Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 13 (1940)
Heft: VI

Artikel: Sur l'axiomatique de la théorie cinématique de Milne
Autor: Mercier, André
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111075

Sur l'axiomatique de la théorie cinématique de Milne

par **André Mercier** (Berne).

(28. X. 40.)

Sommaire. — Cet article est un exposé systématique des propositions (postulats et définitions) qui forment la base de la théorie cinématique de Milne. Il précise son axiomatique, et insiste sur le fait qu'on pourrait la mettre à la base de la théorie de la relativité restreinte aussi bien que l'une des axiomatiques existantes. L'article se termine par une comparaison entre la cosmologie de Milne et celle de la relativité; cela permet de relever certains défauts de la première.

1. *Remarques préliminaires.* — Il y a premièrement dans toute théorie physique des *notions primordiales* que l'on admet sans même les définir. Ce sont des entités que notre intelligence est censée comprendre grâce à une expérience journalière, grâce à une intuition, ou en vertu d'un facteur quelconque. De plus, dans toute théorie, on fait des *définitions*, qui n'ont besoin d'aucun commentaire . Enfin toute théorie est fondée sur des relations qu'on appelle tantôt principe, tantôt axiome, tantôt postulat. Nous dirons *axiome* pour suivre Reichenbach dans l'exposé des «axiomes de la lumière»; ailleurs, nous dirons *postulat*.

Nous commencerons par un bref rappel de l'axiomatique déjà connue de la relativité restreinte.

H. Reichenbach[6]) [7]) [8]) et Carathéodory[1]) ont, indépendemment l'un de l'autre, proposé des systèmes d'axiomes pouvant servir de base à la théorie de la relativité. Les notions a priori, grâce auxquelles leur énoncé est possible, sont *la suite des nombres réels* et la notion *d'un ensemble ε de points ayant la puissance du continu*, la notion de *signaux*, celle de leur *émission* et de leur *réception*; puis celle *d'événement* en un point de l'ensemble ε, ce qui suppose qu'en ce point il puisse exister un point matériel distinct du point mathématique. Reichenbach énonce des *axiomes*, dits de la lumière, qu'on peut résumer comme suit: A chaque point de ε correspond une suite d'événements qu'on peut ordonner selon la suite des nombres réels; le nombre réel s'appelle temps, et toute coupure définit l'époque d'un événement. On peut toujours en un point de ε émettre un signal à l'époque d'un certain événement. A chaque point de ε correspond un dispositif capable, lorsqu'il reçoit un signal, d'en émettre un simultanément. Il faut préciser qu'à chaque émission d'un signal en un point de ε correspond la réception d'un et d'un seul signal, appelé premier signal. La succession de deux premiers signaux, à la réception en un point P', est la même qu'à leur émission en un point P. La comparaison des temps mesurés en deux points se fait grâce à une définition que nous reprendrons plus loin. Vient l'*axiome, dit de Fermat*, selon lequel les (premiers) signaux consistent en lumière. Puis on énonce deux axiomes qui reviennent à *affirmer l'existence* d'un ensemble dense de points liés entre eux d'une manière invariable (la liaison invariable est définie sans qu'il soit fait appel à la notion de distance). On définit alors la distance entre deux points. Enfin un dernier *axiome* fixe la *métrique de l'espace* des points appartenant à l'ensemble dense qui vient d'être cité, en déclarant qu'elle est euclidienne et qu'elle a trois dimensions, la lumière s'y propageant en ligne droite. Un pareil système s'appelle inertial. Suivant comment on *définit* la manière de mesurer les longueurs dans des systèmes en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre, on est conduit à *employer* la transformation de Galilée ou celle de Lorentz. Supposons *définie* la transformation de Lorentz, on peut alors *postuler* que c'est elle qui préside à la réalité des corps matériels. C'est ce que propose Reichenbach.

Il est très instructif de comparer pas à pas les énoncés de Reichenbach à ceux qui forment le fondement de la Théorie Cinématique et que nous exposons au paragraphe suivant.

2. *Enoncés* (**A**) à (**P**) *de l'axiomatique de la Théorie Cinématique.* — Milne a émis des idées fort intéressantes sur le cinématique générale (cf. [5]) et [4])). Si en certains points il suit un chemin qui coïncide à peu près avec celui des auteurs de l'axiomatique relativiste que nous avons cités plus haut, il s'écarte toutefois de leur méthode et il établit surtout les bases d'une cinématique moins restreinte que celle de la relativité restreinte. Nous allons exposer systématiquement, comme l'a fait par exemple Reichenbach pour la relativité, les postulats et les définitions qui forment la base de cette théorie.

