Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 14 (1941)
Heft: V-VI

Artikel: Methode zur elektrischen Geschwindigkeitsmessung von Flüssigkeiten
Autor: Thürlemann, B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111186

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Methode zur elektrischen Geschwindigkeitsmessung von Flüssigkeiten

von **B. Thürlemann.**

(13. VI. 1941.)

Einleitung.

Bei den bekannten Methoden zur Geschwindigkeitsmessung von Flüssigkeiten werden mechanische und thermische Wirkungen des Flüssigkeitsstromes, wie Druck, Bewegung von Flügelrädern oder Fahnen, Abkühlung geheizter Drähte, benützt, während elektrische Vorrichtungen oft zur weiteren Übertragung und Anzeige dieser Effekte dienen[1]).

Im folgenden wird eine Methode untersucht, welche die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ohne Dazwischentreten eines mechanischen oder thermischen Vorganges direkt auf Grund des Induktionsgesetzes, also auf rein elektrischem Weg zu messen gestattet. Das Verhalten flüssiger Leiter im Magnetfeld bei Stromdurchgang oder Bewegung wird durch die gleichen Gesetze beherrscht wie dasjenige fester Leiter. Daher hat eine auf dem Induktionsgesetz aufbauende Messmethode Aussicht auf strenge Zuverlässigkeit, ohne auf empirische Eichkurven angewiesen zu sein. Im Induktionsgesetz kommen keine Materialkonstanten, wie Dichte, Zähigkeit, spez. Widerstand, vor. Darum wäre eine solche Messmethode von der Art der Flüssigkeit im wesentlichen unabhängig. Das gleiche gilt von Temperatur, Druck usw. Weil der in Frage stehende elektrische Effekt streng proportional mit der Geschwindigkeit zunimmt, dürfte er sich speziell zur Messung grosser Geschwindigkeiten eignen.

Auf einen Versuch von Prof. Dr. Friedrich Dessauer und seine Anregung hin hatte sich der Verfasser zunächst mit einer interessanten Anwendung des Biot-Savart'schen Gesetzes auf flüssige Leiter beschäftigt. Es lassen sich nämlich elektromagnetische Pumpen ohne jeden beweglichen Bestandteil konstruieren[2]). Die Notwendigkeit, die Pumpleistung zu kontrollieren, führte den Verfasser dazu, die Umkehrung des Biot-Savart'schen Gesetzes, das Induktionsgesetz, zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Quecksilber in einem Rohr zu benützen und eine einfache

Messapparatur zu bauen. Die Eichung ergab genaue Proportionalität zwischen Durchflussgeschwindigkeit und angezeigter elektrischer Spannung. Es erschien daher lohnend, das Messverfahren auch für andere Flüssigkeiten auszuarbeiten, was Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist[3]).

Zuerst soll das Induktionsgesetz in seiner ungewohnten Anwendung auf Flüssigkeiten dargelegt und zur Veranschaulichung dem damit eng verwandten Gesetz von Biot und Savart gegenübergestellt werden; hierauf wird die theoretische Grundlage der Messmethode geschaffen; daran schliesst sich die Beschreibung eines quasistatischen Spannungsmessers; eine Serie von Messungen dient als experimentelle Prüfung des im theoretischen Teil erhaltenen Resultates und zeigt die Zuverlässigkeit der Messmethode.

I. Anwendung des Induktionsgesetzes auf flüssige Leiter.

Zur gegenseitigen Veranschaulichung seien das Induktionsgesetz und das Biot-Savart'sche Gesetz nebeneinander dargestellt.

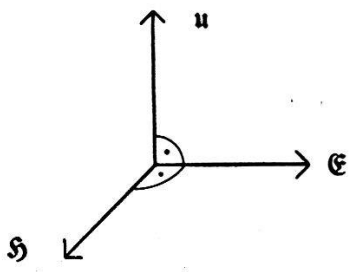

Fig. 1.

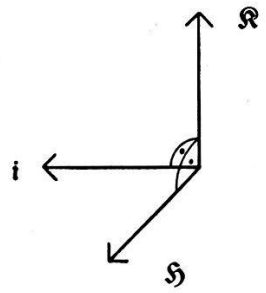

Fig. 2.

Induktionsgesetz:

Gegeben: magnetisches Feld $\mathfrak{H}$
Bewegungsgeschw. $\mathfrak{u}$
Wirkung: elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$.

Biot-Savart'sches Gesetz:

Gegeben: magnetisches Feld $\mathfrak{H}$
Stromdichte $\mathfrak{i}$
Wirkung: bewegende Kraft $\mathfrak{K}$.

$$\boxed{\mathfrak{E} = \frac{\mu}{c}[\mathfrak{u}\mathfrak{H}],} \qquad \boxed{\mathfrak{K} = \frac{\mu}{c}[\mathfrak{i}\mathfrak{H}]\,V,}\ ^{4)} \tag{1}$$

wo μ = magnetische Permeabilität
c = Lichtgeschwindigkeit
V = Volumen des Leiters.

Fig. 3 stellt ein Rohr für Flüssigkeiten dar. Die Rohrwand sei isolierend, die Elektroden E_1 und E_2 sollen direkt an der Flüssigkeit anliegen.

Bewegt sich die Flüssigkeit des Rohres in der Richtung des Pfeiles, so wird zwischen den Elektroden eine elektrische Spannung von der angegebenen Polarität induziert, die durch ein Messinstrument gemessen werden kann. Die Spannung wächst mit der Geschwindigkeit und kann daher zur *Geschwindigkeitsmessung* dienen.

Denkt man sich das Messinstrument in Fig. 3 weg und an die Elektroden eine Spannung von der angegebenen Polarität angelegt, so fliesst entsprechend der Leitfähigkeit der Flüssigkeit ein Strom quer zur Rohrachse, und in der Richtung des Pfeiles entsteht eine Kraft, welche die Flüssigkeit zu bewegen sucht. Damit ist das *Prinzip der elektromagnetischen Pumpe* gegeben. Die gleiche Tatsache wurde schon früh zu magnetometrischen Messungen benützt[5]).

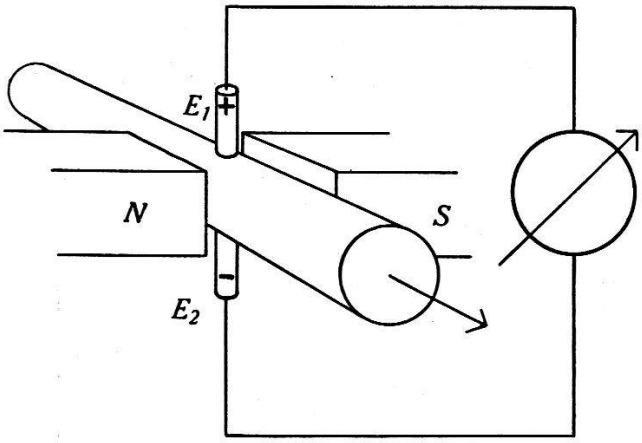

Fig. 3.

Bei der Geschwindigkeitsmessung ist man weniger auf grosse Leitfähigkeit der Flüssigkeiten angewiesen als bei der elektromagnetischen Pumpe. Denn die induzierte Spannung kann statisch oder nahezu statisch gemessen werden, sodass keine oder nur sehr geringe Ströme zu fliessen brauchen. Dagegen tritt eine Schwierigkeit auf, die von der Verschiebbarkeit der Flüssigkeitsteilchen herrührt: die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist nicht über den ganzen Rohrquerschnitt die gleiche. Es wird daher im folgenden für einen kreisrunden Rohrquerschnitt der Einfluss der Geschwindigkeitsverteilung auf das Spannungsintegral berechnet.

II. Spannungsintegral.

Die Messanordnung, die in Fig. 3 dargestellt ist, führt zur Frage, welche Spannung auf Grund des Induktionsgesetzes entsteht, wenn das Magnetfeld und die Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeit über den Rohrquerschnitt gegeben sind.

A. Näherungslösung.

Die zwischen den Elektroden induzierte Spannung ist offenbar die Summe aller auf dem Durchmesser induzierten Teilspannungen. Die Teilspannungen sind durch das Induktionsgesetz gegeben:

$$dU = \frac{\mu}{c} H u \, dr.$$

Die Geschwindigkeit u der Flüssigkeit sei eine Funktion des Abstandes r von der Rohrachse:

$$u = f(r). \tag{2}$$

Die auf dem ganzen Durchmesser induzierte Spannung erhält man durch Integration der Teilspannungen:

$$U = \frac{\mu}{c} H \int_{-R}^{+R} f(r)\, dr = \frac{\mu}{c} 2 H \int_{0}^{R} f(r)\, dr. \tag{2'}$$

Bei der *laminären Strömung* gibt das Poiseuille'sche Gesetz die Geschwindigkeitsverteilung an:

$$f(r) = 2\,\bar{u}\,\frac{R^2 - r^2}{R^2}, \tag{3}$$

wo $\bar{u}$ die mittlere Geschwindigkeit über den Querschnitt bedeutet. Also

$$U_{\text{lam}} = \frac{\mu}{c}\frac{4}{3} H \bar{u} \cdot 2\,R. \tag{3'}$$

Die *Turbulenz* nähert sich dem Grenzfall, wo gleiche Geschwindigkeit über dem ganzen Querschnitt herrschen würde:

$$f(r) = \bar{u} = \text{konst.}, \tag{4}$$

und die Integration ergibt:

$$\lim U_{\text{turb}} = \frac{\mu}{c} H \bar{u} \cdot 2\,R. \tag{4'}$$

Für die turbulente Strömung wäre also bis 25% weniger Spannung als bei der laminären Strömung bei gleicher mittlerer Durchflussgeschwindigkeit zu erwarten[6]).

Nun aber können elektrische Wirbelströme auftreten, welche einen Teil der induzierten Spannung verbrauchen. Wenn nämlich die Geschwindigkeit gegen den Rand hin sich verkleinert, wird in dieser Zone wenig Spannung induziert. Die Randzone stellt daher für die dem Durchmesser entlang induzierte Spannung einen

wenn auch schlecht leitenden Kurzschluss dar, über den ein gewisser Strom zurückfliesst. Um über den Einfluss dieser Ströme Klarheit zu erhalten, soll die strenge Lösung für die Potentialverteilung und die Wirbelströme über den Rohrquerschnitt abgeleitet werden.

B. Strenge Lösung.

Die drei Vektoren von Fig. 1 sollen wie folgt mit den Richtungen der kartesischen Koordinaten x, y, z zusammenfallen:

x-Richtung: Magnetfeld H
y-Richtung: induzierte EMK.
z-Richtung: Bewegung d. Fl.

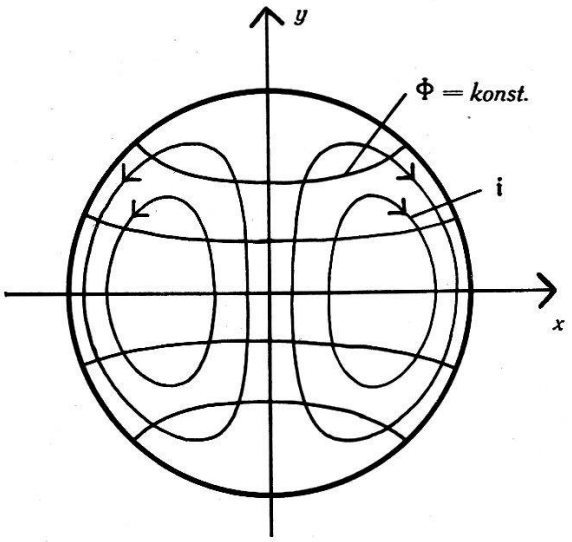

Fig. 4.

Der Fall soll insofern idealisiert werden, dass das Rohr mit der Flüssigkeit unendlich lang sei und das angelegte Magnetfeld sich über das ganze Rohr erstrecke. Dadurch wird der Einfluss jener Stellen vernachlässigt, wo die Flüssigkeit ins Magnetfeld eintritt und dasselbe wieder verlässt. Das Rohr bestehe aus isolierendem Material. Der spez. Widerstand der Flüssigkeit sei $\gamma =$ konst. Ferner sei die magnetische Permeabilität $\mu = 1$ gesetzt.

Die Maxwell'schen Gleichungen für ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in einem magnetischen Feld $\mathfrak{H}$ bewegtes Medium lauten:

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\,\dot{\vartheta} + \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{i}, \tag{I}$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\,(\mu\dot{\mathfrak{H}} - \text{rot } \mu\,[\mathfrak{u}\mathfrak{H}]), \tag{II}$$

wo $\frac{\dot{\vartheta}}{4\pi} =$ Polarisationsstromdichte, $\mathfrak{i} =$ Leitungsstromdichte,
$\mathfrak{H} =$ magnetische Feldstärke, $\mathfrak{E} =$ elektrische Feldstärke.

