

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 14 (1941)

Heft: I

Artikel: Zur Hypothese der höheren Proton-Isobaren

Autor: Wentzel, Gregor

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111168>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Hypothese der höheren Proton-Isobaren

von Gregor Wentzel, Zürich.

(7. XII. 40.)

Inhalt: Einleitend wird die HEITLER-BHABHA'sche Hypothese der Proton-zustände höherer Ladung¹⁾ in ihrer Auswirkung auf das Problem der Meson-streuung diskutiert; die Forderung, dass die Mesonstreuung bei gegebener Grösse der Kernkräfte schwach sei, liefert eine Einschränkung für die Wahl der Proton-Meson-Kopplung. Für den Fall, dass der Kopplungsansatz gewisse einfache Eigenschaften besitzt, lässt sich ein Approximationsverfahren angeben, welches darauf beruht, dass die Massenunterschiede benachbarter Proton-Isobaren und (eventuell) die Rückstossenergien der Protonen als klein betrachtet werden, und welches gegenüber der üblichen Entwicklung nach Potenzen des Kopplungspara-meters den Vorzug hat, nicht auf den Fall schwacher Kopplung beschränkt zu sein. Die Rechnung wird für das skalare (geladene) Mesonfeld durchgeführt, und zwar auf Grund zweier verschiedener Kopplungsansätze. Der eine Ansatz führt zu dem Ergebnis, dass jede Wechselwirkung zwischen Protonen und Mesonen verschwindet in der Grenze, dass die Massen der Proton-Isobaren einander gleich gesetzt werden; in diesem Fall liefert die Einführung höherer Proton-Isobaren keine Verbesserung der ursprünglichen YUKAWA'schen Theorie.

§ 1. Zum Problem der Mesonstreuung.

Da es auf Grund der YUKAWA'schen Theorie schwierig, wenn nicht unmöglich ist, die erfahrungsmässige Kleinheit der Meson-streuung²⁾ mit der Grösse der Kernkräfte in Einklang zu bringen, haben BHABHA und HEITLER¹⁾ eine Variante der Mesontheorie vorgeschlagen, nach welcher es ausser Neutron und Proton weitere „Protonen“ höherer Ladung, z. B. mit den Ladungszahlen + 2 und - 1, geben soll. Diese Partikeln sollen dank höherer Masse instabil (zum mindesten β -aktiv) sein. Die Frage, unter welchen Umständen solche Partikeln entstehen und beobachtet werden könnten, ist von BHABHA untersucht worden. Nach der so modifizierten Theorie kann die Mesonstreuung, bei grössenord-nungsmässig gleich bleibenden Kernkräften, in der Tat erheblich kleiner sein als nach der ursprünglichen YUKAWA'schen Theorie.

Woran es liegt, dass die Existenz oder Nicht-Existenz höherer Proton-Isobaren für die Mesonstreuung so wesentlich ist, wurde

¹⁾ HEITLER, Nature 145, 29, 1940. Bhabha, Proc. Indian Acad. Sc. 11, 347, 1940.

²⁾ Vgl. J. G. WILSON, Proc. Roy. Soc. 174, 73, 1940.



bereits von HEITLER und BHABHA ausgeführt. Etwas allgemeiner dargestellt, ist die Lage die folgende: Der die Proton-Meson-Wechselwirkung beschreibende Hamilton-Operator enthält einen Term H^+ , welcher die Absorption eines positiven und die Emission eines negativen Mesons beschreibt, also Prozesse, bei denen sich die Ladung des „Protons“ um 1 vermehrt, daneben den zu H^+ hermitisch-konjugierten Term H^- , der die inversen Prozesse darstellt, welche die Protonladung um 1 vermindern. Als Matrizen bezüglich der Protonladungszahl n geschrieben, haben H^+ und H^- folgende Gestalt:

$$H_{n'n}^+ = \delta_{n', n+1} \cdot A_n, \quad H_{n'n}^- = H_{nn'}^{+*} = \delta_{n', n-1} \cdot A_{n-1}^*; \quad (1)$$

hier ist A_n noch eine Matrix bzw. ein Operator bezüglich der anderen Systemvariablen. Berechnet man nun das Matrixelement eines Streuprozesses, wie üblich, aus einer zweiten störungstheoretischen Näherung, so sind für diesen zweistufigen Prozess (der über einen virtuellen Zwischenzustand führt) jeweils zwei Wege in Betracht zu ziehen, die sich durch die Reihenfolge der Teilprozesse (Absorption des primären und Emission des sekundären Mesons) unterscheiden. In der Näherung, dass der Energieunterschied des streuenden Protons in Anfangs- und Zwischenzustand (Massenunterschied und Rückstossenergie) vernachlässigt wird, sind die Energie-Nenner gleich der Meson-Energie ω , einmal mit dem positiven und einmal mit dem negativen Vorzeichen genommen. In dieser Näherung sind daher, wie man leicht sieht, die Matrixelemente der Streuprozesse bis auf einen Faktor $\pm 1/\omega$ gleich den betreffenden Elementen der Kommutatormatrix $[H^+, H^-]$, für welche man mit (1) erhält:

$$[H^+, H^-]_{n'n} = \delta_{n', n} \cdot \{A_{n-1} A_{n-1}^* - A_n^* A_n\}. \quad (2)$$

Es scheint nun, dass das Verschwinden dieser Matrixelemente gefordert werden muss, damit die exakt berechnete Streuung genügend klein wird. Damit insbesondere die Streuung am Neutron ($n = 0$) und am normalen Proton ($n = 1$) schwach wird, wäre also zu verlangen:

$$\begin{aligned} [H^+, H^-]_{00} &= A_{-1} A_{-1}^* - A_0^* A_0 = 0, \\ [H^+, H^-]_{11} &= A_0 A_0^* - A_1^* A_1 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

In der ursprünglichen Yukawa-Theorie ist diese Forderung unerfüllbar, da n auf das Wertepaar 0,1 beschränkt ist und alle A_n ausser A_0 nach Definition verschwinden. Vielmehr erfordert (3), dass ausser A_0 mindestens A_{-1} und A_1 von null verschieden sind, was die Existenz der Zustände $n = -2$ und $n = +1$ voraussetzt.

Verlangt man überdies — was naheliegend scheint —, dass die Protonzustände $n = 0$ und 1 hinsichtlich der Stärke der Mesonstreuung vor den übrigen Zuständen nicht ausgezeichnet sind, so läuft dies offenbar auf die weitergehende Forderung hinaus, dass *alle* Matrixelemente (2) verschwinden:

$$[H^+, H^-] = 0, \quad A_{n-1} A_{n-1}^* = A_n^* A_n \quad (\text{für alle } n). \quad (4)$$

Dies ist beispielsweise der Fall, wenn man die Operatoren A_n von n unabhängig wählt, derart dass A und A^* kommutieren:

$$A_n = A, \quad [A, A^*] = 0. \quad (5)$$

Es ist bemerkenswert, dass (4) nur erfüllbar ist, wenn A_n für *alle* ganzzahligen n -Werte von Null verschieden ist (sofern $A_0 \neq 0$); es ist also dann nicht möglich, die Ladungszahlen auf einen einseitig oder zweiseitig begrenzten Bereich zu beschränken, wie etwa die negativen Ladungen auszuschliessen; jedenfalls würde ein an einer solchen Grenze gelegenes Proton-Isobar, wie z. B. das Neutron ($n = 0$), die Mesonen stark streuen. Dies gilt auch, wenn man dem Proton noch weitere höhere Zustände (z. B. solche höheren Spins, s. u.) zuschreibt.

