

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 15 (1942)  
**Heft:** I

**Artikel:** Über den Begriff des Atoms. I  
**Autor:** Scherrer, Willy  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111292>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über den Begriff des Atoms. I

von Willy Scherrer.  
(2. XII. 1941.)

## Einleitung.

In dieser Arbeit soll eine Reihe von Vorschlägen zur Atomtheorie, die ich seit 1933 mit Unterbrechungen einzeln publiziert habe, zu einem einheitlichen Ganzen gestaltet werden.

Jeder einzelne dieser Vorschläge hat seinerzeit nicht zu dem gewünschten Ziele geführt, und zwar — wie ich jetzt vermute — vor allem deshalb, weil die Ansätze für die Wechselwirkung ungeeignet waren. Ich kann daher dem Leser nicht zumuten, sich an Hand meiner früheren Publikationen zu informieren. Hingegen werde ich mir gestatten, jeweils diejenige Publikation zu zitieren, in der ein jetzt verwerteter Gesichtspunkt zum erstenmal ausgesprochen wurde.

Die Grundidee, nämlich die Forderung eines relativistisch invarianten vierdimensionalen Weltatoms, ist sich immer gleich geblieben.

Über die Dringlichkeit der Erforschung der wellenmechanischen Atomtheorie brauche ich weiter kein Wort zu verlieren<sup>1)</sup>.

Der vorliegende I. Teil enthält die Grundlagen der vorzuschlagenden Theorie. In weiteren Fortsetzungen sollen die sich ergebenden Einzelprobleme in Angriff genommen werden.

## § 1. Grundsätzliches.

Die Grundannahme der speziellen Relativitätstheorie besteht darin, dass die Zeit  $t$  kein Parameter, sondern eine Koordinate sei, die mit den Raumkoordinaten  $x_1, x_2, x_3$  durch den pseudo-euklidischen „Pythagoras“

$$r^2 = c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (1)$$

zu einem vierdimensionalen Kontinuum verschmolzen werden müsse. Es muss daher als eine erstaunliche Tatsache bezeichnet

<sup>1)</sup> Vgl. v. WEIZSÄCKER: „Die Physik der Gegenwart und das physikalische Weltbild“. Naturw. **29**, S. 185 (1941).

werden, dass die Fundamentalinvariante (1) in der Relativitätstheorie immer im Hintergrund geblieben ist<sup>1)</sup>.

Ein dauernd existierender Partikel muss in der relativistischen Geometrie als Weltlinie interpretiert werden und entspricht somit auf keinen Fall dem logischen Begriff des Atoms — des Unteilbaren. Das Unteilbare der relativistischen Welt ist der Weltpunkt<sup>2)</sup>. Eine vierdimensionale physikalische Metrik, die nicht den materiellen Weltpunkt als notwendiges Korrelat zur totalen Welt besitzt, ist eine Scheinmetrik.

Wir erheben daher die Forderung, die Relativitätstheorie müsse auf Biegen oder Brechen beansprucht werden, damit sie der Grundrelation zwischen totalem Zeitraum und Weltpunkt gerecht werde.

Ich beginne mit einigen allgemeinen Bemerkungen über den Begriff des Atoms. Das Atom — das Unteilbare — ist eine Grenze, die der Geist sich selber setzen muss, wenn er nicht den Halt verlieren will. Das Atom in der Geometrie ist der Punkt. In der Geometrie hat man an diesem Begriff nie ernstlich Anstoss genommen, wohl vor allem deshalb, weil man ihn als rein geistige Setzung ansah, zu deren Vollzug wir wohl die nötige Freiheit besitzen.

Ganz anders scheinen die Dinge in der Wirklichkeit zu liegen. Etwas in uns sträubt sich dagegen, einem punktförmigen Gebilde Realität zuzubilligen. Es liegt aber keine Notwendigkeit dafür vor, einen materiellen Punkt als ein Nichts anzusehen. Rein logisch betrachtet, ergibt sich einfach, dass alle eventuell neben der Ortsbestimmtheit vorhandenen weiteren Eigenschaften nicht durch den Begriff der Ausdehnung erfasst werden können. Hingegen ist es sehr wohl denkbar, dass diese weiteren Eigenschaften noch durch den Begriff der Zahl als Intensität erfassbar sind.

Faktisch ist die Physik nie anders verfahren! Am deutlichsten ist dies bei der klassischen Kontinuumsphysik zu erkennen. Sie verfügt über den leeren Raum und füllt ihn aus mit Materie als Intensität. Undurchsichtiger werden die Verhältnisse in der kinetischen Theorie der Materie. Da diese Theorie zweifellos in der historischen Entwicklung einen Fortschritt darstellt, liegt hier ein Paradoxon vor. Bei näherem Zusehen erkennt man aber, dass auch hier der Begriff der Intensität zu finden ist. Man muss ja unterscheiden zwischen unbesetzten (leeren) und besetzten

---

<sup>1)</sup> „Relativistische Übertragung des Coulomb'schen Gesetzes“. Mitteilungen der Naturf. Gesellschaft Bern, S. IX, 1933.

<sup>2)</sup> „Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips“ I. Helv. Phys. Acta, X, 2, S. 157, 1937.

Stellen. Die klassische Atomistik verfügt also über die rudimentären Intensitäten 0 und 1.

Eine neue Phase erreicht das Atomproblem in der allgemeinen Relativitätstheorie mit der Forderung, die Metrik als physikalisches Agens zu interpretieren. Es entstand das Bedürfnis, den leeren Raum auszuschalten. Im Sinne unserer Erläuterung könnte man also sagen, die geometrischen Feldtheorien seien Versuche, mit der Intensität 1 auszukommen. Im folgenden werden wir sehen, dass die hier zu machenden Vorschläge darauf hinauslaufen werden, innerhalb der Metrik der speziellen Relativitätstheorie die Intensitäten 0, 1, 2, . . . n, . . . zu verwenden.

Man kann schliesslich die Frage aufwerfen, ob es im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie möglich sei — eventuell unter geeigneter Modifikation der gruppentheoretischen Ansätze, von HELMHOLTZ und LIE, — die Intensität 0 auszuschalten.

