Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 14 (1941)
Heft: I

Artikel: Un nouveau modèle de l'électron ponctuel en théorie classique
Autor: Stueckelberg, E.C.G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111170

Un nouveau modèle de l'électron ponctuel en théorie classique

par **E. C. G. Stueckelberg.**

(13. I. 41.)

Résumé. Une nouvelle théorie de l'électron ponctuel est proposée. Dans celle-ci, l'électron interagit avec le champ Maxwellien et un champ scalaire du type de Yukawa.

La self-énergie et la masse inerte (dans l'équation de mouvement) de cette particule sont finies si la même constante ε (charge) mesure l'ineraction avec les deux champs.

Le tenseur d'énergie-impulsion, l'équation de mouvement et la section d'efficacité pour la diffusion du rayonnement sont calculés et comparés au modèle de Lorentz.

Pour les petites fréquences, l'équation du mouvement est celle de Lorentz mais, à la place du rayon de l'électron, il apparaît, dans cette nouvelle théorie, la longueur fondamentale de Yukawa.

La méthode est alors généralisée pour d'autres particules présentant de l'interaction avec plusieurs champs de Yukawa.

L'électron ponctuel de Dirac apparaît comme le cas limite de ce nouveau modèle, dans lequel les longueurs fondamentales tendent vers zéro.

Introduction.

La conception la plus simple de l'électron est un point chargé, caractérisé par sa charge ε et sa masse M. Ce modèle de l'*électron ponctuel* a le grand avantage de ne posséder que les trois degrés de liberté de translation. Mais la théorie du point chargé, faite au moyen de l'électromagnétisme de Maxwell, montre de grandes difficultés. C'est pour cette raison que différents auteurs ont étudié un *électron non ponctuel* (à dimensions finies, mais très petites).

En *théorie non relativiste*, ABRAHAM[1]) a supposé que l'électron était rigide, caractérisé par la *répartition* de la charge électrique et de la masse. Un tel modèle a le désavantage de posséder, en plus des trois degrés de liberté de translation, ceux de la rotation d'un corps rigide. Le passage à la limite d'une répartition singulière autour d'un point supprime ces degrés de liberté supplémentaires, mais il arrive alors que ce point possède une masse inerte infinie.

En *théorie de relativité*, l'électron rigide peut mathématiquement être défini. Mais sa répartition de charge diffère dans chaque système de Lorentz. Dans un système donné, elle est indépendante de la vitesse de l'électron. Lorentz[2]) proposa alors un électron dont la distribution de charge dépendait de sa vitesse d'une telle manière qu'elle était la même dans tout système en repos. L'électron de Lorentz est covariant au sens physique du mot. Mais, n'étant plus rigide, l'électron est un corps déformable, caractérisé par un nombre infini de degrés de liberté.

Les difficultés dues à la structure intérieure de l'électron ne se manifestent pas pour autant que le champ extérieur agissant sur l'électron est constant dans une région grande par rapport à la dimension de l'électron. Si l'on appelle r cette dimension, les théories montrent qu'à la masse inerte de l'électron, il faut ajouter un terme $M = \frac{1}{2}\varepsilon^2 c^{-2} r^{-1}$. Le rayon r est déterminé par M et ε si l'on considère la masse inerte comme étant entièrement due à ce terme. Dans cette approximation, la diffusion du rayonnement est déterminée par la section d'efficacité de Thompson, $\sigma = \frac{32}{3} r^2$. L'influence de la structure de l'électron se fera sentir dès que la longueur d'onde du rayonnement deviendra comparable à r ou, en vertu de la relation entre ε, M et r, dès que la fréquence ω s'approchera de la fréquence critique $\omega_r = 2\, M c^3 \varepsilon^{-2}$. Les déviations de la formule de Thompson qui se produiraient de cette façon ne peuvent pas être étudiées par ces formules. En effet, la *structure quantique* de la lumière intervient lorsque ω devient comparable à $\omega_h = M c^2 h^{-1}$ ($2\pi h =$ constante de Planck) $= 2\,\frac{\varepsilon^2}{hc}\,\omega_r = \frac{2}{137}\,\omega_r$. Et, ainsi, les déviations sont dues à l'effet quantique et pas à la structure de l'électron.

Malgré cette impossibilité d'étudier expérimentalement la structure intérieure de l'électron sans faire intervenir de phénomènes quantiques, certaines tentatives ont été faites pour mieux comprendre la nature de l'électron en théorie classique.

Pour ne pas faire intervenir le nombre infini de degrés de liberté de l'électron de Lorentz, on est revenu à l'idée d'un *électron, ponctuel*. Vu les difficultés de la masse infinie dans la théorie de Maxwell, Mie[3]) et Born[4]) ont proposé des modifications à l'électrodynamique du vide, qui permettaient de concevoir des charges de points sans y associer des masses infinies. Ces théories ont rendu les équations de Maxwell non linéaires. Du reste, ce changement ne se montrait que dans une petite région autour de l'électron, déterminée par un rayon r relié à ε et M par la même formule reliant le rayon de l'électron étendu à ε et M.

D'autre part, Wentzel[5]), Dirac[6]) et Pryce[7]) ont donné des méthodes mathématiques applicables à la théorie linéaire même pour écarter les divergences du modèle ponctuel.

Le nouveau modèle que nous proposons dans cet article surmonte les difficultés de l'électron ponctuel d'une tout autre manière. On savait que la *self-énergie* d'une particule ponctuelle dans la forme habituelle de la théorie scalaire des forces nucléaires de YUKAWA[8]) est négativement infinie. Ceci nous a amené à concevoir une particule possédant de l'interaction avec le champ électromagnétique, aussi bien qu'avec le champ des forces nucléaires. Il est ainsi possible de rendre finie la masse et la self-énergie faisant compenser la self-énergie infinie du champ Maxwellien par celle de Yukawa. Le résultat a été publié il y a une année[9]) mais les calculs ont montré quelques points d'un intérêt général, qui justifient une publication détaillée. Le tenseur d'énergie-impulsion, l'équation de mouvement et la formule pour la diffusion du rayonnement sont établis au § 6 et § 7. § 8 est la généralisation de la méthode à d'autres particules. Au dernier paragraphe (§ 9), notre méthode est comparée á celle de DIRAC[6]) et PRYCE[7]). Au § 5, il est d'ailleurs montré que le modèle de WENTZEL[5]) n'entre pas dans le domaine de notre théorie.

Les autres paragraphes servent á l'exposé de la méthode (§ 1), aux propriétés tensorielles des champs (§ 2), à la méthode des potentiels retardés (§ 3). Les § 4 et § 5 discutent l'électron étendu de Lorentz-Abraham pour pouvoir mieux démontrer (§ 6) la grande analogie qui existe entre le *rayon de l'électron* r et la *longueur fondamentale* l^{-1} du champ de Yukawa.

Un modèle semblable au nôtre a récemment été proposé par BOPP[10]). Au § 8, nous comparons sa théorie à la nôtre et nous montrons que le modèle de Bopp doit admettre l'existence de paquets d'ondes d'énergie négative.

§ 1. Exposé de la méthode.

Nous partons de l'idée qu'une particule signifie qu'autour d'un point $\vec{x} = \vec{q}$ de l'espace, il règne certaines qualités. Une de ces qualités agit sur un champ. Nous supposons alors connue la loi suivant laquelle cette influence se fait sentir; cette loi est contenue dans les équations du champ que nous supposons données.

Le champ réagit sur la particule, elle va décrire une trajectoire $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, 2, 3;\ t = \text{temps})$, que nous voulons analyser dans ce paragraphe. D'une façon générale, la trajectoire sera déterminée par trois équations de la forme

$$f_i(\dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, \dddot{\vec{q}}, \ldots) - E_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ldots;\ t) = 0 \qquad (1.1)$$

f_i sont trois fonctions qui dépendent de la vitesse $\dot{q}_i = dq_i/dt$ de l'accélération $\ddot{q}_i$ et, en général, des dérivées plus hautes de la vitesse. Ces fonctions sont entièrement caractérisées par la nature de la particule (p. ex. dans la dynamique Newtonienne $f_i = M\ddot{q}_i$, M étant une constante dite la *masse inerte*).

E_i sont trois grandeurs qui dépendent 1° de certaines fonctions $\chi^e(\vec{x}, t)$ et de leurs dérivées par rapport à x_i et t pris à l'endroit $\vec{x} = \vec{q}(t)$, 2° en général, des dérivées temporelles de $q_i(t)$ (p. ex. E_i est la force électromagnétique, due à une onde émise par un émetteur quelconque, incidente sur la particule porteuse de charge: $E_i = \varepsilon\left(-\frac{\partial \Phi^e_0}{\partial x_i} - \dot{\Phi}^e_i\right) + \varepsilon\, q_k\left(-\frac{\partial \Phi^e_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi^e_k}{\partial x_i}\right)$. Φ^e_0 et Φ^e_i étant respectivement le potentiel scalaire et vectoriel de cette onde).

Pour établir les lois elles-mêmes (1.1), nous partirons de deux principes fondamentaux: 1° le *principe de la conservation d'énergie* et 2° les *lois gouvernant la production des champs* par les particules présentant une interaction avec ces champs.

Dès le début, nous nous placerons au point de vue de la théorie de relativité. Ceci implique que l'énergie $W\,dx^3 (dx^3 = dx_1\,dx_2\,dx_3)$ contenue dans un élément de volume dx^3 ne peut changer qu'à la suite d'un *courant d'énergie* $\vec{W}$. Le principe de conservation d'énergie prend alors la forme de l'équation de continuité pour la densité d'énergie W

$$P(\vec{x}, t) = \frac{\partial W(\vec{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{W}(\vec{x}, t) = 0. \tag{1.2}$$

En théorie de relativité, le temps t apparaît sous la forme d'une quatrième coordonnée $x_0 = t$ (nous avons choisi les unités de temps de telle sorte que $c = 1$). Il est commode d'introduire la grandeur imaginaire $x_4 = x_0\sqrt{-1}$. La densité d'énergie W est alors la composante W_{44} d'un tenseur symétrique $W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}$. Le vecteur $\vec{W}$ a alors les trois composantes $\sqrt{-1}\, W_{4i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Ainsi (1.2) prend la forme covariante

$$P_\mu = \frac{\partial W_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{1.3}$$

Nous emploierons la convention suivante: si un indice en lettres grecque apparaît deux fois dans une formule, on doit sommer l'expression de 1 à 4, tandis que, si c'est un indice en lettres latines, la sommation doit s'étendre de 1 à 3 seulement.

Les équations exprimant la production des champs (décrits par leurs potentiels χ) auront (dans les cas que nous envisageons) la forme covariante

$$(\Box - l^2)\, \chi = -4\pi\eta\,; \quad \Box = \partial^2/\partial x_\mu \partial x_\mu \tag{1.4}$$

$\eta(x) = \eta(\vec{x}, t)$ est la *densité de source* à l'événement $x (= x_1 x_2 x_3 x_4)$ ou $\vec{x} (= x_1 x_2 x_3)$, $t (= -\sqrt{-1}\, x_4)$. Nous admettons que, dans la région d'espace-temps considérée, il n'y a pas d'autre source que celle due à la particule envisagée. Ceci permet de décomposer χ en

$$\chi = \chi^e + \chi' \tag{1.5}$$

χ^e est le potentiel qui satisfait (dans la région considérée) à l'équation homogène (1.4). χ^e est, p. ex., une onde plane de fréquence ω et du vecteur d'onde $\vec{k}$ avec $k^2 = \omega^2 - l^2$. l^{-1} est une longueur fondamentale caractéristique du champ envisagé. La décomposition (1.5) de χ est unique, si l'on demande que $\chi'(\vec{x} = \infty, t) \leqslant$ const. $|\vec{x}|^{-1}$, et qu'il soit déterminé uniquement par la densité de source $\eta(\vec{x}, t')$ pour des temps t' antérieurs à t (potentiel retardé $t' \leqslant t$).