Da die Theorie ferner jeder Partikel noch eine Antipartikel (gleicher Masse und umgekehrter Ladung) zuordnet, hätte man also jede Ladungszahl durch (mindestens) zwei schwere Partikeln repräsentiert zu denken, die nicht miteinander identifiziert werden dürfen. Beispielsweise gäbe es für $n = +1$ neben dem normalen Proton die Antipartikel des „negativen Protons“ ($n = -1$), die nicht nur eine grösse Masse, sondern auch andere Übergangsmöglichkeiten besitzt; so kann sie — nach der „Löchervorstellung“ — zusammen mit einem normalen Neutron in ein positives Meson und ein Lichtquant „zerstrahlen“, was vom normalen Proton natürlich nicht angenommen werden darf.

Es ist zuzugeben, dass das so erhaltene Bild auf den ersten Blick wenig ansprechend ist. Doch muss man mit der Möglichkeit rechnen, dass die Mesontheorie nur haltbar ist, wenn mindestens das negative und das doppelt-positive Proton existieren, und dann liegt es zweifellos nahe, beliebige ganzzahlige Ladungen zuzulassen und ferner hinsichtlich der Kopplung mit dem Mesonfeld eine Gleichberechtigung aller isobaren Zustände anzunehmen, d. h. A_n von n unabhängig anzusetzen. In diesem Falle ist die Streuung an allen Proton-Isobaren schwach, vorausgesetzt dass A und A^* (wenigstens im statischen Grenzfall, d. h. bei Vernachlässigung der Protongeschwindigkeiten) kommutieren.

Diese Vertauschbarkeit von A und A^* besteht tatsächlich im Fall des skalaren Mesonfeldes. Anders ist dies jedoch im Falle des vektoriellen Mesonfeldes mit Spinkopplung, wo die Pauli'schen Spinmatrizen des Protons zu einer Nichtvertauschbarkeit Anlass geben. Die Einführung der Protonzustände höherer Ladung genügt hier also noch nicht, um die Streuung der (transversalen) Mesonen wesentlich herabzusetzen. Aus diesem Grunde hat HEITLER ausserdem Protonzustände mit höherem Spin ($3/2, 5/2, \dots$) eingeführt und die Matrix A dementsprechend erweitert. Dagegen glaubt BHABHA mit den Zuständen höherer Ladung allein, d. h. ohne diejenigen höheren Spins auskommen zu können, da er durch Rechnungen über eine klassische (unquantisierte) Mesonfeldtheorie hat zeigen können, dass die spin-bedingte Streuung der transversalen neutralen Mesonwellen durch Strahlungsdämpfungseffekte wesentlich herabgesetzt wird, und zwar schon bei verhältnismässig niedrigen Werten der Mesonenergie¹⁾. Es bleibt allerdings sehr zweifelhaft, ob eine solche klassische Theorie der Strahlungsdämpfung eine gute Approximation darstellt. Angesichts dieser verwickelten Lage scheint es zweckmässig, vorerst vom Spin abzusehen und die Untersuchung auf die skalare Theorie zu beschränken.

§ 2. Problemstellung.

Bei der bisherigen Diskussion der Mesonstreuung stützten wir uns auf die übliche Störungsmethode, welche die Kopplungsoperatoren H^+, H^- als kleine Grössen betrachtet und nach ihnen entwickelt; in der verwendeten Näherung bleiben Strahlungsdämpfungs- und ähnliche Effekte unberücksichtigt. Angesichts der bekannten Mängel dieser Methode dürfte es nicht überflüssig sein, ihre Ergebnisse mittels eines andern Näherungsverfahrens nachzuprüfen, das nicht auf den Fall schwacher Kopplung beschränkt ist.

In der Tat kann für Theorien, welche den Anforderungen (5) (exakt oder angenähert) genügen, ein solches Verfahren ange-

¹⁾ BHABHA, Proc. Indian Acad. Sc. **11**, 247, 1940; vgl. auch HEISENBERG, ZS. f. Phys. **113**, 61, 1939 und IWANENKO, Comptes Rendus (Doklady) de l'Acad. des Sciences de l'URSS **28**, 411, 1940.— In welchem Ausmass die ladung-bedingte Streuung durch ähnliche Effekte beeinflusst wird, ist noch nicht bekannt, da eine klassische Theorie geladener Felder fehlt und eine quantentheoretische Berechnung auf Grund der ursprünglichen Yukawa-Theorie in ausreichender Näherung bisher nicht gelungen ist; die vom Grenzfall starker Kopplung ausgehende Näherung (WENTZEL, Helv. Phys. Acta **13**, 269, 1940) spricht aber gegen einen genügenden Strahlungsdämpfungseffekt und somit indirekt für die Existenz der Protonen höherer Ladung.

geben werden; es beruht darauf, dass die Energieänderungen, die das „Proton“ — z. B. bei Streuprozessen — erleidet, als klein angesehen werden; diese Energieänderungen setzen sich zusammen aus den Massendifferenzen benachbarter Proton-Isobaren und aus den Änderungen der kinetischen Energie infolge Rückstosses. Wenn diese Energieänderungen überhaupt vernachlässigt werden, ist das Problem, wie wir am Beispiel des skalaren Feldes mit besonderer Kopplung bereits an anderer Stelle gezeigt haben¹⁾, exakt lösbar; in dieser „nullten Näherung“ findet überhaupt keine Mesonstreuung statt, d. h. die Streuung verschwindet nicht nur, wie im § 1 gezeigt wurde, in zweiter störungsmässiger Näherung, sondern exakt, hinsichtlich beliebiger Potenzen des Kopplungsparameters. Von dieser nullten Näherung ausgehend kann dann nach den kleinen Energiedifferenzen entwickelt werden.

Es ist auffallend, dass die Theorie in dieser Form eine gewisse Verwandtschaft zur Elektrodynamik aufweist, wo ja auch im Falle ruhender Punktladungen, d. h. bei Vernachlässigung des Rückstosses, exakte Lösungen existieren, welche die Lichtstreuung zu null machen. Obwohl wir keinen theoretischen Grund haben, eine solche Analogie mit der Elektrodynamik zu fordern, legt doch die erfahrungsmässige Kleinheit der Mesonstreuung die Annahme nahe, dass die Analogie tatsächlich besteht, dass also der Ansatz (5), auf dem das Näherungsverfahren wesentlich beruht, der Wirklichkeit entspricht.