Der Scharfsinn, mit dem schon die alten Philosophen das Problem erfasst haben, verdient hervorgehoben zu werden. Sie erkannten klar, dass dem letzten Element keine Ausdehnung zugeschrieben werden darf. Wäre es ausgedehnt, so könnte man es wieder teilen. Im Gegensatz dazu behaupten namhafte Forscher aus neuerer Zeit, das Problem des Elektrons bestehe darin, die Kräfte herauszufinden, welche ein Auseinanderstieben seiner gleichgeladenen Teile verhindern! Dagegen ist zu sagen: entweder stellt sich der Autor das Elektron als ein Kontinuum vor und hat damit dieselbe Problematik wie im Makroskopischen oder er denkt an noch kleinere Partikel und dann beginnt eine Stufe tiefer dasselbe Spiel von neuem.

Eine letzte Bemerkung: Einen höchst differenzierten Atombegriff schuf LEIBNIZ mit der Idee der Monade. Die folgenden Ausführungen werden zeigen, dass in gewissem Sinne in der Relativitätstheorie ein Zwang besteht, der uns einer ähnlichen Begriffsbildung zutreibt.

Es wird sich herausstellen, dass die hier vorgeschlagenen Ansätze formal mathematisch sich fast noch enger an die klassische Dynamik anschliessen lassen als die jetzt üblichen. Inhaltlich bedeuten sie dagegen eine cinschneidende Modifikation der gewohnten Vorstellungen. Fast alles muss umgedeutet und neu berechnet werden. Über die mathematischen Ergebnisse dieser umfangreichen Arbeit, die wohl die Kräfte eines Einzelnen übersteigt, habe ich daher noch keinen Überblick. Meine Vorschläge sind also auch jetzt noch notgedrungen provisorisch. Hingegen glaube ich jetzt schon versichern zu dürfen, dass sich aus ihnen ein geometrisch durchsichtiges und daher wohl auch methodisch brauchbares Bild ergibt.

## § 2. Definitionen und Postulate.

Wir legen jetzt also den der Metrik (1) gehorchenden Zeitraum der speziellen Relativitätstheorie zugrunde. In Fällen, wo keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, werden wir ihn kurz auch Raum nennen und entsprechend von „räumlichen“ Eigenschaften reden.

Bei jeder Modifikation der Wellenmechanik stellt sich von neuem die Frage, ob der skalare Standpunkt ausreichend sei. Es lassen sich gute Gründe für ihn geltend machen<sup>1)</sup>. Wir werden also so lange skalare Wellenfunktionen benützen, als sich auf dem Boden der neuen Theorie keine zwingenden Gegengründe ergeben. Doch glaube ich, die Begriffe so gefasst zu haben, dass im Prinzip eine Ausdehnung auf mehrere Komponenten möglich sein sollte.

Nun wollen wir bei der Numerierung der aufzuzählenden Definitionen und Postulate folgende Unterscheidung treffen. Die „Grundhypotesen“, von denen ich hoffe, dass sie wenigstens im Rahmen dieser Theorie keiner Abänderung mehr bedürfen, sollen nur durch Zahlen bezeichnet werden. Die „Arbeitshypothesen“, deren Auswahl vor allem dem Zwecke der grösstmöglichen Einfachheit dienen soll, seien durch Zahlen mit angehängten Buchstaben bezeichnet.

Was die *Terminologie* betrifft, so wollen wir uns möglichst eng an die in der Wellenmechanik gebräuchliche anschliessen. Da nun der von uns postulierte Atombegriff sich im wesentlichen mit dem Begriff des *Lichtquants* deckt, wollen wir auch die Bezeichnung beibehalten und also von *Quanten* sprechen. Der Name *Elektron* dagegen soll verwendet werden für die jedem Quant auf Grund eines Trägheitspostulates zuzuordnende Weltlinie.

*Definition 1).* Ein Quant ist die einfachste materielle Wirkung, welche räumlich durch Angabe eines einzigen Weltpunktes festgelegt werden kann.

Eventuelle weitere Attribute (Quantenzahlen) sollen also später in einem besonderen Postulat zum Ausdruck kommen.

Nun wollen wir erläutern, wie man zu einem Trägheitspostulat gelangen kann. Wir wählen irgend einen Weltpunkt als Ursprung *o* eines Koordinatensystems und zerlegen den ganzen zugehörigen Zukunftskegel in lauter Zellen vom Volumen

$$\Delta \tau = \Delta(ct) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (2)$$

---

<sup>1)</sup> „Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips“ II. Helv. Phys. Acta, X, 5, S. 388, 1937.

Die Zerlegung könnte in zentrale symmetrischer und drehinvarianter Weise in den Kegel eingepasst werden, doch wollen wir uns dabei nicht aufhalten.

Die erhaltenen Zellen unterwerfen wir jetzt einer bestimmten Numerierung

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots \quad (3)$$

und denken uns eine nicht abbrechende Folge von virtuellen Experimenten, deren  $i^{\text{tes}}$  Element folgendermassen definiert sei:

Im Nullpunkt befindet sich ein Quantum  $Q_0$ . Dann wissen wir aus Erfahrung, dass es sicher Zellen (3) gibt, in denen wieder Quanten auftreten, die direkt oder indirekt Folgen von  $Q_0$  sind. Diese und nur diese zählen wir. Wir machen damit natürlich die Annahme, dass in einer Zelle nur endlich viele Quanten auftreten. Ihre Anzahl in der  $n^{\text{ten}}$  Zelle sei  $N_{in}$ . Wir erhalten so eine nicht-abbrechende Folge von nichtnegativen ganzen Besetzungszahlen.

$$N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{in}, \dots \quad (4)$$

In concreto stellt also die Serie (4) die Lebensgeschichte des Lichtquants  $Q_0$  von der Gegenwart bis in alle Zukunft dar.

Das Experiment kann daher de facto nicht wiederholt werden. Sofern aber über die von der Experimentalphysik bearbeiteten Weltgebiete genügende Homogenität besteht, kann man über viele verschiedene derartige Experimente Mittelwerte bilden und in diesem Sinne soll also die oben eingeführte Experimentserie interpretiert werden. Eine Gesetzmässigkeit existiert, falls die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ \Delta\tau \rightarrow 0}} \frac{\sum_{\lambda=1}^i N_{\lambda} n_{\Delta\tau}}{\sum_{\lambda=1}^i N_{\lambda} 1_{\Delta\tau}} = u^2(ct, x_1, x_2, x_3) \quad (5)$$

existieren.