*

Im vorliegenden Fall handelt es sich um einen stationären Zustand. Daher ist

$$\dot{\vartheta} = \dot{\mathfrak{H}} = 0.$$

Zudem ist das angelegte magnetische Feld $\mathfrak{H}_0$ stark, die Stromdichte $\mathfrak{i}$ der induzierten Wirbelströme aber sehr gering; also

$$\mathfrak{H} \approx \mathfrak{H}_0.$$

Daher gemäss (II)

$$\operatorname{rot}\left(\mathfrak{E} - \frac{\mu}{c}[\mathfrak{u}\mathfrak{H}_0]\right) = 0$$

und

$$\mathfrak{E} - \frac{\mu}{c}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_0]$$

ein wirbelfreies Feld, das sich aus einem Potential Φ ableiten lässt:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi + \frac{\mu}{c}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_0].$$

Durch die elektrische Feldstärke wird eine Stromdichte $\mathfrak{i}$ aufrecht erhalten:

$$\mathfrak{E} = \gamma\,\mathfrak{i}.$$

Also:

$$\gamma\,\mathfrak{i} = -\operatorname{grad}\Phi + \frac{\mu}{c}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_0].$$

Da im vorliegenden Fall mit Berücksichtigung von Annahme (2)

$$\mathfrak{u} = (0, 0, f(r)),$$

und da

$$\mathfrak{H}_0 = (H, 0, 0),$$
$$\mu = 1,$$

so ergibt die Aufteilung der letzten Gleichung in die Komponentengleichungen

$$\left.\begin{aligned} \gamma i_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \gamma i_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{c}f(r)H \\ \gamma i_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Da Φ von z unabhängig ist, so wird

$$i_z = 0;$$

das Problem wird zweidimensional.

Die beiden ersten Komponentengleichungen (5) lassen sich folgendermassen interpretieren: Die zur Aufrechterhaltung einer Stromdichtekomponente notwendige Spannung wird geliefert durch die entsprechenden Komponenten des Potentialgefälles und der induzierten EMK.

Durch partielle Differentiation der beiden Gleichungen (5) nach x bzw. y und Addition der Gleichungen ergibt sich

$$\gamma \underbrace{\left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y}\right)}_{\operatorname{div} \mathfrak{i}} = -\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)}_{\Delta \Phi} + \frac{1}{c} H \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}.$$

Da es sich um einen stationären elektrischen Strom handelt, ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = 0,$$

und da

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi,$$

so erhält man als *Differentialgleichung* in Polarkoordinaten

$$\boxed{\Delta \Phi = \frac{1}{c} H \frac{df}{dr} \sin \varphi.} \tag{6}$$

Die Randbedingung lässt sich ableiten auf Grund der Tatsache, dass der Rand des Rohrquerschnittes isolierend ist und daher die Stromlinien am Rand parallel zu demselben verlaufen müssen:

$$x i_x + y i_y = 0. \tag{7}$$

Anderseits erhält man aus den Gleichungen (5) für den Rand mit dem Radius R

$$\frac{x}{R} \gamma i_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{x}{R},$$

$$\frac{y}{R} \gamma i_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{y}{R} + \frac{1}{c} H f(R) \frac{y}{R},$$

$$\frac{\gamma}{R}(x i_x + y i_y) = -\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{x}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{y}{R}\right)}_{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_R} + \frac{1}{c} H f(R) \sin \varphi.$$

Unter Berücksichtigung von (7) ergibt sich als *Randbedingung*

$$\boxed{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_R = \frac{1}{c} H f(R) \sin \varphi.} \tag{8}$$

Es handelt sich also darum, die Poisson'sche Differentialgleichung mit einer gegebenen Störungsfunktion (6) *und einer Randbedingung für die Normalableitung* (8) *für ein kreisförmiges Gebiet zu integrieren.*

Die Aufgabe lässt sich bekannterweise[7]) in zwei aufteilen. Man setzt die gesuchte Lösung Φ aus zwei Integralen zusammen:

$$\Phi = \Phi^* + \Phi^{**}, \tag{9}$$

wobei das erste Teilintegral Φ^* der inhomogenen Differentialgleichung (6) genügen soll, seine Normalableitung am Rand aber frei gelassen wird, während das zweite Teilintegral Φ^{**} der homogenen oder Laplace'schen Differentialgleichung

$$\Delta \Phi^{**} = 0 \tag{10}$$

genügen und solche Normalableitungen am Rand annehmen soll, dass die Randbedingung (8) für Φ erfüllt wird:

$$\left(\frac{\partial \Phi^{**}}{\partial r}\right)_R = \frac{1}{c} H f(R) \sin \varphi - \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r}\right)_R. \tag{11}$$

1. *Bestimmung des ersten Teilintegrals Φ^*.*

Dieses Integral, das der inhomogenen Differentialgleichung (6) genügen soll, ergibt sich aus der Störungsfunktion in (6) und der Green'schen Funktion des Kreises, wie folgt[8]):

$$\Phi^*(r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{c} H \frac{df}{dr'} \sin \varphi' \cdot \tfrac{1}{2} \ln \frac{R^2 + \frac{r^2 r'^2}{R^2} - 2 r r' \cos(\varphi - \varphi')}{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\varphi - \varphi')} dr' \cdot r' d\varphi'. \tag{12}$$

Werden Zähler und Nenner der Green'schen Funktion mit Z und N bezeichnet und alle für die Integration nach φ' in Frage kommenden Glieder zusammengefasst, so lässt sich schreiben

$$\Phi^*(r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^R \frac{1}{c} H \frac{df}{dr'} r' \cdot \tfrac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi' \ln \frac{Z}{N} d\varphi'}_{J} \cdot dr'. \tag{13}$$

Das Integral J nach φ' lässt sich zerlegen:

$$J = \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi' \ln Z \, d\varphi'}_{J_1} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi' \ln N \, d\varphi'}_{J_2}. \tag{14}$$

Da Z und N von der Form $a - b\cos(\varphi - \varphi')$ sind, wobei $a > b$, so handelt es sich um die Lösung des Integrals

$$J' = \int_0^{2\pi} \sin\varphi' \ln[a - b\cos(\varphi - \varphi')]\, d\varphi', \qquad a > b, \tag{15}$$

für welches man durch partielle Integrationen und einige Transformationen der Variablen findet

$$J' = -2\pi \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \sin\varphi. \tag{16}$$

Werden für a und b die entsprechenden Ausdrücke aus (12) eingesetzt, so wird

$$J_1 = -2\pi \frac{rr'}{R^2} \sin\varphi,$$

$$J_2 = -2\pi \frac{2rr'}{r^2 + r'^2 + \sqrt{(r^2 + r'^2)^2 - 4r^2r'^2}} \sin\varphi.$$

Da nach (16) nur der positive Wert der Quadratwurzel gewählt werden darf, so muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden:

$$J_2 = -2\pi \frac{2rr'}{r^2 + r'^2 + \begin{Bmatrix} r^2 - r'^2; & r > r' \\ r'^2 - r^2; & r < r' \end{Bmatrix}} \sin\varphi,$$

$$J_2 = -2\pi \sin\varphi \begin{Bmatrix} \frac{r'}{r}; & r > r' \\ \frac{r}{r'}; & r < r' \end{Bmatrix}.$$

Setzt man diese Resultate in (14) und (13) ein, so erhält man für das erste Teilintegral

$$\Phi^*(r,\varphi) = \frac{1}{c} H \frac{r}{2} \left[\int_0^R \frac{df}{dr'} \frac{r'^2}{R^2} dr' - \int_0^r \frac{df}{dr'} \frac{r'^2}{r^2} dr' - f(R) + f(r) \right] \sin\varphi.$$

Durch partielle Integration lässt sich das Resultat auf eine andere Form bringen. Denn

$$f(r) - \int_0^r \frac{df}{dr'} \frac{r'^2}{r^2} dr' = \frac{1}{r^2\pi} \int_0^r 2r'\pi f(r')\, dr' = \bar{u}(r), \tag{17}$$

wo $\bar{u}(r)$ offenbar die *mittlere Durchflussgeschwindigkeit für einen Querschnitt vom Radius* r bedeutet.

Somit lässt sich schreiben:

$$\Phi^*(r,\varphi) = \frac{1}{c} H r \frac{\bar{u}(r) - \bar{u}(R)}{2} \sin\varphi. \tag{18}$$

Die Normalableitung von Φ^* am Rand, die zur Berechnung des zweiten Teilintegrals Φ^{**} notwendig sein wird, ist gegeben durch:

$$\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r}\right)_R = \frac{1}{c} H [f(R) - \bar{u}(R)] \sin\varphi. \tag{19}$$

2. Bestimmung des zweiten Teilintegrals Φ^{**}.

Das zweite Teilintegral soll der homogenen Differentialgleichung (10) genügen, und seine Normalableitung am Rand muss vorgeschriebene Werte annehmen, die man durch Einsetzen von (19) in (11) erhält:

$$\left(\frac{\partial \Phi^{**}}{\partial r}\right)_R = \frac{1}{c} H \bar{u}(R) \sin\varphi. \tag{20}$$

Ein solches Integral zu suchen, wird *zweite Randwertaufgabe* genannt. Sie lässt sich auf die *erste Randwertaufgabe* für die zu Φ^{**} konjugierte Funktion, die mit Ψ^{**} bezeichnet werde, zurückführen[9]). Denn nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen besteht zwischen Φ^{**} und der konjugierten Funktion Ψ^{**} am Rand die Beziehung

$$\frac{\partial \Psi^{**}}{\partial s} = \frac{\partial \Phi^{**}}{\partial n} = -\left(\frac{\partial \Phi^{**}}{\partial r}\right)_R,$$

wo der erste Ausdruck die Tangentialableitung, der zweite die Normalableitung bedeutet. Weil die Normale gegen das Flächeninnere gerichtet ist, hat die Normalableitung das umgekehrte Vorzeichen wie die Ableitung nach dem Radius. Man erhält, da das Linienelement des Randes

$$ds = R\, d\varphi,$$

und unter Berücksichtigung von (19)

$$\frac{\partial \Psi^{**}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{c} H R \bar{u}(R) \sin\varphi.$$

Daraus findet man durch Integration die Randwerte der konjugierten Funktion

$$\Psi^{**}(R,\varphi) = \frac{1}{c} H R \bar{u}(R) \cos\varphi + C. \tag{21}$$

Bei Annahme eines mittleren Potentials null wird die Integrationskonstante $C = 0$. Die Funktion Ψ^{**} für den ganzen Bereich aus ihren Randwerten zu berechnen, ist die erste Randwertaufgabe. Von der Lösung Ψ^{**} dieser Randwertaufgabe gelangt man durch die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen zur gesuchten Funktion Φ^{**} [10]:

$$\Phi^{**}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi^{**}(R, \varphi') \frac{2\,Rr \sin(\varphi - \varphi')}{R^2 + r^2 - 2\,Rr \cos(\varphi - \varphi')}\, d\varphi',$$

oder mit (21)

$$\Phi^{**}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c} H R \bar{u}(R) \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi' \frac{2\,Rr \sin(\varphi - \varphi')}{R^2 + r^2 - 2\,Rr \cos(\varphi - \varphi')}\, d\varphi'}_{J}. \tag{22}$$

Das vorliegende Integral J tritt schon bei der Integration von (15) auf und ergibt

$$J = 2\pi \frac{r}{R} \sin\varphi.$$

Somit lautet die Lösung des zweiten Teilintegrals

$$\Phi^{**}(r, \varphi) = \frac{1}{c} H r \bar{u}(R) \sin\varphi. \tag{23}$$

3. *Die Lösung Φ.*

Die Potentialverteilung Φ über den Rohrquerschnitt ergibt sich nach (9) durch die Addition der Teillösungen (18) und (23)

$$\boxed{\Phi(r, \varphi) = \frac{1}{c} H r \frac{\bar{u}(R) + \bar{u}(r)}{2} \sin\varphi.} \tag{24}$$

Durch Bildung des Laplace'schen Ausdrucks

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \tag{25}$$

und der Normalableitung am Rand kann gezeigt werden, dass die gefundene Lösung (24) die Differentialgleichung (6) und die Randbedingung (8) erfüllt[11].