Die Lagrange'sche Funktion des Systems (Protonen und skalares geladenes Mesonfeld) sei:

$$L = L^P + L^F + L^W \quad (6)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} L^P &= - \int dx \Psi^* \left\{ \frac{1}{i} (\dot{\Psi} + \vec{\alpha} \text{ grad } \Psi) + M \beta \Psi \right\}, \\ L^F &= \int dx \{ \dot{\psi}^* \dot{\psi} - \text{grad } \psi^* \cdot \text{grad } \psi - \mu^2 \psi^* \psi \}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hier bedeuten Ψ, ψ die Proton- und Meson-Wellenfunktionen; Ψ ist mit Spin- und Ladungsindices versehen zu denken (z. B. $\Psi^* M \beta \Psi = \sum_n \sum_\sigma \sum_\sigma \Psi_{n\sigma}^* M_n \beta_{\sigma\sigma} \Psi_{n\sigma}$); $\vec{\alpha}, \beta$ sind die Dirac'schen Spinmatrizen. Für den Wechselwirkungsterm L^W gibt es bekanntlich²⁾ zwei relativistisch invariante Ansätze:

$$L_f^W = \int dx \Psi^* \{ f \tau (\dot{\psi} + \vec{\alpha} \text{ grad } \psi) + f^* \tau^* (\dot{\psi}^* + \vec{\alpha} \text{ grad } \psi^*) \} \Psi, \quad (8)$$

$$L_g^W = \int dx \Psi^* \beta \{ g \tau \psi + g^* \tau^* \psi^* \} \Psi, \quad (9)$$

¹⁾ WENTZEL, Helv. Phys. Acta **13**, 269, 1940, Anhang 2.

²⁾ Vgl. KEMMER, Proc. Roy. Soc. **165**, 127, 1938.

die auch linear kombiniert werden können. τ, τ^* bedeuten die auf die Ladungszahl n wirkenden Matrizen des „isotopen Spins“:

$$\tau_{n'n} = (\tau^*)_{nn'} = \delta_{n', n-1} \quad (10)$$

(also $\Psi^* \tau \Psi = \sum_n \Psi_{n-1}^* \Psi_n$, $\Psi^* \tau^* \Psi = \sum_n \Psi_n^* \Psi_{n-1}$). Da n alle ganzzähligen Werte annehmen soll, sind τ und τ^* vertauchbar. Ferner sollen die Kopplungsparameter f und g in (8), (9) von n unabhängig gewählt sein, damit die entsprechenden Terme der Hamiltonfunktion den Forderungen (5) im statischen Grenzfall ($\alpha = 0$) genügen. f hat die Dimension einer Länge, g ist dimensionslos (Massen und Energien werden in reziproken Längen gemessen). Elektromagnetische Wechselwirkungen bleiben ausser Betracht.

Wir werden im Folgenden die Ansätze (8) und (9) getrennt behandeln, und zwar aus folgendem Grunde. Für den Fall (8) wird sich zeigen, dass es für die Aufstellung strenger Lösungen nur nötig ist, die Ruhmassen der Protonenzustände einander gleich zu setzen, während die Vernachlässigung der kinetischen Energien nicht erforderlich ist. Die so erhaltenen relativistisch invarianten Lösungen sind aber insofern uninteressant, als sie jede Wechselwirkung zwischen Protonen und Mesonen zunichte machen: nicht nur die Mesonstreuung, sondern auch die Selbstenergie und die Kernkräfte verschwinden in der Näherung, dass die Ruhmassendifferenzen der Proton-Isobaren vernachlässigt werden. Wenn nun von hier aus nach den Massendifferenzen entwickelt wird, so zeigt sich für den Fall (8), dass bei gegebener Grösse der Kernkräfte die Streuung *nicht* schwach ist (vgl. § 3).

Anders liegen die Dinge im Falle des Ansatzes (9). Hier sind die exakten Lösungen nur für den statischen Grenzfall gültig. In nullter Näherung verschwindet zwar die Mesonstreuung, nicht aber die Kernkräfte, so dass man in erster Näherung eine schwache Streuung erhält (§ 4). Ebenso verhält es sich, wenn eine lineare Kombination von (8) und (9) gewählt wird. Für diesen komplizierteren Fall führen wir aber die Rechnung nicht durch, da er gegenüber (9) nichts wesentlich Neues ergibt.

§ 3. Der Ansatz $L^W = L_f^W$.

Die zu ψ, ψ^* kanonisch konjugierten Wellenfunktionen sind nach (6), (7) und (8):

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}^* + f \Psi^* \tau \Psi, \quad \pi^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} = \dot{\psi} + f^* \Psi^* \tau^* \Psi.$$

Hiermit erhält man für die Hamiltonfunktion im Falle (8)¹⁾:

$$H = \int dx \Psi^* \left(\beta M + \vec{\alpha} \cdot \left\{ \frac{1}{i} \text{grad} - f \tau (\text{grad } \psi) - f^* \tau^* (\text{grad } \psi^*) \right\} \right) \Psi + \int dx \{ (\pi^* - f^* \Psi^* \tau^* \Psi) (\pi - f \Psi^* \tau \Psi) + \psi^* (\mu^2 - \Delta) \psi \}. \quad (11)$$

Wir behandeln einfachheitshalber zunächst den Fall, dass nur ein einziges Proton anwesend ist, und stellen zu diesem Zwecke H in bekannter Weise²⁾ als einen Operator dar, der ausser auf die Feldvariablen auf die Protonkoordinaten x_P , n (Ladungszahl) und Spinindex wirkt:

$$H = \beta M + \vec{\alpha} \cdot \{ \vec{p} - f \tau (\text{grad } \psi)_P - f^* \tau^* (\text{grad } \psi^*)_P \} + \int dx \{ (\pi^* - f^* \tau^* \delta(x - x_P)) (\pi - f \tau \delta(x - x_P)) + \psi^* (\mu^2 - \Delta) \psi \} \quad (12)$$

($\vec{p} = -i \text{grad}_P$; der Index P an den Wellenfunktionen deutet an, dass diese am Ort des Protons zu nehmen sind). Die Vertauschungsrelationen für die kanonisch konjugierten Feldfunktionen lauten:

$$[\psi(x), \pi(x')] = [\psi^*(x), \pi^*(x')] = i \delta(x - x'), \quad (13)$$

während die anderen Funktionenpaare kommutieren.

Wir definieren einen Operator S durch:

$$S = e^{-\tau \xi + \tau^* \xi^*}, \quad (14)$$

wo

$$\xi = -i f \psi_P, \quad \xi^* = +i f^* \psi_P^*. \quad (15)$$

Da $\tau \xi$ und $\tau^* \xi^*$ kommutieren, ist

$$S^* S = S S^* = 1, \quad S^* = S^{-1}.$$

S ist also ein unitärer Operator, der zur Transformation von H dienen kann. Nach (13), (14) und (15) erhält man durch Vertauschung von π, π^* und $\vec{p} = -i \text{grad}_P$ mit S :

$$\begin{aligned} \{\pi(x) - f \tau \delta(x - x_P)\} S &= S \pi(x), \\ \{\pi^*(x) - f^* \tau^* \delta(x - x_P)\} S &= S \pi^*(x), \\ \{\vec{p} - f \tau (\text{grad } \psi)_P - f^* \tau^* (\text{grad } \psi^*)_P\} S &= S \vec{p}. \end{aligned}$$

Der Hamiltonoperator (12) transformiert sich hiernach wie folgt:

$$H' \equiv S^{-1} H S = \{\beta M' + \vec{\alpha} \vec{p}\} + \int dx \{ \pi^* \pi + \psi^* (\mu^2 - \Delta) \psi \}. \quad (16)$$

Wird in „nullter Näherung“ die Protonmasse M von der Ladungszahl n unabhängig angenommen, so ist $[M, S] = 0$ und

¹⁾ Vgl. KEMMER, I. c.