Les grandeurs $\eta(\vec{x}, t)$ étant entièrement dues à la particule, elles doivent être fonction de l'événement $x (= \vec{x}, t)$ et de la trajectoire $q_i = q_i(\tau)$; $q_4 = i q_0 = i\,\tau$. Cette dernière est elle-même une fonction du temps τ. Si l'on substitue au paramètre $\tau = \tau(s)$ un paramètre quelconque s, la trajectoire est donnée par la ligne d'univers $q_\mu = q_\mu(s)$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$. η doit donc être fonctionnelle des fonctions $q_\mu(s)$.

Pour obtenir une expression de cette fonctionnelle, nous considérons un événement quelconque x_i, $x_0 = t$.

La densité de source à cet événement dépend certainement de sa « distance » d'un événement quelconque (q_i, q_0) de la trajectoire, c'est-à-dire du quadrivecteur $z = x - q$ à composantes $z_\mu = x_\mu - q_\mu(s)$, et elle est influencée par tous les événements de la trajectoire qui se trouvent dans son voisinage. Soit $\varrho(z)$ une fonction de ce quadrivecteur $z = x - q(s)$, qui disparaît pour des grandes « distances ». Alors la somme sur tous les événements s

$$\eta(x) = \int ds\, g(s)\, \varrho(x - q(s)) \tag{1.6}$$

est une fonctionnelle du type recherché. $g(s)$ est le poids de l'événement particulier. Le paramètre s étant arbitraire, on doit demander que $g(s)\,ds$ soit invariant par rapport à la substitution $s = s(s')$ du paramètre s par s'. De telles expressions sont données au § 2 pour les champs scalaires et vectoriels.

Mais revenons au tenseur d'énergie-impulsion. Il doit, en plus de l'équation de continuité (1.3), satisfaire à la condition $\int d x^3 W_{44} =$ énergie totale $\geqslant 0$. Nous le décomposerons en des parties $T_{\mu\nu}$ et $S_{\mu\nu}$ dues aux différents champs. Nous poserons les conditions T_{44} et $S_{44} \geqslant 0$ (cf. § 2). Comme les $T_{\mu\nu}$ et $S_{\mu\nu}$ sont bilinéaires en χ et en ses dérivées (pour conserver la linéarité de la théorie), leurs divergences ont, en vertu des équations du champ, la forme bilinéaire (en χ et η)

$$P(\vec{y}\,, t) \sim \eta\,(\vec{y}\,, t)\,\chi(\vec{y}\,, t) \tag{1.7}$$

(ou en des dérivées $\dot{\chi}$ et $\partial\chi/\partial y_i$).

P est donc, en vertu de (1.5), la somme d'un terme $\eta\chi^e$ arbitraire (le potentiel extérieur χ^e pouvant être donné arbitrairement) et d'un terme $\eta\chi'$ entièrement défini par $g(s)$ et $\varrho(z)$. Le principe de conservation d'énergie (1.3) demande que des expressions de ce type (1.7) disparaissent identiquement, c'est-à-dire pour tout $\vec{y}, t$ et pour toute « onde incidente » χ^e. Ce ne peut être le cas que *si la structure de la particule dépend du champ extérieur.*

Pour cette raison, on remplace la condition de la conservation d'énergie en détail $P(\vec{y}\,, t) = 0$ par la condition moins forte

$$\int\limits_{V(\vec{q})} d y^3 P(\vec{y}\,, t) = 0\,. \tag{1.8}$$

Cette équation exprime encore la conservation de l'énergie, mais l'équation de continuité n'est valable que pour des volumes au moins égaux à $V(\vec{q})$, c'est-à-dire plus grands que la région où $\eta(\vec{x}\,, t)$ diffère de zéro; et c'est lá ce qui définit la région $V(\vec{q})$ sur laquelle l'intégrale doit être prise est qui est une mesure de la dimension de la particule.

Nous voulons encore montrer que (1.8) est l'équation de mouvement et donc qu'elle a bien la forme (1.1).

Pour cela, exprimons d'abord χ' (décrivant le *champ propre* de la particule) en terme du poids $g(s)$ et de la structure $\varrho(z)$. Nous trouverons, au § 3, l'expression

$$\chi'(\vec{y}\,, t) = \int d z^4 \varrho(z) X(g, \dot{g}, \ldots ; \vec{r}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, \ldots)_{t-z_0} \tag{1.9}$$

avec

$$\vec{r}\,(t) = \vec{y} - \vec{z} - \vec{q}\,(t)\,;\; d z^4 = d z_1 d z_2 d z_3 d z_0$$

où X est une fonction (déterminée par les calculs du § 3) à prendre au temps $t - z_0$ et où l'intégrale est à calculer sur tout l'espace temps. En substituant, dans (1.8), on a:

$$\int d x^4 \varrho(x) g(t - x_0) \int d z^4 \varrho(z) X(g, \ldots; \vec{r}, \dot{\vec{q}}, \ldots)_{t-z_0, \tau=t-x_0}$$
$$+ \int d x^4 \varrho(x) g(t - x_0) \chi^e (\vec{x} + \vec{q}(t - x_0), t - x_0) = 0 \quad (1.10)$$

avec

$$\vec{r}(t - z_0, \tau) = \vec{x} + \vec{q}(\tau) - \vec{z} - \vec{q}(t - z_0)$$

(1.10) a la forme de (1.1). En effet, le premier membre ne dépend que de $\dot{\vec{q}}$ et de ses dérivées si $g(t)$ est exprimé en termes de $\dot{\vec{q}}$ (cf. § 2). Le deuxième membre dépend des potentiels extérieurs. L'équation (1.3) nous montre qu'on aura quatre de ces expressions $\int P d y^3$ qui doivent s'annuler, donc trois équations de mouvement (1.1).

Nous avons employé le temps $\tau = t - x_0$ dans l'expression pour X, car, dans les termes $\dot{\chi}'$ qui interviendront en (1.7), le $\dot{X}$ correspondant en (1.8) doit être formé en dérivant $\vec{r}(t - z_0, \tau)$ par rapport à t et non pas par rapport à τ.

La théorie esquissée jusqu'ici était celle des particules ayant des dimensions. Nous pourrons passer à la limite d'une particule ponctuelle en faisant tendre $\varrho(x)$ vers $\delta_1(x_1)\, \delta_2(x_2)\, \delta_3(x_3)\, \delta_0(x_0)$. ($\delta_\mu(x_\mu)$ signifiant la fonction singulière de Dirac à une dimension $\mu = 0, 1, 2, 3$). Alors $\eta(\vec{y}, t)$ disparaît identiquement, sauf pour $\vec{y} = \vec{q}(t)$. Donc les expressions P_μ, dont la disparition assure la continuité de l'énergie, s'annulent certainement pour tout $\vec{y} \neq \vec{q}(t)$. Nous demandions de la théorie que P_μ soit nul *partout.* Il est nécessaire alors de préciser la signification de la disparition identique d'une fonction singulière pour $\vec{y} = \vec{q}(t)$. La définition suivante nous semble être suffisante: $P(\vec{y}, t) = 0$ signifie que **1°** $P = 0$ pour tout $\vec{y} \neq \vec{q}(t)$. **2°** Si $h(\vec{y})$ est une fonction arbitraire de $\vec{y}$ mais régulière en $\vec{y} = \vec{q}(t)$, il faut que

$$\int_{V(\vec{q})} d y^3 h(\vec{y}) P(\vec{y}, t) = 0$$

pour tout volume V contenant le point singulier $\vec{y} = \vec{q}(t)$. La fonction h étant régulière, on pourra lui donner la forme

$$h(\vec{y}) = h(\vec{q}) + x_i \frac{\partial h(\vec{q})}{\partial q_i} + \cdots \quad (1.11)$$

§ 2. Les tenseurs associés aux champ.

Dans ce paragraphe, nous établissons les équations du champ et nous définissons le tenseur d'énergie-impulsion associé au champ. Nous discutons tout d'abord le champ scalaire Ψ du type prévu par DE BROGLIE et YUKAWA, qui fait intervenir une constante fondamentale l de la dimension d'une longueur réciproque (nous rappellons que la théorie des quanta, qui n'interviendra jamais dans cet article, fait correspondre à ce champ des quanta (mésons) ayant pour masse de repos $M_y = h l c^{-1}$).

Ensuite, nous discutons la théorie du champ vectoriel Φ_μ du type envisagé par PROCA[11]). Le champ de Maxwell est celui que l'on obtient á la limite $l = 0$ de cette théorie vectorielle.

Remarquons, pour terminer cette introduction, que, dans nos notations figure un indice 0. Il provient de ce que la quatrième composante de tout quadrivecteur Φ_μ est imaginaire et qu'alors nous représentons le scalaire spatial qui lui correspond par $\Phi_0 = -i\Phi_4$ (c'est-à-dire en particulier $x_0 = t = -i x_4$; $i = \sqrt{-1}$ cf. § 1).

Disons en plus que $\delta_{\mu\nu}$ est le tenseur fondamental $\delta_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 1$ si $\mu = \nu$.

Champ scalaire:

Du potentiel scalaire Ψ nous dérivons le champ vectoriel K_μ par différentiation

$$K_\mu = \partial \Psi / \partial x_\mu \tag{2.1}$$

Alors, le tenseur d'énergie-impulsion $S_{\mu\nu}$, défini par

$$4\pi S_{\mu\nu} = -K_\mu K_\nu + \delta_{\mu\nu} \tfrac{1}{2} (K_\alpha K_\alpha + l^2 \Psi^2) \tag{2.2}$$

satisfait à la relation

$$P_\mu^S = \frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = K_\mu J \tag{2.3}$$

si le scalaire J est défini par

$$\frac{\partial K_\mu}{\partial x_\mu} - l^2 \Psi = -4\pi J. \tag{2.4}$$

Champ vectoriel:

Du potentiel vecteur Ψ_μ nous dérivons le champ (tenseur antisymétrique) $F_{\mu\nu}$ par différentiation

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{2.5}$$

Le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ est défini par l'expression

$$4\pi T_{\mu\nu} = -F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} - l^2 \Phi_\mu \Phi_\nu + \delta_{\mu\nu} \tfrac{1}{4}(F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + 2 l^2 \Phi_\alpha \Phi_\alpha) . \quad (2.6)$$

Il satisfait à la relation

$$P_\mu^T = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = F_{\mu\nu} J_\nu + \Phi_\mu \frac{\partial J_\nu}{\partial x_\nu} \quad (2.7)$$

si le quadrivecteur J_μ est défini par

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + l^2 \Phi_\mu = 4\pi J_\mu . \quad (2.8)$$

De l'antisymétrie de $F_{\mu\nu}$, il suit que le vecteur $4\pi J_\mu - l^2 \Phi_\mu$ doit satisfaire à l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(J_\nu - \frac{l^2}{4\pi} \Phi_\nu\right) = 0 . \quad (2.8a)$$

L'électrodynamique est contenue dans les équations (2.5) à (2.8a) lorsqu'on pose $l = 0$. Dans ce cas, c'est le vecteur J_ν lui-même qui doit satisfaire á l'équation de continuité, comme on le voit facilement.

Nous supposons que les grandeurs J et J_ν, qui déterminent le champ, sont entièrement dues à la présence des particules, et nous les appellons par conséquent *densités de source.* Ainsi les divergences (2.3) et (2.7) ont en effet la forme bilinéaire en η et χ prévue en (1.7). Alors, aux régions d'espace-temps, où il n'y a pas de particule, $J = J_\nu = 0$ et les équations (2.3) et (2.7) expriment la conservation de l'énergie. S_{44} et T_{44} mesurent la *densité d'énergie.* Ces composantes sont *positives* et ne peuvent s'annuler que si les champs et les potentiels eux-mêmes s'annulent. (Exception faite, dans le cas Maxwellien $l = 0$, où l'invariance de jauge du potentiel Φ_ν permet des potentiels différents de zéro, auxquels correspondent des champs et des densités d'énergie nuls.)

