Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 13 (1940)
Heft: II

Artikel: Zur Theorie der Laufzeitschwingungen
Autor: Lüdi. F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111052

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Copyright 1940 by Schweizerische Physikalische Gesellschaft.
Société Suisse de Physique. — Società Fisica Svizzera.
Nachdruck verboten. — Tous droits réservés. — Printed in Switzerland.

Zur Theorie der Laufzeitschwingungen*)

von **F. Lüdi.**
(A.-G. Brown, Boveri & Cie., Baden, Schweiz).

(26. XII. 39.)

Inhalt: Die für Ultrakurzwellen charakteristischen Laufzeitschwingungen werden vom Standpunkt des Rückkopplungsprinzipes analytisch untersucht. An Hand der stationären Lösungen der Differentialgleichungen für ein selbstgesteuertes System lassen sich die von der Raumladung hervorgerufenen Effekte wie Koppelwellenverlauf, Intensitätsverlauf, Anfachbedingung, als Funktion der Abstimmung des äusseren Schwingkreises diskutieren. Sowohl die charakteristischen gemeinsamen Merkmale als auch die Unterschiede der verschiedenen Schwingungstypen (Bremsfeldröhre, Magnetronschwingung I. Art und Magnetronschwingung II. Art) finden weitgehend ihre Deutung. Eine Zusammenstellung der Resultate befindet sich am Schluss.

Einleitung.

Die Laufzeitschwingungen der Bremsfeldröhre sind von verschiedenen Autoren behandelt worden, am ausführlichsten von Dick[1]). Hierbei gibt es in Analogie zur Behandlung der Schwingungen in gewöhnlicher Dreipolröhrenschaltung prinzipiell zwei Methoden. *Erstens* geht man aus vom stationären Zustand des Systems, konstruiert die Schwinglinie, die durch die statische Charakteristik der Röhre bestimmt ist und bildet den Schnittpunkt mit der Rückkopplungsgeraden[2]). Dieser bestimmt die Amplitude der Schwingung im stationären Zustand. Wenn die Schwinglinie einen Wendepunkt hat, so bekommt man mit der Rückkopplungsgeraden die Reissdiagramme des schwingenden Systems, und als Tangente im Nullpunkt der Schwinglinie liefert sie die Anfachbedingung. *Zweitens* stellt man die Differentialgleichung des Systems auf, wobei die Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung durch Einführung der Rückkopplung in diejenige der selbstgesteuerten Schwingung erweitert wird. Indem periodische Lösungen mit reellen positiven Exponenten gesucht werden, bekommt man die Bedingungen zwischen den Parametern (Durchgriff, Steilheit, Rückkopplung usw.) für die Anfachung bzw. für den stationären Zustand des Systems. Ohne

*) Am 22. Dezember 1938 als Habilitationsschrift an die Abteilung für Elektrotechnik der E.T.H. eingereicht.

Einführung von Nichtlinearitäten ist eine Begrenzung der Amplitude bei positiv reellen Exponenten nicht erreichbar[3]).

Trotzdem hat die zweite Methode auch bei linearisierten Systemen den Vorteil grosser Übersichtlichkeit der wesentlichen Fragestellung, und es soll in diesem Aufsatz versucht werden, das Rückkopplungsprinzip, das ja von so grundlegender Bedeutung für alle selbstgesteuerten Mechanismen ist, auch auf die Laufzeitschwingungen zu übertragen. Wir beschränken uns ausdrücklich auf lineare Systeme und wollen untersuchen, wie weit die wesentlichen Züge der Erscheinungen wiedergegeben werden. Es wird sich zeigen, dass die Theorie bei sinngemässer Einführung der Rückkopplung formal derjenigen des Zweikreissenders entspricht, und zwar des sekundärangefachten, und sich ganz wie dieser behandeln lässt*). Um die Analogie besser hervortreten zu lassen, folgen wir auch weitgehend den Bezeichnungen von Ollendorff. Diese zweite Methode scheint auch deshalb berechtigt, weil nach Dick die Schwinglinie nur umständlich und auf graphischem Weg erhalten werden kann. Ausserdem führten Begriffe wie ultradynamische Charakteristik für diese Schwingungstypen bisher nicht zu konkreten Resultaten.

§ 1.

Es werde zuerst eine modellmässige Übersicht gegeben. Die Laufzeitschwingungen in der Bremsfeldröhre und im Magnetron sind charakterisiert durch eine in einer Eigenperiode schwingende Elektronenraumladung, welche über die Elektrodenkapazität mit einem äusseren Schwingkreis gekoppelt ist. Damit ist sofort ein wesentlicher Unterschied zu den Schwingungen der gewöhnlichen Dreipolröhre gegeben, wo die Laufzeit der Elektronen keine Rolle spielt und also auch keine entsprechenden Eigenfrequenzen auftreten. Bis jetzt sind im wesentlichen drei Typen von Laufzeitschwingungen bekannt. 1. Diejenigen der Bremsfeldröhre (Barkhausen-Kurz), wo die Eigenperiode der Elektronen durch eine elektrische quasielastische Kraft (das positive Gitterpotential) bestimmt ist. 2. Die Magnetronschwingung I. Art (Okabe); hier ist die Eigenperiode in erster Näherung nur durch das Magnetfeld (Larmorpräzession oder Rollkreisfrequenz) bestimmt. Sie tritt sowohl bei ungeschlitzten Anoden als auch bei geschlitzten auf und unterscheidet sich von der Barkhausen-Kurz-Schwingung nur dadurch, dass die quasielastische Kraft durch ein Magnetfeld statt