(**A**). *Notions primordiales**). Citons tout d'abord, parmi les notions primordiales de cette théorie la *suite des nombres réels*, notion mathématique qui sera utilisée à peu près comme dans l'axiomatique résumée au § 1. Mais ensuite, en théorie cinématique, il n'est pas question d'un ensemble de points, mais bien

*) Les lettres (**A**), (**B**), etc., qui suivent servent à numéroter soit les désignations des notions primordiales, soit les énoncés d'axiomes, soit ceux de postulats, soit ceux de définitions.

d'une notion de caractère absolument physique, *un ensemble de particules.* Cet ensemble est évidemment *dénombrable,* ce qui fait qu'on ne pourra pas introduire dans cette théorie une métrique euclidienne de la même manière que dans l'énoncé du dernier axiome de la lumière de REICHENBACH. De plus, on admet la notion d'*observateur,* c'est-à-dire non seulement de mécanisme, mais d'être intelligent capable d'intentions; en particulier les observateurs communiquent entre eux. La notion d'observateur est plus compliquée que celles adoptées par REICHENBACH ou CARATHÉODORY, mais on peut à peu près la réduire à ces dernières. En effet, les observateurs doivent pouvoir communiquer entre eux, ce qui n'est rien d'autre que l'envoi des signaux et leur réception, et l'on pourrait énoncer de nouveau les *axiomes* selon lesquels à toute émission due à l'un des observateurs correspond la réception d'un signal par tous les autres. Pour ne pas allonger nous n'introduisons pas d'exposé détaillé de ces axiomes. De plus les observateurs sont censés avoir la notion *d'événements* et celle des adjectifs *antérieur, simultané* et *postérieur.* Ces notions sont aussi parmi celles que CARATHÉODORY adopte; par contre, REICHENBACH les définit à partir des notions de signal, d'émission et de réception, ainsi que celle d'événement. Il vaut la peine de rappeler ici la définition de REICHENBACH. « De deux événements E_1 et E_2 arrivés en un point P, E_2 est dit postérieur à E_1 (et E_1 antérieur à E_2) lorsqu'il est possible de choisir un signal dont l'émission coïncide avec E_1 et le retour (la réception en P) avec E_2». Il ne serait pas possible de traduire cette définition dans la cinématique de MILNE, car comme nous le verrons en (**B**), le nombre des observateurs est le même que celui des particules, et l'on n'est pas assuré que pour deux événements E_1 et E_2 quelconques observés par un observateur, celui-ci puisse trouver un signal dont l'émission coïncide avec E_1, et la réception, au retour, avec E_2. Il faut donc nécessairement compter les adjectifs antérieur, simultané et postérieur parmi les notions primordiales.

Les premiers *postulats* de la théorie cinématique sont les suivants:

(**B**) A chaque *particule* est associé un *observateur.*

(**C**) *En chaque particule se produisent des événements,* dont les observateurs font l'expérience. Comme nous l'avons vu, cette expérience est temporelle (succession ou simultanéité). De plus cette expérience temporelle est supposé telle, qu'étant donné deux événements non simultanés arrivés à l'endroit de la même particule, l'observateur associé puisse toujours discerner un troisième événement qui serait postérieur au premier et antérieur au second.

(**D**) On *postule* que *l'expérience de tout observateur est continue*, c'est-à-dire qu'en chaque particule il y a une suite continue d'événements qu'on peut ordonner selon la suite des nombres réels*).

L'exposé de MILNE coïncide avec celui de REICHENBACH quant à la *définition* d'une horloge:

(**E**) La correlation entre les nombres réels et les événements qui constituent l'expérience temporelle d'un observateur est une *horloge.*

Comme on le voit, la différence essentielle entre la théorie cinématique et l'axiomatique indiquée plus haut réside dans l'ensemble des particules de l'une et celui des points de l'autre, et nous pouvons indiquer dès maintenant que ce n'est pas tellement à propos du temps et de sa mesure, mais bien plus à propos de la manière et de la possibilité de comparer des mesures que la théorie cinématqiue se distingue (cf. surtout (**J**)).

Vient la comparaison des époques d'événements qui se produisent en des particules différentes. Pour cela il faut *postuler* que

(**F**) *L'ordre d'émission des signaux est le même que celui de la réception.*

MILNE définit l'époque d'un événement en B mesurée par A et la distance entre A et B. Ces définitions ne sont rien d'autre que celles de l'axiomatique de REICHENBACH, mais elles sont accompagnées dans l'exposé de MILNE d'un commentaire très intéressant:

(**G**) *Définitions.* L'époque T_B^A étant celle de la réflexion en B d'un signal envoyé par A à l'époque t_1 et retourné en A à l'époque t_3 (toutes époques mesurées par A), T_B^A est définie par les conditions de tomber entre t_1 et t_3, et d'être telle que si on ajoute une constante au temps mesuré en A, elle augmente aussi d'autant. Quant à la distance R_B^A de A à B, mesurée par A, elle doit être définie de manière que si B est en A, elle soit nulle; de plus elle ne doit pas dépendre de l'origine du temps. Il résulte de ces conditions que l'expression de l'époque T_B^A (cp. à t_2 dans [7])) doit être de la forme

$$\frac{t_3 + t_1}{2} + \psi_1(t_3 - t_1) \qquad \text{avec} \qquad \psi_1(0) = 0$$

et celle de la distance R_B^A

$$\psi_2(t_3 - t_1) \qquad \text{avec} \qquad \psi_2(0) = 0.$$

*) Pour traduire l'expression « at a particle », nous disons « en une particule », comme on dit « en un point ».

Sur quoi MILNE choisit les formes particulières

$$\psi_1 = 0; \qquad \text{donc} \qquad T_B^A = \frac{t_3 + t_1}{2}$$

et

$$\psi_2 (t_3 - t_1) = \frac{c}{2} (t_3 - t_1) = R_B^A$$

où c est une constante positive arbitraire. La forme générale de l'expression de l'époque: $\frac{t_3+t_1}{2} + \psi_1(t_3 - t_1)$ est une généralisation de l'expression proposée par REICHENBACH dans sa définition N° 2[7]), qui est elle-même une généralisation de la définition d'EINSTEIN (qu'il numérote 8 dans[7])).

B envoie à A, en même temps qu'il renvoie le signal, l'indication t_B^B de son horloge à l'époque de cette réflexion. De la sorte, A peut étudier en fonction de l'époque T_B^A de cette réflexion fixée par la dernière définition à sa propre horloge, l'époque t_B^B mesurée à l'horloge de B, ainsi que la distance R_B^A qui le sépare de B:

$$\begin{aligned} t_B^B &= f_{AB}(T_B^A) \\ R_B^A &= c\varphi_{AB}(T_B^A). \end{aligned}$$

Réciproquement, B peut en faire autant:

$$\begin{aligned} t_A^A &= f_{BA}(T_A^B) \\ R_A^B &= c'\varphi_{BA}(T_A^B). \end{aligned}$$

(**H**) *Postulat. A et B* (en général tous les observateurs) *conviennent de poser $c' = c$.*

(**I**) *Définition. Deux observateurs A et B sont dits équivalents s'ils peuvent graduer leur horloge de manière que*

$$\varphi_{AB} \equiv \varphi_{BA} \equiv \varphi, \qquad \text{et} \qquad f_{AB} \equiv f_{BA} \equiv f.$$

Pour que la relativité restreinte apparaisse comme un cas particulier de la théorie cinématique, il faut exiger ceci:

(**J**) *Postulat. Les observateurs associés aux particules sont équivalents entre eux.*

J'appellerai cet énoncé (**J**) le «postulat de Milne», et je souhaiterais qu'on en fasse la pierre de coin de l'axiomatique de la théorie cinématique. Car c'est en vertu de (**J**) qu'on montre que c'est grâce à une transformation identique à celle de LORENTZ que l'on passe de la description de l'univers faite par un observateur à celle faite par un autre en mouvement relatif rectiligne et uniforme par rapport au premier. Avant d'en arriver là, on a besoin de quelques énoncés. Mais nous pouvons tout de suite remarquer que c'est donc (**J**) qui constitue l'une des idées fondamentales de l'exposé de MILNE. Cette idée est particulièrement originale. Elle appelle deux remarques. Pour qu'un observateur A puisse étudier les fonctions $t_B^B = f_{AB}(t_B^A)$ et $R_B^A = c\varphi_{AB}(T_B^A)$ d'une manière très précise, il faut qu'il puisse envoyer des signaux à B d'une manière continue, ce qui est une idéalisation permise. Il est plus difficile par contre de s'assurer qu'au cours du temps (qui dure infiniment) A et B restent toujours équivalents. Il faut donc comprendre ce dernier point dans le postulat de MILNE.

(**K**) On *définit* alors *la vitesse « extérieure » d'un signal* par le quotient entre la distance R_B^A parcourue entre l'émetteur A et le récepteur B, et le temps $T_B^A - t_1$ mis par ce signal pour atteindre B, ces grandeurs étant mesurées par A, et

(**L**) *la vitesse « intérieure » du même signal* par le quotient entre la distance R_B^A et le temps $t_3 - T_B^A$ mesuré par A et mis par le signal pour revenir de B en A.