Die rechte Seite von (5) ist eine *relative Wahrscheinlichkeitsdichte*, und die genaue Durchführung des Grenzübergangs denken wir uns so:

Wir wählen im Zukunftskegel einen *Beobachtungspunkt*  $(ct, x_1, x_2, x_3)$  und einen *Vergleichspunkt*  $(1, 0, 0, 0)$ . Dann wählen wir die Zellgrösse  $\Delta\tau$  und hierauf die Numerierung (3). Nun sind die Serien (4) bestimmt. Sofern man aber zu einer scharfen Ortsfunktion vordringen will, muss man sich überdies noch den Grenzübergang  $\Delta\tau \rightarrow 0$  hinzu denken. Bei jeder Änderung von  $\Delta\tau$  muss aber die Numerierung (3) neu gewählt, resp. ergänzt werden. Daher ist es nötig, auf der linken Seite von (5)  $\Delta\tau$  den Indices anzu-

hängen.  $n_{\Delta\tau}$  und  $1_{\Delta\tau}$  bedeuten die jeweiligen Nummern derjenigen  $\Delta\tau$ -Zellen, in denen Beobachtungspunkt und Vergleichspunkt liegen.

Nun formulieren wir

*Postulat 1). Befindet sich im Ursprung ein Quant  $Q_0$ , so existiert im Zukunftskegel eine eindeutige Wahrscheinlichkeitsamplitude  $u(ct, x_1, x_2, x_3)$ , die einer de Broglie'schen Wellengleichung*

$$\square u \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 u \quad (6)$$

genügt.

*Ist  $\mathfrak{G}$  ein Teilgebiet des Zukunftskegels, so liefert das Integral*

$$\int_{\mathfrak{G}} u^2 d(ct) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\mathfrak{G}} u^2 d\tau \quad (7)$$

*die relative Wahrscheinlichkeit dafür, dass in  $\mathfrak{G}$  ein Quant  $Q$  als Wirkung von  $Q_0$  anzutreffen ist.*

Nach diesem Postulat erhält also das Quant als weiteres Attribut eine Masse  $m$  oder präziser eine universelle Länge  $\frac{\hbar}{mc}$  zugeordnet, deren räumliche Auswirkung wohl vorhanden, aber unbestimmt ist.

Da das Postulat 1) das dauernde Auftreten von „Wirkungsquanten“ (Quanten als Wirkungen) verbürgen soll und wie die Lösung von (6) zeigt, auch tatsächlich verbürgt, besteht für das Integral (7) keine totale Normierbarkeit über den Zukunftskegel.

Als Quantenbedingung verlangen wir daher neben der Eindeutigkeit nur das

*Postulat 2). Das Integral (7)*

$$w_{\mathfrak{G}} = \int_{\mathfrak{G}} u^2 d\tau \quad (7)$$

*soll für jeden endlichen Teilbereich des Zukunftskegels existieren.*

Die Parameter der durch diese Forderung ausgewählten Lösungen von (6) sind also weitere Attribute (Quantenzahlen) mit räumlich unbestimmter Auswirkung.

Wir kehren nun wieder zu den Erläuterungen zurück, die uns zum Postulat 1) geführt haben. Wir stellen uns also vor, dass das zukünftige Geschehen, das durch ein Quant  $Q_0$  in  $o$  verursacht wird, geometrisch in einer unendlichen Menge von Weltpunkten zum Ausdruck kommt, die im Endlichen keine Häufungsstelle besitzt. Trotzdem kann man daraus nicht schliessen, dass es in dieser Menge einen  $o$  am nächsten gelegenen Weltpunkt gibt, denn die Menge der durch  $0 < r^2 < \varepsilon$  definierten Punkte

zieht sich wegen (1) bis ins Unendliche. Nun haben wir aber schon von direkten und indirekten Wirkungen gesprochen. Diese Ausdrucksweise ist also nur legitim, wenn wir weiter einführen das *Postulat 1a)*. Unter allen durch  $Q_0$  erzeugten Wirkungen existiert genau eine  $Q_0$  am nächsten gelegene  $Q_1$ , die wir als „direkte Wirkung“ von  $Q_0$  bezeichnen.

Die indirekten Wirkungen definieren wir nun durch Iteration und erhalten damit das

*Postulat 1b).* Die Gesamtheit aller durch  $Q_0$  verursachten Wirkungen entsteht aus  $Q_0$  durch Iteration des Prozesses der direkten Wirkung.

Genau so, wie wir nach den „Wirkungen“ von  $Q_0$  in der Zukunft fragen, können wir auch nach seinen „Ursachen“ in der Vergangenheit fragen. Selbstverständlich lassen wir unsere Postulate auch in dieser Richtung gelten. Dann ergibt sich in leicht verständlicher Abkürzung die

*Folgerung 1).* Die Gesamtheit aller Ursachen und Wirkungen eines Quantums  $Q_0$  bildet eine beidseitig unbegrenzte Kette von Weltpunkten, von denen je zwei aufeinanderfolgende durch einen zeitartigen Vektor verbunden werden können.

Es ist nicht schwer, auf Grund geometrischer Überlegungen (Ineinanderschachtelungen von Null-Kegeln) zu erkennen, dass die gewonnene Numerierung invarianten Charakter besitzt.

Auch für die Frage nach dem Auftreten der direkten Wirkung lässt sich eine Statistik ausdenken, die sogar wesentlich einfacher ist als die oben verwendete. Wiederum verschafft man sich eine nichtabbrechende Folge von „Lebensläufen“ und braucht jeweils nur diejenige Zelle zu notieren, wo die direkte Wirkung auftritt. An Stelle der Serie (4) tritt eine Serie, die nur an einem Platz eine 1 und sonst lauter Nullen besitzt. Der Index der 1-Stelle ist also eine eindeutige Funktion des Index der Serie

$$p = p(i)$$

Für die Zelle  $Z_n$  erhält man so nach  $i$  Experimenten eine absolute Wahrscheinlichkeit

$$w_{i,n} = \frac{1}{i} \sum_{\lambda=1}^i N_{\lambda n}$$

wobei offenbar gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_{i,n} = \frac{1}{i} \sum_{\lambda=1}^i N_{\lambda p(i)} = 1$$

Bei einem (5) entsprechenden Grenzübergang muss also eine normierbare Wahrscheinlichkeitsdichte resultieren. Ich weiss aber

nicht, ob schon zu (6) Lösungen existieren, die diese Interpretation wirklich zulassen.