Les vecteurs $\vec{S}$ ou $\vec{T}$ (à composantes $\sqrt{-1}\, S_{4i}$ et $\sqrt{-1}\, T_{4i}$ $(i = 1, 2, 3)$ représentent alors les *vecteurs du courant d'énergie.* Les expressions pour la moyenne temporelle du courant d'énergie, associé à une onde plane et périodique de pulsation ω et se propageant dans la direction du vecteur d'onde $\vec{k}$ (avec $k^2 = \omega^2 - l^2$), sont

$$\vec{S} = \frac{\vec{k}}{4\pi k} \frac{\omega}{k} |\vec{K}^2|$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{k}}{4\pi k} \left(\frac{k}{\omega} |\vec{F}_{tr}|^2 + \frac{k\omega}{l^2} |\vec{F}_{\mathrm{long}}|^2\right) \quad (2.9)$$

$\vec{K}$ est le vecteur dont les composantes sont K_i; $\vec{F}_{\text{long}} + \vec{F}_{tr}$ est le vecteur de composantes $\sqrt{-1}\, F_{4\,i}$, que nous avons décomposé en une partie longitudinale (parallèle à $\vec{k}$) et une partie transversale (normale à $\vec{k}$).

La substitution des potentiels Ψ ou Φ_μ en (2.4) ou (2.8) donne aux équations du champ la forme (1.4), soit

$$\begin{aligned} (\Box - l^2)\,\Psi &= -4\,\pi J \\ (\Box - l^2)\,\Phi_\mu &= -4\,\pi \left(J_\mu - l^{-2} \frac{\partial^2 J_\nu}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} \right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Les grandeurs J et J_μ elles-mêmes devant être du type η puisqu'elles dépendent des particules, nous les choisirons de la façon suivante:

$$\begin{aligned} J &= \int ds\, \varepsilon (-\dot{q}_\mu \dot{q}_\mu)^{\frac{1}{2}} \varrho(x - q) \\ J_\mu &= \int ds\, \varepsilon\, \dot{q}_\mu \varrho(x - q) \\ \partial J_\mu / \partial x_\mu &= \int ds\, \dot{\varepsilon}\; \varrho\,(x - q) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ces expressions sont indépendantes du paramètre s. Si ε est constante, la dernière de ces équations nous montre que J_μ satisfait l'équation de continuité. Comme nous avons vu plus haut que, pour le champ Maxwellien ($l = 0$), J_μ doit satisfaire l'équation de continuité, on peut donc utiliser (2.11) avec ε constant pour les équations de Maxwell. Si l'on choisit comme paramètre le temps $q_0 = s$, g (du § 1) devient $g = \varepsilon \sqrt{1 - |\dot{\vec{q}}\,|^2}$, ε et $\varepsilon \dot{q}_i$ pour J, J_0 et J_i respectivement.

Pour terminer ce paragraphe, donnons les expressions qui nous serviront plus loin pour l'énergie totale $\int S_{44}\, dx^3$ et $\int T_{44}\, dx^3$ au cas où le champ est produit par une particule au repos $\dot{\vec{q}} = 0$. On trouve facilement que cette *self*-énergie est

$$\int dx^3 S_{44} = \int dx^3\, T_{44} = \frac{\varepsilon^2}{2} \int dx^4 \varrho\,(x) \int dy^4 \varrho\,(y)\, \frac{e^{-lr}}{r} \tag{2.12}$$

$\vec{r}$ étant l'expression (1.10) pour $\tau = t - x_0$. Nous perdons pas de généralité si nous normalisons $\int dx^4 \varrho(x) = 1$.

§ 3. Le champ créé par la particule.

La solution générale χ' de (1.4) a été discutée ailleurs[12]) par la méthode des potentiels retardés. Ces solutions ont une propriété très remarquable. Si $l = 0$ (électrodynamique), les valeurs du potentiel χ' et de ses premières dérivées à l'endroit de la particule et à un certain instant t, sont définies à partir des premières dérivées temporelles $\dot{\vec{q}}$, $\ddot{\vec{q}}$ et $\dddot{\vec{q}}$, prises à cet instant t. Par contre, si $l \neq 0$, le potentiel χ' à l'endroit de la particule et à cet instant t, dépend de toute l'histoire antérieure $t' < t$ de cette particule. Ce phénomène rend impossible, du point de vue rigoureux, l'établissement d'une équation de mouvement du type (1.1). Mais on peut obtenir des approximations satisfaisantes pour certains mouvements. L'explication physique de ce qui se passe est la suivante: Si $l = 0$, les paquets d'ondes émis se sont éloignés de la particule avec la vitesse de la lumière et n'ont donc aucun effet sur la particule qui, elle-même, ne peut se déplacer qu'avec une vitesse inférieure à celle de la lumière. D'autre part, si $l \neq 0$, les ondes subissent une dispersion de de Broglie. Une partie des paquets d'ondes émis au passé lointain se trouvera donc toujours à l'endroit occupé par la particule. Leur effet dépend de l'histoire antérieure de la particule.

L'équation des potentiels retardés (1.4) est linéaire. Ceci permet de décomposer la densité de source η et le potentiel χ' en des termes du type $\eta_\omega(x) = \eta_\omega(\vec{x})e^{i\omega t}$ et $\chi_\omega(x)$. Nous cherchons alors les solutions χ_ω avec la condition $\chi_\omega(\vec{x} = \infty) \leqslant \text{const.} \, |\vec{x}|^{-1}$. Le χ' total est alors la somme (ou l'intégrale) de ces termes individuels.

Dans le cas général, si $l \neq 0$, les deux sortes de termes $\omega^2 < l^2$ et $\omega^2 > l^2$ doivent être traités de façons différentes. Pour ces deux cas, nous introduisons les racines positives m et k (k étant la longueur du vecteur d'onde en (2.9)):

$$m = \sqrt{l^2 - \omega^2}\,; \qquad k = \sqrt{\omega^2 - l^2}\,. \tag{3.1}$$

Nous signalons ici que les puissances paires $m^{2\alpha} = (-1)^\alpha k^{2\alpha}$ sont des polynomes en ω^2, tandis que les puissances impaires sont des séries convergentes respectivement en ω^2 (pour m) et ω^{-2} (pour k).

On peut alors décomposer η en deux séries de Fourier

$$\eta = \eta^b + \eta^c \tag{3.2}$$

où η^b contient tous les termes η^b_ω à fréquences inférieures à la fréquence critique ($\omega^2 < l^2$) et η^c les autres termes ($\omega^2 > l^2$).

Considérons alors la solution χ_ω provenant de η_ω^b seulement (nous discuterons plus loin l'effet de η^c).

$$\chi_\omega(\vec{y}, t) = \int d\,x^3 \frac{e^{-m\,r}}{r} \eta_\omega^b(\vec{x}, t)\,; \quad \vec{r} = \vec{y} - \vec{x} \tag{3.3}$$

η_ω^b n'étant différent de zéro qu'au voisinage de la particule, χ_ω disparaît pour $\vec{y} = \infty$ plus rapidement que $|\vec{y}|^{-1}$. L'intégrale du flux d'énergie (soit de $\vec{S}$ ou de $\vec{T}$) à travers la surface d'un volume très grand disparaît donc. Ceci montre que les termes η^b ne donnent lieu à aucun rayonnement.

Pour calculer χ_ω au voisinage de la source, nous introduisons les deux fonctions (voir remarque suivant (3.1)).

$$\begin{aligned} a_\omega(r) &= \tfrac{1}{2}\, r^{-1}\,(e^{-m\,r} + e^{m\,r}) = \sum_0^\infty (i\,\omega)^{2\,n} a_n(r) \\ b_\omega(r) &= \tfrac{1}{2}\, r^{-1}\,(e^{-m\,r} - e^{m\,r}) = \sum_0^\infty (i\,\omega)^{2\,n} b_n(r) \end{aligned} \tag{3.4}$$

qui décomposent chaque terme χ_ω encore une fois en deux parties $\chi_\omega^a + \chi_\omega^b$, formés à partir de η_ω^b par les intégrales

$$\chi_\omega^a(\vec{y}, t) = \int d\,x^3 a_\omega(r)\,\eta_\omega^b(\vec{x}, t) \tag{3.5}$$

et l'intégrale analogue avec $b_\omega(r)$ à la place de $a_\omega(r)$. La somme (3.4) pour $a_\omega(r)$ est convergente (pour tout r fini), tandis que celle pour $b_\omega(r)$ ne l'est que pour autant que $\omega^2 < l^2$, ce qui est le cas pour chaque terme de η_ω^b. Les séries (3.4) permettent d'exprimer χ_ω^a et χ_ω^b et leurs sommes en ω sous la forme

$$\chi^a(\vec{y}, t) = \sum_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2\,n} \int d\,x^3 a_n(r)\,\eta^b(\vec{x}, t)\,. \tag{3.6}$$

Pour l'expression analogue $\chi^b, a_n(r)$ sera remplacé par $b_n(r)$.

Lorsque $\omega^2 > l^2$, il faut considérer les termes η_ω^c. Au lieu de (3.3), nous disposons de deux solutions, qui satisfont à notre condition aux limites pour $\vec{y} = \infty$

$$\chi_\omega^\pm(\vec{y}, t) = \int d\,x^3 \frac{e^{\pm i \frac{\omega}{|\omega|} k r}}{r} \eta_\omega^c(\vec{x}, t). \tag{3.7}$$

Ces solutions montrent qu'il y a maintenant un rayonnement de la particule, ce que l'on voit en calculant le flux d'énergie à travers une surface fermée suffisamment grande. Pour cela, on identifie χ avec Ψ pour $\vec{S}$ et avec les Φ_μ pour $\vec{T}$. Avec les valeurs de J et J_μ, données en (2.11), les vecteurs $\vec{K}$, $\vec{F}_{\text{long}}$ et $\vec{F}_{\text{tr}}$ d'une particule à mouvement périodique ($\ddot{\vec{q}} = -\omega^2 \vec{q}$) sont:

$$\begin{aligned}
\vec{K}^\pm &= \varepsilon\, k^2\, r^{-1}\, \vec{q}_{/\!/}\left(t \pm \frac{k}{|\,\omega\,|}\, r\right) \\
\vec{F}^\pm_{\text{long}} &= -\,\varepsilon\, l^2\, r^{-1} \vec{q}_{/\!/}\left(t \pm \frac{k}{|\,\omega\,|}\, r\right) \qquad (3.8) \\
\vec{F}^\pm_{tr} &= \varepsilon\, \omega^2\, r^{-1} \vec{q}_\perp \left(t \pm \frac{k}{|\,\omega\,|}\, r\right) \quad \text{avec} \quad \vec{q}_{/\!/} = r^{-2}\vec{r}\,(\vec{r}\,,\vec{q}\,) \text{ et } \vec{q}_\perp = \vec{q} - \vec{q}_{/\!/}
\end{aligned}$$

si $r \gg |\,\vec{q}\,|$ et $|\,\vec{q}\,| \ll k^{-1}$. On s'apeçroit que χ^+ et χ^- correspondent respectivement aux potentiels avancé et retardé qui dépendent de la distribution de la densité de source η (caractérisée par $\vec{q}\,(t)$) aux temps $t' = t + \frac{k}{|\,\omega\,|}\, r$ et $t' = t - \frac{k}{|\,\omega\,|}\, r$. Pour une grande sphère de rayon r, les expressions (3.8) sont des ondes planes du type considéré en (2.9) avec les vecteurs d'onde $\vec{k} = \mp\, \vec{r}^{\,0}\, k$. Les flux moyens à travers cette sphère sont respectivement

$$\begin{aligned}
\oint (d\vec{\sigma}\,,\vec{S}) &= \mp \frac{\varepsilon^2}{3}\, \frac{k^3}{|\,\omega\,|^3}\, |\,\ddot{\vec{q}}\,|^2 \\
\oint (d\vec{\sigma}\,,\vec{T}) &= \mp \frac{\varepsilon^2}{3}\, \frac{k}{|\,\omega\,|^3}\, (2\,\omega^2 + l^2)\, |\,\ddot{\vec{q}}\,|^2 . \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Le flux dû à $\vec{T}$ consiste en deux termes, dont le premier est dû au champ transversal et le second au champ longitudinal. Pour $l = 0$, ce dernier disparaît.