²⁾ Formal braucht man in (11) nur $\Psi^* \dots \Psi$ durch $\delta(x - x_P) \dots$ zu ersetzen.

folglich $M' \equiv S^{-1}MS = M$. In dieser Näherung ist das Problem separiert: wir haben ein Proton und ein Mesonfeld ohne jede Kopplung. Dabei ist zu beachten, dass jede Feldgrösse (Funktion von π^*, π, ψ^*, ψ und ihrer Ableitungen) ausserhalb des Protons ($x \neq x_P$) mit S kommutiert, also durch die Transformation mit S nicht geändert wird. Hieraus folgt, dass in nullter Näherung die Erwartungswerte solcher Feldgrössen (z. B. der Energiedichte) in beliebigen Zuständen des Systems die gleichen sind wie bei Abwesenheit des Protons, womit insbesondere evident ist, dass eine Mesonstreuung in dieser Näherung nicht stattfindet. Die Existenz dieser trivialen relativistisch invarianten Lösungen hängt offenbar mit dem Fehlen einer Selbstenergiekonstanten in (16) zusammen.

Hinsichtlich der physikalischen Interpretation der stationären Zustände nullter Näherung ist auf folgendes zu achten: Die Ladung und der Impuls des Mesonfeldes sind bekanntlich:

$$N = i \int dx (\pi \psi - \pi^* \psi^*), \quad \tilde{P} = - \int dx (\pi \operatorname{grad} \psi + \pi^* \operatorname{grad} \psi^*).$$

Vertauscht man diese mit S , so kommt:

$$[N, S] = i \{ f \tau \psi_P - f^* \tau^* \psi_P^* \} S = -[n, S]^1,$$

$$[\tilde{P}, S] = - \{ f \tau (\operatorname{grad} \psi)_P + f^* \tau^* (\operatorname{grad} \psi^*)_P \} S = -[\tilde{p}, S];$$

folglich

$$[n + N, S] = 0, \quad [\tilde{p} + \tilde{P}, S] = 0.$$

Die Transformation mit S lässt also die Gesamtladung ($n + N$) von Proton und Mesonen sowie ihren Gesamtimpuls ($\tilde{p} + \tilde{P}$) invariant. Die Eigenfunktionen nullter Näherung von H' , die bezüglich Proton- und Feld-Variablen separiert sind, können nun so gewählt werden, dass n und N , sowie \tilde{p} und \tilde{P} einzeln diagonal werden. Die so erhaltenen Eigenwerte von N und \tilde{P} können als Ladung und Impuls der *freien* Mesonen interpretiert werden, während Ladung und Impuls des *gesamten* Mesonfeldes sich durch Anwendung der Operatoren $N' = S^{-1}NS$ und $\tilde{P}' = S^{-1}\tilde{P}S$ auf die Eigenfunktionen nullter Näherung berechnen. Demgemäß geben jene Eigenwerte von n und \tilde{p} Ladung und Impuls des Protons einschliesslich seiner gebundenen Mesonen an, wogegen die auf das feldfreie Proton bezüglichen Grössen $n' = S^{-1}nS$, $\tilde{p}' = S^{-1}\tilde{p}S$ nicht diagonal sind. In diesem Sinne kann man sagen, dass die Eigenfunktionen nullter Näherung stationäre Zustände der freien Mesonen und des Protons mit gebundenem Mesonfeld beschreiben.

¹⁾ Aus $[n, \tau] = -\tau$, $[n, \tau k] = -k\tau k$ folgt $[n, e^{-\tau\xi}] = \tau\xi e^{-\tau\xi}$, entsprechend $[n, e^{\tau^*\xi^*}] = \tau^*\xi^* e^{\tau^*\xi^*}$, also $[n, S] = (\tau\xi + \tau^*\xi^*)S$.

Kehren wir zum Problem (16) zurück, wo nunmehr die Protonmasse irgendwie ladungsabhängig angenommen werden soll ($M = M(n)$), so wird $M' \equiv S^{-1}MS \neq M$. Mit (14) erhält man durch Entwicklung der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} M' &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} (\xi\tau - \xi^*\tau^*)^k M (-\xi\tau + \xi^*\tau^*)^l \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (\xi\tau - \xi^*\tau^*)^k M (-\xi\tau + \xi^*\tau^*)^{i-k} \\ &= M + \frac{1}{1!} [\xi\tau - \xi^*\tau^*, M] + \frac{1}{2!} [\xi\tau - \xi^*\tau^*, [\xi\tau - \xi^*\tau^*, M]] + \dots \end{aligned}$$

Nach (10) sind aber τ, τ^* die Operatoren, die die Ladungszahl n um 1 erhöhen bzw. vermindern:

$$\tau M(n) = M(n+1)\tau, \quad \tau^* M(n) = M(n-1)\tau^*.$$

Hiermit lässt sich M' leicht als Matrix bezüglich der Ladungszahl darstellen:

$$\begin{aligned} M'_{n'n} &= M(n) \delta_{n'n} \\ &+ \{ \xi^* [M(n+1) - M(n)] \delta_{n'n+1} \\ &\quad + \xi [M(n) - M(n-1)] \delta_{n'n-1} \} \\ &+ \frac{1}{2} \{ \xi^{*2} [M(n+2) - 2M(n+1) + M(n)] \delta_{n'n+2} \\ &\quad + 2\xi^*\xi [M(n+1) - 2M(n) + M(n-1)] \delta_{n'n} \\ &\quad + \xi^2 [M(n) - 2M(n-1) + M(n-2)] \delta_{n'n-2} \} \\ &+ \frac{1}{2 \cdot 3} \{ \xi^{*3} [M(n+3) - 3M(n+2) + 3M(n+1) - M(n)] \delta_{n'n+3} \\ &\quad + 3\xi^{*2}\xi [M(n+2) - 3M(n+1) + 3M(n) - M(n-1)] \delta_{n'n+1} \\ &\quad + 3\xi^*\xi^2 [M(n+1) - 3M(n) + 3M(n-1) - M(n-2)] \delta_{n'n-1} \\ &\quad + \xi^3 [M(n) - 3M(n-1) + 3M(n-2) - M(n-3)] \delta_{n'n-3} \} \\ &+ \dots \end{aligned} \tag{17}$$

(Das Bildungsgesetz dieser Reihe dürfte auch ohne Anschreibung des allgemeinen Gliedes klar sein: im i -ten Gliede treten ausser Binomialkoeffizienten die i -ten Differenzenquotienten der Funktion $M(n)$ auf.)