Wir definieren daher mit Vorbehalt:

*Definition 1a). Ein Elektron ist die Gesamtheit aller Ursachen und Wirkungen eines Quantums.*

Zur vorläufigen Erläuterung dieser vielleicht seltsam anmutenden Definition bemerke ich, dass sich unter den vierdimensional zentraalsymmetrischen Lösungen von (6) sowohl Ruhlösungen mit der richtigen DE BROGLIE-Frequenz als auch gegen die Lichtgeschwindigkeit strebende Lösungen mit gegen Null abklingender Frequenz (Neutrino's?) finden.

Durch die vorausgegangenen Definitionen und Postulate haben wir den Begriff des Quantums und des Elektrons so weit geschildert, als es vorderhand für die Zwecke unserer Theorie nötig scheint. Das Einzelelektron erscheint als eine Einheit aus einer unendlichen, aber diskreten Serie von Lichtquanten<sup>1)</sup>.

Wir kommen damit zum Mehrelektronenproblem im kräftefreien Falle und legen für diesen Zweck zu Grunde das

*Postulat 3). Jedes Einzelelektron ist ein Individuum und muss daher durch eine individuelle Wellenfunktion beschrieben werden.*

Als Ergänzung fügen wir hinzu

*Postulat 3a). Alle Elektronen sind gleich, d.h. sie genügen derselben Wellengleichung (6).*

Wie man leicht sieht, ergibt sich die

*Folgerung 2): Zwei Elektronen  $E_1$  und  $E_2$  sind nicht identisch, wenn in der Vereinigungsmenge ihrer Quanten mindestens ein raumartiger Verbindungsvektor existiert<sup>2)</sup>.*

Es wird sich herausstellen, dass das Postulat 3) den stärksten Eingriff in die von der heutigen Physik verwendeten Prinzipien bedeutet. Zur Erläuterung diene folgende Überlegung. Sind  $Q_1$  und  $Q_2$  zwei Quanten mit raumartiger Distanz, so geben sie Anlass zu zwei verschiedenen Elektronen  $E_1$  und  $E_2$ . Sind  $K_1$  und  $K_2$  die zu  $Q_1$  und  $Q_2$  gehörigen Zukunftskegel, so ergibt sich eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich zwei den verschiedenen Elektronen angehörende Quanten in demselben Volumenelement  $\Delta\tau$  des Durchschnitts der beiden Kegel befinden. Dann aber wird die im Wesen des Atombegriffs liegende Antinomie wieder wirksam. Wir erinnern zu dem Zweck an die statistische Erläu-

<sup>1)</sup> „Versuche einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips“ III. Helv. Phys. Acta X, 6, S. 475, 1937.

<sup>2)</sup> Die Frage, ob es im andern Falle zweckmässig oder nötig ist, sie als identisch anzusehen, lassen wir noch offen.

terung vor der Aufstellung von Postulat 1). Wir machten dort die Annahme, dass innerhalb eines vorgegebenen Volumens nur endlich viele Quanten liegen sollen. Jetzt müssen wir uns weiter entscheiden, ob wir zulassen wollen, dass die in einem vorgegebenen Volumen  $\Delta\tau$  vorhandene Quantenzahl in dem Sinne unbeschränkt wachsen kann, dass immer neue Quanten *neben* die schon vorhandenen zu liegen kommen oder nicht. Im ersten Falle wäre wiederum ein Abgleiten in eine Kontinuumstheorie wohl unvermeidlich. Wenn wir also unserer Grundforderung nach einem Wirkungsatom in ungekünstelter Weise gerecht werden wollen, so haben wir das Postulat 3) zu ergänzen durch das

*Postulat 4). In einem endlichen Volumen des vierdimensionalen Zeitraums können nur endlich viele Wirkungsquanten nebeneinander liegen. Treten in diesem Volumen weitere Quanten auf, so müssen sie mit schon vorhandenen koinzidieren.*

Durch dieses Postulat wird natürlich die Frage nach der Existenz eines kleinsten von genau einem Quant auszufüllenden Volumens nahegelegt. Wir wollen aber keinen Versuch zu ihrer näheren Präzisierung unternehmen, bevor dazu ein zwingender Anlass vorliegt.

Der einschneidende Charakter des Postulats 4) dürfte ohne weiteres einleuchten. Seine Durchführbarkeit hängt in erster Linie von dem Ansatz für die Wechselwirkung ab. Dieser muss so gewählt werden, dass die sogenannte Kernkatastrophe von vorneherein ausgeschaltet wird<sup>1)</sup>). Ein hierzu geeigneter Vorschlag soll im nächsten Paragraphen gemacht werden.

Zum Schluss noch zwei besondere Hinweise.

1. Durch das Postulat 4) wird die in § 1 zu einfach formulierte Forderung nach einem punktförmigen Quantum korrigiert, denn was für die zu erwartenden Quanten gelten soll, muss natürlich schon dem Ausgangsquantum  $Q_0$  zugebilligt werden. Auf Schritt und Tritt zeigt uns also das Wirkungsquantum, dass wir in ihm die Leistungsgrenze des physikalischen Raumes erreicht haben. Man könnte also versuchen, hier von vornherein durch eine Neufundierung der Geometrie im Kleinen saubere Verhältnisse zu schaffen. Wir wollen aber diesen Weg nicht beschreiten, denn nur die Wechselwirkungsgleichungen können uns beim Vergleich ihrer Lösungen mit der Erfahrung die richtigen Fingerzeige geben.

---

<sup>1)</sup> „Ein Ansatz für die Wechselwirkung von Elementarteilchen“. Helv. Phys. Acta, XIV, 1, S. 82, 1941.

2. Das Quadrat in Gleichung (7) soll wörtlich interpretiert werden. Wir werden also so lange an der Forderung *reeller* Wellenfunktionen festhalten, als keine untragbaren Folgerungen auftreten. Vorerhand hab ich keine Schwierigkeit bemerkt, falls man sich des im nächsten Paragraphen vorzuschlagenden Wechselwirkungsansatzes bedient.

### § 3. Wechselwirkungsgleichungen.

Als Ausgangspunkt wählen wir die klassische Schrödinger-Gleichung im zeitfreien Falle. Dieselbe ergibt sich sehr befriedigend, wenn man in der Hamilton'schen Energiefunktion

$$H \left( x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (8)$$

die Substitution

$$S = \hbar \operatorname{Lg} \psi \quad (9)$$

ausführt und dann verlangt, dass das Integral

$$w = \int H \left( x, \frac{\hbar}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \psi^2 dx \quad (10)$$

unter der Nebenbedingung

$$\text{konst.} = \int \psi^2 dx \quad (11)$$

ein Extremum liefere.