Le calcul montre que la vitesse intérieure et la vitesse extérieure sont toutes deux égales à c, ce qui est très remarquable, d'autant plus que ce résultat est vrai indépendemment d'un mouvement relatif possible de A et B (il n'est même pas question un seul instant d'un pareil mouvement relatif). De plus, ce résultat est encore vrai si l'on intervertit A et B. Maintenant on *postule* que

(**M**) *la vitesse des signaux s'appelle vitesse de la lumière.*

La signification de (**M**) est exactement celle de l'axiome de FERMAT.

La transformation de LORENTZ rentre dans le cadre de la cinématique de MILNE d'une manière très élégante. Il faut dire clairement dans quelles circonstances on l'établit. Dans l'axiomatique de REICHENBACH, on l'obtient en définissant convenablement le mouvement relatif uniforme sans l'aide de barres rigides (cp. à ce propos[5]), p. 59, au début du troisième alinéa du sommaire!).

MILNE ([5]) § 27) définit tout d'abord la vitesse radiale:

(**N**) La *vitesse radiale* V d'un observateur B mesurée par un observateur A est *définie* par le nombre

$$V = c \frac{d\,\varphi\,(T_B^A)}{d\,T_B^A},$$

où φ est défini en (**G**) et (**I**).

Si l'on imagine alors qu'un signal envoyé par un observateur A à un observateur P «touche en passant» l'observateur B*), on peut établir les formules qui relient entre elles la distance $AP = X$ et l'époque T à laquelle le signal arrive en P, mesurées par A, la distance $BP = X'$ et l'époque T' du même événement mais mesurées par B, et la vitesse radiale (instantanée) V. Ce sont les formules (33) de la page 41 de [5]) que nous reproduisons:

$$\left.\begin{aligned} T' + \frac{X'}{c} &= p_{12}\left(T + \frac{X}{c}\right), & T + \frac{X}{c} &= p_{21}\left(T' + \frac{X'}{c}\right) \\ T' - \frac{X'}{c} &= p_{21}\left(T - \frac{X}{c}\right), & T - \frac{X}{c} &= p_{12}\left(T' - \frac{X'}{c}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{m})$$

où p_{12} est l'opérateur qui fait passer de $f(T_B^A)$ à $f(T_A^B)$, et p_{21} l'opérateur inverse. Il est inutile de commenter la forme des équations (m). Ces équations méritent d'être appelées *formules de transformation de Lorentz-Milne.* Elles sont valables quelle que soit la vitesse radiale V qui est en général variable en fonction de T_B.

Si V est constant, on déduit de (m) les formules de la transformation de Lorentz:

$$T' = \frac{T - VX/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \text{etc.} \qquad (V = \text{const.})$$

La transformation (m) est valable si A, B et P sont alignés sur la trajectoire d'un rayon lumineux. Pour pouvoir suivre les raisonnements de Milne qui permettent d'établir les formules de transformation de Lorentz «en trois dimensions», il faut énoncer deux postulats. Or Milne imagine simplement que A, B et P ne soient pas alignés, et que *A et B essayent de comparer entre elles leurs mesures relatives et celles qu'ils font de la position et de l'époque de P, au moyen de diagrammes dessinés dans une géométrie euclidienne,* quittes à ce que ce procédé se révèle impossible. Il se trouve que ce procédé est possible lorsque V est constant, sinon pas.

Si donc on veut exposer la théorie de la relativité restreinte au moyen du langage de Milne, il faut premièrement spécifier par un *postulat* que

(**O**) *Les observateurs équivalents* dont les comptes-rendus d'observation constituent l'ensemble de la théorie de la relativité restreinte *sont tels que* $V =$ const. pour deux quelconques A et B d'entre eux. Appelons-les *observateurs galiléens.*

---

*) Ce qui veut dire qu'un signal envoyé par A à P, puis instantanément par P à B, et retourné en A par le même chemin, revient en A au même instant qu'un signal direct de A à B et retour. On peut dire alors que A, P et B sont *alignés.*

Chaque observateur galiléen peut, selon MILNE, convenir d'employer une géométrie euclidienne pour traduire ses observations, mais il faut deuxièmement *postuler* que

(**P**) *Lorsqu'un observateur galiléen décide d'employer une géométrie euclidienne* à trois dimensions*) pour la description de ses expériences, *les rayons lumineux lui apparaissent comme des lignes droites.*

On peut alors faire suivre l'axiomatique (**A**), (**B**), ... (**P**) de la cinématique de MILNE par les énoncés des postulats de la relativité restreinte (dynamique, électromagnétisme, etc.). On obtient ainsi un exposé complet et original de la relativité restreinte. Bien entendu, cela n'est possible que dans la supposition de l'existence de *particules*, et non pas de répartitions continues de matière. Un pareil exposé servirait admirablement la physique atomique.