Discutons alors le potentiel $\chi^\pm_\omega$ aux environs de la charge. En décomposant chaque terme en

$$\chi^\pm_\omega = \chi^a_\omega \pm \chi^c_\omega$$

on vérifie facilement (en vertu de l'identité $-k^2 = m^2$), que χ^a_ω est formé de η^c_ω par une relation identique à (3.5) avec η^c_ω à la place de η^b_ω. χ^c_ω est formé d'une manière analogue à (3.5) avec la fonction $c_\omega(r)$ donnée plus loin (3.14). L'expression (3.6) est donc valable pour $\eta = \eta^b + \eta^c$, c'est-à-dire pour toutes les fréquences. On peut donc utiliser, pour η, l'expression (1.6).

Les variables d'intégration qui, jusqu'ici, étaient $d x^3$ et $ds = dq_0$, peuvent être remplacées par

$$z_i = x_i - q_i(q_0)\,; \quad z_0 = x_0 - q_0 = t - q_0$$

χ^a prend alors la forme prévue en (1.9).

$$\chi^a(\vec{y}\,, t) = \int d z^4 \varrho(z) A\,(g, \dot{g}, \ldots; \vec{r}, \dot{\vec{q}}, \ldots)_{t-z_0} \tag{3.10}$$

avec

$$A_t = \sum_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} g(t)\, a_n(r(t))\,; \quad \vec{r}\,(t) = \vec{y} - \vec{z} - \vec{q}\,(t)$$

A_t est à prendre, sous l'intégrale, au temps $t - z_0$. Afin d'évaluer A pour des petites distances r, nous écrirons les $a_n(r)$ en série de r

$$a_n(r) = r^{2n-1} \sum_0^\infty a_{n\alpha}(l\, r)^{2\alpha}\,; \quad a_{n\alpha} = \frac{1}{(2\,(\alpha+n))!} \binom{\alpha+n}{n}. \tag{3.11}$$

Soit $\overset{(\beta)}{r^\alpha}$ la β-ième dérivée temporelle de la α-ième puissance de r en (3.10). Cette grandeur est proportionnelle à $r^{\alpha-\beta}$ multipliée par des $\dot{q}_i$ et par leurs dérivées. Ce ne sont donc que les termes pour $\alpha = 0$ en (3.11), termes indépendants de l, qui contiennent des puissances négatives de r en A, $\dot{A}$ et $\partial A/\partial y_i$. L'évaluation de A est particulièrement simple dans un système de Lorentz où $\dot{\vec{q}} = 0$. En effet, $\overset{(\beta)}{r^\alpha}$ est proportionnelle à $r^{\alpha-2\beta}$ et il est possible d'écrire A, $\dot{A}$ et $\partial A/\partial y_i$ en série de r en n'utilisant que les premiers termes $a_{n\alpha}$ de nos séries:*)

$$\begin{aligned}
A = {} & r^{-1} \cdot a_{00}\, g - r^0 \cdot a_{10}\, g\, \ddot{q}_{//} + r \cdot (9\, a_{20}\, g\, (\ddot{q}^{\,2} + \ddot{q}_{//}^{\,2}) \\
& + a_{10}\, \ddot{g} + l^2(\cdots)) + r^2 \cdot (\cdots) + \cdots \\
\dot{A} = {} & r^{-1} \cdot a_{00}\, \dot{g} - r^0 \cdot a_{10}\, (g\, \dddot{q}_{//} + 3\, \dot{g}\, \ddot{q}_{//}) \\
& + r \cdot (15\, a_{20}\, (2\, g((\vec{\ddot{q}}, \vec{\dddot{q}}) + \ddot{q}_{//}\, \dddot{q}_{//}) + 3\, \dot{g}\, (\ddot{q}^{\,2} + \ddot{q}_{//})) + a_{10}\, \dddot{g} + l^2\,(\cdots)) \\
& + r^2 \cdot (\cdots) + \cdots \\
\frac{\partial A}{\partial y_i} = {} & - r^{-2} \cdot a_{00}\, g\, r_i^0 - r^{-1} \cdot a_{10}\, g\, (\ddot{q}_i - \ddot{q}_{//i}) \\
& + r^0 \cdot (9\, a_{20}\, g (2\, \ddot{q}_i\, \ddot{q}_{//} + r_i^0\, (\ddot{q}^{\,2} - \ddot{q}_{//}^{\,2})) + a_{10}\, \ddot{g}\, r_i^0 + l^2\, a_{01}\, g r_i^0) \\
& - r \cdot (225\, a_{30}\, g\, (3\, \ddot{q}_i\, (\ddot{q}^{\,2} + \ddot{q}_{//}^{\,2}) + \ddot{q}_{//i}\, (\ddot{q}^{\,2} - \ddot{q}_{//}^{\,2})) \\
& \qquad + 3\, a_{20} (g (\ddddot{q}_i + \ddddot{q}_{//i}) + 4\, \dot{g}\, (\dddot{q}_i + \dddot{q}_{//i}) + 6\, \ddot{g}\, (\ddot{q}_i + \ddot{q}_{//i}) + l^2\,(\cdots)) \\
& + r^2 \cdot (\cdots) + \cdots
\end{aligned} \tag{3.12}$$

---

*) Les abréviations suivantes ont été utilisées:

$\ddot{q} = |\vec{\ddot{q}}|$; $\dddot{q} = |\vec{\dddot{q}}|$ etc. $\vec{\ddot{q}}_{//} = \vec{r}^{\,0} (\vec{r}^{\,0}\, \vec{\ddot{q}})$ etc. $\vec{r}^{\,0} = r^{-1}\, \vec{r}$; $\ddot{q}_{//} = (\vec{r}^{\,0}, \vec{\ddot{q}})$ etc.

Pour évaluer χ^b et χ^c et pour leur donner la forme (1.9), il faut d'abord décomposer explicitement η en $\eta^b + \eta^c$. Formellement, le développement

$$\eta(\vec{x}, t) = \int d z_0\, g \left(\varrho(\vec{x}, z_0) - \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} q_i + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x_i \partial x_k} q_i q_k - \cdots\right)_{t-z_0} \tag{3.13}$$

est toujours possible. g et les q_i sont à prendre pour la valeur $q_0 = t - z_0$ du paramètre s. Si $g(t)$ et $q_i(t)$ sont développés en séries (ou en intégrales) de Fourier, (3.13) est lui-même une série de termes dont la dépendance temporelle a la forme $e^{i\omega t}$. Si q_i ne contient essentiellement que des fréquences ω^2 très petites comparées à l^2 et si g est une fonction des $\dot{q}_i$ (ce qui est le cas pour les problèmes envisagés en (2.11)), ce ne sont que les termes dont les facteurs sont de très hautes dérivées $\partial^n \varrho / \partial x_i^n$ qui contiennent des $e^{i\omega t}$ avec $\omega^2 > l^2$. L'intégration partielle de ces termes dans

$$\chi^c_\omega(\vec{y}, t) = \int d x^3\, c_\omega(r)\, \eta^c_\omega(\vec{x}, t)$$
$$c_\omega(r) = \tfrac{1}{2} r^{-1} \left(e^{i \frac{\omega}{|\omega|} k r} - e^{-i \frac{\omega}{|\omega|} k r}\right) \tag{3.14}$$

montre qu'ils sont proportionnels à $(k q_i)^n$. Leur influence est petite par rapport aux termes $(m q_i)^{n'}$ de χ^b_ω avec un n' inférieur à n, si les amplitudes q_i restent petites. Dans ce cas (approximation quasi stationnaire), on peut poser $\eta \sim \eta^b$ et $\chi^c \sim 0$. Alors χ^b peut être mise sous la même forme que χ^a en (3.10), une fonction B_{t-z_0} remplaçant A_{t-z_0}. Les $b_n(r)$ qui remplacent les $a_n(r)$ sont:

$$b_n(r) = l^{-2n+1} \sum_0^\infty b_{n\alpha} (l r)^{2\alpha}; \quad b_{n\alpha} = -\frac{1}{(2\alpha+1)!} \binom{\alpha + \frac{1}{2}}{n} \tag{3.15}$$

B, $\dot{B}$ et $\partial B / \partial y_i$ sont les séries suivantes en r (si $\dot{\vec{q}} = 0$):

$$B = r^0 \cdot \left(l b_{00}\, g + l^{-1} (b_{10}\, \ddot{g} + 6\, b_{21}\, g \ddot{q}^2) + l^{-3} (\cdots) + \cdots\right) + r \cdot (\cdots) + \cdots \tag{3.15}$$

$$\dot{B} = r^0 \cdot \left(l b_{00} \dot{g} + l^{-1} (10\, b_{21} (2\, g (\ddot{\vec{q}}, \dddot{\vec{q}}) + 3\, \dot{g}\, \ddot{q}^2) + b_{10} \dddot{g}) + l^{-3} (\cdots) + \cdots\right) + r \cdot (\cdots) + r^2 \cdot (\cdots) + \cdots \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y_i} = - r^0 \cdot \left(l\, 2\, b_{11}\, g\, \ddot{q}_i + l^{-1} (2\, b_{21} (g \ddddot{q}_i + 4 \dot{g} \dddot{q}_i + 6 \ddot{g}\, \ddot{q}_i) + 360\, b_{32}\, g\, \ddot{q}_i\, \ddot{q}^2) + l^{-3} (\cdots) + \cdots\right) + r \cdot (\cdots) + r^2 \cdot (\cdots) + \cdots \tag{3.17}$$

Remarquons que, même le terme indépendant de r est encore série en l^{-2}. Il est possible d'évaluer cette série dans l'approximation particulière du mouvement à très petite amplitude satisfaisant $|\omega q_i| \ll 1$. Il suffit pour cela de ne prendre en considération que les premiers termes de (3.13). Soit $g = g_0 + g_1 + \cdots$, où g_1 est linéaire en q_i et g_0 une constante. L'application de (3.10) fournit alors, pour les termes constants, et les termes linéaires en q_i :

$$\chi^b(\vec{y} + \vec{q}(\tau), t) = \int dz^4\, \varrho(z)\, B_{t-z_0,\tau}$$

$$\begin{aligned} B_{t-z_0,\tau} \cong g_0\, b_0(r) + g_0 \frac{\partial b_0(r)}{\partial r_i} q_i(\tau) \\ + g_1(t-z_0)\, b_\omega(r) - g_0 \frac{\partial b_\omega(r)}{\partial r_i} q_i(t-z_0). \end{aligned} \tag{3.18}$$

L'évaluation en série de r donne:

$$\begin{aligned} B_{t-z_0,\tau} &= r^0 \cdot (l b_{00} g_0 + m\, b_{00}\, g_1(t-z_0)) + r \cdot (\cdots) + r^2 \cdot (\cdots) + \cdots \\ \dot{B}_{t-z_0,\tau} &= r^0 \cdot m\, b_{00}\, \dot{g}_1(t-z_0) + r \cdot (\cdots) + r^2 \cdot (\cdots) + \cdots \\ \left(\frac{\partial B}{\partial y_j}\right)_{t-z_0,\tau} &= r^0 \cdot (2\, l^3\, b_{01}\, g_0\, q_i(\tau) - 2\, m^3\, b_{01}\, g_0\, q_i(t-z_0)) + r \cdot (\cdots) + \cdots \end{aligned} \tag{3.19}$$

qui sont les expressions X qui figurent en (1.10).