Wenn man dieses Verfahren auf die relativistische Hamilton-Funktion

$$H \equiv \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \varphi_i \right)^2 \quad (12)$$

des Elektrons anwendet, so tritt scheinbar ein vollkommenes Versagen ein, denn das Coulombpotential wird gleichsam eliminiert. Die Rechnung ergibt, falls wir in diesem Falle wie üblich die Wellenfunktion mit  $u$  statt mit  $\psi$  bezeichnen

$$\square u - \left( A + \frac{e}{\hbar c} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \varphi_k \varphi_k \right) u = 0 \quad (13)$$

wo  $A$  einen Lagrange'schen Multiplikator darstellt, der für das Elektron und unter Beachtung der von uns bevorzugten zeitartigen Schreibweise aller Operatoren den Wert

$$A = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (14)$$

erhalten muss. Hinzu tritt noch die Lorentzkonvention

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = 0. \quad (15)$$

Aber auch ohne sie ist in (13) nach der üblichen Abspaltung eines reinen Zeitfaktors das Coulombpotential schon verschwunden.

Die geschilderte Schwierigkeit wird im Falle des Einelektronenproblems durch direkte Operatorenenumwandlung auf eine im Grunde genommen wenig befriedigende Weise zum grössten Teil behoben. Wir setzen das Resultat in einer für den Vergleich mit (13) geeigneten Form ebenfalls her.

$$\square u - \left( A + \frac{2 \sqrt{-1} e}{\hbar c} \varphi_k \frac{\partial \operatorname{Lg} u}{\partial x_k} + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \varphi_k \varphi_k \right) u = 0. \quad (16)$$

Für das Mehrelektronenproblem versagt auch die Operatorenmethode. Beim Versuch, sich durch Analogien aus der relativistischen Punktdynamik leiten zu lassen, machen sich die Teilchenabstände in fatalster Weise geltend. Dasselbe gilt — trotz interessanter Symptome<sup>1)</sup> — für einen Ansatz mit einem mehrdimensionalen Konfigurationsraum.

Schliesslich noch ein Wort zum retardierten Potential. Es erzeugt vermöge seiner Asymmetrie ganz neue Schwierigkeiten<sup>2)</sup>. Abgesehen davon habe ich den Eindruck, es besitze keine selbständige physikalische Bedeutung. Geometrisch betrachtet, bestreicht es nämlich nur drei Dimensionen, und physikalisch betrachtet, muss ja die Energiebilanz zwischen Sender und Lichtquant geregelt sein, bevor das Lichtquant den Empfänger erreicht hat.

Das sind in aller Kürze die Gründe, die mich nun veranlassen, auf die explizite Einführung irgendwelcher retardierter oder unretardierter Abstände vollständig zu verzichten.

Einen Fingerzeig, wie man unter diesen Umständen vorzugehen hat, erhält man durch die in der Wellenmechanik übliche Berechnung der Ausstrahlung. Da werden ja die Potentiale aus retardierten Integralen über die Wellenfunktion des störenden Teilchens gewonnen. Nun ist aber diese Wellenfunktion ja ohnehin schon virtuell über den ganzen Raum verbreitet!

Bei unserer vierdimensionalen Auffassung werden diese Verhältnisse geometrisch vollkommen durchsichtig. Liegt das gestörte

<sup>1)</sup> „Ein dynamisches Modell für schwere Teilchen“. Helv. Phys. Acta XII, 5, S. 249, 1939.

<sup>2)</sup> „Über retardierte Wechselwirkung“. Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft, S. 13, 1939.

Teilchen nicht im Zukunftskegel des störenden Teilchens, so wird es überhaupt nicht erfasst. Liegt es aber in diesem Kegel, so ist an seiner Weltstelle schon eine wohlbestimmte Wahrscheinlichkeitsdichte des störenden Teilchens gegeben. Hier noch eine Überlagerung einer Feldkraftwelle vorzunehmen, ist wohl sinnlos. Vielmehr bietet sich ganz von selbst der Gedanke, die auf das gestörte Teilchen wirkende Kraft direkt aus der Wahrscheinlichkeitsdichte des störenden Teilchens an der Stelle des gestörten Teilchens abzuleiten.

Bezeichnen wir also die Wellenfunktion des störenden Teilchens mit  $v$ , so haben wir in (13) an Stelle von  $\varphi_k$  einen Vektor zu setzen, der aus  $v$  abgeleitet ist. Da aber  $v^2$  nach Postulat 1) eine relative Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt, so muss dieser Vektor invariant sein gegenüber Multiplikation von  $v$  mit einer Konstanten.

Die naheliegendste Bildung dieser Art ist

$$\varphi_i = k e \frac{\partial \operatorname{Lg} v}{\partial x_i} \quad (17)$$

wo  $k$  einen reinen Zahlenfaktor darstellt. Aus der so aus (13) abgeleiteten Gleichung für  $u$  ergibt sich nach Postulat 3a) durch Vertauschung von  $u$  und  $v$  die entsprechende Gleichung für  $v$ .

Bezeichnen wir also mit  $\varepsilon$  das  $k$ -fache der Feinstrukturkonstanten  $\frac{e^2}{\hbar c}$ , so erhalten wir folgendes Gleichungssystem<sup>1)</sup> für die Wechselwirkung zweier Elektronen  $u$  und  $v$ :

$$\varepsilon = k \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \square u - [\Lambda + \varepsilon \square \operatorname{Lg} v + \varepsilon^2 (\operatorname{grad} \operatorname{Lg} v)^2] u &= 0 \\ \square v - [\Lambda + \varepsilon \square \operatorname{Lg} u + \varepsilon^2 (\operatorname{grad} \operatorname{Lg} u)^2] v &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Die naheliegendste Ausdehnung dieses Systems auf den Fall von  $n$  Elektronen mit den Wellenfunktionen

$$u_1, u_2, \dots, u_n.$$

ist wohl folgende:

Wir legen die erste der Gleichungen (19) zugrunde und setzen darin

$$u = u_i$$

---

<sup>1)</sup> „Bemerkungen zu meiner Arbeit usw.“, Helv. Phys. Acta XIV, 2, S. 130, 1941.

und im Sinne der Wahrscheinlichkeit des sowohl als auch

$$v = \prod_{k=1}^n u_k^{(i)}$$

Der eingeklammerte Index  $i$  soll also andeuten, dass der Faktor  $u_i$  ausgelassen wird. Im selben Sinne werden wir das Zeichen  $\Sigma^{(i)}$  für Summen verwenden. Wir erhalten also

$$\square u_i = \left\{ A + \varepsilon \square \sum_{k=1}^n \lg u_k + \varepsilon^2 \left( \operatorname{grad} \sum_{k=1}^n \lg u_k \right)^2 \right\} u_i \quad (20)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

als vollständiges System von Gleichungen für die Wechselwirkung von  $n$  Elektronen.