Schreibt man statt (16):

$$H' = H^P + H^F + \beta(M' - M), \tag{18}$$

wo

$$H^P = \beta M + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \quad H^F = \int dx \{ \pi^* \pi + \psi^* (\mu^2 - \Delta) \psi \}, \tag{19}$$

so kann man den Term $\beta(M' - M)$ als eine Störungsmatrix betrachten. Setzt man in diese die Reihe (17) ein, so heben sich die Terme $\pm \beta M(n) \delta_{n', n}$ heraus, und die übrigen Terme können als klein gelten, wenn die Ruhmassenunterschiede benachbarter Proton-Isobaren:

$$\delta M = M(n+1) - M(n) \quad (20)$$

genügend klein sind, und zwar, wie die Diskussion von Beispielen lehren wird, klein gegen die Energien der beteiligten Mesonen. Man kann dann im Sinne der Störungsmethode nach Potenzen von δM entwickeln. Die Elemente der Störungsmatrix beschreiben, vermöge der Faktoren ξ, ξ^* (vgl. (15)), Emissions- und Absorptionsprozesse freier Mesonen, die mit entsprechenden Ladungs- und Impulsänderungen des Protons (einschliesslich seines gebundenen Mesonfeldes) verknüpft sind. Wir werden im § 5 auf die Diskussion der Störungsmatrix und auf die Entwicklung nach δM zurückkommen.

Will man mehrere Protonen berücksichtigen, so geht man zweckmässig auf die Darstellung (11) des Hamiltonoperators zurück, in der Ψ^* und Ψ Operatoren bedeuten, welche auf die Besetzungszahlen der Protonzustände wirken und den Vertauschungsregeln der Fermi-Dirac-Statistik genügen. Für die Transformationsmatrix S ist dann an Stelle von (14) zu setzen:

$$S = e^{i \int dx \Psi^* \{ f \tau \psi + f^* \tau^* \psi^* \} \Psi}; \quad (21)$$

da $\Psi^* \tau \Psi$ und $\Psi^* \tau^* \Psi$ kommutieren, ist S wiederum unitär. Für den transformierten Hamiltonoperator erhält man durch eine kurze Rechnung, analog zu (16):

$$H' \equiv S^{-1} H S = S^{-1} \cdot \int dx \Psi^* \beta M \Psi \cdot S + \int dx \Psi^* \vec{\alpha} \vec{p} \Psi + H^F. \quad (22)$$

In der nullten Näherung ($M(n) = \text{const.}$) kommutiert $\int dx \Psi^* \beta M \Psi$ mit S , d. h. es wird

$$H' = \sum_P H^P + H^F;$$

in dieser Näherung besteht also keinerlei Wechselwirkung zwischen Protonen und Mesonen oder zwischen zwei Protonen¹⁾. Für $M = M(n)$ erhält man ähnlich wie oben:

$$\begin{aligned} S^{-1} \cdot \int dx \Psi^* \beta M \Psi \cdot S &= \int dx \Psi^* \beta \left\{ M + \frac{i}{1!} [f \tau \psi + f^* \tau^* \psi^*, M] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i^2}{2!} [f \tau \psi + f^* \tau^* \psi^*, [f \tau \psi + f^* \tau^* \psi^*, M]] + \dots \right\} \Psi. \end{aligned}$$

¹⁾ Es ist zu beachten, dass auch keine Kernkräfte vom Nahewirkungstypus (Potential $\sim \delta(x_P - x_{P'})$) auftreten.

Die Störungsfunktion $S^{-1}[\int dx \Psi^* \beta M \Psi, S]$ koppelt demnach das Mesonfeld mit jedem einzelnen Proton in derselben Weise, wie dies oben durch die Störungsfunktion $\beta(M' - M)$ beschrieben wurde. Diese Meson-Proton-Wechselwirkung vermittelt zwar auch Wechselwirkungen zwischen zwei Protonen, dies aber erst in zweiter störungsmässiger Näherung, so dass die Proton-Kräfte den kleinen Faktor δM^2 enthalten. Natürlich könnte man durch Wahl des Kopplungsparameters $|f|$ diese Kernkräfte auf die erfahrungsmässige Grössenordnung bringen, doch würden dann die Matrixelemente der Meson-Streuprozesse, welche δM nur in erster Ordnung enthalten (vgl. § 5), viel zu gross. Im Falle des Kopplungstypus $L^W = L_f^W$ kann also die Einführung der höheren Proton-Isobaren keine Verbesserung gegenüber der ursprünglichen YUKAWA'schen Theorie mit sich bringen.

§ 4. Der Ansatz $L^W = L_g^W$.

Mit dem Ansatz (9) wird der Hamiltonoperator:

$$H = \int dx \Psi^* \{ \beta M + \vec{\alpha} \vec{p} - g \tau \beta \psi - g^* \tau^* \beta \psi^* \} \Psi + H^F. \quad (23)$$

Rechnen wir zunächst wieder mit einem einzigen Proton, so wird H , als Operator bezüglich der Proton-Koordination dargestellt:

$$H = H^P + H^F + H^W, \quad (24)$$

wo H^P und H^F (vgl. (19)) sich auf das freie Proton und das Vacuumfeld beziehen, und wo

$$H^W = - g \tau \beta \psi_P - g^* \tau^* \beta \psi_P^*. \quad (25)$$

Zur Transformation von H verwenden wir wieder einen unitären Operator der Form (14), wo aber ξ, ξ^* statt durch (15) folgendermassen definiert sein sollen:

$$\xi = i g \beta \{(\mu^2 - \Delta)^{-1} \pi^*\}_P, \quad \xi^* = - i g^* \beta \{(\mu^2 - \Delta)^{-1} \pi\}_P \quad (26)$$

Die Operation $(\mu^2 - \Delta)^{-1}$ kann in bekannter Weise durch Fourierzerlegung ausgeführt werden, oder mit Hilfe der Formel:

$$(\mu^2 - \Delta)^{-1} f(x) = \frac{1}{4 \pi} \int dx' \frac{e^{-\mu |\vec{x}' - \vec{x}|}}{|\vec{x}' - \vec{x}|} f(x'). \quad (27)$$

Da auch hier $\tau \xi$ und $\tau^* \xi^*$ kommutieren, gilt wieder $S^* = S^{-1}$.

Mit (19), (14), (26), (13) und (25) kommt:

$$[H^F, S] = g\tau\beta\psi_P \cdot S + S \cdot g^*\tau^*\beta\psi_P^* = \{-H^W + E^0\} S,$$

wo

$$E^0 = -|g|^2 \{(\mu^2 - 4)^{-1} \delta(x)\}_{x=0} \quad (28)$$

eine unendliche Selbstenergie des Protons darstellt, die natürlich durch Einführung eines „Formfaktors“ in H^W (25) endlich gemacht werden könnte. Man erhält somit:

$$S^{-1}(H^F + H^W)S = E^0 + H^F, \\ H' \equiv S^{-1}HS = H^P' + E^0 + H^F = E^0 + H^P + H^F + (H^P' - H^P). \quad (29)$$

Um das Problem in nullter Näherung bezüglich des Protons und der Mesonen zu separieren, vernachlässigen wir in H' (29) den Term $H^P' - H^P = S^{-1}[H^P, S]$. In dieser Näherung verschwindet wiederum die Mesonstreuung; da nämlich alle Feldgrößen in genügendem Abstand vom Proton ($|\vec{x} - \vec{x}_P| \gg 1/\mu$) mit S ((14), (26)) kommutieren, sind ihre Erwartungswerte dort in nullter Näherung die gleichen wie bei Abwesenheit des Protons. Auch die Gesamtladung ($n + N$) und der Gesamtimpuls ($\vec{p} + \vec{P}$) erweisen sich wieder als mit S vertauschbar. Die Eigenfunktionen nullter Näherung beschreiben stationäre Zustände der freien Mesonen sowie des Protons mit seinem gebundenen Mesonfeld.