Ce n'est d'ailleurs pas là le but de MILNE, qui a développé cette cinématique avec l'idée d'en faire une théorie cosmologique, que l'on désigne sous le nom de théorie cinématique de l'Univers.

3. *Relativité générale.* — On peut considérer ce paragraphe comme faisant directement suite au § **1**.

La théorie de la relativité générale repose sur l'idée fondamentale que tous les systèmes de coordonnées imaginables sont également justifiés pour la description de la nature. EINSTEIN[3]) traduit cette idée par le *postulat* appelé *principe de covariance:* Les lois générales de la nature doivent être exprimées par des équations de forme covariante vis-à-vis de substitutions quelconques de coordonnées.

Il faut préciser par un *postulat* ce que l'on entend par coordonnées: *Les coordonnées permises* en physique sont des paramètres quelconques qui caractérisent d'une manière *univoque* et *continue* les points de l'univers.

La relativité restreinte ne peut tenir compte d'effets gravifiques sous forme newtonienne, puisque celle-ci autorise l'envoi de signaux à vitesse infinie. Le *postulat* appelé *principe d'équivalence* rétablit la possibilité d'énoncer une loi de gravitation dans la théorie: Il est toujours possible, en un point de l'univers, de passer à un système local de coordonnées tel que les effets gravifiques disparaissent dans un domaine infiniment petit entourant ce point, le domaine étant choisi suffisamment petit pour que les variations (dans l'espace et dans le temps) de la gravitation puissent y être négligées.

---

*) Rien ne prouve, dans la théorie de Milne, qu'on ne puisse imaginer un nombre de dimensions d'*espace* différent de trois.

On *postule* une espèce de condition aux limites: *Dans le système* local de *coordonnées* du domaine infinitésimal dont il est question dans l'énoncé du principe d'équivalence, la *relativité restreinte est valable*; c'est-à-dire que la forme des équations des lois de la physique dans ce système est la même que dans un certain système galiléen x, y, z, ct, duquel d'ailleurs on peut passer à un autre $x', y' z', ct'$, par une transformation de LORENTZ.

On fait alors des *définitions*. Tous les systèmes galiléens de coordonnées qui correspondent au système local s'appellent systèmes de *coordonnées naturelles*, et si un objet est au repos dans l'un d'eux, celui-ci est appelé système des *coordonnées propres* de l'objet.

Nous n'irons pas plus loin dans l'exposé de la théorie de la relativité dite générale; il existe des traités fondamentaux là-dessus. Nous ferons la remarque suivante: Le principe de covariance mis à part, la relativité générale procède par généralisation d'une théorie restreinte. En particulier on postule qu'en coordonnées naturelles on doit retrouver la relativité restreinte. C'est là un procédé possible. Une théorie exposant des postulats ou des axiomes fondamentaux sans qu'il soit fait appel à une théorie d'ordre moins élevé et déjà connue me semblerait encore plus élégante. Cela me paraîtrait particulièrement désirable aussitôt qu'il s'agit d'une théorie dont la portée est d'ordre cosmologique, et il me semble que le reproche (discret) que je fais à la relativité générale revient à un manque de cette théorie à satisfaire au « principe de beauté mathématique » énoncé récemment par DIRAC[2]); si le principe de covariance satisfait au principe de DIRAC, la suite de la théorie ne me semble pas y satisfaire indubitablement.

Pour la cosmologie, cela est d'autant plus pénible, que la méthode de la cosmologie relativiste consiste à deviner des modèles de l'univers satisfaisant aux principes de la relativité générale.

On ne peut pas faire ces reproches-ci à la théorie cinématique de MILNE. Mais on peut lui en faire d'autres (voir en particulier [2]) et [4])). La théorie de MILNE ne semble entre autres pas expliquer facilement la gravitation. Mais on constatera qu'alors que le procédé employé en relativité générale fait de la relativité restreinte un *cas limite* où les effets gravifiques sont négligeables — cas limite qu'il faut de plus connaître avant de passer à l'exposé général, — la théorie cinématique, elle, considère la relativité restreinte tout simplement comme le *cas particulier* se rapportant à ceux des observateurs qui sont doués de certains mouvements relatifs.

4. *Sur la « Structure de l'Univers » d'après Milne.* — Revenons alors à la discussion de la théorie cinématique et à sa signification pour la cosmologie. Pour développer sa cosmologie, Milne remarque, après un exposé que nous avons précisé par les propositions (**A**) à (**P**), qu'il n'est pas possible de définir un univers « universellement » homogène, et il se fait une image de la répartition des galaxies en imaginant que celles-ci satisfont à ce qu'il appelle le *principe cosmologique d'Einstein.* Toutefois, cela ne lui suffit pas, et, s'il n'introduit pas de postulat appartenant à une mécanique proprement dite, il admet tout au moins qu'il y a *conservation* de quelque chose lorsqu'il déclare que:

(**Q**) *Postulat. Le nombre des particules est conservé.*

Ce postulat n'appartient pas à la relativité restreinte. On pourrait le lui ajouter, mais ce serait malencontreux, puisqu'on s'interdirait par là de considérer des phénomènes tels que la création des paires d'électrons. Le postulat (**Q**) appartient donc à la cosmologie de Milne proprement dite.