*) Man vergleiche die sehr übersichtliche Darstellung in dem Buch von F. Ollendorff. „Grundlagen der Hochfrequenztechnik". Verlag Julius Springer, Berlin.

durch ein elektrisches Feld bestimmt ist. Die grosse Ähnlichkeit der beiden Schwingungsarten tritt auch in den experimentellen Erscheinungen sehr deutlich hervor. 3. Gibt es noch die Magnetronschwingungen II. Art (Posthumus); sie treten nur in Röhren mit mehrfach geschlitzten Anoden auf. Die Eigenperiode ist hierbei sowohl durch das elektrische als auch durch das magnetische Feld bestimmt (sogenannte Leitbahnfrequenz). Diese Schwingungsart weicht in den experimentellen Erscheinungen ziemlich von den beiden erstgenannten ab.

Da ausser elektrischen und magnetischen Kräften keine anderen bekannt sind, die auf das Elektron wirken, so dürfte mit den drei angeführten Schwingungsarten die Möglichkeit zur Erzeugung ungedämpfter Laufzeitschwingungen im wesentlichen erschöpft sein. Weil von Herriger und Hülster die Posthumusformel für die Frequenz ω bis ca. 10 m Wellenlänge verifiziert wurde[5]) und diese vom Verfasser an über 30 Messungen von 40 bis 300 cm bei den verschiedensten Feldern ebenfalls nachgeprüft wurde, scheint kein Grund vorzuliegen, die technisch interessanten Magnetronschwingungen durch eine negative Charakteristik erklären zu wollen.

Für die drei Schwingungstypen ist ein erster Aussortiermechanismus charakteristisch, der die energieaufnehmenden von den energieabgebenden Elektronen trennt und nur die letzteren im System zurücklässt, wodurch die Energiebilanz für dieses positiv wird. Ein zweiter für die drei Arten verschiedener Aussortiermechanismus sorgt dafür, dass die energieabgebenden Elektronen nach Abgabe ihrer vom elektrischen Gleichfeld stammenden potentiellen Energie aus dem System herausgenommen werden, weil sonst Phasenumkehr und damit wieder Energieaufnahme aus dem Wechselfeld stattfinden würde. Infolge dieser Aussortierungen, die periodisch erfolgen, entsteht eine Ordnung einer grossen Elektronenzahl zu einer Raumladungswolke, die als Ganzes in der Röhre hin- und herschwingt und im Aussensystem die Wechselspannung induziert; die durch Kathodenstrahlen entstehenden Raumladungen sind aber immer noch so dünn, dass die Bewegung der einzelnen Teilchen als voneinander unabhängig betrachtet werden kann. Man kann höchstens die Korrektur der Elektronenbahnen durch die anwesende Raumladung vornehmen[1])[6])*).

Für die Untersuchung der Eigenfrequenz, des Aussortiermechanismus oder der Energiebilanz (Wirkungsgrad) der Elek-

*) Diese werde hier vernachlässigt; sie bedingt hauptsächlich eine Frequenzkorrektur, jedoch nicht in prinzipieller Weise, was von Dick für die Bremsröhre, und für das Magnetron von J. J. Müller ausführlich gezeigt wurde.

tronen genügt die Betrachtung der Bewegung eines einzelnen Elektrons in den gegebenen Feldern. Dies ist von verschiedenen Autoren bereits ausführlich gemacht worden, und zwar

für die Bremsröhre von MÖLLER[22]), BARKHAUSEN[22]), DICK[1]) und anderen;

für die Magnetronschwingungen I. Art von K. FRITZ[1]), J. J. MÜLLER[6]) und anderen;

für die Magnetronschwingungen II. Art von POSTHUMUS[8]), HERRIGER und HÜLSTER[5]), FISCHER und LÜDI[9]).

Will man dagegen den Frequenzverlauf, den Spannungs- bzw. den Intensitätsverlauf oder die Anfachung der Schwingung in Funktion der Abstimmung des äusseren Schwingkreises kennen lernen, so muss man von der Raumladungswolke ausgehen, da diese Effekte durch das Zusammenwirken aller Elektronen bedingt sind. Der Raumladungsansatz für die Bremsröhre stammt von TANK u. SCHILDKNECHT[10]). R. WUNDT hat darauf eine Theorie (Koppelwellenverlauf) aufgebaut[11]). Dann folgte DICK[1]) auf hauptsächlich graphischem Weg. Wir versuchen hier, unter Zugrundelegung von Differentialgleichungen, den rein analytischen Weg zu gehen, wobei diese, wie in der Einleitung bereits angedeutet, in diejenigen für die selbstgesteuerte Schwingung erweitert werden sollen. Da alle drei Typen, wie oben bemerkt, gemeinsame Merkmale haben, werden die Gleichungen (wofür als einfachstes Modell die Bremsfeldröhre genommen wird) im Prinzip für alle drei Typen gelten. Es lassen sich dann sowohl die gemeinsamen als auch die verschiedenen charakteristischen Merkmale aus den Lösungen herauslesen.

