mathfrak{x}_{s_1}, \dots, \mathfrak{x}_{s_n})$  ist mindestens um einen Faktor der Ordnung  $(Aa)^{-1}$  kleiner als  $U_{n-1}(\mathfrak{x}_{s_1}, \dots, \mathfrak{x}_{s_{n-1}})$ ; andererseits ist aber die Anzahl der  $n$ -Körper-Terme in der Summe (22) grösser als diejenige der  $(n-1)$ -Körper-Terme. Falls  $a$  nicht nur gross gegen  $A^{-1}$ , sondern auch gross gegen

$$\mu^{-2/3} \left( \frac{4\pi}{\lambda} + A \right)^{-1/3}$$

ist, so konvergiert die  $n$ -Summe (22) rasch, d. h. die Zweikörperkräfte überwiegen stark.

Für den anderen Grenzfall,  $a \rightarrow 0$ , behaupten wir, dass  $E_Z(0)$  verschwindet, d. h. dass für sehr kleine  $a$ -Werte gilt:

$$U_Z(a) \simeq -E_Z(\infty) = -ZE_1 \quad (\text{für } a \rightarrow 0, Z \rightarrow \infty). \quad (24)$$

Bei der Bindung der Protonen in einem dicht gepackten Kristall wird also gerade deren Selbstenergie frei.

Zum Beweise gehen wir auf die Formel (17) zurück. Um zu einer einfachen Abschätzung von  $E_Z$  zu gelangen, wählen wir die Gewichtsfunktion:

$$g_{\mathfrak{k}} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } |\mathfrak{k}| < B, \\ 0, & \text{wenn } |\mathfrak{k}| > B \end{cases} \quad (25)$$

( $B \sim A$ ), d.h. wir schneiden das Impulsspektrum scharf ab. (Man überlegt sich leicht, dass das Ergebnis von der Art der Abschneidung nicht wesentlich abhängt.) Es sei daran erinnert, dass in (17) nur die  $\mathfrak{k}$ -Punkte innerhalb *einer* Zelle des reziproken Gitters gemeint sind; für diese Zelle, die bisher beliebig wählbar war, nehmen wir jetzt speziell die den Ursprung enthaltende Zelle:

$$-\frac{\pi}{a} \leqq \mathfrak{k}_i < \frac{\pi}{a}.$$

Nun sei  $B < \pi/a$  angenommen (also  $a \lesssim A^{-1}$ ); dann sind in (17) nach (25) alle  $g_{\mathfrak{k}+b_h} = 0$  für  $b_h \neq 0$ , d. h. es bleibt in der  $\sum_h$  nur (höchstens) *ein* Summenterm stehen:

$$\varphi_{[\mathfrak{k}]}(\zeta) = 1 - \frac{\lambda}{a^3} \frac{|g_{\mathfrak{k}}|^2}{\zeta - \omega_{\mathfrak{k}}^2}.$$

Diese Funktion von  $\zeta$  hat (bei festem  $\mathfrak{k}$ ) nur *eine* Nullstelle:

$$\zeta = \omega_{\mathfrak{k}}^2 + \frac{\lambda |g_{\mathfrak{k}}|^2}{a^3} \equiv \Omega_{\mathfrak{k}}^2.$$

Die Energie  $E$  wird hiermit nach (3) und (17):

$$E_Z(a) = \hbar \sum_{[f]} (\Omega_f - \omega_f) = Z \cdot \frac{\hbar a^3}{2\pi^2} \int_0^B dk \cdot k^2 \left\{ \sqrt{\omega_f^2 + \frac{\lambda}{a^3}} - \omega_f \right\} \quad (26)$$

Für  $a \ll \lambda^{1/3} (\mu^2 + B^2)^{-1/3}$  wird hieraus:

$$E_Z(a) \approx Z \cdot \frac{1}{6\pi^2} \hbar B^3 \sqrt{\lambda a^3}, \quad (27)$$

und dies geht mit abnehmendem  $a$  gegen Null, wie behauptet wurde. Wählt man etwa  $\lambda \sim B^{-1} \sim A^{-1}$  und  $\mu \lesssim A$ , so wird nach (27)  $E_Z(a) \ll Z \cdot \hbar A$  für  $a \ll A^{-1}$ , während nach (8)  $E_1 \sim \hbar A$  ist; also:

$$E_Z(a) \ll Z E_1, \quad U_Z(a) \approx -Z E_1 \text{ für } a \ll A^{-1}.$$

Die obigen Rechnungen lassen sich natürlich ebenso leicht für den nicht-kubischen Kristall ausführen. Auch die Übertragung in die Elektronpaartheorie (Feldteilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$ ) dürfte keine Schwierigkeiten machen.