Im Hinblick auf höhere Näherungen berechnen wir die Störungsfunktion

$$H^P' - H^P = \beta(M' - M) + (\vec{\alpha} \vec{p})' - (\vec{\alpha} \vec{p}). \quad (30)$$

Hier gilt für $M' \equiv S^{-1}MS$ wieder die Formel (17), wobei nur ξ, ξ^* die veränderte Bedeutung (26) haben; die obige Ableitung von (17) stützte sich nämlich nur auf die auch hier gültige Formel (14). Zu beachten ist, dass die β -Matrix mit ξ, ξ^* und folglich auch mit S kommutiert. Dagegen gilt für die $\vec{\alpha}$ -Matrix, wegen $\vec{\alpha}\beta = -\beta\vec{\alpha}$:

$$\vec{\alpha}S = S^{-1}\vec{\alpha}.$$

Hiermit ergibt sich für den Term $(\vec{\alpha} \vec{p})'$ in (30):

$$(\vec{\alpha} \vec{p})' \equiv S^{-1}\vec{\alpha} \vec{p}S = S^{-1}\vec{\alpha}S\{\vec{p} + S^{-1}[\vec{p}, S]\} \\ = S^{-2}\vec{\alpha}\{\vec{p} + \tau i \operatorname{grad}_P \xi - \tau^* i \operatorname{grad}_P \xi^*\},$$

oder

$$(\vec{\alpha} \vec{p})' = e^{2(\tau \xi - \tau^* \xi^*)} \cdot \{\vec{p} - \tau i \operatorname{grad}_P \xi + \tau^* i \operatorname{grad}_P \xi^*\} \vec{\alpha}. \quad (31)$$

Die Bedeutung der nullten Näherung erhellt daraus, dass die Störungsfunktion (30) verschwindet, wenn man einerseits allen

Proton-Isobaren die gleiche Ruhmasse zuschreibt ($\delta M = 0$, $M' = M$) und andererseits die Protonen als ruhend annimmt ($\vec{\alpha} = 0$, $(\vec{\alpha} \vec{p})' = (\vec{\alpha} \vec{p}) = 0$)¹⁾. Eine Entwicklung nach den Matrixelementen von (30) ist daher im wesentlichen eine Entwicklung nach den Massendifferenzen δM und nach der Rückstossenergie des Protons. Dieses Verfahren ist, verglichen mit der üblichen Entwicklung nach $|g|$, natürlich nur vorteilhaft, wenn die Matrixelemente von (30) klein sind gegenüber denjenigen, die man mit dem ursprünglichen Kopplungsoperator H^W (25) als Störungsfunktion erhalten würde. Dies bedingt, wie man leicht sieht, dass nicht nur δM , sondern auch die kinetische Energie des Protons immer (auch in virtuellen Zwischenzuständen) klein gegen die Mesonenergien ω bleiben soll, was wiederum nur erfüllbar ist, wenn alle Meson-Impulse $\ll M$ sind. Unter diesen Umständen bleiben aber die Rückstossenergien des Protons klein gegen M , und es genügt, sie in unrelativistischer Näherung zu berücksichtigen (rechterhand in (31) $\vec{\alpha} \rightarrow \vec{p}/M$ und $\beta \rightarrow 1$).

Bleibt die kinetische Energie des Protons sogar klein gegen die Ruhmassendifferenzen δM (20), wie z. B. bei der Streuung langsamer Mesonen (Impuls $\ll \sqrt{M|\delta M|}$), so sind die Matrixelemente von (31) belanglos gegenüber denen von M' (17), und es genügt eine statische Näherung ($\vec{\alpha} \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 1$). Dann reduziert sich die Störungsfunktion (30) auf $M' - M$, d. h. es wird (wie im Falle $L^W = L_f^W$) die Matrix (17) allein massgebend. Bei der Diskussion im § 5 werden wir uns auf diesen statischen Grenzfall beschränken. Abgesehen von dieser Einschränkung und von der veränderten Bedeutung von ξ , ξ^* , wird die Diskussion mit derjenigen des Falles $L^W = L_f^W$ übereinstimmen.

Zur Ableitung der Kernkräfte greifen wir wieder auf die allgemeine Darstellung (23) des Hamiltonoperators zurück und transformieren ihn mit

$$S = e^{-i \int dx \Psi^* \beta \{(\mu^2 - A)^{-1} (g \tau \pi^* + g^* \tau^* \pi)\} \Psi} \quad (32)$$

($S^* = S^{-1}$ wegen $[\Psi^* \beta \tau \Psi, \Psi^* \beta \tau^* \Psi] = 0$). Die Vertauschung dieses Operators mit H^F (19) ergibt:

$$[H^F, S] = \int dx \Psi^* g \tau \beta \psi \Psi \cdot S + S \cdot \int dx \Psi^* g^* \tau^* \beta \psi^* \Psi \\ = \int dx \Psi^* (g \tau \beta \psi + g^* \tau^* \beta \psi^*) \Psi \cdot S + S \cdot V,$$

wo

$$V = -|g|^2 \int dx \Psi^*(x) \tau \beta \Psi(x) \int dx' \Psi^*(x') \tau^* \beta \Psi(x') \cdot (\mu^2 - A)^{-1} \delta(x - x'),$$

¹⁾ In dieser Näherung haben wir die Lösung, wenn auch in anderer Schreibweise, bereits im Anhang 2 der S. 7 zitierten Arbeit angegeben.

oder mit (27): (33)

$$V = -\frac{|\mathbf{g}|^2}{4\pi} \int d\mathbf{x} \Psi^*(\mathbf{x}) \tau \beta \Psi(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x}' \Psi^*(\mathbf{x}') \tau^* \beta \Psi(\mathbf{x}') \cdot \frac{e^{-\mu |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Für den transformierten Hamiltonoperator (23) erhält man hiermit:

$$H' \equiv S^{-1} H S = S^{-1} \cdot \int d\mathbf{x} \Psi^* \{ \beta M + \tilde{\alpha} \tilde{p} \} \Psi \cdot S + V + H^F. \quad (34)$$

Vernachlässigen wir, im Sinne der nullten Näherung, den Kommutator $[\int d\mathbf{x} \Psi^* \{ \beta M + \tilde{\alpha} \tilde{p} \} \Psi, S]$, so wird

$$H' = \sum_P H^P + V + H^F,$$

d. h. wir haben freie Mesonen ohne Wechselwirkung mit den Protonen, während die Protonen untereinander durch das statische Potential V gekoppelt erscheinen. In der Tat beschreibt V (33) ausser Selbstenergietermen vom Typus (28), statische Kernkräfte, die hinsichtlich ihrer Ortsabhängigkeit mit den YUKAWA'schen Kräften übereinstimmen, und deren Austauschcharakter durch die isotopen Spin-Matrizen τ, τ^* (vgl. (10)) gekennzeichnet ist. Die Möglichkeiten des Ladungsaustausches sind gegenüber denen der ursprünglichen Yukawa-Theorie verdoppelt, da jedes „Proton“ die Ladung + 1 und die Ladung - 1 auf ein anderes Proton übertragen kann¹⁾. In höheren Näherungen sind nur Meson-Proton-Wechselwirkungen vom Typus (30) zu berücksichtigen; ihre Beiträge zu den Kernkräften ergeben sich als klein gegen V , ausser für Proton-Abstände $\gtrsim 1/M$ (Compton-Wellenlänge des Protons), wo die vom statischen Grenzfall ausgehende Näherung aus bekannten Gründen unzweckmässig ist.

