

Zeitschrift:	Helvetica Physica Acta
Band:	14 (1941)
Heft:	V-VI
Artikel:	Über Ansätze für die Wechselwirkung von Elektronen mit schweren Teilchen
Autor:	Fierz, Markus
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-111189

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über Ansätze für die Wechselwirkung von Elektronen mit schweren Teilchen

von Markus Fierz.

(1. VIII. 1941.)

Es wird gezeigt, dass bei Ansätzen für die Wechselwirkung von Elektronen mit schweren Teilchen, vom Typus $\eta\psi^*\beta\dot{\psi}\Delta(x)$, keine, dem Pauli-Prinzip entsprechende Quantisierung der Elektronenwellen möglich ist.

Bei der Besprechung der Arbeit von Herrn JAUCH „Über die Wechselwirkung schwerer Teilchen mit Elektronen“¹⁾ im Zürcher theoretisch-physikalischen Seminar, wurde die Frage diskutiert, ob bei Ansätzen für diese Wechselwirkung vom Typus, den KONOPINSKI und UHLENBECK²⁾ für die Theorie des β -Zerfalls vorgeschlagen haben, die Quantisierung des Elektronenfeldes entsprechend dem Pauli-Prinzip möglich sei. Diese Frage soll in vorliegender Note beantwortet werden.

Für die Theorie des β -Zerfalls ist dieses Problem schon früher³⁾ behandelt worden. Es wurde damals aber nur bis zur 1. Näherung in der Entwicklung nach Potenzen der Koppelungskonstanten gerechnet. Das Resultat war, dass in dieser Näherung die Quantisierung auch so möglich ist, dass die β -Teilchen dem Pauli-Prinzip genügen.

In der Arbeit von JAUCH werden die Gleichungen unter der Voraussetzung, dass nur ein ruhendes, schweres Teilchen vorhanden ist, streng gelöst. Daher sind hier die früheren Überlegungen unzureichend.

Wir werden darum die Frage in derjenigen Näherung, die JAUCH benutzt, nochmals untersuchen; und es wird sich zeigen, dass hier eine Quantisierung, die das Pauli-Prinzip zur Folge hat, unmöglich ist.

Wir gehen aus von einem Variationsprinzip $\delta\int Ldvdt = 0$ mit

$$L = i\{\psi^*\dot{\psi} + \psi^*\alpha \text{ grad } \psi + im\psi^*\beta\psi + \eta\psi^*\beta\dot{\psi}\Delta(\tilde{x})\} \quad (1)$$

Dabei bedeutet ψ die Dirac'sche Wellenfunktion des Elektrons und $\Delta(\tilde{x})$ eine Funktion, die die dreidimensionale $\delta(x)$ -Funktion ersetzt, derart, dass die aus dem Variationsprinzip folgenden Gleichungen reguläre Lösungen besitzen¹⁾. η ist eine Konstante. Der

Wechselwirkungsterm $\eta \psi^* \beta \dot{\psi} \Delta(\vec{x})$ entspricht dem relativistischen Ansatz*)

$$\frac{i}{2} \eta [\psi^* \beta \operatorname{grad} \psi \Phi^* \alpha \Phi + \psi^* \beta \dot{\psi} \Phi^* \Phi - \Phi^* \alpha \Phi \operatorname{grad} \psi^* \beta \psi - \Phi^* \Phi \psi^* \beta \psi]$$

wo Φ die Wellenfunktion des schweren Teilchens bedeutet. Aus (1) folgen die Wellengleichungen

$$\dot{\psi} + \alpha \operatorname{grad} \psi + i m \beta \psi + \eta \beta \dot{\psi} \Delta(x) = 0 \quad (2)$$

Diese haben zur Folge, dass der Vierervektor

$$\psi^* \alpha \psi, \quad \psi^* \psi + \eta \psi^* \beta \psi \Delta(x) \quad (3)$$

der Kontinuitätsgleichung genügt. Die Gesamtladung

$$\varrho = \int (\psi^* \psi + \eta \psi^* \beta \psi \Delta(x)) dV \quad (4)$$

ist daher zeitlich konstant. Im Gegensatz zum gewöhnlichen Dirac'schen Falle ist dieser Ausdruck nicht positiv definit. Betrachtet man nämlich eine auf 1 normierte Funktion ψ , welche die Eigenschaft hat, dass

$$\beta \psi = -\psi$$

und die für $x=0$ dem Betrage nach grösser ist als $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ dann ist

$$\varrho \cong 1 - \eta (\psi^* \psi)_{x=0} < 0$$

(Für $\Delta(\vec{x}) \rightarrow \delta(\vec{x})$ gilt das Gleichheitszeichen.) Weil ϱ nicht positiv definit ist, kann das Pauli-Prinzip in dieser Theorie nicht gelten. Um dies zu beweisen, quantisieren wir die Theorie zuerst nach der Bose-Statistik..

Wir bilden die zu ψ kanonisch konjugierte Grösse Π gemäss

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = i \psi^* (1 + \eta \beta \Delta(x)) \quad (5)$$

Für die Energie finden wir

$$E = \int (\Pi \dot{\psi} - L) dV = \int \frac{1}{i} (\psi^* \alpha \operatorname{grad} \psi + m \psi^* \beta \psi) dV \quad (6)$$

Wegen der Wellengleichung (2) ist auch

$$E = i \int \psi^* (1 + \eta \beta \Delta(x)) \dot{\psi} dV = \int \Pi \dot{\psi} dV \quad (7)$$

*) Dies entspricht dem von JAUCH mit O_6 bezeichneten Operator. Der Operator O_8 kann auf die gleiche Weise behandelt werden, wie wir im Folgenden O_6 behandeln.

Die Hamiltonfunktion würde man erhalten, indem man in (6) ψ^* mittels der Π eliminiert.