4. *Stromlinien.*

Es ist zweckmässig, den Vektor der Stromdichte in eine radiale und eine tangentiale Komponente zu zerlegen und man erhält analog zu (5)

$$\begin{aligned} \gamma i_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{c} H f(r) \sin \varphi, \\ \gamma i_\varphi &= -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{c} H f(r) \cos \varphi. \end{aligned} \tag{26}$$

Für eine Stromlinie gilt

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{i_r}{i_\varphi} = \frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{c} H f(r) \sin \varphi}{-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{c} H f(r) \cos \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \varphi \, d\varphi = \frac{2 f(r) - \bar{u}(r) - \bar{u}(R)}{\bar{u}(r) - \bar{u}(R)} \frac{dr}{r}. \tag{27}$$

Da in dieser Differentialgleichung die Variablen getrennt sind, kann man beide Seiten quadrieren und erhält als Gleichung der Stromlinien

$$-\ln |\cos \varphi| = \int \frac{2 f(r) - \bar{u}(r) - \bar{u}(R)}{\bar{u}(r) - \bar{u}(R)} \frac{dr}{r} + C. \tag{28}$$

Damit man durch eine Schar von Stromlinien auch ein Bild von der Stromdichte erhält, soll die ganze Strömung in gleiche Teilströme unterteilt und jeder Teilstrom durch eine Stromlinie dargestellt werden.

Im vorliegenden Fall wird diese Unterteilung am leichtesten längs der x-Achse vorgenommen, weil dort $i_r = 0$ ist. Es werde die Gesamtstromstärke J zwischen dem Rohrmittelpunkt $(0, 0)$ und einem Punkt $(r, 0)$ der x-Achse berechnet. Die Dicke des Rohrquerschnittes in Richtung der Rohrachse werde mit 1 cm angenommen.

$$\begin{aligned} J(r) &= \int_0^r i_\varphi(r', 0)\, dr', \\ J(r) &= \frac{1}{c}\frac{H}{2\gamma} \int_0^r [2 f(r') - \bar{u}(r') - \bar{u}(R)]\, dr'. \end{aligned} \tag{29}$$

J wird in n gleiche Stufen geteilt. Jede Stufe soll durch eine Stromlinie zusammengefasst werden. Der Mitte J_i einer Stufe

$(i = 1, 2, \cdots n)$ entspricht ein Punkt $(r_i, 0)$, welcher Ausgangspunkt der betreffenden Stromlinie ist. Durch ihn lässt sich die Integrationskonstante in (28) bestimmen, wodurch die ganze Stromlinie bestimmt ist.

5. *Fall der laminären Strömung.*

Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}(r)$ für einen Querschnitt vom Radius r findet man auf Grund des Poiseuille'schen Gesetzes (2) und der Formel (17)

$$\bar{u}(r) = \bar{u}(R)\left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{30}$$

a) Äquipotentiallinien.

Setzt man (30) in (24) ein, so findet man für das Potential

$$\boxed{\Phi(r, \varphi) = \frac{1}{c} H \frac{r}{2}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \sin \varphi.} \tag{31}$$

Hält man Φ konstant, so bilden alle Punkte (r, φ), welche der Gleichung genügen, eine Äquipotentiallinie.

Numerisches Beispiel:

$$H = 10000 \text{ Gauss}$$
$$\bar{u}(R) = 180 \text{ cm/sec}$$
$$R = 1{,}5 \text{ cm}$$
$$\Phi = 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25 \text{ mV}$$
$$\left(1 \text{ mV} = \frac{1}{3 \cdot 10^5} \text{ elektrost. E.}\right)^{4)}$$

Darstellung siehe Fig. 5.

b) Stromlinien.

Werden die Ausdrücke (2) und (30) in (27) eingesetzt, so erhält man die Differentialgleichung für die Stromlinien

$$\operatorname{tg} \varphi \, d\varphi = \frac{R^2 - 3\,r^2}{R^2 - r^2} \frac{dr}{r}$$

und durch Integration

$$\ln |\cos \varphi| = \ln \frac{|k|}{r(R^2 - r^2)},$$

somit als Gleichung der Stromlinien

$$r(R^2 - r^2) \cos \varphi = k. \tag{32}$$

Die Stromstärke zwischen Rohrzentrum und einem Punkt $(r, 0)$ beträgt nach (29)

$$J(r) = \frac{1}{c} \cdot \frac{H\bar{u}(R)}{2\gamma R^2} r(R^2 - r^2). \tag{33}$$

J erreicht sein Maximum, wenn $r = \frac{R}{\sqrt{3}}$, also

$$J_{\max} = \frac{1}{c} \cdot \frac{H\bar{u}(R)R}{3\sqrt{3}\gamma}. \tag{34}$$

Jedem Wert J_i entspricht ein r_i, das die Gleichung (33) erfüllt:

$$r_i(R^2 - r_i^2) = c\frac{2\gamma R^2}{H\bar{u}(R)} J_i. \tag{35}$$

Die Punkte $(r_i, 0)$ sind die Ausgangspunkte der Stromlinien. Sie bestimmen die Integrationskonstante k_i in der Stromliniengleichung (32):

$$k_i = r_i(R^2 - r_i^2) \cos O^0,$$

woraus nach (35)

$$k_i = c\frac{2\gamma R^2}{H\bar{u}(R)} J_i.$$

Somit lautet die Gleichung der einzelnen Stromlinien

$$\boxed{r(R^2 - r^2) \cos\varphi = c\frac{2\gamma R^2}{H\bar{u}(R)} J_i.} \tag{36}$$

Numerisches Beispiel:

H, $\bar{u}(R)$ und R wie oben

$\gamma = 10$ Ohm · cm (8%-NaCl-Lösung)

$(1 \text{ Ohm} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ elektrost. E.).

Unter diesen Annahmen wird nach (34)

$$J_{\max} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{10^4 \cdot 180 \cdot 1{,}5}{3\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}} = 1{,}56 \cdot 10^6;$$

$$1{,}56 \cdot 10^6 \text{ elektrost. E.} = 5{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ Amp.}$$

Für je 10^{-4} Amp. werde eine Stromlinie gezeichnet, also für

$$J_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ Amp.} = 0{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{9} \text{ elektrost. E.}$$
$$J_2 = 1{,}5 \quad ,,$$
$$J_3 = 2{,}5 \quad ,,$$
$$J_4 = 3{,}5 \quad ,,$$
$$J_5 = 4{,}5 \quad ,,$$

Die 5 entsprechenden Stromlinien berechnen sich nach Formel (36). Darstellung in Fig. 5.

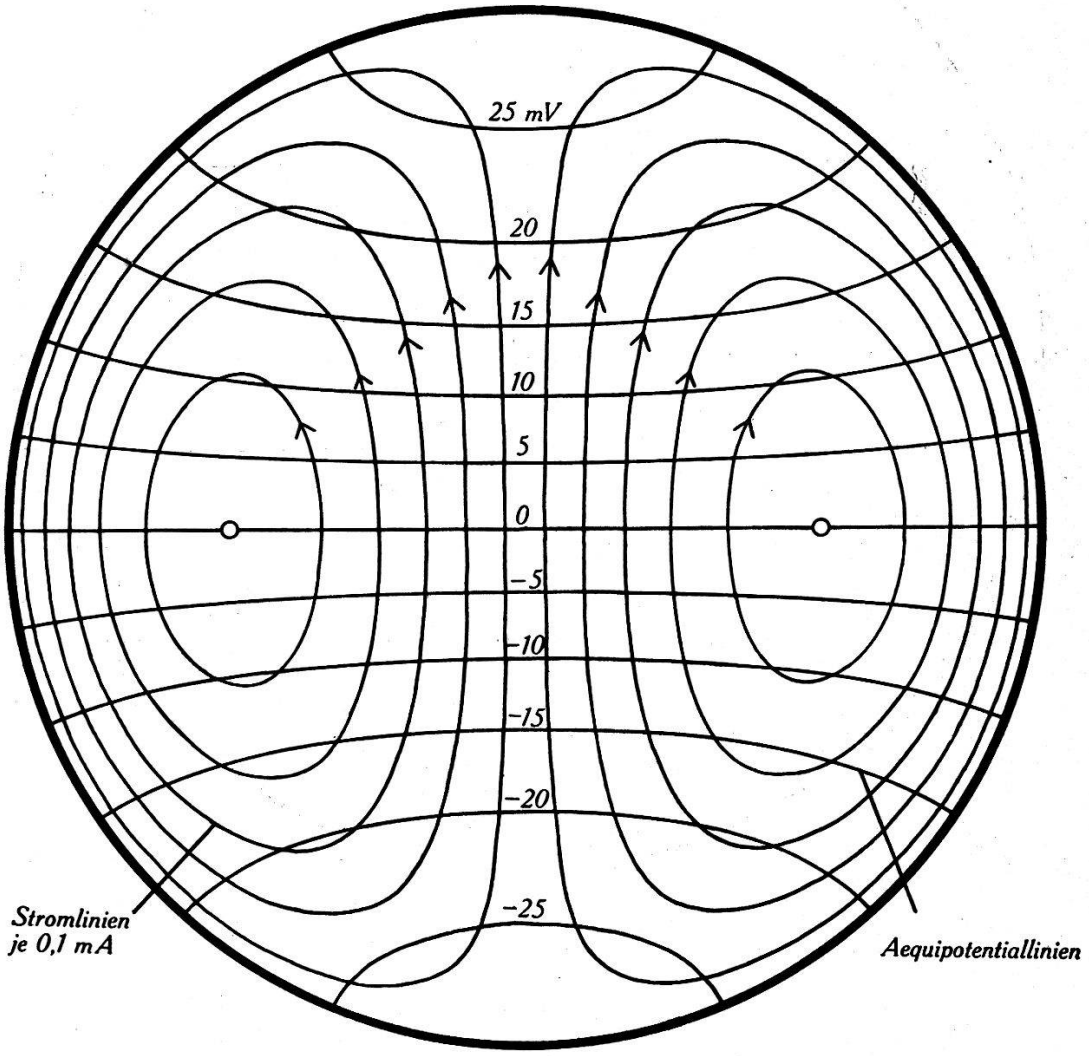

Fig. 5.
Aequipotential- und Stromlinien für den Fall der laminären Strömung.

6. *Grenzfall, dem die Turbulenz sich nähert.*

Wenn man von den Wirbelbewegungen der Turbulenz absieht und nur den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit an einer Stelle des Querschnittes betrachtet, so lässt sich bekanntlich bei turbulenter Strömung folgendes aussagen: Mit steigender

Reynold'scher Zahl nähert sich die Geschwindigkeitsverteilung immer mehr dem Zustand, wo gleiche Geschwindigkeit über dem ganzen Querschnitt herrschen würde, also dem Falle

$$\begin{aligned} f(r) &= \bar{u}(R) = \text{konst.} \\ \bar{u}(r) &= \bar{u}(R). \end{aligned} \tag{37}$$

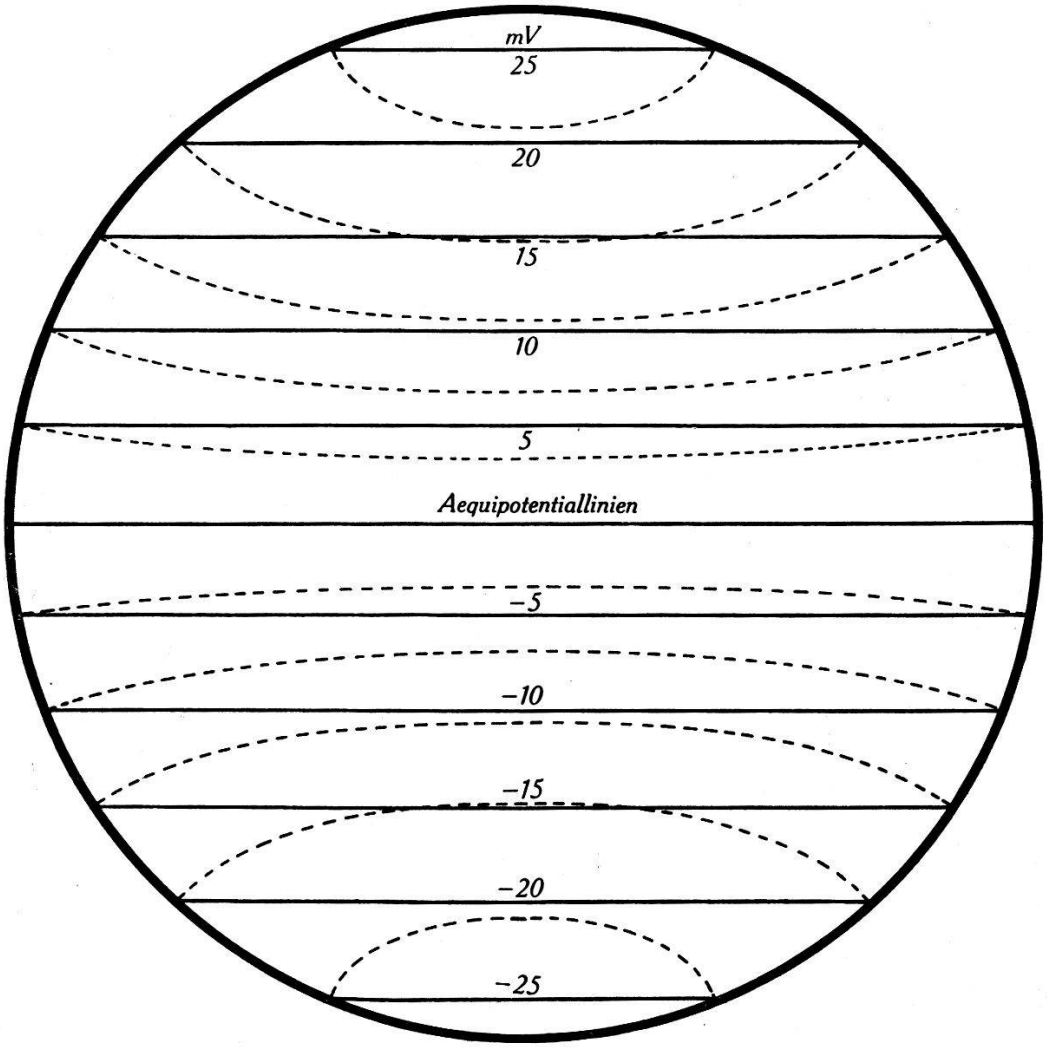

Fig. 6.
Aequipotentiallinien für turbulente (———) und laminäre (- - - - -) Strömung.

a) Aequipotentiallinien.