Zu diesen Gleichungen sind nun verschiedene Bemerkungen am Platze.

1) In *formalmathematischer Beziehung* empfiehlt es sich, die durch das System (20) gegebenen Probleme aufsteigend vom Speziellen zum Allgemeinen in drei Kategorien zu ordnen:

a) *Spezielles Koinzidenzproblem (Einkörperprobleme):*

Die  $n$  Elektronen koinzidieren in einem Weltpunkt und befinden sich überdies im selben Zustand, d. h. es gilt

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n$$

b) *Allgemeines Koinzidenzproblem (spezielle Mehrkörperprobleme):*

Die  $n$  Elektronen koinzidieren in einem Weltpunkt, befinden sich aber nicht alle im selben Zustand.

c) *Allgemeines Mehrelektronenproblem:*

Die Ausgangskonfiguration der  $n$  Elektronen umfasst mehr als einen Weltpunkt, von denen je zwei eine raumartige Distanz besitzen.

Die damit formulierten Mehrelektronenprobleme sind bedeutend einfacher als die entsprechenden Schrödinger'schen Probleme. Zum Beispiel gilt folgende Aussage: Sämtliche Probleme a) und b) sind in vierdimensionalen Polarkoordinaten vollständig separierbar.

2) In *physikalischer Beziehung* ist durch die Einführung von ebensoviel Wellenfunktionen wie Teilchen die Gefahr der Kernkatastrophe — wie schon im vorigen Paragraphen betont wurde — auf radikale Weise beseitigt worden.

Ganz allgemein scheint eben für die methodische Behandlung des  $n$ -Teilchenproblems folgende Alternative zu bestehen: Entweder eine Wellenfunktion und  $n$  Orte oder  $n$  Wellenfunktionen und höchstens  $n$  Orte. Im ersten Falle sind — wie mir scheint — letzten Endes explizite in die Gleichung eingehende variable Abstände unvermeidlich, im zweiten Falle dagegen die  $n$ -fachen Koinzidenzen.

3) Bei oberflächlicher Betrachtung könnte vielleicht der Eindruck entstehen, dass durch die Einführung eines Gradienten gemäss (17) die ganze Maxwell'sche Theorie preisgegeben werde. Möglicherweise ist gerade das Gegenteil der Fall! Wie wir zu Beginn dieses Paragraphen schon bemerkt haben, bewirkt ja die orthodoxe Einführung des Vektorpotentials in die Gleichung (13) paradoxerweise die Annulierung des Coulombpotentials. Dagegen liefert die Durchrechnung des speziellen Koinzidenzproblems a) folgendes interessante Resultat: Das Coulombpotential wird restuiert, aber erst, wenn die Zahl  $n$  der koinzidierenden Teilchen die Relation

$$n > 1 + \frac{1}{\epsilon} \quad (21)$$

erfüllt. Diese Grenze hängt nach (18) vom Zahlenfaktor  $k$  ab, für dessen Bewertung wir aber noch keine Handhabe besitzen. Vermutlich wird ja die Zahl  $\epsilon$  klein sein. Setzt man probeweise  $k = 1$ , so ergibt sich

$$n > 138.$$

Eine Theorie aber, die ein Coulombfeld liefert und im übrigen relativistisch invariant ist, enthält schon einen sehr wesentlichen Zug der Maxwell'schen Theorie. Im Atomaren mehr zu fordern, kann sehr wohl einen Abweg bedeuten.

4) Ganz speziell sei noch einmal auf das Postulat 3a) hingewiesen, demzufolge also alle Elektronen gleich sein sollen. In den Gleichungen (19) und (20) wurde dementsprechend überall derselbe „Massenfaktor“

$$A = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (14)$$

verwendet. Die durch die Ungleichung (21) ausgedrückte Bedingung hat ihrerseits nur einen Sinn, wenn man den Faktor  $k$  in (18) positiv annimmt. Wir interpretieren dies dahin, dass alle Elektronen gleich geladen seien.

Damit entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, ob aus diesen vollkommen symmetrischen Annahmen ein Verständnis für die bei

kleinen Teilchen beobachtete Asymmetrie in bezug auf Ladung und Masse gewonnen werden könne. Im nächsten Paragraphen werden wir Anzeichen dafür finden, dass unsere Erwartungen wenigstens hinsichtlich der Masse vielleicht gerechtfertigt sind. Hinsichtlich der Ladung muss ich die Frage noch ganz offen lassen. Darum wurde Postulat 3a) unter die provisorischen gerechnet.

Im übrigen ist der ganze Formalismus so gefasst, dass ungleiche Massen und ungleiche Ladungen nötigenfalls ohne weiteres in die Prämissen aufgenommen werden könnten.

#### § 4. Entstehung schwerer Teilchen.

Wir ziehen nun aus den Gleichungen (20) für den Fall des „speziellen Koinzidenzproblems“, also unter der Voraussetzung

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = u \quad (22)$$

einige vom gewählten Koordinatensystem ganz unabhängige Schlüsse. An Stelle der  $n$  Gleichungen (20) tritt eine Gleichung für die Funktion  $n$ :

$$\square u = \{A + (n-1)\varepsilon \square \lg u + (n-1)^2\varepsilon^2 (\text{grad } \lg u)^2\} u \quad (23)$$

oder wegen

$$\square \lg u \equiv \frac{\square u}{u} - (\text{grad } \lg u)^2, \quad (24)$$

$$\square u \cdot = \left\{ \frac{A}{1 - (n-1)\varepsilon} - (n-1)\varepsilon (\text{grad } \lg u)^2 \right\} u. \quad (25)$$

Die Funktion  $u$  genügt also einer Gleichung mit einem modifizierten Massenfaktor

$$\frac{A}{1 - (n-1)\varepsilon} = \bar{A} = - \left( \frac{\bar{m} c}{\hbar} \right)^2. \quad (26)$$

Für die (scheinbare?) Masse eines einzelnen der  $n$  koinzidierenden Teilchen ergibt sich also

$$\bar{m} = \frac{m}{\sqrt{1 - (n-1)\varepsilon}} \quad (27)$$

Die Gesamtmasse aller  $n$  Teilchen erhält demnach den Wert\*)

$$M = \frac{n \cdot m}{\sqrt{1 - (n-1)\varepsilon}}$$

(28)

\*) Unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass „Strahlbildungen“ existieren, bei denen die  $n$  Teilchen beieinander bleiben.