Der Ansatz $L^W = L_g^W$ erweist sich also insofern als befriedigend, als man *Kernkräfte bereits in nullter Näherung, eine Mesonstreuung aber erst in erster Näherung* erhält. Natürlich sind die durch das skalare Mesonfeld vermittelten Kernkräfte in der statischen Näherung spin-unabhängig, und es wird daher, wie in der YUKAWA-schen Theorie, unerlässlich sein, auch vektorielle Mesonen in Betracht zu ziehen.

¹⁾ Vgl. BHABHA, I. c., WENTZEL, I. c. Z. B. können sich zwei normale Protonen ($n = 1$) beim Zusammenstoss in ein Neutron und ein doppelt-positives Proton umwandeln. Diese und ähnliche Umwandlungsmöglichkeiten dürften auch beim Problem der Kernbindungsenergien nicht ohne Bedeutung sein, und zwar sowohl bei den leichten als bei den schweren Kernen.

§ 5. Diskussion der Meson-Proton-Wechselwirkung.

Wir diskutieren im Folgenden die Wechselwirkung freier Mesonen mit einem Proton (womit jetzt immer das Proton einschliesslich seiner gebundenen Mesonen gemeint ist). Nach Obigem wird diese Wechselwirkung durch die Störungsfunktion $\beta(M' - M)$ beschrieben, wobei M' durch die Reihe (17) dargestellt werden kann; und zwar gilt dies im Falle des Ansatzes $L^W = L_f^W$ exakt, im Falle $L^W = L_g^W$ jedoch nur in statischer Näherung (ruhendes Proton). ξ und ξ^* sind im ersten Falle durch (15), im zweiten Falle durch (26) definiert. Einen Term der Reihe (17), der in ξ und ξ^* vom i -ten Grade ist, nennen wir kurz einen „Term i -ten Grades“; er enthält den Kopplungsparameter $|f|$ bzw. $|g|$ in der i -ten Potenz. Diese Kopplungsparameter brauchen aber hier keineswegs als klein zu gelten; vielmehr sind es die als Koeffizienten in (17) auftretenden Differenzenquotienten der Funktion $M(n)$, die wir als klein betrachten, weil sie sich linear durch die kleinen Massendifferenzen δM (20) ausdrücken, nach denen wir entwickeln wollten. Die Terme verschiedenen Grades sind also alle von der ersten Ordnung klein.

Dies hat zur Folge, dass gewisse Fragen, die nach der üblichen Störungsmethode (Entwicklung nach $|f|$ oder $|g|$) die Durchrechnung komplizierter höherer Näherungen erfordern würden, auf Grund von (17) schon mittels einer ersten Näherung beantwortet werden können. Ob das Verfahren gut konvergiert, wird weniger vom Zahlwert des Kopplungsparameters als von den massgebenden δM -Werten und den Energien der beteiligten Mesonen abhängen.

Freilich enthalten die Eigenwerte der Störungsfunktion $\beta(M' - M)$ wieder unendliche Selbstenergieterme, und zwar bereits in der ersten Näherung, da die Störungsmatrix selbst unendliche Diagonalelemente besitzt. Daher stellt sich, ebenso wie bei der üblichen Entwicklung nach $|f|$ und $|g|$, die Frage, wie weit die Ergebnisse von Störungsrechnungen überhaupt glaubhaft sind. Mangels strenger Lösungen (für $\delta M \neq 0$) können wir diese Frage nicht entscheiden und nehmen daher bei der folgenden Diskussion wie üblich an, dass die verschiedenen Effekte durch die niedrige Näherung, in welcher die Störungstheorie nicht-verschwindende Matrixelemente für dieselben liefert, wenigstens qualitativ richtig beschrieben werden. (Vgl. hierzu aber Fussnote 1, S. 19.)

Unter den Termen 1. Grades in (17) beschreiben diejenigen $\sim \xi^*$ Protonübergänge $n \rightarrow n + 1$, die mit der Absorption eines

positiven oder der Emission eines negativen Mesons verbunden sind; die Terme $\sim \xi$ beschreiben natürlich die inversen Prozesse. Im Falle $|\delta M| \ll \mu$ kommen diese Absorptions- und Emissions-Prozesse nur als virtuelle Übergänge (im Sinne der Störungstheorie) in Betracht; dann sind die betreffenden Matrixelemente klein gegen diejenigen des ursprünglichen Kopplungsoperators H^W (der z. B. im Falle $L^W = L_g^W$ durch (25) gegeben ist), und zwar klein wie $|\delta M|$ gegen die Energie ω des betreffenden Mesons. Im Falle eines reellen Absorptions- oder Emissionsprozesses unter Energie-Erhaltung (wir denken an den Fall, dass das Proton in einem Kern gebunden ist, so dass $|\delta M| > \mu$ sein kann) werden die Matrixelemente, wie man leicht nachrechnet, gleich denen von H^W , wodurch die Übereinstimmung mit der üblichen störungsmässigen Berechnung der Absorptions- und Emissionswahrscheinlichkeiten für den Fall schwacher Kopplung evident wird.

Die Terme 2. Grades entsprechen Prozessen, bei denen zwei Mesonen gleichzeitig absorbiert oder emittiert werden, sowie Streuprozessen. Im Falle $|\delta M| \ll \omega$ kommen nur die letzteren als reelle Prozesse vor. Zu den betreffenden Matrixelementen liefern zwar auch die Terme 1. Grades in zweiter störungsmässiger Näherung Beiträge; doch sind diese Beiträge quadratisch in δM und bleiben klein gegen die Terme 2. Grades, sofern $|M(n \pm 1) - M(n)|$ klein ist gegen die Energie ω des gestreuten Mesons (und gegen $M(n)$, falls $\omega \gg M(n)$). Dies trifft z. B. sicher zu, wenn $|M(n \pm 1) - M(n)| \ll \mu$ ist. Dann braucht man also bei der Diskussion der Mesonstreuung nur die Terme zweiten (und höheren) Grades in erster störungsmässiger Näherung in Betracht zu ziehen.

Während der Term $\sim \xi^* \xi$ in (17) die gewöhnliche Streuung eines positiven oder negativen Mesons enthält, beschreiben die Terme $\sim \xi^{*2}$ und $\sim \xi^2$ Streuprozesse, die mit einem Ladungswechsel des Mesons verbunden sind¹⁾. So sind in ξ^{*2} die Matrixelemente von Prozessen enthalten, bei denen ein positives Meson verschwindet und ein negatives Meson entsteht, während das Proton seine Ladung um 2 ändert. Da entsprechende Matrixelemente von ξ^* und ξ gleiche Beträge haben, ergibt sich nach (17) das Matrixelement der Streuung eines positiven [negativen] Mesons unter Ladungswechsel am Kern $n-1$ [$n+1$] (Endzustand $n+1$ [$n-1$]) gleich gross wie das Matrixelement der Streuung ohne Ladungswechsel am Kern n ²⁾ (sofern $|\delta M| \ll \omega$; bezüglich der Beiträge der

¹⁾ Auf die Möglichkeit solcher Prozesse haben wir schon in der S. 7 zitierten Arbeit hingewiesen.