Es erhebt sich nun die Frage, wie weit man hoffen darf, eine solche Paartheorie zur Erklärung der wirklichen Kernkräfte heranziehen zu können. Nach den obigen Ergebnissen für die skalare Paartheorie zu urteilen, scheint diese Möglichkeit zu bestehen, wenn man die Länge, die man gewöhnlich als die *Reichweite der Kernkräfte* interpretiert und die für den *Abstand benachbarter Kernteilchen* massgebend ist, als im wesentlichen *durch die Abschneide-länge  $A^{-1}$  bestimmt* betrachtet. Denn diese trennt ja die  $a$ -Gebiete voneinander, in denen nach der Theorie die Volumenergie qualitativ durch (22), (23) bzw. durch (24) gegeben ist; im erstenen Falle ( $a \gg A^{-1}$ ) handelt es sich um Zwei- und Mehrkörperkräfte ohne Sättigungscharakter, die mit wachsendem  $a$  stark abnehmen, während andererseits für kleine  $a$ -Werte nach (24) eine Absättigung eintritt, wobei die Bindungsenergie pro Kernteilchen den Maximalwert  $E_1$  erreicht. Nimmt man an, dass in einem realen Kern die Abhängigkeit der potentiellen Energie von  $a$  eine ähnliche ist, wenn unter  $a$  der mittlere Abstand benachbarter Kernpartikeln verstanden wird, und dass die kinetische Energie wie üblich aus einem Fermi-Dirac-Gas-Modell abgeschätzt werden darf<sup>1)</sup>, so ist zu erwarten, dass sich im Grundzustand des Kerns ein Wert von  $a$  einstellt, der größenordnungsmässig von  $A^{-1}$  nicht

<sup>1)</sup> Vgl. etwa BETHE und BACHER, Rev. of Mod. Phys. 8, 82, 1936, § 25.

sehr verschieden sein kann, so dass wir mit Rücksicht auf die Erfahrung  $A^{-1} \sim 10^{-13}$  cm anzusetzen haben. Dabei hat die potentielle Energie pro Kernteilchen die Größenordnung —  $E_1$ ; wählt man etwa  $\lambda \sim A^{-1} (\lesssim \mu^{-1})$ , so wird nach (8)  $E_1 \sim \hbar A$ , also  $E_1 \sim 100$  MeV, in Übereinstimmung mit den üblichen Ansätzen für das statistische Kernmodell.

Im Gegensatz zum Abschneideimpuls würde der *Masse*  $\hbar\mu$  der Feldteilchen in einer solchen Theorie nur eine sekundäre Bedeutung zukommen. Beispielsweise könnte man  $\hbar\mu$  sehr klein, etwa von der Größenordnung der Elektronenmasse annehmen, ohne dass dies die Theorie der schweren Kerne qualitativ wesentlich ändern würde. Zwar ist die „Reichweite“ der Zwei- und Mehrkörperkräfte nach Obigem durch  $\mu^{-1}$  bestimmt, insofern als z. B.  $U_2(r)$  für  $r \ll \mu^{-1}$  wie  $r^{-3}$  variiert, während für  $r \gtrsim \mu^{-1}$  ein exponentieller Abfall einsetzt, und dies ist natürlich für Probleme wie die Proton-Proton-Streuung von Wichtigkeit; aber nichtsdestoweniger würde sich in schweren Kernen der Abstand benachbarter Teilchen auf den ungefähren Wert  $A^{-1} (\ll \mu^{-1})$  einstellen. Im Gegensatz zur Yukawa'schen Mesontheorie besteht also in der Paartheorie *keine Beziehung zwischen den Kernradien und der Masse der Feldteilchen*; jedenfalls ergibt sich eine solche Beziehung nicht zwangsläufig oder auch nur in zwangloser Weise, und man hat also von diesem Standpunkt aus keinen Grund, einer „Mesonpaartheorie“ vor einer „Elektronpaartheorie“ den Vorzug zu geben. Zwischen diesen Varianten der Paartheorie wird man also nur auf Grund anderweitiger Daten — z. B. aus Streuversuchen — entscheiden können.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.