Nach (24) und (37) ist

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{1}{c} H \bar{u}(R) \underbrace{r \sin \varphi}_{y},$$

also in kartesischen Koordinaten

$$\boxed{y = c \frac{\Phi}{H \bar{u}(R)}.}$$

Die Aequipotentiallinien sind Parallele zur x-Achse.

Numerisches Beispiel:

$$H = 10000 \text{ Gauss}$$
$$\bar{u}(R) = 180 \text{ cm/sec}$$
$$\Phi = 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25 \text{ mV}.$$

Darstellung in Fig. 6, wobei zum Vergleich die Aequipotentiallinien aus Fig. 5 punktiert eingezeichnet sind.

b) Stromlinien.

Die Formeln (26) und (37) ergeben

$$\gamma i_r = 0,$$
$$\gamma i_\varphi = 0.$$

Beide Komponenten der Stromdichte sind null. Es fliesst also kein Wirbelstrom.

7. *Diskussion des Resultates.*

a) Aus (24) ersieht man, dass das Potential am Rand des Rohres der mittleren Durchflussgeschwindigkeit proportional ist, *unabhängig von der Geschwindigkeitsverteilung:*

$$\boxed{\Phi(R, \varphi) = \frac{1}{c} H R\, \bar{u}(R) \sin \varphi.} \tag{38}$$

Infolgedessen kann man durch die Spannung am Rand des Rohres die mittlere Durchflussgeschwindigkeit und damit das sekundliche Durchflussvolumen messen, ohne das Geschwindigkeitsprofil zu kennen.

Die Spannungsdifferenz zwischen zwei am Rand angelegten Elektroden E_1 und E_2 beträgt

$$U = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{c} H R \bar{u}(R) (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2).$$

Sie ist am grössten, wenn $\varphi_1 = 90^0$, $\varphi_2 = 270^0$, und beträgt

$$\boxed{U = \frac{1}{c} H \bar{u}(R) \cdot 2R.} \tag{38'}$$

b) Der störende Einfluss einer leitenden Rohrwand (Aderwand) kann berechnet werden:

Hat sie den gleichen spez. Widerstand wie die Flüssigkeit, so kann sie als Flüssigkeit von der Geschwindigkeit null aufgefasst werden. Ist R_i der innere, R_a der äussere Rohrradius, so ist

$$\Phi(R_a, \varphi) = \frac{1}{c} H R_a \bar{u}(R_a) \sin \varphi.$$

Das Durchflussvolumen für den inneren (R_i) und äussern (R_a) Rohrquerschnitt ist gleich:

$$\bar{u}(R_a) \cdot R_a^2 \pi = \bar{u}(R_i) \cdot R_i^2 \pi,$$

$$\bar{u}(R_a) = \bar{u}(R_i) \frac{R_i^2}{R_a^2}$$

und somit

$$\Phi(R_a, \varphi) = \frac{R_i}{R_a} \frac{1}{c} H R_i \bar{u}(R_i) \sin \varphi. \tag{39}$$

Der Faktor R_i/R_a gibt Aufschluss, um wieviel die Randspannung durch eine derartige Rohrwand verkleinert wird.

Hat die Rohrwand einen andern spez. Widerstand γ_w von gleicher Grössenordnung oder grösser als jener der Flüssigkeit, so wird bei relativ kleinen Wandstärken w an Stelle der vorliegenden eine andere Wandstärke w' angenommen, bei welcher mit dem spez. Widerstand der Flüssigkeit gerechnet werden kann. Die Wandstärke w' muss so gewählt werden, dass diese fingierte Rohrwand den gleichen Ohm'schen Widerstand in tangentialer Richtung aufweist wie die wirkliche Rohrwand:

$$\frac{\gamma}{w'} = \frac{\gamma_w}{w}.$$

Damit wird der Faktor in (39)

$$\frac{R_i}{R_a'} = \frac{R_i}{R_i + w'} = \frac{R_i}{R_i + w \frac{\gamma}{\gamma_w}}$$

und

$$\Phi(R_a, \varphi) = \Phi(R_a', \varphi) = \frac{R_i}{R_i + w \frac{\gamma}{\gamma_w}} \frac{1}{c} H R_i \bar{u}(R_i) \sin \varphi. \tag{40}$$

c) Würde die Rohrwand sehr gut leiten und sich daher auf dem ganzen Umfang das gleiche Potential null einstellen, so würde die Potentialverteilung im Innern durch Φ^* in (18) gegeben.

d) Werden Elektroden an den Rand des Querschnittes angelegt und wird zur Spannungsmessung denselben ein Strom i

entnommen, so lässt sich dieser Vorgang dem Zustand der Stromlosigkeit superponieren:

W sei der Widerstand zwischen den Elektroden. Der Potentialunterschied U der Elektroden wird infolge des Stromes um jenen Spannungsabfall vermindert, den ein Strom i über einem Widerstand W hervorruft:

$$U_{\text{gemessen}} = U_{\text{stromlos}} - i\,W. \tag{41}$$

e) Die Potentialverteilung lässt sich auch für andere Querschnittformen suchen, indem man der veränderten Geschwindigkeitsverteilung und den veränderten Randbedingungen Rechnung trägt.

III. Automatisch kompensierender Spannungsmesser.

Das ideale Instrument zur Messung der induzierten EMK. wäre ein elektrostatisches. Da es sich jedoch um Spannungen von der Grössenordnung einiger Millivolt handelt, so wären dazu die empfindlichsten Instrumente notwendig, die aber in ihrer Verwendung auch gegen Störungen verschiedener Art sehr empfindlich sind. Aus diesem Grunde wurde das Kompensationsverfahren vorgezogen und ein selbstkompensierendes Messinstrument gebaut, das eine quasistatische Messung der Spannung ermöglicht.

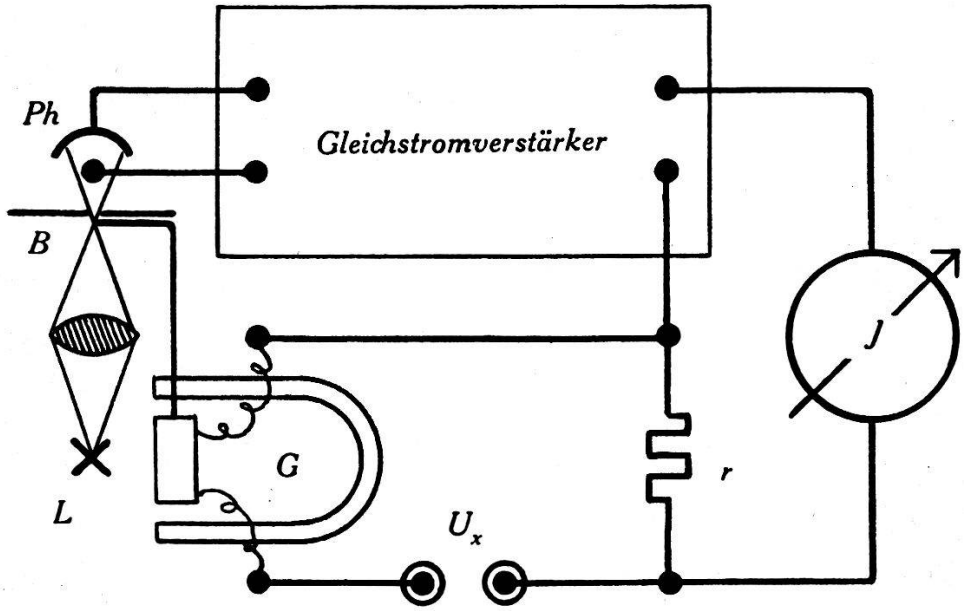

Fig. 7.

A. Prinzip der automatischen Kompensation.

Die variable Kompensationsspannung wird durch das Nullinstrument selbst gesteuert, d. h. so lange verändert, bis sie der zu messenden Spannung gleich ist und daher kein Strom mehr durch das Nullinstrument fliesst[12]).

Von den verschiedenen Möglichkeiten der Spannungssteuerung wurde die folgende gewählt:

Das direktionskraftfreie Nullinstrument, ein Galvanometer G, verändert durch Ausblendung (Sperrblende B) den auf eine Photozelle Ph fallenden Lichtstrom so lange, bis der verstärkte Photozellenstrom J auf einem Widerstand r eine Spannung ergibt, die der zu messenden Spannung U_x entgegengesetzt gleich ist:

$$U_x + J\,r = 0 \tag{42}$$

Ist diese Kompensation erreicht, so fliesst kein Strom mehr durch das Galvanometer. Es bleibt in seiner Stellung, weil keine Direktionskraft vorhanden ist.

Nimmt U_x einen andern Wert an, so fliesst wiederum ein Strom durch das Steuergalvanometer. Es bewegt sich so lange und steuert damit den Verstärkerstrom, bis es stromlos wird und die Bedingung (42) wieder erfüllt ist.

Die Stromstärke J kann durch ein gewöhnliches Messinstrument gemessen werden und U_x ergibt sich aus Gleichung (42).

B. Beschreibung des gebauten Messinstrumentes.

Fig. 8 zeigt das Schema des Apparates, in welchem Lichtquelle, Photozelle und Steuergalvanometer mit dem Verstärker zusammengebaut sind. Die Lichtquelle L wird durch eine Kondensorlinse auf die Sperrblende B abgebildet. Das von der Blende durchgelassene Licht fällt auf die Photozelle Ph (Philips, Type 3530). Einige besondere Ausführungen verdienen der Verstärker und das Nullinstrument G.

1. Der Verstärker.

Beim Entwurf des Verstärkers wurde geachtet auf Einfachheit, grosse Verstärkung, sowie auf Steuerbarkeit des Ausgangsstromes J von seinem Maximalwert bis auf null hinunter.

Der Einfachheit halber werden die Verstärkerröhren und die Photozelle direkt mit Wechselstrom gespeist, von dem eine Halbperiode benützt wird.

Der Photozellenstrom steuert die erste Verstärkerröhre (Amer. Type 6J7), die einen hohen Verstärkungsfaktor (ca. 1500) besitzt und ihrerseits die zweite Verstärkerröhre (Amer. Type 42), eine Röhre von grosser Ausgangsleistung, steuert. Obwohl nur eine Halbperiode des Wechselstromes nutzbar ist, reicht der mittlere Anodenstrom dieser Röhre bis über 30 mA. So starke Ströme

können mit Präzisionsinstrumenten grosser Direktionskraft gemessen werden und sind auch geeignet, Registrierapparate zu betreiben.