Die Quantisierung unserer Theorie soll nun so vorgenommen werden, dass für jede, die Zeit nicht explicit enthaltende Funktion f der ψ, ψ^* die Gleichung

$$\frac{1}{i} \dot{f} = [E, f] \quad (8)$$

erfüllt ist, wobei \dot{f} aus (2) zu berechnen ist.

Um dies zu erreichen, fordern wir die kanonischen Vertauschungsrelationen (V.R.)

$$[\Pi_\sigma(x), \psi_\varrho(x')] = \frac{1}{i} \delta(x - x') \delta_{\sigma\varrho} \quad (9)$$

(σ, ϱ sind Spinindices).

Es soll jetzt gezeigt werden:

I. Die V.R. (9) haben die Gleichung (8) zur Folge.

II. Die V.R. (9) sind nur für Klammerausdrücke $[A, B] \equiv A B - B A$ erfüllbar, nicht aber für solche mit dem $+$ -Zeichen.

Um diese beiden Behauptungen zu beweisen, entwickeln wir ψ nach stationären Lösungen ψ_n von (2)

$$-E_n \psi_n + \frac{1}{i} \alpha \operatorname{grad} \psi_n + m \beta \psi_n - \eta E_n \beta \psi_n \Delta(\vec{x}) = 0 \quad (2')$$

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n; \quad \dot{a}_n = -i E_n a_n \quad (10)$$

Da ϱ zeitlich konstant ist, erfüllen die ψ_n bei geeigneter Normierung folgende Orthogonalitätsrelation:

$$\int \psi_n^* (1 + \eta \beta \Delta(x)) \psi_m dV = \delta_{nm} \varepsilon_n \quad (11)$$

Dabei nimmt ε_n die Werte $+1$ und -1 an. Es kommen beide Werte für ε_n auch wirklich vor, weil ϱ nicht positiv definit ist.

Gemäss (10), (11) gilt

$$a_n \varepsilon_n = \int \psi_n^* (1 + \eta \beta \Delta(x)) \psi dV \quad (12)$$

Die ψ_n erfüllen daher die weiteren Relationen

$$\sum_n \varepsilon_n \psi_{n\sigma}^*(x) (1 + \eta \beta \Delta(x)) \cdot \psi_{n\varrho}(x') = \delta(x - x') \delta_{\sigma\varrho} \quad (13)$$

Auf Grund der Gleichungen (10) bis (13) erkennt man, dass die V.R. (9) für die Amplituden a_n die folgenden V.R. ergeben:

$$[a_n, a_m^*] = \delta_{nm} \varepsilon_n \quad (14)$$

Die Energie erhält zufolge von (7) die Gestalt

$$E = \sum_n a_n^* a_n E_n \varepsilon_n \quad (15)$$

Man verifiziert nun leicht, dass wegen der V.R. (14), also auch wegen (9), die Gleichung (8) gilt. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Die Relationen (14) lassen sich durch folgenden Ansatz erfüllen:

$$\left. \begin{array}{l} a_n^* = \sqrt{N_n} \Delta_n^- = \Delta_n^- \sqrt{N_n + 1} \\ a_n = \Delta_n^+ \sqrt{N_n} = \sqrt{N_n + 1} \Delta_n^+ \\ a_n^* = \Delta_n^+ \sqrt{N_n} = \sqrt{N_n + 1} \Delta_n^+ \\ a_n = \sqrt{N_n} \Delta_n^- = \Delta_n^- \sqrt{N_n + 1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{falls } \varepsilon_n = +1 \\ \text{falls } \varepsilon_n = -1 \end{array}$$

Die Operatoren Δ_n^+ , Δ_n^- erhöhen oder erniedrigen in bekannter Weise die Quantenzahlen N_n um 1 ($N_n = 0, 1, 2 \dots$). Die Energie hat die Eigenwerte $\sum_n \varepsilon_n E_n (N_n + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_n))$.

Die Richtigkeit der zweiten Behauptung lässt sich ebenfalls leicht einsehen. Da nämlich von den ε_n eine gewisse Anzahl negativ ist, so sind V.R. der Form

$$[\Pi_\varrho(x) \psi_\sigma(x') + \psi_\sigma(x') \Pi_\varrho(x)] = 1/i \delta(x - x') \delta_{\varrho\sigma} \quad (9')$$

deshalb unmöglich, weil diese zu den Gleichungen

$$[a_n^* a_m + a_m a_n^*] = \delta_{nm} \varepsilon_n \quad (14')$$

führen. Diese sind für $\varepsilon_n = -1$ nicht erfüllbar, weil die linke Seite positiv definit ist.

Ersetzt man versuchsweise in (14') die ε_n durch +1, so gilt weder (9') noch (8). Dies ist physikalisch unzulässig.

Es ist also nicht möglich, eine Theorie vom hier betrachteten Typus, in welcher ϱ nicht positiv definit ist, dem Pauli-Prinzip entsprechend zu quantisieren. Ein Widerspruch gegen das früher gefundene Resultat³⁾ ist dies nicht; denn eine Entwicklung der ψ nach η ist nur dann sinnvoll, falls

$$|\eta \int \psi^* \beta \psi \Delta(x) dv| \ll 1$$

In diesem Falle ist aber ϱ positiv.

Basel, Physikal. Anstalt und Mathem.-Physikal.
Seminar der Universität.

Literatur.

¹⁾ J. M. JAUCH, H. P. A. **14** (1941) 143. — H. P. A. **14** (1941) 465.

²⁾ KONOPINSKI und UHLENBECK, Phys. Rev. **48** (1935) 7.

³⁾ M. FIERZ, H. P. A. **10** (1937) 123, sowie Berichtigung ebenda, S. 284.