Ayant discuté χ^b, nous devons aborder la question, plus délicate encore, de χ^c, qui concerne les hautes fréquences $\omega^2 > l^2$. Remarquons tout d'abord que (3.14) permet, en vertu de la définition (3.1) de k, d'écrire $c_\omega(r)$ sous la forme d'une série convergente pour $\omega^2 > l^2$.

$$c_\omega(r) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^{2n+1}\, c_n(r). \tag{3.20}$$

Les fonctions $c_n(r)$ sont encore une fois des séries en r

$$c_n(r) = l^{-2n} \sum_0^\infty c_{n\alpha}(lr)^{2\alpha}\,;\; c_{n\alpha} = \frac{1}{(2\alpha+1)!} \binom{\alpha + \frac{1}{2}}{\alpha - n} \tag{3.21}$$

Ceci montre que les fonctions $c_{|n|}$ ne commencent que par le terme $c_{|n|\,|n|}\, r^{2|n|}$ indépendant de l et que les $c_{-|n|}$ disparaissent pour $l = 0$. Pour $l = 0$, on peut donner à χ^c une expression analogue à (3.6) ne contenant qu'une somme sur des n positifs. Pour simplifier, nous considérerons un mouvement ne contenant que de fréquences $\omega^2 > l^2$. La série (3.13) nous montre que, dans ce cas, il y a un terme η^b, indépendant du temps, provenant de $g_0\varrho(\vec{x}, z_0)$, et d'autres termes formant η^c. Mais comme dans (3.20) il n'intervient que des dérivées, η^b ne joue aucun rôle si $l = 0$. Il est donc permis d'identifier η avec η^c et d'obtenir, pour χ^c, une forme analogue à (3.10) avec une fonction C à la place de A. Ceci est encore possible si $l \neq 0$ et si l'analyse de Fourier de q_i contient comme frequence minimale un $\omega^2 > l^2$. Les dérivées négatives doivent alors être interprétées comme des intégrations:

$$(\partial/\partial t)^{-1} = \int_{-\infty}^{t} dt' \text{ pour } \chi^- \text{ et } = -\int_{t}^{\infty} dt' \text{ pour } \chi^+.$$

On obtient alors, (si $\dot{\vec{q}} = 0$):

$$C = r^0 \cdot c_{00}\,\dot{g} - r \cdot 2\,c_{11}\,g\,\dddot{q}_{/\!/} + r^2 \cdot (\cdots) + \cdots$$
$$+ l^2 \int^{t} dt'(\cdots) + l^4(\cdots) + \cdots$$

$$\dot{C} = r^0 \cdot c_{00}\,\ddot{g} - r \cdot (2\,c_{11}\,(g\,\ddddot{q}_{/\!/} + 4\,\dot{g}\,\dddot{q}_{/\!/} + 6\,\ddot{g}\,\ddot{q}_{/\!/}) + 36\,c_{22}\,g\,\ddot{q}^{\,2}\,\ddot{q}_{/\!/})$$
$$+ r^2 \cdot (\cdots) + \cdots + l^2\,c_{-10}\,g + l^4 \int^{t} dt'(\cdots) + \cdots$$

$$\frac{\partial C}{\partial y_i} = -\,r^0 \cdot 2\,c_{11}\,(g\,\dddot{q}_i + 3\,\dot{g}\,\ddot{q}_i) + r \cdot (\text{lin. en } \overset{(\alpha)}{q}_{/\!/}) + \cdots$$
$$+ l^2 \int^{t} dt'(\cdots) + \cdots \qquad (3.22)$$

Si, pour ces calculs, η^b n'est pas intervenu, on ne doit pourtant pas oublier que, même si q_i ne contient pas des fréquences inférieures à la fréquence critique, le premier terme de (3.13) $g_0\,\varrho(\vec{x}, z_0)$ donne un potentiel statique χ^b. Sa valeur est donnée par les termes statiques de (3.15), (3.16) et (3.17). Pour $l = 0$, ces termes statiques sont nuls.

Revenons au calcul de χ^c pour des mouvements de petites amplitudes $|\,\omega q_i\,| \ll 1$. Il est plus facile, dans ce cas, de calculer $\chi^b \pm \chi^c$ (le χ^b étant le terme statique discuté ci-dessus), qui a la même forme que (3.18). La fonction $(B \pm C)_{t-z_0,\,\tau}$ qui intervient à la place de $B_{t-z_0,\,\tau}$, est l'expression de $B_{t-z_0,\,\tau}$, dans laquelle les $b_\omega(r)$ sont remplacés par $\pm c_\omega(r)$, sauf $b_0(r)$, qui conserve sa valeur. Sous forme d'une série en r, $(B \pm C)$ a la forme de (3.19) lorsque m est remplacée par $\mp ik \dfrac{\omega}{|\omega|}$.

Ainsi, nous avons pu calculer les expressions des potentiels en fonction de la position et de la structure des particules. En particulier, nous avons donné l'expression détaillée sous forme de séries de ces potentiels dans le voisinage immédiat des particules.

§ 4. L'électron de Lorentz.

Notre nouveau modèle d'électron ponctuel a des propriétés très semblables à celles de l'électron de Lorentz-Abraham. Il nous paraît important de résumer ici les traits essentiels de la théorie de Lorentz. Dans celle-ci, les forces sont uniquement de nature électromagnétique et, par conséquent, le tenseur $W_{\mu\nu}$ devient le $T_{\mu\nu}$ de Maxwell ((2.6) avec $l = 0$).

Pour simplifier cet exposé, nous introduisons les moyennes de r^n:

$$\overline{r^n(t)} = \int d x^4\, \varrho(x) \int d z^4 \varrho(z)\, r^n\,;\ \vec{r} = \vec{x} - \vec{z} + \vec{q}(t - x_0) - \vec{q}(t - z_0) \quad (4.1)$$

qui représentent une mesure du rayon de l'électron. L'énergie totale pour un électron au repos prend alors la valeur:

$$\int d x^3\, W_{44} = \int d x^3\, T_{44} = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^2\, \overline{r^{-1}}\,. \quad (4.2)$$

Pour évaluer les relations $\int d x^3 P_\mu = 0$, nous utilisons (2.7) $(\partial J_\nu / \partial x_\nu = 0)$ et décomposons $F_{\mu\nu}$ en $F^e_{\mu\nu} + F'_{\mu\nu}$. $F'_{\mu\nu}$ est exprimé par les potentiels Φ'_μ qui, à leur tour, sont la somme $\Phi^a_\mu \pm \Phi^c_\mu$, Φ^b_μ disparaissant pour $l = 0$. Ces Φ^a_μ sont donnés par (3.10) avec $g_0 = \varepsilon$ et $g_i = \varepsilon \dot{q}_i$. Dans un système de Lorentz caractérisé par $\dot{q}_i(t) = 0$, on peut utiliser les séries en r (3.12) et (3.22). Le fait qu'elles doivent être évaluées pour $t - z_0$ n'ajoute que des termes en z_0^2 à ces expressions. A ces termes près, $\int d x^3 P_0$ disparaît indentiquement, et les autres intégrales donnent les équations de mouvement. Dans l'évaluation des intégrales doubles apparaissent en plus des moyennes (4.1) des expressions $\vec{a}_{//} = \vec{r}^{\,0} (\vec{r}^{\,0}, \vec{a})$ ou $\vec{r}^{\,0} = \vec{r}\, r^{-1}$ et $\vec{a}$ sont des vecteurs dépendant en général des temps $t - x_0$ et $t - z_0$. En vertu de la relation (4.1) $\vec{r}(x, z) = -\vec{r}(z, x)$ ce ne sont que les expressions à puissances paires dans les composantes de $\vec{r}^{\,0}$ qui contribuent à l'intégrale (à des termes en z_0^2 et x_0^2 près). C'est pour cette raison que les facteurs α_n définis par

$$\alpha_n(t)\, \overline{r^m(t)}\, \vec{a}(t) = \int d x^4 \varrho(x) \int d z^4\, \varrho(z)\, \vec{r}^{\,0} (\vec{r}^{\,0}, \vec{a}(t - z_0))^{n-1}\, r^m \quad (4.3)$$

disparaissent pour les valeurs impaires de n. Dans le système

$\dot{q}_i(t) = 0$, la force extérieure $E_i(t)$ due à $F^e_{\mu\nu}$ prend la forme suivante ($F^e_i = \sqrt{-1}\, F^e_{i\,4}$):

$$E_i(t) = \varepsilon \int d\,x^4\, \varrho\,(x)\, F^e_i\,(\vec{x} + \vec{q}\,\,(t - x_0)\,,\, t - x_0)\,. \tag{4.4}$$

Avec ces abréviations, l'expression $\int d\,x^3 P_i$ devient

$$\begin{aligned}\int d x^3 P^T_i = \varepsilon \int d\,x^4 \varrho\,(x) \Big\{ &- F^e_i\,(\vec{x} + \vec{q}\,(t - x_0)\,,\, t - x_0) \\ &+ \int d\,z^4 \varrho\,(z) \left(\dot{A}\,(\varepsilon\,\dot{q}_i\,,\cdot\cdot) + \frac{\partial\, A\,(\varepsilon\,,\cdot\cdot)}{\partial\, x_i} \pm \dot{C}\,(\varepsilon\,\dot{q}_i\,,\cdot\cdot) \pm \frac{\partial\, C\,(\varepsilon\,,\cdot\cdot)}{\partial\, x_i} \right) \Big\} \\ = \frac{1 + \alpha_2}{2}\, \varepsilon^2 \Big\{ &\overline{r^{-1}}\, \ddot{q}_i - \overline{r}\,\big(\tfrac{1}{4}\, \ddddot{q}_i + \tfrac{55}{6}\, \ddot{q}_i \ddot{q}^{\,2}\big) + \overline{r^3}(\cdots) + \cdots \Big\} \\ &\pm \tfrac{2}{3}\, \varepsilon^2 \big\{ \dddot{q}_i + \overline{r^2}\,(\cdots) + \cdots \big\} - E_i = 0\,.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Dans la limite quasi-stationnaire $-\overset{(n+2)}{q_i} \,/\, \overset{(n)}{q_i} \sim \omega^2 \ll \overline{r^{-2}}$ et $\ddot{q}^{\,2} \ll \overline{r^{-2}}$, cette équation prend la forme

$$M \ddot{q}_i \pm \tfrac{2}{3}\, \varepsilon^2 \dddot{q}_i - E_i = 0 \tag{4.6}$$

avec

$$M = \frac{1 + \alpha_2}{2}\, \varepsilon^2\, \overline{r^{-1}},$$

c'est-à-dire l'équation Newtonienne d'une particule de masse M soumise à une force extérieure $\vec{E}$ et à une force du freinage (positif ou négatif) $\mp \frac{2}{3}\, \varepsilon^2 \dddot{\vec{q}}$. Pour un mouvement périodique, la puissance de la force extérieure compense la puissance moyenne du freinage puisque en moyenne

$$(\vec{E}\,, \dot{\vec{q}}) = \pm\, \tfrac{2}{3}\, \varepsilon^2\, (\dddot{\vec{q}}\,, \dot{\vec{q}}) = \mp\, \tfrac{2}{3}\, \varepsilon^2\, \ddot{q}^{\,2} \tag{4.7}$$

Cette puissance moyenne est égale au flux moyen d'énergie émis par la particule $\oint (d\vec{\sigma}\,, \vec{T})$ des (3.9) pour $l = 0$ et $k = |\,\omega\,|$.

§ 5. Les difficultés de la théorie de l'électron ponctuel.