Damit die Kompensationsspannung alle Werte bis auf null hinunter bestreichen kann, muss auch der Ausgangsstrom J des Verstärkers auf null gebracht werden können. Das ist mit dem Strom der zweiten Röhre allein nicht möglich, da immer ein Reststrom bleibt. Darum wird durch den Widerstand r_4 nicht nur

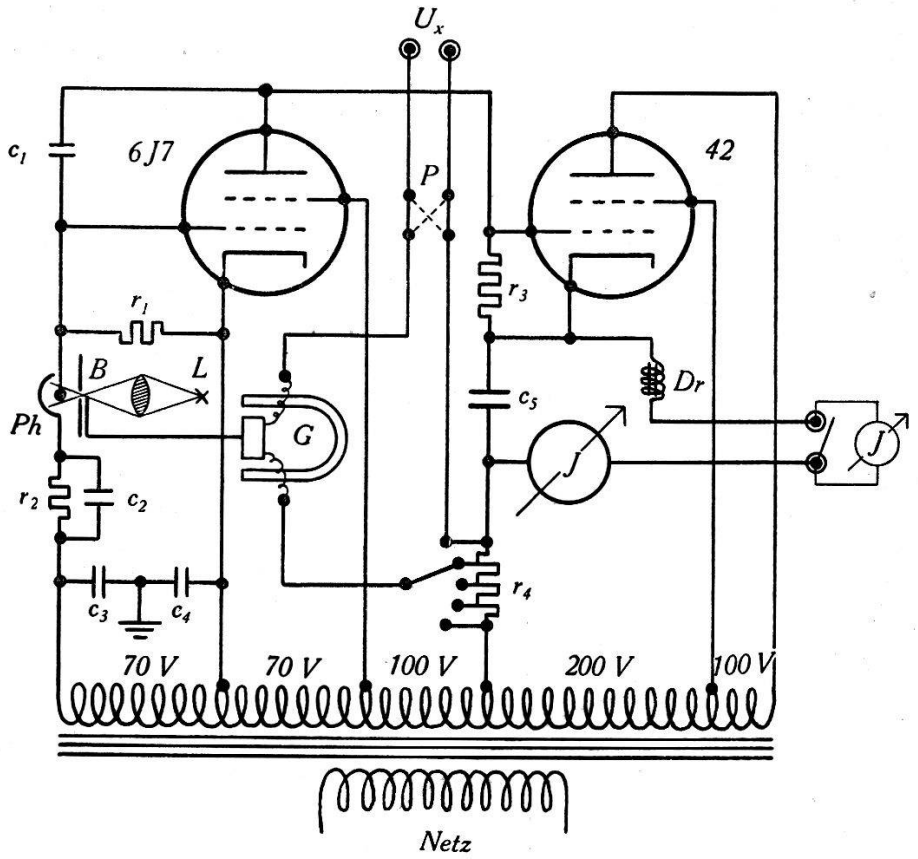

Fig. 5.

Dr = Drossel, 30 Henry; G = Steuergalv.; L = Lichtquelle, 3 Watt; P = Polwender; Ph = Photozelle. Eingebautes Messinstrument und weitere anzuschliessende Mess- und Registrierinstrumente für $J = 0$—30 mA. $c_1 = 25\ pF$; $c_2 = 500\ pF$; $c_3 = 0{,}05\ \mu F$; $c_4 = 0{,}05\ \mu F$; $c_5 = 4\ \mu F$; $r_1 = 5\ M\Omega$; $r_2 = 5\ M\Omega$; $r_3 = 20\ k\Omega$; r_4 = je nach Messbereich.

der Anodenstrom der zweiten Röhre, sondern auch jener der ersten hindurchgeführt, jedoch in umgekehrter Richtung. Der Ausgangsstrom J, der durch r_4 fliesst, ist also gleich der Differenz beider Anodenströme. Arbeitet die erste Röhre auf dem Maximum (ca. 2 mA), so befindet sich der Anodenstrom der zweiten auf seinem Minimum (ca. 1 mA), sodass J sogar negativ ist. Infolgedessen kann J alle Werte von 30 mA bis unter null annehmen.

Kondensator c_5 und Drossel glätten die von den Röhren durchgelassene Halbperiode des Wechselstromes.

*

Der Verstärker zeigte die Neigung, mit der Frequenz einer Oberschwingung des Netzes zu schwingen. Das hatte eine solche Unbeständigkeit des Verstärkerstromes zur Folge, dass das Nullinstrument die Schwankungen nicht rasch genug korrigieren konnte. Eine negative Rückkopplung mit Kondensator c_1 unterdrückte diese Störung. Der Verstärkungsgrad des Gleichstromverstärkers wird durch diese Rückkopplung nicht herabgesetzt, weil sie nur auf rasche Änderungen des Stromes dämpfend wirkt.

Durch einen Stufenschalter bei r_4 können verschiedene Messbereiche eingestellt werden.

2. *Das Nullinstrument.*

Die Genauigkeit der Kompensationsmessung hängt von drei Faktoren ab:

1. von dem Anzeigeinstrument für den Strom J,
2. von der Genauigkeit des Widerstandes r_4,
3. von der Empfindlichkeit des Nullinstrumentes G.

Die beiden ersten Faktoren können leicht den gestellten Anforderungen entsprechend gewählt werden. Daher hängt die Güte der Kompensationsmessung wesentlich vom Nullinstrument ab.

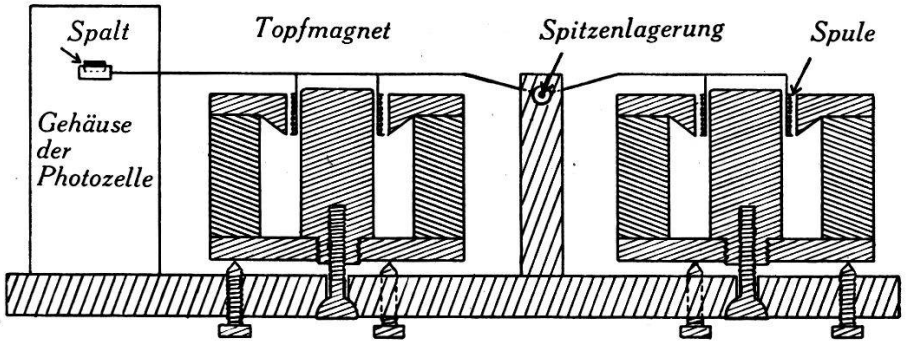

Fig. 9.

Für die Verwendbarkeit des Gerätes ist es vorteilhaft, dass das Nullinstrument eingebaut werden kann, ferner, dass es von der wagrechten Aufstellung des Apparates unabhängig und gegen mechanische Erschütterungen wenig empfindlich ist. Aus diesen Gründen, und weil die Direktionskraft praktisch null sein soll, wurde folgendes Instrument mit Spitzenlagerung konstruiert (Fig. 9).

Zwei Zylinderspulen sind symmetrisch zur Drehachse befestigt, sodass der gemeinsame Schwerpunkt in dieselbe fällt. Jede Spule taucht derart in das Feld eines Topfmagneten, dass alle Leiterelemente der Spule senkrecht zum Magnetfeld stehen und daher wirksam sind. Die elektrische Ablenkung der Spulen bewirkt in-

folge des grossen Abstandes von der Drehachse ein grosses Drehmoment, demgegenüber die Reibung der Lagerung und die Direktionskraft der Stromzuführungen bei der Achse wenig ins Gewicht fallen.

Die *Empfindlichkeit* des gebauten Modells hat für die vorliegenden Messungen genügt. Doch zeigte sich die Hauptschwierigkeit für eine Erhöhung der Empfindlichkeit: Die Eisenspuren in dem Kupfer der Galvanometerspulen bewirken eine Anziehung nach dem Ort der grössten magnetischen Feldstärke hin, sodass sich das System in eine Gleichgewichtslage einstellt. Bei einer Ablenkung macht sich eine magnetische Direktionskraft bemerkbar, welche trotz wiederholter Neuwicklung der Spulen unter sorgfältigster Fernhaltung von Eisenspuren (Staub usw.) bedeutend grösser ist, als die Direktionskraft der Stromzuführungen und der Einfluss der Reibung in den Lagern. Diese Wahrnehmung gab Veranlassung, die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen sich ein Optimum der Empfindlichkeit ergeben würde.

Das Nullinstrument ist als umso empfindlicher zu bezeichnen, auf je kleinere Spannungen und Ströme es reagiert. Die Empfindlichkeit ist daher gegeben durch die *Restleistung* L, welche infolge des Reibungswiderstandes und der störenden Direktionskraft nicht mehr hinreicht, das Nullinstrument weiter zu bewegen. Um von allem Unwesentlichen abzusehen, werde ein Leiter betrachtet, der senkrecht zum Magnetfeld von Strom durchflossen wird und senkrecht zu Strom und Feld beweglich ist.

Es sei:

V = Volumen des Leiters in cm^3
ϱ = Dichte des Leiters in g/cm^3
γ = spez. Widerstand des Leiters in Ohm·cm
i = Stromdichte in A/cm^2
H = magnetische Feldstärke in Gauss.

Die vom Leiter aufgenommene Leistung in Watt beträgt:

$$L = V i^2 \gamma. \tag{43}$$

Sie soll zu einem Minimum gemacht werden. Zunächst sind i und V variabel. Nun aber muss als Nebenbedingung verlangt werden, dass die durch den Strom bewirkte Kraft den Störkräften das Gleichgewicht hält, und zwar im ungünstigsten Fall, wo alle Störkräfte gleichgerichtet sind.

Die durch den Strom bewirkte Kraft in Dyn ist durch das Biot-Savart'sche Gesetz gegeben:

$$K = \tfrac{1}{10} H i V. \tag{44}$$

Die von der Reibung herrührende Kraft soll proportional der Masse des Leiters angenommen werden:

$$K_r = k_r M = k_r V \varrho . \tag{45}$$

Die magnetischen Störkräfte wachsen bekanntlich ungefähr mit dem Quadrat der Feldstärke und linear mit der Masse des Eisengehaltes, die bei gleich bleibendem Grad der Eisenverunreinigung wiederum proportional der Masse des Leiters ist[13]):

$$K_m = k_m M H^2 = k_m V \varrho H^2. \tag{46}$$

Mit K_{st} werde die von der Steuerung des Lichtes (Luftkonvektion) und von den Stromzuführungen verursachte Kraft bezeichnet.

Es muss im ungünstigsten Falle sein:

$$| K | = | K_{st} | + | K_r | + | K_m |,$$

sodass sich als Nebenbedingung für i und V ergibt:

$$\tfrac{1}{10} H i V = K_{st} + V \varrho (k_r + k_m H^2), \tag{47}$$

wobei H als Parameter betrachtet wird, und für H, i, K_{st}, k_r und k_m nur die absoluten Werte in Frage kommen.

Infolge dieser Nebenbedingung ist i durch V festgelegt:

$$i = \frac{10}{H V} [K_{st} + V \varrho (k_r + k_m H^2)], \tag{48}$$

und wird durch Einsetzen des Ausdrucks (48) in (43) eliminiert:

$$L = \frac{100 \gamma}{H^2} \left[\frac{K_{st}^2}{V} + 2 K_{st} \varrho (k_r + k_m H^2) + \varrho^2 (k_r + k_m H^2)^2 V \right]. \tag{49}$$

$$\frac{dL}{dV} = \frac{100 \gamma}{H^2} \left[-\frac{K_{st}^2}{V^2} + \varrho^2 (k_r + k_m H^2)^2 \right] = 0,$$

woraus sich als *erste Bedingung* für ein Minimum der Leistung ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{K_{st}}{\varrho (k_r + k_m H^2)} \\ \text{oder} \quad K_r + K_m &= K_{st}. \end{aligned}} \tag{50}$$

Bei Einhaltung der Bedingung (50) ergibt sich für die Leistung:

$$L = 400 \gamma \varrho K_{st} \left(k_m + \frac{k_r}{H^2} \right). \tag{49'}$$

Daraus ist eine *zweite Bedingung* ersichtlich, welche die Wahl des Parameters H betrifft: L wird klein, wenn

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{k_r}{H^2} \ll k_m \\ \text{oder} \quad &K_m \gg K_r. \end{aligned}} \tag{51}$$

Wenn diese Bedingung realisierbar ist, so vereinfacht sich die erste Bedingung (50):

$$V = \frac{K_{st}}{\varrho\, k_m H^2} \tag{50'}$$

oder

$$K_m = K_{st}.$$

Um ein empfindliches Galvanometer zu bauen, müsste nun nach (49′), (51) und (50) wie folgt vorgegangen werden:

1. Es wird ein Leitermaterial gewählt, für welches das Produkt $\gamma\varrho$ aus spez. Widerstand und Dichte klein ist.
2. Durch ein zweckmässiges System soll die Störkraft K_{st} klein gemacht werden, welche durch die Stromzuführungen und die Steuerung des Lichtes verursacht wird.
3. Die Konstante k_m der magnetischen Störkraft soll klein sein, indem ein möglichst eisenarmes Leitermaterial gewählt und das Magnetfeld möglichst homogen gemacht wird.
4. Die Konstante k_r der Reibung soll, wenn möglich, so klein und die magnetische Feldstärke H so gross sein, dass entsprechend Bedingung (51) $k_m H^2$ ein Mehrfaches von k_r beträgt.
5. Das Volumen des verwendeten Leiters soll der Bedingung (50) resp. (50′) entsprechen.