Pour préciser ce qu'il entend par « principe cosmologique d'Einstein », Milne a besoin de deux définitions, celle de l'équivalence de deux particules A et B, équivalence qu'il écrit $A \equiv B$, et celle d'une propriété analogue qu'il écrit $A \;\underline{\equiv}\; B$. La relation $A \equiv B$ est très bien définie, la seconde $A \;\underline{\equiv}\; B$ l'est moins bien.

Indiquons ces définitions. Nous l'avons déjà fait pratiquement pour la première à la lettre (**I**). Nous généralisons tout d'abord la définition (**I**) en indiquant qu'elle est indépendante de la manière particulière selon laquelle un observateur A attribue des époques, mesurées à son horloge, aux événements qui se produisent en B. Soit donc, indépendemment de la définition particulière (**G**), E_Q un événement quelconque en Q $(Q \to A, B, \ldots)$. Soit t_Q^P $(P \to A, B, \ldots)$ une époque mesurée par P à son horloge et attribuée à l'événement E_Q. Soit R_Q^P la distance de P à Q, mesurée par P à l'époque t_Q^Q (mesurée par Q) à laquelle Q renvoie un signal reçu de P. Soit A et B deux observateurs:

$$A \text{ étudie les fonctions } \begin{cases} t_B^B = f_{AB}(t_B^A) \\ R_B^A = c\varphi_{AB}(t_B^A), \end{cases}$$

$$B \text{ étudie les fonctions } \begin{cases} t_A^A = f_{BA}(t_A^B) \\ R_A^B = c\varphi_{BA}(t_A^B). \end{cases}$$

(**I**) *Définition* de l'équivalence: Si

$$f_{AB}(t_B^A) = f(t_B^A), \quad f_{BA}(t_A^B) = f(t_A^B) \qquad \text{(même fonction } f)$$

et

$$\varphi_{AB}(t_B^A) = \varphi(t_B^A), \quad \varphi_{BA}(t_A^B) = \varphi(t_A^B) \qquad \text{(même fonction } \varphi),$$

on dit que A et B sont équivalents, et on écrit

$$A \equiv B.$$

Nous indiquerons ci-dessous, en (**R**), la définition de la propriété $A \Equiv B$. Au paravant, indiquons quelle signification elle doit avoir. $A \Equiv B$ est censé vouloir dire que la description, par A, des événements se produisant en tous les autres observateurs que A, est superposable à la description, par B, des événements se produisant en tous les autres observateurs que B.

Convenons alors de quelques notations. L'observateur A énumère tous les observateurs (entre autres un certain observateur B), et il les désigne d'une manière générale par P_i. A désigne par t^A le temps mesuré à son horloge, et en particulier par $t^A_{P_i}$ le temps fixant, à son horloge, l'époque des événements qui se succèdent en P_i. Soit γ une grandeur physique, qui peut être en général tensorielle. Il est possible d'étudier la variation de cette grandeur à l'endroit de toutes les particules-observateurs. A fait cette étude, et peut indiquer γ en chaque P_i sous la forme d'une fonction

$$\gamma = g_A(P_i, t^A_{P_i}).$$

L'observateur B énumère tous les observateurs (entre autres A), et il les désigne d'une manière générale par P_i'. B appelle t^B le temps mesuré à son horloge. Il étudie la même grandeur en chaque particule P_i' et en fonction de t^B, et l'indique sous la forme d'une fonction

$$\gamma = g_B(P_i', t^B_{P_i'}).$$

(**R**) *Définition de la propriété* $A \Equiv B$. S'il est possible de faire correspondre d'une manière *biunivoque* les P_i énumérés par A et les P_i' énumérés par B sous forme de paires $P_i \longleftrightarrow P_i'$ d'une manière telle que

$$\left.\begin{aligned} g_A(P_i, t^A_{P_i}) &= \bar{g}_i(t^A_{P_i}) \\ g_B(P_i', t^B_{P_i'}) &= \bar{g}_i(t^B_{P_i'}) \end{aligned}\right\} \qquad (\bar{g})$$

où $\bar{g}_i(t)$ est la même fonction pour une paire donnée, on dit alors que

$$A \Equiv B.$$

Remarquons qu'en général $A \equiv B$ n'implique $A \Equiv B$, et que $A \Equiv B$ n'implique pas non plus $A \equiv B$.