An diesem Resultat ist vor allem die *qualitative* Feststellung wichtig, dass der Massenfaktor in (26) für positives  $\varepsilon$  nach endlich vielen Schritten sein Zeichen wechselt. Unsere Theorie führt also unmittelbar zum Schluss, dass mit wachsender Koinzidenzzahl  $n$  die Masse beständig wächst, um dann bei Überschreitung einer gewissen Grenze in einen ganz neuen Zustand überzugehen.

Wie man leicht erkennt, ist dieser Effekt ein allgemeiner Zug des vorgeschlagenen Systems, der nicht wesentlich von sekundären Modifikationen abhängt.

Die *quantitativen* Folgerungen aus (28) sind natürlich an den Vorbehalt gebunden, dass das Störungsglied in (25), das ja mit  $n$  wächst, den Masseneffekt nicht in unerwünschter Weise beeinflusst. Dieses Glied ist übrigens dadurch entstanden, dass man *genau* die elektrodynamische Hamiltonfunktion (12) des Elektrons übernommen hat und hängt ursprünglich vom Quadrat der Feinstrukturkonstanten ab. Hier ist also am ehesten die Stelle, wo ein Abänderung des Kraftansatzes in Frage kommen könnte. Doch wollen wir ohne triftigen Grund vorderhand keine Änderung der durch Variation entstandenen Gleichungen (20) diskutieren.

Unter diesen Vorbehalten bestimmen wir nun die obere Grenze der durch (2) gegebenen Massen.

Es sei also  $\varepsilon$  eine kleine positive Zahl. Dann können wir setzen

$$N < \frac{1}{\varepsilon} \leq N + 1 \quad (29)$$

wo  $N$  eine natürliche Zahl ist, oder also:

$$\frac{1}{\varepsilon} = N + \omega \quad (30)$$

das heisst

$$\varepsilon = \frac{1}{N + \omega} \quad (31)$$

mit

$$0 < \omega \leq 1 \quad (32)$$

Die mit reellen Massen verträglichen Koinzidenzzahlen haben nun nach (28) die Ungleichung

$$(n - 1)\varepsilon < 1 \quad (33)$$

zu erfüllen, d. h. nach den eben eingeführten Bezeichnungen die Relation

$$n < N + 1 + \omega. \quad (34)$$

Nach (32) ist also die grösste zulässige Koinzidenzzahl gegeben durch

$$n_0 = N + 1 \quad (35)$$

und daraus ergibt sich nach (28) die Masse

$$M_0 = (N + 1) \sqrt{\frac{N}{\omega} + 1} \cdot m \quad (36)$$

Das Resultat hängt also ganz wesentlich von der Dezialen  $\omega$  der Konstanten  $\frac{1}{\varepsilon}$  ab! Ist  $\frac{1}{\varepsilon}$  eine ganze Zahl, so herrscht eine vollkommene Zweideutigkeit. Dieselbe wird also am ehesten vermieden, wenn man setzt

$$\omega = \frac{1}{2} \quad (37)$$

woraus dann folgt

$$M_0 = (N + 1) \sqrt{2N + 1} \cdot m. \quad (38)$$

Setzen wir nun wieder in (18) probeweise  $k = 1$ , so folgt vorerst einmal

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\hbar c}{e^2}$$

Also haben wir im Sinne von (37) zu setzen  $\frac{1}{\varepsilon} = 137,5$ , d. h.

$$N = 137 \quad (39)$$

und daraus ergibt sich das Massenverhältnis

$$\frac{M_0}{m} = 138 \sqrt{275} = 690 \sqrt{11}$$

oder

$$\frac{M_0}{m} \sim 2280.$$

Man kann also sagen, dass der einfachste Fall einer an sich ja sehr variationsfähigen Auswahl wenigstens in der Größenordnung das Massenverhältnis von Proton zu Elektron trifft.

Der kleinste Massenwert ergäbe sich für  $\omega = 1$  zu

$$\frac{M_1}{m} = 138 \sqrt{138} \sim 1620$$

und der grösste für  $\omega \rightarrow 0$  natürlich zu

$$\frac{M_2}{m} = \infty.$$

Wie man sieht, kann wegen des starken Einflusses von  $\omega$  in vielen Einheitsintervallen, also für alle nicht zu grossen  $N$  ein derartiger Massenwert ermittelt werden.

Es ist auch denkbar, dass man umgekehrt einmal Anlass zu einer Bestimmung der Dezimalen  $\omega$  unter Vorgabe von  $M_0/m$  und  $N$  erhält.

Eine endgültige Abklärung ist aber erst zu erwarten, wenn es gelungen ist, in der vorgeschlagenen Theorie das Wasserstoffspektrum darzustellen.

### § 5. Gibt es eine korrespondierende Punktdynamik?

Ist ein konservatives dynamisches System durch die generalisierten Koordinaten

$$x_1, \dots, x_n$$

und die zugehörige Hamilton'sche partielle Differenzialgleichung

$$H\left(x_1, \dots, x_n; \frac{\partial S}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = E \quad (40)$$

definiert, so erhält man die zugehörigen Lagrange'schen Gleichungen bekanntlich durch folgendes Verfahren:

Durch die Substitution

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i \quad (41)$$

führt man die Impulskoordinaten ein und erhält die Hamiltonfunktion

$$H \equiv H(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n). \quad (42)$$

Hierauf führt man durch den Ansatz

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (43)$$

wo der Punkt die Ableitung nach der Zeit bedeutet, die Geschwindigkeitskomponenten ein. Dann löst man (43) nach den  $p_i$  auf und setzt die erhaltenen Funktionen von  $x_i$  und  $\dot{x}_i$  in den Ausdruck

$$L = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \quad (44)$$

ein. Die so ermittelte Funktion der  $x_i$  und  $\dot{x}_i$  ist die Lagrangefunktion

$$L \equiv L(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \quad (45)$$

des betrachteten Problems.