Es sei einer späteren Arbeit vorbehalten, die obigen Konstanten für verschiedene Materialien und Galvanometersysteme zu untersuchen und eventuell das beschriebene System dementsprechend zu dimensionieren.

Bei dem gebauten Modell erwies sich K_m entgegen Bedingung (50) bedeutend grösser als K_{st}. Wird zur Erfüllung von (50) die Spulenmasse verkleinert, so hat das nebenbei auch eine kürzere Einstellzeit zur Folge. Sie beträgt bei dem gebauten Galvanometer 1—2 Sekunden. Sollte bei kleinen Spannungsbereichen wegen hoher magnetischer Feldstärke die Dämpfung des Nullinstrumentes zu gross sein, so dass es nur kriechend die Kompensation ausführen würde, so lässt sich der Verstärkerstrom zur Entdämpfung heranziehen.

IV. Messungen.

Nachdem der Zusammenhang zwischen mittlerer Durchflussgeschwindigkeit und Spannung an den Elektroden theoretisch abgeleitet wurde, soll er auch experimentell nachgeprüft und der Grad der Genauigkeit einer darauf beruhenden Geschwindigkeitsmessung bestimmt werden. Bei den Versuchen wird darum gleichzeitig die Spannung an den Elektroden und die mittlere Durchflussgeschwindigkeit gemessen.

A. Erzeugung und Messung der Flüssigkeitsströmung.

Die Anordnung zur Erzeugung eines konstanten Flüssigkeitsstromes bestand aus einem Gefäss von ca. 2 m Höhe, an dessen unteres Ende ein 3 m langes, wagrechtes Glasrohr seitlich angeschlossen war. In der Mitte wurde das Glasrohr unterteilt, um das Zwischenstück mit Elektroden und Magnetfeld einzusetzen (Fig. 10). Ein Quetschhahn an der Ausflussmündung des Rohres gestattete die Veränderung der Durchflussgeschwindigkeit. Durch eine Pumpe wurde die Flüssigkeit wieder ins Gefäss hinaufgepumpt[14]).

Die Durchflussgeschwindigkeit wurde durch die Flüssigkeitsmenge gemessen, die während einer bestimmten Zeit durchfloss.

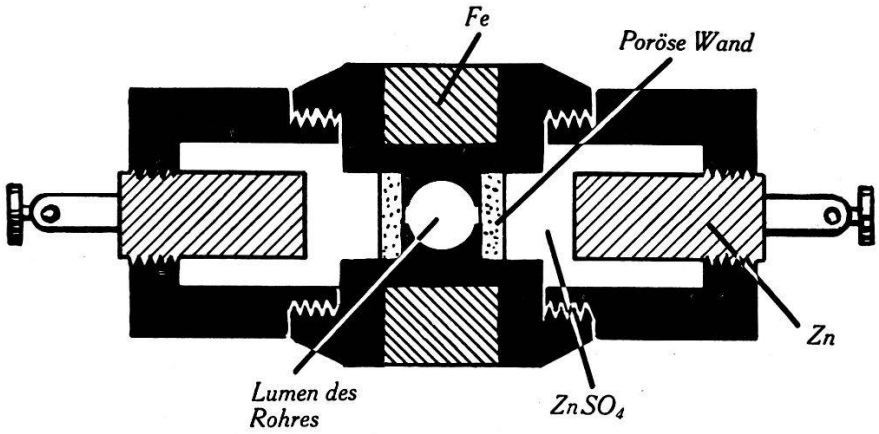

Fig. 10.

B. Spannungsmessung.

Da die zu messende Spannung von der Grössenordnung einiger Millivolt ist, so müssen Störspannungen infolge Elektrodenpolarisation möglichst ausgeschaltet werden. Diesem Zweck dienten sog. unpolarisierbare Elektroden, wie sie bei biologischen Messungen schon lange Verwendung finden (Fig. 10).

Es zeigte sich, dass selbst diese Elektroden eine kleine Polarisationsspannung gegeneinander aufwiesen, die zeitlich nicht konstant blieb und sich besonders bei Temperaturerhöhung durch die

Magnetpolschuhe veränderte. Sie wurde durch die variable Spannung eines Potentiometers von Zeit zu Zeit kompensiert. Die auch so noch bleibende kleine Polarisationsspannung p wurde durch Umkehrung des Magnetfeldes eliminiert. Für jedes Messresultat wurden zwei Messungen I und II mit umgekehrtem Magnetfeld vorgenommen

$$\left.\begin{aligned} p + U &= U_{\mathrm{I}} \\ p - U &= -U_{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\} U' = \frac{U_{\mathrm{I}} + U_{\mathrm{II}}}{2} = r\,\frac{J_{\mathrm{I}} + J_{\mathrm{II}}}{2}. \tag{52}$$

Der erregende Strom des Feldmagneten wurde während des Versuches konstant gehalten.

Da auch die metallischen Teile von Pumpe und Gefäss, mit denen die Flüssigkeit in ihrem Kreislauf in Berührung kommt, beträchtliche Elektrodenpotentiale gegen dieselbe aufweisen und gewöhnlich schlecht von der Erde isoliert sind, muss das Kompensationsmessinstrument gegen Erde und Primärspule des Transformators gut isoliert sein, weil sonst in dem Kreis Erde-Gefäss (Pumpe)–Flüssigkeit–Messinstrument–Erde Störspannungen auftreten.

Würde die Spannungsmessung rein elektrostatisch erfolgen, so genügte die geringe Leitfähigkeit der Flüssigkeiten zur Messung. Bei der Kompensationsmessung dagegen ist wegen der Empfindlichkeitsgrenze des Nullinstrumentes stets mit einem gewissen Reststrom i zu rechnen. Die aus (52) gefundene Spannung, die mit U' bezeichnet werde, muss infolge dieses Reststromes um einen Wert Δ korrigiert werden:

$$U = U' + \Delta. \tag{53}$$

Die Korrektur ist gleich dem Spannungsabfall, den der Reststrom i auf dem Widerstand des ganzen Galvanometerkreises hervorruft:

$$\Delta = i(R_g + r + W), \tag{54}$$

wo (siehe Fig. 7) R_g den Widerstand des Galvanometers, r den Widerstand zur Erzeugung der Kompensationsspannung und W den Widerstand zwischen den Messelektroden bedeutet, die mit den Klemmen U_x verbunden werden.

Beim verwendeten Galvanometer wird der Reststrom i fast gänzlich durch störende magnetische Direktionskräfte bewirkt. Er ist daher abhängig von der Einstellung des Galvanometers; und weil jeder Galvanometerstellung ein bestimmter Verstärkerstrom J entspricht, kann i als Funktion desselben angegeben werden (Fig. 11):

$$i = F(J). \tag{55}$$

Bei einer Kompensationsmessung ist es bekanntlich am günstigsten, wenn der Widerstand des Nullinstrumentes von gleicher Grössenordnung ist, wie alle übrigen Widerstände seines Stromkreises zusammen[12]). Es soll also sein

$$R_g \sim W + r. \tag{56}$$

Um die Spannungskorrektur (54) klein zu halten, kann die Flüssigkeit durch Beigabe eines Salzes leitfähiger gemacht werden. Dadurch wird W herabgesetzt, und die Wahl von R_g erfolgt dem Widerstand W entsprechend.

C. Messungswerte.

Es soll hier eine Messreihe angeführt werden, bei der unter sonst unveränderten Bedingungen zwei Flüssigkeiten mit verschiedener Viskosität Verwendung fanden, sodass sowohl turbulente als auch laminäre Strömung erzielt wurde.

Angaben und Bezeichnungen:

$d = 0{,}6$ cm = innerer Rohrdurchmesser

$q = 0{,}283$ cm² = Rohrquerschnitt

W = Widerstand zwischen den Messelektroden

ϱ = Dichte der Flüssigkeit

G = Gewicht der während t Sekunden durchfliessenden Flüssigkeit

$\bar{u} = \frac{G}{\varrho \cdot q \cdot t}$ = mittlere Durchflussgeschwindigkeit

η = Viskositätskoeffizient

$\frac{\varrho \cdot d/2}{\eta} \bar{u}$ = Reynold'sche Zahl

$k = \frac{U}{\bar{u}}$ = Proportionalitätsfaktor zwischen der induzierten Spannung U und der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$

$k_m = \frac{\Sigma k}{n}$ = Mittelwert der aus den n Messungen berechneten k-Werte

$a = k_m - k$ = Abweichung der einzelnen k-Werte vom Mittelwert

$p = 100 \frac{a}{k_m}$ = prozentualer Fehler der einzelnen k-Werte

$p_m = \sqrt{\frac{\Sigma p^2}{n}}$ = mittlerer prozentualer Fehler der Einzelmessung.

Die Stärke des Magnetfeldes betrug ca. 2500 Oersted.

Der Widerstand des Nullinstrumentes betrug $R_g = 55$ Ohm, der Widerstand r je nach Messbereich $r = 0{,}1$ resp. $0{,}333$ Ohm, und der Reststrom i war als folgende Funktion des Verstärkerstromes J gegeben (Fig. 11):

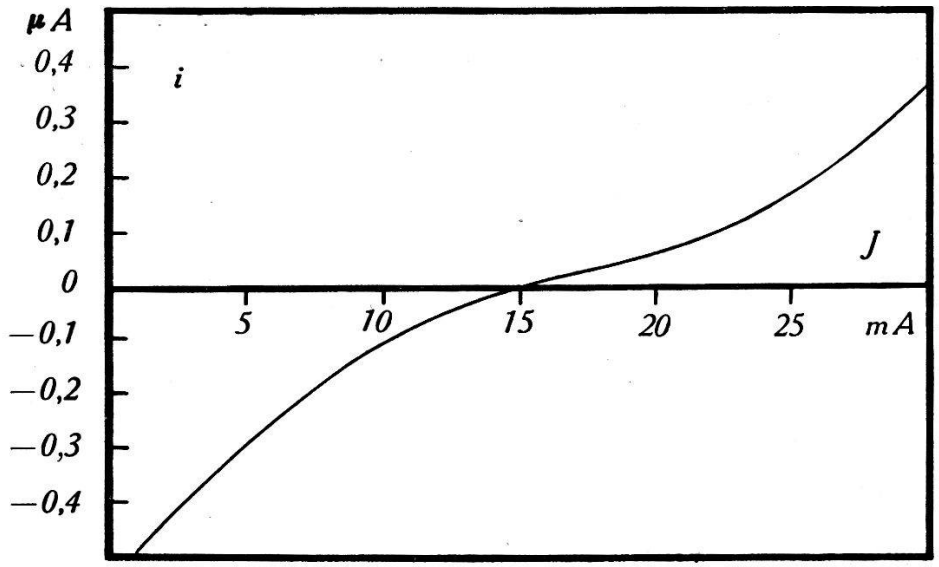

Fig. 11.

Die Tabellen 1 und 2 geben besondere Angaben und die Einzelwerte der Messreihe.

Tabelle 1.

Angaben zu den Messungen	Nr. 1—16	Nr. 17—40
Flüssigkeit	Wasser + NaCl	Wasser + NaCl + Gummi arabicum
$\varrho \left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right]$	1,132	1,174
$\eta \left[\frac{\text{Dyn} \cdot \text{sec}}{\text{cm}^2}\right]$	0,016	0,069
Reynold'sche Zahl	$21\,u$	$5\,\bar{u}$

D. Ergebnisse.

1. *Unabhängigkeit vom Geschwindigkeitsprofil.*

Um die Resultate bei verschiedenen Geschwindigkeitsprofilen zuverlässig miteinander vergleichen zu können, wurden die angeführten Messungen für laminäre und turbulente Strömung mit einer und derselben Versuchsapparatur unmittelbar nacheinander ausgeführt. Der Rohrdurchmesser wurde so gewählt, dass mit Wasser turbulente Strömung entstand, während eine Mischung von Wasser mit Gummi arabicum nur laminäre Strömung ergab.