Les grandeurs qui entrent en jeu dans la théorie de MILNE sont toutes d'ordre cinématique (Théorie « cinématique »). Considérons toujours les fonctions $g_A(P_i, t^A_{P_i})$ et $g_B(P_i', t^B_{P_i'})$ indiquées

*

par A (ou B) en tous les points P_i (ou P_i'). A indique d'ailleurs la position de P_i par des coordonnées que nous symboliserons par «un vecteur de position» $\overrightarrow{P_i^A}$ qui est fixé à chaque époque $t_{P_i}^A$. B en fait autant en se servant par exemple d'un vecteur $\overrightarrow{P_i'^B}$ fixé à chaque époque $t_{P_i'}^B$. Admettons que A et B soient des observateurs *équivalents*. Alors, grâce aux relations (m) de la transformation de LORENTZ-MILNE, on sait comment passer de t_P^B, $\overrightarrow{P^B}$ à t_P^A, $\overrightarrow{P^A}$, et inversement. Nous pouvons symboliser cette transformation en écrivant

$$[t_P^A, \overrightarrow{P^A}] = \mathbf{T}_{AB}\,[t_P^B, \overrightarrow{P^B}]$$
$$[t_P^B, \overrightarrow{P^B}] = \mathbf{T}_{BA}\,[t_P^A, \overrightarrow{P^A}].$$

Considérons pour un instant celui des points P_i' qui est le même que P_i, et considérons la fonction correspondante indiquée par B:

$$g_B(P_i,\ t_{P_i}^B).$$

Dans cette fonction nous pouvons effectuer la transformation $\mathbf{T}_{AB}$ des coordonnées de B à celles de A. On trouve une relation que nous pouvons symboliser en écrivant

$$g_B\,(\overrightarrow{P_i^B},\ t_{P_i}^B) = \mathfrak{T}_{AB}\,g_A\,(\overrightarrow{P_i^A},\ t_{P_i}^A). \qquad (\mathfrak{T}_{AB})$$

La signification de $(\mathfrak{T}_{AB})$ est la suivante: $\mathfrak{T}_{AB}$ est la transformation particulière qu'il faut faire subir à g_A pour qu'on obtienne exactement g_B pour le même P_i.

Considérons alors l'ensemble Ω de tous les observateurs $A, B\ldots$ de l'univers. Puis considérons les sous-ensembles de Ω dont les éléments sont équivalents entre eux; nous les désignons par $(\equiv)_i$. Les observateurs qui font partie d'un sous-ensemble $(\equiv)_i$ sont équivalents entre eux. Envisageons d'autre part les sous-ensembles de Ω dont les éléments sont reliés entre eux par un signe $\equiv$; soit $(\equiv)_j$ un tel sous-ensemble. Les observateurs qui font partie d'un $(\equiv)_j$ sont tels que, si a et b sont deux quelconques d'entre eux, $a \equiv b$; a et b décrivent les événements se produisant en toutes les particules de $(\equiv)_j$ de manière telle, que dans la description de b il y ait un observateur Q et un seul qui soit décrit par b exactement comme a décrit un observateur P, et inversement (de manière que la correspondance entre P et Q soit biunivoque). Lorsque $a \equiv b$, il n'est pas nécessaire que a décrive b comme b décrit a.

Soit donc un sous-ensemble $(\equiv)_i$ et un sous-ensemble $(\equiv)_j$, et leur partie commune qu'on écrit comme leur produit:

$$\text{partie commune à } (\equiv)_i \text{ et à } (\equiv)_j = (\equiv)_i \times (\equiv)_j.$$

(**S**) *Définition.* Les observateurs qui font partie d'un $(\equiv)_i \times (≣)_j$ forment un système dont on dit qu'il satisfait au *principe cosmologique d'Einstein.*

D'après le postulat de MILNE (**J**), tous les observateurs sont équivalents, on a alors un seul $(\equiv)$, et $(\equiv) \times (≣)_j = (≣)_j$.

La cosmologie de MILNE est fondée sur les énoncés (**A**) à (**S**) ainsi que sur celui du *postulat* suivant:

(**T**) *Les galaxies peuvent être considérées comme formant un système* $(\equiv) \times (≣)_j$.

C'est le dernier postulat. Autrement dit, le principe cosmologique de la théorie cinématique remplace le principe de covariance de la cosmologie einsteinienne (cf.[4]), p. 97). On peut dire que la théorie cinématique fournit, de la relativité restreinte, une généralisation différente de celle connue sous le nom de relativité générale. Ces deux généralisations suggèrent des modèles cosmologiques convenables de l'univers, car il est aujourd'hui requis de tels modèles qu'ils expliquent le déplacement des raies vers le rouge, et les deux théories satisfont à cette condition (pour l'explication de la récession des nébuleuses par la théorie cinématique, on consultera[5]) ou [4]); pour l'explication par la théorie de la relativité générale, on consultera n'importe quel traité sur ce sujet).