Wendet man dieses Verfahren auf die partielle Differenzialgleichung (12) an, nachdem man sie aus dimensionellen Gründen mit  $\frac{1}{2m}$  multipliziert hat, so ergibt sich die Lagrangefunktion

$$L \equiv \frac{m}{2} \dot{x}_k \dot{x}_k + \frac{e}{c} \varphi_k \dot{x}_k \quad (46)$$

Als Lagrange'sche Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (47)$$

resultieren die Gleichungen

$$m \ddot{x}_i = \frac{e}{c} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k . \quad (48)$$

Falls man nun den Ansatz (17) für das Feld macht, resultiert überhaupt keine Kraftwirkung, entsprechend der wohlbekannten Vorschrift, dass an Stelle des Vektorpotentials kein Gradient gesetzt werden dürfe. Wir haben hier gewissmassen die Kehrseite des bei der Einführung von (13) geschilderten Versagens.

Hält man also in unserer formal durch (17) gekennzeichneten Theorie an dem genauen Ausdruck (12) fest, so resultiert keine korrespondierende Punktdynamik.

Nun haben wir schon im vorausgehenden Paragraphen festgestellt, dass unsere Schlüsse betreffend schwere Teilchen wenigstens *qualitativ* vom Glied mit  $\varepsilon^2$  in (20) unabhängig sind. Es ist also möglich, sich eine punktdynamische Illustration der beschriebenen Masseneffekte zu verschaffen, wenn man statt (12) den Ausdruck

$$H = \frac{1}{2m} \frac{\partial S}{\partial x_k} \frac{\partial S}{\partial x_k} - \frac{e}{mc} \varphi_k \frac{\partial S}{\partial x_k} \quad (49)$$

zugrunde legt.

Die zugehörige Lagrangefunktion lautet:

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{x}_k + \frac{e}{mc} \varphi_k \right) \left( \dot{x}_k + \frac{e}{mc} \varphi_k \right) \quad (50)$$

und als Bewegungsgleichungen ergeben sich

$$m \ddot{x}_i = \frac{e}{c} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k + \frac{e^2}{mc^2} \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \quad (51)$$

oder nach (17)

$$m \ddot{x}_i = k^2 \cdot \frac{e^4}{2mc^2} \frac{\partial}{\partial x_i} [(\text{grad } \text{Lg } v)^2] \quad (52)$$

Der Parameter in (52) hat die Dimension einer Zeit und möge  $\tau$  heissen. Wir ersetzen ihn durch die Länge

$$s = c\tau \quad (53)$$

Bezeichnen wir die Ableitungen nach  $s$  mit einem Strich, so erhalten wir an Stelle von (52)

$$x_i'' = \frac{k^2}{2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [(\text{grad Lg } v)^2]. \quad (54)$$

Dem anschaulichen Sinn unserer Theorie entspricht es aber besser, als Parameter eine reine Zahl zu verwenden, gewissermassen die Zahl der Wirkungselemente längs der Weltlinie des Teilchens<sup>1)</sup>. Wir setzen also

$$s = \frac{\hbar}{mc} \sigma \quad (55)$$

und erhalten dann unter Berücksichtigung von (18):

$$\boxed{\frac{d^2 x_i}{d \sigma^2} = \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^4 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} [(\text{grad Lg } v)^2]} \quad (56)$$

Die punktdynamische Behandlung erfordert also einen gemischten Standpunkt: Das Potential wird ermittelt aus der Wellenfunktion  $v$  des störenden Teilchens. In dem erhaltenen „Feld“ bewegt sich das gestörte Elektron als Punkt nach dem Gesetz (56).

Die Gleichungen (56) resp. (54) beschreiben also die korrespondierende Dynamik für den Fall, dass in (19) und (20) die Glieder mit  $\varepsilon^2$  unterdrückt werden, d. h. also für die Wechselwirkungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \square u &= (\Lambda + \varepsilon \square \text{Lg } v) u \\ \square v &= (\Lambda + \varepsilon \square \text{Lg } u) v \end{aligned}} \quad (19*)$$

für zwei Teilchen und

$$\boxed{\square u_i = \left[ \Lambda + \varepsilon \square \left( \sum_{k=i}^n \text{Lg } u_k \right) \right] u_i} \quad (20*)$$

für  $n$  Teilchen.

Diese letzten Gleichungen können übrigens für grosse  $n$  keinesfalls als erste Näherungen der Gleichungen (20) angesehen werden.

---

<sup>1)</sup> 1. c. 5), S. 476.

Schliesslich sei noch betont, dass eine direkte Analogie zwischen den hier betrachteten atomaren Kräften und den, makroskopischen Feldern entsprechenden, Ladungen gar nicht zu erwarten ist. Schon die Wahrscheinlichkeitsvoraussetzungen sind in beiden Fällen total verschieden. So können makroskopische Felder ja nur bestehen, wenn eine dauernde maschinelle Energiezufuhr in gewisse materielle Systeme stattfindet, während im Atomaren Systeme beschrieben werden müssen, die in freier Wechselwirkung stehen.

### **Schlussbemerkung.**

Zum Schluss möchte ich noch einmal auf die prinzipielle Bedeutung von Postulat 3) zurückkommen. Es verlangt, dass ebenso viele Wellenfunktionen wie Elektronen eingeführt werden und nur auf dieser Basis sehe ich eine Möglichkeit, die expliziten Abstände — oder, anders ausgedrückt, die Überlichtgeschwindigkeiten — auszuschalten. Als unausweichliche Folgerung ergibt sich die Möglichkeit beliebig naher Koinzidenzen und diese wiederum führen — konsequent atomistisch gedacht — auf genaue Koinzidenzen gemäss Postulat 4).

Ob diese schwerwiegende Konsequenz bedingungslos eingehalten werden darf, kann erst der weitere Ausbau lehren.

Anders stehen die Dinge mit dem Postulat 3a). Wir haben hier eben vorderhand nur den einfachsten Fall lauter „gleichgeladener“ Teilchen gleicher Masse betrachtet. Rein logisch genommen, wäre diese einfache Grundlage natürlich sehr befriedigend. Die vorgeschlagene Methode liesse es aber durchaus zu, von vornherein verschiedene Teilchen anzunehmen. Eine formale Möglichkeit bestünde darin, unseren einfachen Faktor  $\epsilon$  zu einer Matrix auszubauen, die gerade dazu dienen könnte, beliebig hohe einformige Koinzidenzen auszuschliessen, falls es sich als notwendig erwiese, das Ausschlussprinzip explizite zur Geltung zu bringen. Angesichts der dabei zu erwartenden Komplikationen ziehe ich es aber vorderhand vor, die näheren Details der vorgeschlagenen Ansätze zu ermitteln.

Mathematisches Institut der Universität Bern.

---