Une particule ponctuelle est définie par la limite de la fonction $\varrho\,(z) = \delta\,(\vec{z})\, \delta_0(z_0)$ où $\delta\,(\vec{z})$ est la fonction singulière mais intégrable de l'espace et $\delta_0(z_0)$ celle du temps. Il est évident que, dans cette limite (4.6) subsiste mais la masse M et l'énergie (4.2) deviendront infinies comme $\overline{r^{-1}}$. On pourrait penser faire le passage à la limite dans l'espace seulement, gardant à l'électron une dimension temporelle finie. Mais les termes en r^{-1} dans l'équation de mouvement prendront alors la forme

$$\int d x_0 \; \delta(x_0) \int d z_0 \; \delta(z_0) \frac{1}{\ddot{q}^2 \, | \, x_0^2 - z_0^2 \, |}$$

en vertu du fait que $\vec{r}$ vaudra alors $\frac{1}{2} \ddot{\vec{q}}(t) \, (z_0^2 - x_0^2)$ (dans un système ou $\dot{\vec{q}}(t) = 0$). Cette expression est infinie même pour une fonction $\delta(x_0)$ non singulière. Le modèle de l'électron conçu par WENTZEL[5]) ne peut donc pas être identifié avec un électron à étendue temporelle.

Une autre méthode a été envisagée par Dirac[6]) et PRYCE[7]). Ils soustraient de $T_{\mu\nu}$ des tenseurs (fonctionnels de $x - q(s)$), qui enlèvent les singularités d'une charge ponctuelle et rendent fini le tenseur $W_{\mu\nu}$ aussi bien que sa divergence. Dans ce paragraphe nous exposons une autre méthode de ce genre, qui, du reste, n'est pas satisfaisante, mais qui montre très clairement où réside la difficulté.

Nous avons besoin de certaines grandeurs associées à la particule, qui ne diffèrent de zéro qu'aux environs de celle-ci. Le scalaire J et le vecteur J_μ du § 2, sont de telles expressions. En plus, on peut former un tenseur symétrique $R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu}(x) = - \int d s \, v_\mu(s) \, \dot{q}_\nu(s) \, \varrho \, (x - q(s))$$
$$v_\mu = \dot{q}_\mu \, (- \dot{q}_\nu \, \dot{q}_\nu)^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.1}$$

Il satisfait à la relation de divergence

$$\frac{\partial R_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = - \int d s \; \dot{v}_\mu \, \varrho \, (x - q) \, . \tag{5.2}$$

Cette divergence disparaît identiquement si $\dot{v}_\mu = 0$, ce qui implique $\ddot{q}_i = 0$ si q_0 est choisi comme paramètre s. $\int d x^3 R_{44}$ est toujours positive et a, dans ce cas particulier, la forme

$$\int d x^3 R_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{q}}\,|^2}} \, . \tag{5.3}$$

On peut montrer que $M R_{\mu\nu}$ est le *tenseur d'énergie-impulsion de la matière*. En effet, pour une particule qui ne présente pas d'interaction avec un champ, (5.2) doit s'annuler, ce qui fournit l'équation du mouvement $\ddot{q}_i = 0$. $\int d x^3 \, M R_{44}$ est alors l'énergie totale d'une particule de masse M.

En plus de J, J_μ et $R_{\mu\nu}$, qui sont tous du type η envisagé au § 1, il y a certaines parties de χ' qui forment eux-mêmes des expressions covariantes associées à la particule.

D'abord § 3 a montré que tout χ' pouvait être mis sous les deux formes

$$\chi'^{\pm} = \chi^a + \chi^b \pm \chi^c \tag{5.3}$$

correspondant respectivement au potentiel avancé et retardé. Les deux formes χ'^{+} et χ'^{-} étant elles-mêmes des expressions covariantes, leur différence, c'est-à-dire $\chi^c = \frac{1}{2}(\chi'^{+} - \chi'^{-})$ est une expression covariante. Cela est vrai aussi pour leur somme $\chi^a + \chi^b$. Les termes indépendants de l dans cette somme forment la somme du potentiel avancé et retardé de l'équation de Poisson avec $l = 0$. Ils sont tous contenus en χ^a et nous les appellons χ^{a_0}. χ^c et χ^{a_0} sont donc des grandeurs covariantes associées à la particule. En particulier, nous utilisons le vecteur $\Phi^{a_0}_\mu$ et le scalaire $\Psi^{a_0}_\mu$ formés par J_μ et J suivant la méthode du § 3. Ils permettent de définir deux tenseurs symétriques qui, eux aussi, ne diffèrent de zéro qu'aux environs de la particule.

$$(\cdots)_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{4}\left(\Phi^{a_0}_\mu J_\nu + \Phi^{a_0}_\nu J_\mu\right)$$

ou

$$(\cdots)_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2}\,\Psi^{a_0} R_{\mu\nu} \tag{5.4}$$

Leur énergie totale vaut $\frac{1}{2}\varepsilon^2 r^{-1}$ pour une particule au repos. En ajoutant l'un ou l'autre des $-(\cdots)_{\mu\nu}$ au $T_{\mu\nu}$ du paragraphe précédent, on obtient une self-énergie $\int dx^3 W_{44}$ finie (en particulier nulle) pour la particule ponctuelle.

On peut démontrer également que leur divergence $\partial(\cdots)_{\mu\nu}/\partial x_\nu$ ajoutée avec le facteur $-(1+\alpha_2)$ à la divergence de $T_{\mu\nu}$ enlève les termes en r^{-1} dans l'équation de mouvement (4.5). Ajoutant encore le tenseur d'énergie-impulsion de la matière $MR_{\mu\nu}$ à $T_{\mu\nu} - (1+\alpha_2)(\cdots)_{\mu\nu}$, le passage à la limite nous fournit en effet l'équation de mouvement (4.6) pour une particule de masse M.

Cette soustraction a de graves défauts. En effet, il faut soustraire les tenseurs (5.4) une fois avec le facteur 1 pour rendre finie l'énergie totale, et l'autre fois avec le facteur $(1+\alpha_2)$ (qui vaut d'ailleurs $\frac{4}{3}$ pour une particule de symétrie sphérique) pour faire disparaître les infinités dans la masse inerte de l'équation Newtonienne. D'autre part, $\partial W_{\mu\nu}/\partial x_\nu$ ne disparaît pas pour $\vec{x} = \vec{q}$. En multipliant la divergence de $W_{\mu\nu}$ sous l'intégrale avec la fonction arbitraire (1.11), on s'aperçoit que le second terme de (1.11) produit un nombre infini.

Tout ceci montre qu'il n'est pas possible d'enlever les infinités de la théorie de l'électron ponctuel en n'ajoutant des termes à $T_{\mu\nu}$ qu'aux environs immédiats de la particule.

Il faut en effet ajouter d'autres tenseurs, qui diffèrent de zéro pour des régions finies autour de la particule. La façon la plus simple de faire cette opération consiste à introduire un autre champ et c'est en effet ce que nous allons faire au paragraphe suivant.

§ 6. Le nouveau modèle de l'électron.

Si nous ajoutons au tenseur $T^0_{\mu\nu}$ (l'indice 0 marque le fait que $l = 0$) le tenseur $S_{\mu\nu}$ (2.2) du potentiel de Yukawa Ψ (avec $l \neq 0$), la self-énergie aura, en vertu de (2.12), la forme $\varepsilon^2(\overline{r^{-1}} - \frac{1}{2}\, l + \frac{1}{4}\, l^2\, \overline{r} - \cdots)$. Nous en soustrayons le tenseur $\varepsilon \Psi R_{\mu\nu}$, dont l'intégrale vaut (si $\dot{q}_i = 0$) $\int d\,x^3 \varepsilon \Psi R_{44} = \varepsilon^2(\overline{r^{-1}} - l + \frac{1}{2}\, l^2\, \overline{r} - \cdots)$. La self-énergie du tenseur

$$W_{\mu\nu} = T^0_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} - \varepsilon \Psi R_{\mu\nu} \tag{6.1}$$

a donc, même dans la limite ponctuelle, la valeur finie:

$$\int d\,x^3\, W_{44} = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^2\, l \equiv M \tag{6.2}$$

ce qui correspond à la self-énergie d'un électron de Lorentz avec le rayon moyen $\overline{r^{-1}} = l$.

L'équation de mouvement peut être établie d'une façon analogue au § 4, la divergence de $R_{\mu\nu}$ étant donnée en (5.2). $\int d\,x^3\, P_0$ disparaît encore une fois identiquement, et, pour le mouvement quasi stationnaire, on a (si $\dot{q}_i(t) = 0$)

$$\begin{aligned}
\int d\,x^3\, P_i = \int d\,x^4\, \varrho\,(x) \Big\{ & (-F^e_i - K^e_i - \ddot{q}_i \Psi^e)\,(\vec{x} - \vec{q}\,(t - x_0)\,,\, t - x_0) \\
& + \int d\,z^4\, \varrho(z) \Big(\dot{A}^0(\varepsilon\, \dot{q}_i, \cdot\cdot) + \frac{\partial\, A^0(\varepsilon, \cdot\cdot)}{\partial\, x_i} - \ddot{q}_i\, A\,(\varepsilon \sqrt{1 - \dot{q}^2}, \cdot\cdot) \\
& - \frac{\partial\, A\,(\varepsilon \sqrt{1 - \dot{q}^2}, \cdot\cdot)}{\partial\, x_i} - \ddot{q}_i\, B(\varepsilon \sqrt{1 - \dot{q}^2}, \cdot\cdot) - \frac{\partial\, B\,(\varepsilon \sqrt{1 - \dot{q}^2}, \cdot\cdot)}{\partial\, x_i} \\
& \pm \dot{C}^0\,(\varepsilon\, \dot{q}_i, \cdot\cdot) \pm \frac{\partial\, C^0\,(\varepsilon, \cdot\cdot)}{\partial\, x_i} \Big) \Big\} \\
= {} & \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^2 \left\{ l\, \ddot{q}_i - l^{-1}\, (\tfrac{1}{4}\, \ddddot{q}_i + \tfrac{21}{2}\, \ddot{q}_i\, \ddot{q}^2) + l^{-3}\,(\cdots) + \cdots \right\} \\
& \pm \tfrac{2}{3}\, \varepsilon^2 \dddot{q}_i - E_i + \overline{r}\,(\cdots) + \overline{r^2}\,(\cdots) + \cdots = 0\,.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

On voit que les termes en $\overline{r^{-1}}$ dus aux A se sont rigoureusement compensés. En vertu des considérations sur la covariance relativiste des χ^{a_0} exposées au paragraphe précédent, cette compensation est valable dans tout système de Lorentz. Les termes indépendants de r sont tous écrits en (6.3), sauf les termes proportionnels à la première puissance de r_i^0. Ceux-ci disparaissent à la suite de l'intégration. Si la fonction arbitraire $h(\vec{y})$ de (1.11) est mise sous le signe d'intégration $\int dx^4 \ldots\ldots$, ils ne contribuent que des termes en $\overline{r}$. Le passage à la limite de la particule pouctuelle $\overline{r} = 0$ est alors possible et la conservation d'énergie est assurée en détail, c'est-à-dire que (1.3) est valable partout, même pour $\vec{x} = \vec{q}$. Dans l'approximation quasi stationnaire, nous retrouvons l'équation (4.6). La masse inerte M et la self-énergie sont identiques, ce que nous avons déjà exprimé en (6.2). Le premier terme de correction en l^{-1} est identique (à un facteur numérique près) à celui en $\overline{r}$ dans la théorie de l'électron de Lorentz. Naturellement, E_i signifie maintenant la force totale. Dans la limite de la particule ponctuelle, elle est (pour la particule en repos):

$$E_i = \varepsilon\,(F_i^e + K_i^e + \ddot{q}_i\,\Psi^e)_{\vec{x}=\vec{q}}\,. \tag{6.4}$$

Il est très remarquable que le développement en $\overline{r^n}$ dans la théorie de Lorentz soit semblable au développement en l^{-n} dans notre théorie, parce qu'à première vue le diamètre de l'électron $\overline{r}$ et la longueur fondamentale l^{-1} dans la théorie du champ Ψ n'ont aucune ressemblance. Le développement en r^n dans la théorie de Lorentz a qualitativement la signification suivante: Un terme du type $\ddot{q}_i\,r^{-1}$ marque l'influence d'une partie de l'électron sur une autre, située à une distance r de la première. Comme cette influence se propage avec la vitesse de la lumière 1, $\ddot{q}_i$ doit être remplacé par sa valeur postérieure ou antérieure: $\ddot{q}_i \pm \dddot{q}_i r + \frac{1}{2}\ddddot{q}_i\,r^2 \pm \cdots$. C'est cette série qui fournit les termes $\overline{r^{-1}}$ (inertie), indépendants de r (freinage), $\overline{r}$ (correction), etc.