Cependant, la théorie cinématique n'a pas résolu le problème de la gravitation d'une façon satisfaisante comme l'a fait la relativité générale, de sorte que pour le moment c'est cette dernière qui me semble avoir la priorité.

Posons-nous la question de savoir ce que le principe cosmologique permet de calculer. Si deux particules-observateurs A et B font partie d'un $(\equiv) \times (≣)$, il faut qu'on ait à la fois $(\mathfrak{T}_{AB})$ et $(\bar{g})$. La définition d'une grandeur γ est fixée indépendemment du principe cosmologique. En exigeant que A et B fassent partie d'un $(\equiv) \times (≣)$, c'est-à-dire en posant les relations $(\mathfrak{T}_{AB})$ et $(\bar{g})$ comme conditions, on fixe la forme particulière de $\bar{g}_i(t)$, et de la sorte on a, pour γ, une formule que soit A, soit B, soit un observateur quelconque O qui fait partie du sous-ensemble $(\equiv) \times (≣)$ peut vérifier expérimentalement en remplaçant t par $t^A_{P_i}$ (ou par $t^B_{P'_i}$ ou par t^O_P), et en comparant les nombres ainsi obtenus pour $\bar{g}_i$ à des résultats d'expérience. Le problème mathématique posé par l'adoption du principe cosmologique consiste donc à *trouver les fonctions* $\bar{g}_i$ *des diverses grandeurs* γ *envisagées dans la théorie,* ces fonctions $\bar{\ }_i$ étant fixées par $(\mathfrak{T}_{AB})$ et (g) et la correspondance

$P_i \longleftrightarrow P_i'$. Il en résulte que $\bar{g}_i$ est solution d'une équation fonctionnelle, dont on trouvera deux exemples dans[5]).

Le procédé que nous venons d'indiquer appelle la remarque suivante. Si l'on admet, comme on le fait en (**T**), que les galaxies peuvent être assimilées aux éléments d'un $(\equiv) \times (\equiv)$, c'est que $A, B, \cdots O, \cdots$ sont chacun à l'endroit d'une galaxie. Or il n'y a qu'une seule galaxie de laquelle nous puissions obtenir des résultats d'expérience, à savoir notre propre galaxie, et même si les étoiles pouvaient séparément faire partie d'un $(\equiv) \times (\equiv)$, il n'y aurait jamais que le système solaire d'où l'on puisse vérifier la justesse d'une hypothèse pareille à (**T**). Il n'y aurait donc qu'un seul «observateur», — appelons-le A, — dont on puisse connaître les expériences, et la vérification de l'exactitude de g_i ne se ferait que sur g_A, mais sur aucun autre $g_B, \cdots g_O, \cdots$. De là résulte un manque considérable de points d'appui dans la théorie cinématique: il est impossible de s'assurer que le principe cosmologique puisse être mis en défaut ou qu'il puisse être confirmé par l'étude de diverses fonctions g_A, g_B, etc. Il se trouve donc qu'on ne peut justifier la théorie que par l'étude que peut faire un seul A de l'image de l'univers (World-picture) telle que la propose la théorie, ou bien par des arguments épistémologiques.

Mais il reste entendu que l'on pourrait fort bien prendre, au lieu d'une axiomatique telle que celle de Reichenbach, l'ensemble des énoncés (**A**) jusqu'à (**P**) comme base de la relativité restreinte.

Séminaire de physique théorique de l'Université de Berne.

Bibliographie.

[1]) C. Carathéodory, Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie (Sitzungsber. Preuss. Akad. Berlin. Phys. Math. Kl. p. 12, 1924).

[2]) P. A. M. Dirac, The relation between mathematics and physics (Proc. Roy. Soc. Edinburgh, LIX, 122, 1939).

[3]) A. Einstein, Les fondements de la théorie de la relativité générale, etc. (Paris 1933).

[4]) G. C. McVittie, Cosmological Theory (London 1937).

[5]) E. A. Milne, Relativity, Gravitation and World-Structure (Oxford 1935).

[6]) H. Reichenbach, Bericht über eine Axiomatik der Einstein'schen Raum-Zeit-Lehre (Phys. ZS. XXII, 683, 1921).

[7]) H. Reichenbach, Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre (Braunschweig 1924).

[8]) H. Reichenbach, Über die physikalischen Konsequenzen der relativistischen Axiomatik (ZS. f. Phys. **34**, 35, 1925).