Tabelle 2

Nr.	Zeit	W Ohm	Verstärkerstr. mA			Mess-. ber. mV	Spannung in mV		
			J_{I}	J_{II}	J		U'	Δ	U
1	9.30	114	11,70	11,80	11,75	10	3,91	– 0,01	3,90
2	9.40	119	11,65	12,13	11,89	10	3,96	– 0,01	3,95
3	9.46	114	11,84	11,64	11,74	10	3,91	– 0,01	3,90
4	9.50	110	12,08	11,36	11,72	10	3,90	– 0,01	3,89
5	10.00	105	10,48	10,52	10,50	10	3,50	– 0,01	3,49
6	10.03	95	10,97	10,21	10,59	10	3,53	– 0,01	3,52
7	10.09	98	22,06	19,54	20,80	3	2,08	0,02	2,10
8	10.15	79	16,22	13,60	14,91	3	1,49	0,01	1,50
9	10.20	144	11,13	12,37	11,75	10	3,92	– 0,01	3,91
10	10.25	147	12,00	11,58	11,79	10	3,93	– 0,01	3,92
11	10.30	144	11,98	12,02	12,00	10	4,00	– 0,01	3,99
12	14.40	150	12,32	12,12	12,22	10	4,07	– 0,01	4,06
13	14.45	146	12,02	12,06	12,04	10	4,02	– 0,01	4,01
14	14.50	140	12,06	12,18	12,12	10	4,04	– 0,01	4,03
15	14.54	140	12,00	12,12	12,06	10	4,02	– 0,01	4,01
16	15.00	130	12,12	12,08	12,10	10	4,03	– 0,01	4,02
17	15.50	157	10,43	10,27	10,35	10	3,45	– 0,02	3,43
18	15.55	161	10,22	9,93	10,08	10	3,36	– 0,02	3,34
19	16.00	132	5,43	5,47	5,45	10	1,82	– 0,05	1,77
20	16.04	115	17,17	16,57	16,87	3	1,69	0,01	1,70
21	16.08	120	20,84	22,32	21,58	3	2,16	0,03	2,19
22	16.14	118	21,04	21,50	21,27	3	2,13	0,03	2,16
23	16.20	115	21,10	21,36	21,23	3	2,12	0,03	2,15
24	16.27	115	21,52	20,94	21,23	3	2,12	0,03	2,15
25	16.32	112	21,16	21,36	21,26	3	2,13	0,03	2,16
26	16.38	97	13,70	13,78	13,74	3	1,37	0	1,37
27	16.43	100	14,30	14,90	14,60	3	1,46	0	1,46
28	16.47	100	14,12	14,82	14,47	3	1,45	0	1,45
29	16.52	100	14,27	14,17	14,22	3	1,42	0	1,42
30	16.57	100	13,68	14,04	13,86	3	1,39	0	1,39
31	17.14	112	10,63	10,23	10,43	10	3,48	– 0,02	3,46
32	17.20	132	10,36	10,50	10,43	10	3,48	– 0,02	3,46
33	17.25	142	10,28	10,82	10,55	10	3,52	– 0,02	3,50
34	17.29	142	10,40	10,50	10,45	10	3,48	– 0,02	3,46
35	17.34	140	10,36	10,50	10,43	10	3,48	– 0,02	3,46
36	17.39	140	10,45	10,59	10,52	10	3,50	– 0,02	3,48
37	17.50	140	10,38	10,84	10,61	10	3,53	– 0,02	3,51
38	17.53	135	10,36	10,58	10,47	10	3,49	– 0,02	3,47
39	17.56	140	10,26	10,98	10,62	10	3,54	– 0,02	3,52
40	17.59	140	10,02	11,00	10,51	10	3,50	– 0,02	3,48

Tabelle 2

G g	t sec	$\bar{u}$ cm/sec	Reyn. Zahl	k $\frac{\mu V.sec}{cm}$	Fehler von k			Nr.
					a	p	p^2	
1082	17,1	197	4200	19,8	0,2	1	1	1
1084	17,1	198	4200	20,0	0	0	0	2
715	11,2	199	4200	19,6	0,4	2	4	3
1094	17,3	198	4200	19,6	0,4	2	4	4
1007	17,7	178	3800	19,6	0,4	2	4	5
986	17,2	179	3800	19,7	0,3	1,5	2,3	6
693	20,5	105,5	2200	19,9	0,1	0,5	0,2	7
711	29,5	75,2	1600	19,9	0,1	0,5	0,2	8
1096	17,3	198	4200	19,8	0,2	1	1	9
1050	16,5	199	4200	19,7	0,3	1,5	2,3	10
1144	17,6	203	4300	19,7	0,3	1,5	2,3	11
1122	17,4	201	4200	20,2	−0,2	−1	1	12
1089	17,2	198	4200	20,2	−0,2	−1	1	13
1095	17,2	199	4200	20,2	−0,2	−1	1	14
1106	17,2	201	4200	20,0	0	0	0	15
1109	17,3	200	4200	20,1	−0,1	−0,5	0,2	16
982	17,2	172	880	19,9	0,1	0,5	0,2	17
969	17,1	171	880	19,5	0,5	2,5	6,3	18
931	31,6	88,6	450	20,0	0	0	0	19
924	32,8	84,8	430	20,1	−0,1	−0,5	0,2	20
958	26,9	107	550	20,5	−0,5	−2,5	6,3	21
1054	29,6	107	550	20,2	−0.2	−1	1	22
1087	30,5	107	550	20,1	−0,1	−0,5	0,2	23
1045	29,4	107	550	20,1	−0,1	−0,5	0,2	24
917	25,8	107	550	20,2	−0,2	−1	1	25
789	35,9	66,2	340	20,7	−0,7	−3,5	12,2	26
679	28,4	71,9	370	20,3	−0,3	−1,5	2,3	27
745	31,5	71,1	370	20,4	−0,4	−2	4	28
854	36,3	70,8	370	20,0	0	0	0	29
1000	42,6	70,6	370	19,7	0,3	1,5	2,3	30
887	15,3	174	890	19,9	0,1	0,5	0,2	31
1033	17,9	174	890	19,9	0,1	0,5	0,2	32
1175	20,4	173	890	20,2	−0,2	−1	1	33
1286	22,2	174	890	19,9	0,1	0,5	0,2	34
1198	20,7	174	890	19,9	0,1	0,5	0,2	35
1200	20,7	174	890	20,0	0	0	0	36
1069	18,3	176	890	19,9	0,1	0,5	0,2	37
1129	19,4	175	890	19,8	0,2	1	1	38
974	16,6	177	890	19,9	0,1	0,5	0,2	39
1292	22,1	176	890	19,8	0,2	1	1	40
				798,9			64,9	

Ist die zwischen den Elektroden hervorgerufene Spannungsdifferenz U nur abhängig von der mittleren Durchflussgeschwindigkeit $\bar{u}$, nicht aber von der Art des Strömungsprofils, so muss U bei laminärer und turbulenter Strömung die gleiche lineare Funktion von $\bar{u}$ sein. Fig. 12 zeigt alle Messresultate, die sich eintragen

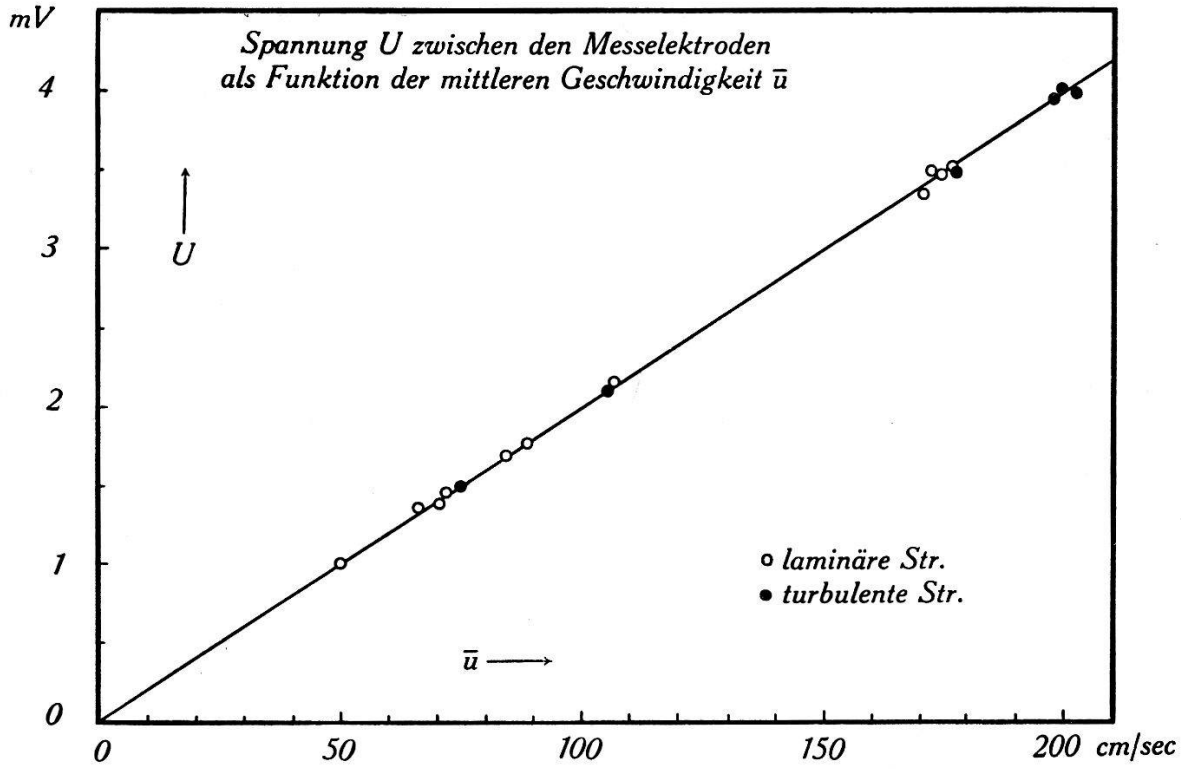

Fig. 12.

liessen, ohne dass die Punkte einander überdeckten. Daraus ist die gleichmässige Streuung der Punkte laminärer und turbulenter Strömung um eine gemeinsame Gerade ersichtlich, und somit der berechnete Einfluss der Wirbelströme auf die Elektrodenspannung bestätigt. Denn *ohne Wirbelstromverluste* würde die Spannung betragen:

für lam. Str. nach (3') . . . . $U = 1{,}33 \cdot \frac{\mu}{c} H \bar{u} \cdot 2R$,

für turb. Str. mit den Strömungsprofilen verschiedener Reynold'scher Zahlen[15]) nach (2') berechnet:

Reynold'sche Zahl = 1330 . $U = 1{,}17 \cdot \frac{\mu}{c} H \bar{u} \cdot 2R$,

„ „ = 1600 . $U = 1{,}14 \cdot \frac{\mu}{c} H \bar{u} \cdot 2R$,

„ „ = 2800 . $U = 1{,}12 \cdot \frac{\mu}{c} H \bar{u} \cdot 2R$,

für den Grenzfall der Turbulenz, wo die Geschwindigkeit über den ganzen Querschnitt gleich wäre und keine elektrischen Wirbelströme entstehen würden, nach

$$(4'): \ldots\ldots\ldots\ldots \quad U = 1{,}00 \cdot \frac{\mu}{c} H\bar{u} \cdot 2R.$$

Diese Unterschiede der Proportionalitätskonstanten gehen weit über den Streuungsbereich der Messungen hinaus und müssten sich daher deutlich bemerkbar machen.

Das theoretische Resultat *mit Einbezug der Wirbelströme* ergibt dagegen nach (38′):

$$U = 1{,}00 \cdot \frac{\mu}{c} H\bar{u} \cdot 2R, \qquad (\mu = 1)$$

d. h. es bleibt jene Spannung übrig, die sich bei gleicher Geschwindigkeit über den ganzen Querschnitt (keine Wirbelströme!) ergeben würde, und was bei gewölbtem Geschwindigkeitsprofil an Spannung mehr erzeugt wird, wird durch die Wirbelströme gerade aufgebraucht. So ist die Art der Geschwindigkeitsprofile ohne Einfluss auf die Elektrodenspannung, was mit dem experimentellen Ergebnis übereinstimmt.