Le développement en l^{-n} dans notre théorie fait intervenir l'effet des paquets d'ondes du champ Ψ émis au passé. Dans le cas du mouvement quasi stationnaire, ces paquets d'ondes ne peuvent s'éloigner de la particule ponctuelle qu'à une distance de l'ordre de l^{-1} (cf. § 3). Mais le champ, à cette distance, est déterminé par la valeur de $\ddot{q}_i$ à des temps antérieurs de l'ordre de l^{-1} et il se fera sentir à l'endroit de la particule à des temps futurs du même ordre l^{-1}. Au terme d'inertie du type $\ddot{q}_i l$, qui marque l'influence de l'accélération sur la particule, s'ajoutent donc des termes de correction de l'ordre $\ddddot{q}_i\,l^{-1}$, etc., semblables à $\ddddot{q}_i\,\overline{r}$ de Lorentz.

Il est à remarquer que ces corrections ne contiennent que des dérivées paires, ce qui a pour effet que le freinage de radiation a, dans notre modèle, rigoureusement la forme $\pm \frac{2}{3} \varepsilon^2 \dddot{q}_i$, tandis que, pour l'électron de Lorentz, il y a des corrections en $\overline{r^2}$.

Nous allons encore montrer que l'équation du mouvement et les équations du champ dérivent d'un principe de variation. Pour voir ceci, on exprime d'abord $\partial W_{\mu\nu} / \partial x_\nu$ (6.1) par les expressions pour les divergences de $T_{\mu\nu}$ et $S_{\mu\nu}$ du § 2 (2.3) et (2.7) et de $R_{\mu\nu}$ du § 5 (5.2). Ensuite, on fait l'intégration $\int d x^3 \int ds$ pour $\varrho(x) = \delta(\vec{x})\, \delta_0(x_0)$. C'est ainsi qu'on obtient l'équation de mouvement dans sa forme explicitement covariante:

$$\int d x^3 \frac{\partial W_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \varepsilon \frac{ds}{d q_0} \left(F_{\mu\nu} \dot{q}_\nu + K_\mu (-\dot{q}_\nu \dot{q}_\nu)^{\frac{1}{2}} + \Psi \dot{v}_\mu + K_\nu \dot{q}_\nu v_\mu\right) = 0.$$

Elle peut être mise sous la forme plus simple:

$$\frac{d}{ds} (\varepsilon \Psi v_\mu - \varepsilon \Phi_\mu) + \frac{\partial}{\partial q_\mu} (\varepsilon \Psi (-\dot{q}_\nu \dot{q}_\nu)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \Phi_\nu \dot{q}_\nu) = 0 \qquad (6.7)$$

Les grandeurs du champ et du potentiel sont à prendre pour $x_\mu = q_\mu$. Cette dernière expression est l'équation eulérienne de la Lagrangienne

$$L(q, \dot{q}) = \varepsilon \Psi(q) (-\dot{q}_\nu \dot{q}_\nu)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \Phi_\mu(q)\, \dot{q}_\mu \qquad (6.8)$$

considérée comme fonction des $q_\mu(s)$ et $\dot{q}_\mu(s)$. L'équation du mouvement et les équations du champ dérivent alors du problème de variation suivant

$$\delta \left\{ \int ds\, L + \int d x^4\, \mathfrak{L} \right\} = 0 \qquad (6.9)$$

$\mathfrak{L}$ est la densité lagrangienne des champs:

$$8 \pi \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + K_\mu K_\mu + l^2 \Psi^2 . \qquad (6.10)$$

Les variations devant se faire sur les lignes d'univers $q_\mu(s)$ et les potentiels $\Phi_\mu(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ et $\Psi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$.

§ 7. Mouvement à petites amplitudes.

Le second membre de (6.3) n'est valable d'abord que pour un système de Lorentz, dans lequel $\dot{q}_i(t) = 0$. Mais nous avons déjà démontré que la compensation des A se fait, à des termes en l^2 près, dans tout système de Lorentz. Un argument semblable montre que les termes en l^2 dans A ne contribuent que des expressions proportionnelles à des puissances de $\dot{q}_i$ supérieures à la première.

Pour autant que $| q_i \omega | < | q_i l | \ll 1$, nous pouvons donc les négliger. Il en est de même pour les termes $\dot{q}_i \dot{B}$ (et $\dot{q}_i \dot{C}$ si $\omega^2 > l^2$). Pour obtenir l'équation de mouvement à petite amplitude, il suffit donc de substituer les valeurs $B_{t-z_0,\, t-x_0}$ de (3.19) en (6.3) tout en supposant que la force extérieure a la forme $E_i = E_{i0}\, e^{i\omega t}$ et $q_i = q_{i0}\, e^{i\omega t}$. Intégration faite, le dernier membre de (6.3) donne l'équation de mouvement

$$\varepsilon^2 \left\{ \left(-l\omega^2 + \tfrac{1}{3} l^3 - \tfrac{1}{3} (l^2 - \omega^2)^{\frac{3}{2}} \right) \mp \tfrac{2}{3} i \omega^3 \right\} q_i - E_i = 0 \quad (7.1)$$

Si nous définissons la masse inerte par $M(\omega^2)\, \ddot{q}_i = E_i \mp \frac{2}{3} \varepsilon^2 \dddot{q}_i$, on voit que celle-ci augmente de la valeur $/M(o) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 l$ en (6.2) pour $\omega^2 \ll l^2$ à $M(l^2) = \frac{2}{3} \varepsilon^2 l$ pour $\omega^2 \gtrsim l^2$. L'équation (7.1) permet de calculer le rapport $\sigma(\omega^2)$ entre le flux d'énergie rayonnée par la particule et le courant d'énergie d'une onde plane incidente $| \vec{T} |$. Cette section d'efficacité pour la diffusion de l'énergie électromagnétique est d'après (3.9) et (2.9)

$$\sigma(\omega^2 < l^2) = \frac{8\pi \varepsilon^2 \omega^4 | \vec{q} |^2}{3 | \vec{F}^e |^2}$$

$$= \frac{8\pi}{\omega^2 + 4 l^2 - 3 l^4 \omega^{-2} + \frac{2}{3} l^6 \omega^{-4} - m\left(2l - \frac{8}{3} l^3 \omega^{-2} + \frac{2}{3} l^5 \omega^{-4}\right)} . \quad (7.2)$$

Dans les deux limites $\omega \sim 0$ et $m = \sqrt{l^2 - \omega^2} \sim 0$, on a l'expression de Thompson (cf. Introduction)

$$\sigma(\omega^2 \ll l^2) = \frac{8\pi}{\frac{3}{4} l^2 + \frac{41}{24} \omega^2 + \cdots} \xrightarrow[\omega = 0]{} \frac{32}{3} l^{-2} \quad (7.3)$$

et

$$\sigma(\omega^2 \gtrsim l^2) = \frac{8\pi}{\frac{8}{3} l^2 - \frac{8}{3} m^2 + \frac{4}{3} l^{-1} m^3 + \cdots} . \quad (7.4)$$

Le mouvement à petite amplitude pour $\omega^2 > l^2$ peut être traité de la même façon. Il faut substituer le $(B \pm C)$ défini à la fin du § 3 à la place de B dans l'équation (6.3). Cette expression s'obtient en remplaçant $(l^2 - \omega^2)^{\frac{3}{2}}$ par $\pm i \frac{\omega}{|\omega|} (\omega^2 - l^2)^{\frac{3}{2}}$ en (7.1), c'est-à-dire

$$\varepsilon^2 \left\{ \left(-l\omega^2 + \tfrac{1}{3} l^3 \right) \mp i \left(\tfrac{2}{3} \omega^3 + \tfrac{1}{3} \frac{\omega}{|\omega|} (\omega^2 - l^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right\} q_i - E_i = 0 . \quad (7.5)$$

La masse inerte doit alors être définie par $M(\omega^2) \ddot{q}_i = E_i \pm$ force de freinage. Elle augmente de la valeur $M(l^2) = \frac{2}{3} \varepsilon^2 l$ à la valeur $M(\omega^2 \gg l^2) = \varepsilon^2 l$. L'évaluation de la puissance moyenne définie par le premier membre de (4.7), effectuée pour les grandeurs physiques (= parties réelles de $\dot{q}_i$ et E_i), nous fournit en moyenne

$$(\vec{E}, \dot{\vec{q}}) = \mp \varepsilon^2 \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} \frac{k^3}{|\omega^3|}\right) \ddot{q}^2 . \tag{7.6}$$

Elle est la somme de l'énergie rayonnée suivant (3.9) c. à. d. de $\oint (d\vec{\sigma}, \vec{T})$ avec $k = |\omega|$, $l = 0$ et de $\oint (d\vec{\sigma}, \vec{S})$. La section d'efficacité se calcule d'une façon analogue à (7.2) si la force E_i est de nature électromagnétique uniquement:

$$\begin{aligned}\sigma(\omega^2 > l^2) &= \frac{8\pi\varepsilon^2 (\omega^4 + \frac{1}{2} k^3 |\omega|) |\vec{q}|^2}{3 |\vec{F}^e|^2} \\ &= \frac{8\pi (1 + \frac{1}{2} k^3 |\omega|^{-3})}{\frac{5}{3}\omega^2 + 2 l^2 - l^4 \omega^{-2} + \frac{4}{3} k^3 |\omega|^{-1}} .\end{aligned} \tag{7.7}$$

Les valeurs limites $\omega^2 \gtrsim l^2$ et $k = \sqrt{\omega^2 - l^2} \sim 0$ sont:

$$\sigma(\omega^2 \gtrsim l^2) = \frac{8\pi}{\frac{8}{3} l^2 + \frac{8}{3} k^2 - l^{-2} k^4 + \cdots} \tag{7.8}$$

$$\sigma(\omega^2 \gg l^2) = \frac{8\pi}{2\omega^2 + l^2 + \cdots} . \tag{7.9}$$

Il est intéressant de remarquer que les expressions (7.4) et (7.8) pour σ^2 aux environs de $\omega^2 \sim l^2$, coïncident, ainsi que leurs premières dérivées par rapport à ω^2.

Rappelons l'expression que Dirac a obtenue pour cette section en se basant sur une théorie, où l'électron obéissait rigoureusement à (4.6). Identifiant sa masse M avec $\frac{1}{2}\varepsilon^2 l$, il obtenait:

$$\sigma(\omega^2) = \frac{8\pi}{\frac{3}{4} l^2 + \frac{4}{3}\omega^2} . \tag{7.10}$$

Il est remarquable que notre modèle montre une diminution plus rapide de σ avec une augmentation de ω^2, quoiqu'il ait plus de façons de rayonner que celui de Dirac. (Il peut en effet émettre en plus des ondes électromagnétiques des ondes Ψ.)

La section d'efficacité pour un rayonnement Ψ, qui a toujours une fréquence supérieure à l^2, est calculée à partir de (7.5) si l'on pose $E_i = \varepsilon K_i^e$. (Un terme ε ($\dot{\Psi}^e \dot{q}_i + \Psi^e \ddot{q}_i$) qui, en toute rigueur, s'introduit en E_i, est quadratique dans les amplitudes q_i qui sont elles-mêmes proportionnelles à Ψ^e et ses dérivées, et doit donc être négligé dans cette approximation).