²⁾ Der in (17) vor $\xi^* \xi$ stehende Faktor 2 wird dadurch kompensiert, dass die Terme ξ^{*2} und ξ^2 die betreffenden Matrixelemente aus Symmetriegründen doppelt enthalten.

Terme höheren Grades gilt das gleiche; die Wahrscheinlichkeiten der genannten Prozesse unterscheiden sich dann nur durch die bekannten „Phasenvolumen“-Faktoren¹⁾.

Von den Prozessen, die durch die Terme 3. und höheren Grades in (17) beschrieben werden, erwähnen wir die Erzeugung eines Mesonschauers: ein Meson wird absorbiert und es entstehen ($i - 1$) Mesonen. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieses (reellen) Prozesses genügt es, falls die mit dem Übergang verbundenen Massenänderungen des Protons klein gegen die Energien der beteiligten Mesonen bleiben, die Terme i -ten (und höheren) Grades von (17) in erster störungsmässiger Näherung heranzuziehen, es sei denn, dass diese Terme aus anderen Gründen (s. unten)

¹⁾ Die oben besprochenen Streuprozesse liefern ein instruktives Beispiel dafür, wie vorsichtig man bei der Bewertung störungstheoretischer Ergebnisse sein muss: Greifen wir aus der Störungsmatrix nur die Elemente der normalen Streuung (ohne Ladungswechsel) heraus, welche $\sim \xi^* \xi$ sind, und beschränken wir uns auf die Streuung langsamer Mesonen, so dass das Proton als ruhend angesehen werden kann. Dann reduziert sich die Störungsfunktion nach (15) bzw. (26) auf

$$H^S = H_f^S = a \psi_P^* \psi_P \quad \text{im Falle } L^W = L_f^W,$$

$$H^S = H_g^S = b \{(\mu^2 - \Delta)^{-1} \pi^*\}_P \{(\mu^2 - \Delta)^{-1} \pi\}_P \quad \text{im Falle } L^W = L_g^W,$$

wo a und b reelle positive Konstanten sind. Das so reduzierte Problem kann exakt gelöst werden durch die Hauptachsentransformation der in $\pi^*(x)$, $\pi(x)$, $\psi^*(x)$, $\psi(x)$ bilinearen Form $HF + HS$. Die Eigenfrequenzen (ν) und Eigenschwingungen dieser Form bestimmen sich im Falle $H^S = H_f^S$ durch die Differentialgleichung:

$$-\nu^2 \psi(x) + \frac{\partial(H^F + H_f^S)}{\partial \psi^*(x)} \equiv (-\nu^2 + \mu^2) \psi - \Delta \psi + a \delta(x - x_P) \psi = 0.$$

Dies ist die Schrödingergleichung einer Partikel in einem statischen Potentialfeld $\sim \delta(x - x_P)$, wobei das positive Vorzeichen von a einer abstoßenden Kraft entspricht; ein solches Potential bewirkt aber im Limes der „normierten“ δ -Funktion ($\int dx \delta(x) = 1$, a endlich) bekanntlich überhaupt keine Streuung. Die Proton-Meson-Wechselwirkung H_f^S liefert also bei strenger Rechnung die Streuung null, während man in erster störungsmässiger Näherung (entsprechend der Born'schen Näherungslösung für ψ) den Streuquerschnitt $a^2/4\pi$ erhalten hätte. Hieraus darf zwar nicht geschlossen werden, dass die Störungsfunktion (17) die Streuung null ergibt, da bei strenger (nicht-linearer) Berücksichtigung der „Terme 2. Grades“ konsequenterweise mindestens auch diejenigen 1. Grades streng in Rechnung gesetzt werden müssten, was auf ein Problem vom Typus (24), (25) zurückführen würde. Immerhin dürfte das obige — freilich besonders krasse — Beispiel lehren, dass die niedersten störungstheoretischen Näherungen nicht immer vertrauenswürdig sind. — Was den Fall $L^W = L_g^W$ anlangt, ist die Bestimmung der Eigenschwingungen der Form $HF + H_g^S$ etwas verwickelter (fast das gleiche Problem haben wir im § 7 der S. 7 zitierten Arbeit behandelt); hier ergibt sich Übereinstimmung mit der störungstheoretischen Berechnung der Streuung, solange $b \ll \omega$, d. h. $|g|^2 |\delta M| \ll \omega$ (= Meson-Energie).

klein sind, so dass auch die Beiträge der Terme niederen Grades in zweiter und höherer störungsmässiger Näherung von Bedeutung werden.

In quantitativer Hinsicht spielt nach (17) der Charakter der Funktion $M(n)$, welche die Proton-Ruhmasse in Abhängigkeit von der Ladungszahl darstellt, eine entscheidende Rolle. Die einfachste, mit den bekannten Massen von Neutron ($n = 0$) und Proton ($n = 1$) verträgliche Annahme wäre die einer quadratischen Masse-Ladungsbeziehung:

$$M(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 \quad (a_2 > 0, a_1 \simeq -a_2). \quad (35)$$

Da die dritten und höheren Differenzenquotienten dieser Funktion verschwinden, bricht dann die Reihe (17) mit den Termen 2. Grades ab. Die zweiten Differenzenquotienten sind bereits von n unabhängig, so dass die Matrixelemente der Streuung vom Zustand des streuenden Protons unabhängig werden; auch sind sie gleich gross für die Streuprozesse mit und ohne Ladungswechsel. Die oben erwähnten Matrixelemente der Schauer-Erzeugung, soweit sie in δM linear sind, verschwinden im Falle (35); die betreffenden Wahrscheinlichkeiten werden also von höherer Ordnung klein: im Falle der Zweier- und Dreierschauer ($i = 3$ bzw. 4) $\sim \delta M^4$, bei Vierer- und Fünferschauern $\sim \delta M^6$, usw. Anders wird dies aber, wenn dritte und höhere n -Potenzen in $M(n)$ wesentlich vorkommen. Würde die hier diskutierte oder eine verwandte Theorie der Wirklichkeit entsprechen, so könnte man also aus der relativen Häufigkeit von Schauern mit verschiedenen Partikelzahlen in Erfahrung bringen, wie die Masse der Proton-Isobaren von der Ladung abhängt.

Zum Schluss sei nochmals daran erinnert, dass sich die obige Diskussion im Falle des Ansatzes $L^W = L_g^W$ nur auf den statischen Grenzfall beziehen sollte, indem die kinetische Energie des Protons $\ll |\delta M|$ angenommen wurde, was z. B. bei der Mesonstreuung die Beschränkung auf Meson-Impulse $\ll \sqrt{M} |\delta M|$ bedingt. Was die Streuung schnellerer Mesonen und die Schauer-Erzeugung in jenem Falle anlangt, können die Aussagen mit Hilfe der Formeln (30), (31) erweitert werden; aber nur bei Impulsen $\ll M$ bleiben dann die Vorteile unseres Näherungsverfahrens bestehen (vgl. § 4). Im Falle $L^W = L_f^W$ fallen diese Einschränkungen fort.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.