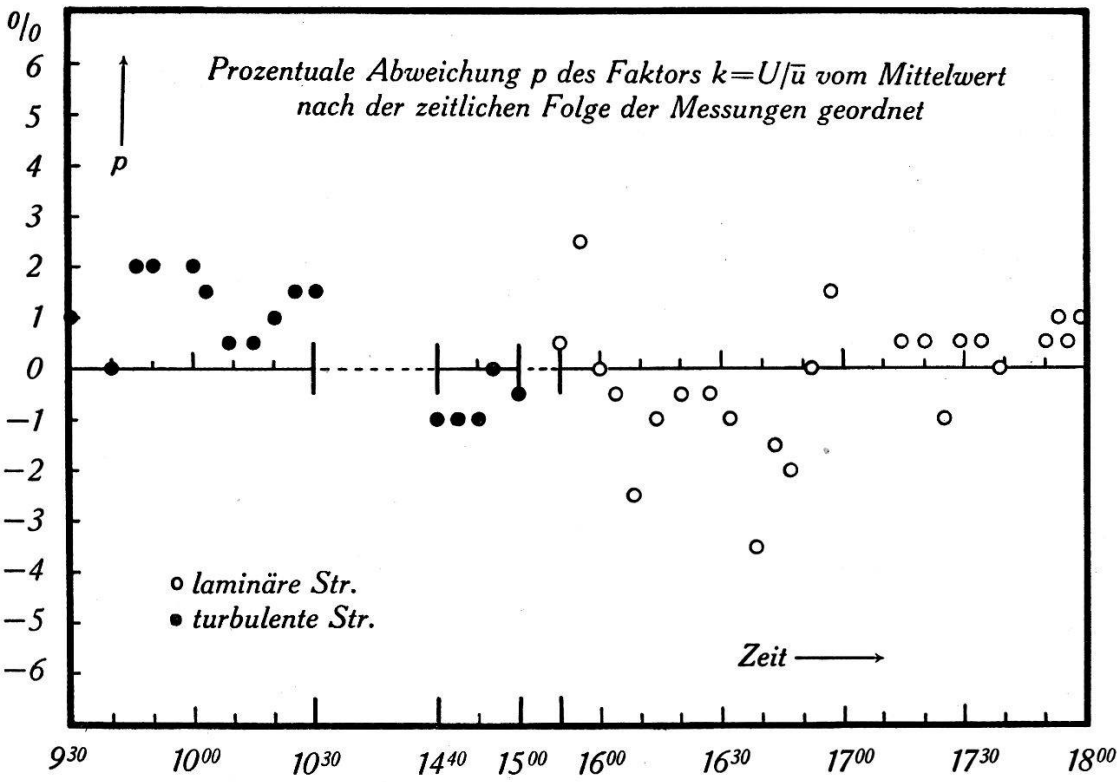

Fig. 13.

2. *Genauigkeit der Messungen.*

Die vorliegenden Messungen sind in bezug auf den Genauigkeitsgrad als erster Versuch zu betrachten. Fig. 13 zeigt die Streuung der Einzelmessungen um den Mittelwert in Prozenten.

Der mittlere prozentuale Fehler der Einzelmessung beträgt:

$$p_m = \sqrt{\frac{\Sigma p^2}{n}} = \sqrt{\frac{64,9}{40}} = 1,3\%.$$

Er dürfte hauptsächlich auf die längere Zeitdauer einer Messung der Ausflussmenge (15—40 sec) zurückzuführen sein. Im Verlauf dieser Zeit traten kleine Schwankungen der Elektrodenspannung U auf, über die bei der Ablesung des Messinstrumentes schätzungsweise gemittelt werden musste. Diese Schwankungen waren bedingt durch kleine Schwankungen der Durchflussgeschwindigkeit, des Elektrodenpotentials gegen die Rohrflüssigkeit und des Speisestroms des Elektromagneten, der vor jeder Messung kontrolliert wurde, aber während der Messung noch kleinere momentane Schwankungen ausführen konnte. Ferner muss bei der Messung der Ausflusszeit mit einem möglichen Fehler von 0,1—0,2 Sekunden gerechnet werden.

Während die längere Zeitdauer einer Messung und die dabei auftretenden Schwankungen der Durchflussgeschwindigkeit, sowie die Fehler der Zeitmessung als Mangel nicht der elektrischen, sondern der gleichzeitigen mechanischen Messung der Durchflussgeschwindigkeit anhaften, betreffen die Schwankungen des Magnetfeldes und des Elektrodenpotentials gegen die Flüssigkeit die elektrische Messmethode selbst. Bei grösserer Erfahrung in Herstellung und Anbringung der unpolarisierbaren Elektroden dürfte sich jedoch eine grössere Konstanz des Elektrodenpotentials erreichen lassen. Damit würde die Umkehrung des Magnetfeldes überflüssig, und es liesse sich ein Dauermagnet an Stelle des Elektromagneten verwenden. Dadurch wäre die Konstanz des Magnetfeldes sichergestellt und die Erwärmung der Messelektroden durch den Magneten, welche das Elektrodenpotential stören kann, wäre ebenfalls vermieden. Die Messapparatur würde keine Wartung mehr brauchen, da der Ausgangsstrom des Verstärkers ein Registrierinstrument betätigen kann.

Zusammenfassung.

Die Anwendung des Induktionsgesetzes bei flüssigen Leitern zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit wird kurz dargelegt. Es wird theoretisch untersucht, welche elektrische Potentialverteilung sich über einen runden Rohrquerschnitt in Abhängigkeit von der Geschwindigkeitsverteilung einstellt. Die Lösung ergibt, dass dieses Potential zwar im Innern des Querschnittes von der Art des Geschwindigkeitsprofils abhängt, am Rand des Quer-

schnittes jedoch davon unabhängig ist. Daher kann durch Messung des Potentialunterschieds zweier Randpunkte die mittlere Durchflussgeschwindigkeit ermittelt werden, ohne Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung, was durch das Experiment mit laminärer und turbulenter Strömung bestätigt wird. Ein automatisch kompensierender Spannungsmesser zur Ausführung einer quasi-statischen Spannungsmessung wird beschrieben, durch welchen Registrierinstrumente und Präzisionsmessinstrumente betätigt werden können. Über die Empfindlichkeit des Nullinstrumentes werden Überlegungen angestellt.

Ein spezieller Dank sei hier ausgesprochen Herrn Prof. Dessauer, dem Leiter des Physikalischen Institutes, für die Anregungen und das Wohlwollen, womit er diese Arbeit gefördert hat, und Herrn Prof. Pfluger für die wertvollen Ratschläge bei Lösung des mathematischen Teiles. Ebenso danke ich Herrn Prof. Müller, dem Leiter des Physiologischen Institutes der Universität, dafür, dass er mir die Einrichtung seines Institutes in gütiger Weise zur Ausführung von Messungen zur Verfügung gestellt hat.

Anmerkungen.

[1]) Pratt, Electrical instruments used in the measurement of flow. Journ. Amer. Inst. Electr. Eng. **48** (1929), 142—146.

[2]) Bei den ersten Versuchen mit elektromagnetischen Pumpen für Quecksilber lagen Pumpdrucke bis zu 20 Atm. vor. Der Druck lässt sich ohne Schwierigkeit auf 50 und mehr Atm. steigern. Wegen der grossen entwickelten Joule'schen Wärme ist jedoch der Wirkungsgrad niedrig. Ein Wirkungsgrad von 50% stellt bereits einen günstigen Fall dar. Für andere Flüssigkeiten als Quecksilber kommt wegen der bedeutend kleineren elektrischen Leitfähigkeit diese Pumpenart nicht in Frage.

Es fand sich später, dass auch Jul. Hartmann bei seinen Arbeiten über Quecksilberwellenstrahlgleichrichter auf die Idee der elektromagnetischen Pumpe gekommen ist und unter der Überschrift „Hg-Dynamics" eine erste Arbeit darüber veröffentlicht hat (Medd. Kopenhagen **15** (1937), Nr. 6 & 7). Bei seinen Untersuchungen verwendete er jedoch eine der bekannten Methoden zur Messung der Durchflussgeschwindigkeit.

[3]) Vergl. Mitteilung an der Tagung der Schw. Physik. Ges. in Locarno (Sept. 1940). Helv. Physica Acta **13** (1940), 343f.

Das gleiche Prinzip ist von physiologischer Seite zur Messung der Blutgeschwindigkeit in Adern herangezogen worden. Mehrere Physiologen haben unabhängig voneinander dieses Problem in Angriff genommen. Diesbezügliche Arbeiten oder Notizen sind erschienen:

1. Williams, Proc. Phys. Soc. London 1930, p. 466.
2. Fabre, Comptes Rendus **194** (1932), 1097f.
3. Kolin, Proc. Soc. Exper. Biol. and Med. **35** (1936), 53—56.
4. Wetterer, ZS. f. Biologie **98** (1937), 26—38.
5. Kolin & Katz, Ann. Physiol. et Physicochim. Biol. **13** (1937), 1022—1025, mit Diskussion 1026—1029.

6. Katz & Kolin, Amer. Journ. Physiol. **122** (1938), 788—804.
7. Wetterer, ZS. f. Biologie **99** (1938), 158—162.
8. Jochim, Amer. Journ. Physiol. **126** (1939), 547.
9. Einhorn, Proc. Roy. Soc. South Africa **33** (1940).
10. Kolin, Proc. Soc. Exper. Biol. and Med. **46** (1941), 235—239.

Es handelt sich entweder um die Messung und Registrierung rascher Geschwindigkeitsänderungen (1. und 2.) oder der absoluten Geschwindigkeit bei rasch veränderlicher Blutströmung (3. und 4.). Daher werden zur Spannungsmessung das rasch schwingende Saitengalvanometer und Röhrenverstärker verwendet. Die erzielten Resultate sind für physiologische Zwecke als sehr befriedigend zu bezeichnen. Bemerkenswert ist die Verwendung magnetischer Wechselfelder, um den Einfluss der Polarisationsspannungen zu eliminieren (6. und 10.) Da bei diesen Messungen keine hohe absolute Genauigkeit verlangt wurde, sind auch keine eingehenden Untersuchungen über die Grundlagen der Messmethode vorgenommen worden (vrgl. Anm. 6).

Die Induktion in bewegten Flüssigkeiten hat schon Faraday beschäftigt. Nach seinem erfolglosen Versuch gelang es später, die durch den Erdmagnetismus in den bewegten Wassermassen induzierte Spannung bei der Waterloo-Brücke in London zu messen (Yount, Gérard & Jevons, Phil. Mag. **60** (1920), 148).

[4]) Wo nichts anderes bemerkt wird, gilt für alle Formeln das gemischte oder Gauss'sche Mass-System, d. h. alle Grössen sind in absoluten Einheiten, und zwar die elektrischen Grössen in elektrostatischen, die magnetischen Grössen in elektromagnetischen Einheiten einzusetzen.

[5]) Leduc, Nouvelle méthode pour la mesure des champs magnétiques. Journ. de phys., 2e série, **46** (1887), 184.

[6]) Katz und Kolin schreiben (in „Carotid blood flow with electro-magnetic flowmeter", Amer. Journ. of Physiology **122** (1938), 803): „In any flow of liquid through a tube, the velocity is greatest in the center and slower near the walls of the tube, due to viscosity. Thus the flow electromotive forces set up along the diameter of the artery will be greater in the central portion than at the periphery, but *the sum of infinitesimal potential differences induced in various portions of the diameter*, which is recorded by the flowmeter, *represents*, as can be shown mathematically, *the average velocity* of the fluid in question. Thus the flowmeter records the mean instantaneous velocity at the cross-section where it is applied." Das ist richtig, solange es sich um die gleiche Art des Geschwindigkeitsprofils handelt, also für die laminäre Strömungsform, wo stets das Parabelprofil vorliegt. Bei der turbulenten Strömung hingegen ändert das Geschwindigkeitsprofil seinen Charakter stetig mit der Reynold'schen Zahl.

[7]) Frank-Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 1930, I. S. 697.

[8]) Frank-Mises, l. c. I. S. 698 und 708.

[9]) Frank-Mises, l. c. I. S. 700f.

[10]) Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, 3. Auflage, S. 322.

[11]) Die gefundene Lösung Φ legt es nahe, mit dem Ansatz

$$\Phi(r, \varphi) = X(r) \sin \varphi$$

in die Differentialgleichung (6) einzugehen. Man erhält dann mit Hilfe von (25)

$$X''(r) \sin \varphi + \frac{1}{r} X'(r) \sin \varphi - \frac{1}{r^2} X(r) \sin \varphi = \frac{1}{c} H \frac{df}{dr} \sin \varphi,$$

wo sich sin φ aus sämtlichen Gliedern weghebt und eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für X bleibt:

$$X'' + \frac{1}{r} X' - \frac{1}{r^2} X = \frac{1}{c} H \frac{df}{dr}$$

mit der Grenzbedingung:

$$X'(R) = \frac{1}{c} H f(R).$$

[12]) MERZ, Theorie der selbstkompensierenden Gleichstromverstärker mit direkt wirkender mechanischer Steuerung. Archiv f. Elektrot. **31** (1937), 1—23. — GILBERT, Journ. sci. Instrum. **7** (1936), 41.

[13]) WERNER, Empfindliche Galvanometer, Gruyter 1928, S. 26.

[14]) Reservoir, Leitung und Pumpe wurden für diese Versuche vom physiol. Institut der Univ. zur Verfügung gestellt.

[15]) MÜLLER, Abhandlungen zur Mechanik der Flüssigkeiten. Archiv für Kreislaufforschung, Beihefte zur Zeitschrift für Kreislaufforschung, Bd. IV (1939), 144.

Physikalisches Institut der Universität
Freiburg (Schweiz).

---

*