L'équation (2.9) montre qu'on doit poser:

$$\sigma_\psi\,(\omega^2 > l^2) = \frac{k^2}{|\,\omega\,|^2}\,\sigma\,(\omega^2 > l^2) \tag{7.11}$$

§ 8. Généralisation à des particules nucléaires.

La généralisation du procédé à des particules présentant une interaction avec plusieurs champs scalaires et vectoriels, caractérisés chacun par sa longueur fondamentale $l_1, l_2 \ldots l_r, l_s$ et sa constante d'interaction $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_r, \varepsilon_s$, est facile. Un modèle classique des particules nucléaires ayant des interactions avec le champ électromagnétique et le champ des forces nucléaires peut être ainsi donné.

Le tenseur

$$W_{\mu\nu} = \sum_r T^{\,r}_{\mu\nu} + \sum_s (S^{\,s}_{\mu\nu} - \varepsilon_s\,\Psi^s\,R^{\mu\nu}) \tag{8.1}$$

donne lieu à une self-énergie finie

$$\int d\,x^3\;W_{44} = \tfrac{1}{2}\sum_s (\varepsilon^{\,2}_s\,l_s - \sum_r \varepsilon^{\,2}_r\,l_r) = \sum_s M_s + \sum_r M_r \equiv M \tag{8.2}$$

pour la particule ponctuelle, si $\sum_s \varepsilon^{\,2}_s = \sum_r \varepsilon^{\,2}_r$. L'équation de mouvement (6.3) doit être généralisée en une somme sur les indices s et r qui dénombrent les différents champs scalaires et vectoriels. En particulier, les termes:

$$\left(\cdots + \dot{B}^r\,(\varepsilon_r\,\dot{q}_i, \cdot\cdot) + \frac{\partial\,B^r\,(\varepsilon_r, \cdot\cdot)}{\partial\,x_i}\right)\Bigg\} \tag{8.3}$$

doivent être ajoutés au deuxième membre de (6.3) pour les champs vectoriels ayant une constante $l_r \neq 0$. Le champ scalaire Ψ^s, par les fonctions $-\ddot{q}_i\,B^s - \partial\,B^s/\partial\,x_i$, a contribué le terme $\frac{1}{2}\,\varepsilon^2_s\,l_s$ à la masse inerte. Le champ vectoriel Φ^r_μ contribuera, par (8.3) (cf. 3.16) et (3.17)) un terme $-\frac{1}{2}\,\varepsilon^2_r\,l_r$. Ceci montre que (8.2) est en effet la masse inerte M dans l'équation de Newton (4.6) pour autant que les fréquences ω^2 sont inférieures au plus petit des l_s ou l_r (le $l = 0$ du champ électromagnétique excepté). Si la masse inerte d'une telle particule est définie par l'équation du mouvement

$$M\,(\omega)\,\ddot{q}_i = E_i \pm \text{force du freinage}_i \tag{8.4}$$

pour des petites amplitudes, elle varie avec la fréquence. A une augmentation de $\omega^2 \ll l_s^2$ jusqu'à $\omega^2 \gg l_s^2$, correspond un accroissement de M_s de $\frac{1}{2}\,\varepsilon_s^2\, l_s$ à $M_s = \varepsilon_s^2\, l_s$ (cf. § 7). (3.19) et la remarque faite à la fin du § 3, appliqué à (8.3), montre que les facteurs de q_i en (7.1) et (7.5) dus au champ vectoriel Φ_μ^r sont respectivement:

$$\omega^2 < l_r^2 : \varepsilon_r^2 \left\{\omega^2\, m_r - \tfrac{1}{3}\, l_r^3 + \tfrac{1}{3}\, m_r^3\right\} q_i = \varepsilon_r^2 \left\{\tfrac{1}{2}\, \omega_r^2\, l_r + l_r^{-1} (\cdots) + \cdots\right\} q_i$$

$$\omega^2 > l_r^2 : \varepsilon_r^2 \left\{-\tfrac{1}{3}\, l_r^3 \mp i\, \tfrac{1}{3}\, k_r\, (2\,\omega^2 + l_r^2)\right\} q_i \qquad (8.5)$$

Le terme imaginaire contribue à une puissance moyenne égale à $\oint (d\vec{\sigma}, \vec{T})$ en (3.9).

Les facteurs $M_r(\omega)$ augmentent donc de $M_r(o) = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_r^2\, l_r$ à $M_r\,(\omega^2 \sim l_r^2) \sim \frac{1}{3}\,\varepsilon_r^2\, l_r$ pour, ensuite, diminuer vers zéro comme $M_r(\omega^2 \gg l_r^2) = \frac{1}{3}\,\varepsilon_r^2\, l_r^3\, \omega^{-2}$. Ceci implique que la masse des particules nucléaires est plus petite dans les noyaux que pour la diffusion des rayons cosmiques. On a $-M_r/M = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_r^2/hc)\, M_y/M$ (ε_r = constante d'interaction nucléaire, $2\pi h$ = constante de Planck, M_y = masse du mésotron $= h l_r\, c^{-1}$, M = masse du neutron), et l'on voit que les deux masses ne diffèrent que de $5^0/_{00}$. Cette remarque a été faite par Bhabha[13]). La masse des particules augmente donc continuellement et atteint une valeur maximum

$$M\,(\omega^2 \rightarrow \infty) = \sum_s \varepsilon_s^2\, l_s.$$

Pour donner un modèle classique du neutron ponctuel, il faut tenir compte de l'interaction avec le champ des mésons Φ_μ^v avec un ε_r de l'ordre de grandeur $\varepsilon_r^2/hc \sim 10^{-1}$ et un $l_r \sim 10^{-13}$ cm. Pour compenser les infinités, il faut alors faire intervenir l'action d'un nouveau champ scalaire Ψ^s avec la même constante d'interaction $\varepsilon_s = \varepsilon_r$ et une longueur fondamentale l_s, satisfaisant à $M = \frac{1}{2}\,\varepsilon_r^2\,(l_s - l_r) = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_r^2/hc)\, M_x\,(1 - \frac{M_y}{M_x})$; $M_x = h l_s\, c^{-1}$. Les quanta que la théorie quantifiée ferait correspondre à ce nouveau champ seraient des particules élémentaires du poids atomique $\frac{M_x}{M} \sim 20$.

Une tentative semblable à la nôtre a été faite par Bopp[10]). Il compense les termes infinis du tenseur Maxwellien $T_{\mu\nu}^0$ par un terme $-T_{\mu\nu}^r$ d'un champ du type de Proca avec $\varepsilon_r = \varepsilon$. Une telle théorie donne en effet la même self-énergie et masse inerte que la nôtre, pour autant que $\omega^2 < l_r^2$, mais la condition que $W_{44} \geqslant 0$, ou même la condition plus faible $\int dx^3\, W_{44} \geqslant 0$ ne sont pas satisfaites pour $\omega^2 > l_r^2$. En effet, des paquets d'ondes de Proca à énergie négative existent alors indépendamment de la particule et faussent complètement l'équation du mouvement.

§ 9. Conclusions.

Nous avons pu démontrer qu'une combinaison appropriée de champs scalaires et vectoriels permet de définir un tenseur d'énergie-impulsion $W_{\mu\nu}$, qui satisfait partout à l'équation de continuité. Il faut pour cela que les singularités du champ se meuvent suivant une trajectoire $q_\mu = q_\mu(s)$ déterminée. Pour le mouvement quasi stationnaire, la masse inerte M est égale à l'intégrale $\int d x^3 W_{44}$ prise sur tout l'espace (les champs étant produits par la particule au repos $\dot{q}_i = 0$).

Lorentz avait déjà étudié ce mouvement et trouvé que, pour un mouvement quasi stationnaire, il fallait que $|\dddot{q}_i / \ddot{q}_i| \ll \overline{r^{-2}}$ et $|\ddot{q}_i|^2 \ll \overline{r^{-2}}$, $\overline{r^{-n}}$ étant les moyennes des puissances négatives du rayon de l'électron. Dans le nouveau modèle, c'est la longueur fondamentale l^{-n} la plus petite apparaissant dans les équations du champ qui prend la place des $\overline{r^n}$.

La théorie de l'électron la plus simple est celle où, en plus du champ maxwellien, décrit par un potentiel quadrivecteur, Φ^0_μ avec $l_0 = 0$, un potentiel scalaire du type de Yukawa Ψ^s avec $l_s \neq o$ intervient. La masse M et la charge ε de l'électron déterminent la masse M_y des quanta associés à ce nouveau champ: $M_y = h\, l c^{-1} = 2\,(hc/\varepsilon^2) M = 274\, M$. Il est à remarquer que cette masse est de l'ordre de grandeur de celle des mésons.

La théorie de l'électron ponctuel de Dirac[6]) et Pryce[7]) est contenue dans cette combinaison générale des champs. En effet, pour éviter les infinités, ces auteurs ajoutent au tenseur d'énergie-impulsion du champ Maxwellien, un tenseur qui peut être mis sous la forme:

$$T^r_{\mu\nu} + S^s_{\mu\nu} - \varepsilon_s \Psi^s R_{\mu\nu} \tag{9.1}$$

$T^r_{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion d'un champ de Proca, avec une longueur fondamentale l_r^{-1} et une constante d'interaction ε_r (de dimension de la charge électrique ε). $S^s_{\mu\nu}$ est le tenseur d'un champ Ψ^s scalaire (avec l_s^{-1} et ε_s) (pour $R_{\mu\nu}$ voir § 5). La masse de l'électron est alors:

$$M = \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_s\, l_s - \varepsilon_r\, l_r) \text{ avec } \varepsilon^2 + \varepsilon_r^2 = \varepsilon_s^2 \tag{9.2}$$

et devient ainsi une constante arbitraire. On voit alors qu'on peut faire tendre l_s et l_r vers l'infini tout en gardant une masse M finie.

Le tenseur (9.1) est alors de la nature à enlever toute singularité à $T^0_{\mu\nu}$ et à ses dérivées, et doit donc dans cette limite avoir les mêmes propriétés que le tenseur $-\partial K_{\alpha\mu\nu}/\partial x_\alpha$ de Pryce.

Une théorie du neutron ponctuel est possible si l'on fait abstraction de ses propriétés vectorielles. Elle fait intervenir des particules d'un nouveau champ scalaire Ψ^s compensant les divergences du champ nucléaire Φ^r_μ et dont les quanta ont une masse correspondant à un poids atomique ~ 20.

La rédaction de cette publication a été préparée en collaboration avec mon collègue M. J. WEIGLE auquel je tiens à exprimer ma sincère gratitude.

Genève, Institut de Physique de l'Université.

Bibliographie.

1) ABRAHAM, Ann. d. Phys., **10**, 105 (1903).
2) LORENTZ, Theory of electrons, Teubner, 1909.
3) MIE, Ann. d. Phys., **37**, 511 (1912).
4) BORN et INFELD, Proc. Roy. Soc. **144**, 425 (1934).
5) WENTZEL, Zs. f. Phys. **86**, 479 und 635 (1934).
6) DIRAC, Proc. Roy. Soc. **167**, 148 (1938).
7) PRYCE, Proc. Roy. Soc. **168**, 389 (1938); cf. aussi INFELD et WALLACE, Phys. Rev. **57**, 797 (1940).
8) YUKAWA, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17**, 48 (1935).
9) STUECKELBERG, Nature **144**, 118 (1939).
10) BOPP, Ann. d. Phys., **38**, 345 (1940).
11) PROCA, J. Phys. Rad. **7**, 347 (1936).
12) STUECKELBERG, C. R. Soc. Phys. et Hist. Nat. Genève **56**, 43 (1939).
13) BHABHA, Proc. Roy. Soc., A, **172**, 384 (1939).