In der Bremsfeldröhre starten die Elektronen kontinuierlich an der Kathode, durchfliegen das positive Gitter mit grosser Geschwindigkeit, werden vor der negativen Kathode gebremst und zur Umkehr gezwungen usw. In Erinnerung der Tatsache, dass sich zwei Kathodenstrahlen ungestört durchdringen, haben wir auch in der Bremsröhre eine sich in beiden Richtungen (Kathode—Anode) durchdringende homogene Elektronenströmung. Wenn durch irgendeine Störung in der einen Richtung mehr Elektronen fliessen, so bedeutet dies eine hin- und herpendelnde Elektronenverdichtung, eine pendelnde Raumladung, welche der Einfachheit halber als schwingende Platte betrachtet werde, die mit einer quasielastischen Kraft an das Gitter gebunden sei. Dieses Pendel kann Energie durch Kopplung über die Raumladung und die Röhrenkapazität an ein zweites gedämpftes Pendel, den äusseren Schwingkreis abgeben. Damit Energieabgabe möglich ist, muss eine be-

stimmte Phasenbeziehung zwischen Innen- und Aussensystem bestehen*). Durch die Kopplung überträgt sich die Dämpfung des äusseren Systems auf das innere (die schwingende Raumladung), und dieses käme, auch ohne Eigendämpfung, allmählich zur Ruhe, wenn nicht durch einen besonderen Mechanismus der innere Schwingkreis immer wieder neue Energiezufuhr erfahren würde, die durch den äusseren gesteuert wird. Diese Steuerung sei hier modellmässig angedeutet.

K und *A* (Fig. 1a) seien die ebenen Elektroden, Kathode und Anode; das Gitter *G* ist auf positivem Potential, im allgemeinen über dem Sättigungswert. Die sich in Wirklichkeit gegenlaufend durchkreuzenden Elektronen seien nebeneinander gezeichnet. Wenn

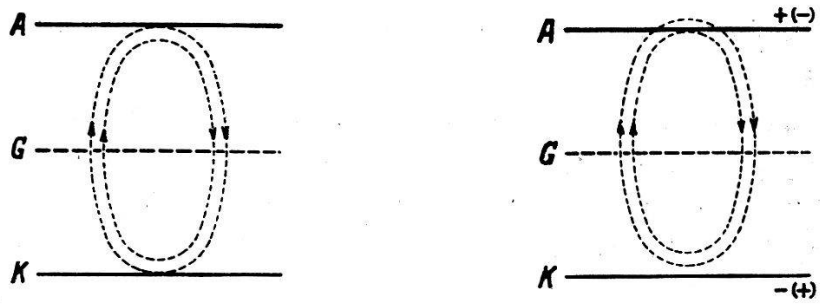

Fig. 1a. Fig. 1b.

durch eine Störung (z. B. Schroteffekt) eine Verdichtung in der einen Richtung entsteht, so erzeugt diese im Aussenkreis ein Wechselpotential, welches auch direkt beim Einschaltvorgang entstehen kann; dadurch werden die Elektronen, welche gegen die positivere Platte fliegen, beschleunigt, während die entgegengesetzt fliegenden verzögert werden. Oder anders ausgedrückt, die positivere Platte rückt dem „Elektronenring" so nahe, dass die falschphasigen Elektronen aussortiert werden, während an der negativeren Platte die richtigphasigen, energieabgebenden Elektronen zurückgestossen werden (Fig. 1b). Da die energieaufnehmenden Elektronen schon nach wenigen Perioden, im besten Fall schon nach einer halben, aussortiert werden, so ist diese Aussortierung gleichbedeutend mit einer um 180° phasenverschobenen Schieberwirkung, die periodisch neue Elektronen mit maximaler Amplitude in das schwingende System einlässt. Dieser Mechanismus ist bei der Bremsröhre und beim Magnetron I. Art derselbe.

*) Ganz allgemein kann gesagt werden, dass die Phasenbeziehung so sein muss, dass die Elektronenbewegung von einem elektrischen Wechselfeld gebremst wird, damit Energieabgabe erfolgt; dies gilt auch für die Inversionsschwingungen nach HOLLMANN[22]), wo als Spezialfall der Pendelbewegungen nur eine unperiodische Hin- und Herbewegung betrachtet wird.

Beim Magnetron II. Art werden die falschphasigen Elektronen gar nicht zugelassen. Sie werden durch die Wirkung der tangentialen Komponente des Wechselfeldes an der Kathode zurückgehalten, bis sie zu richtigphasigen werden[9]). Durch den zweiten Aussortiermechanismus müssen die neu hinzugekommenen Elektronen nach Energieabgabe und zwecks Erhaltung des stationären Zustandes aus dem System herausgenommen werden. Bei der Bremsröhre geschieht dies mittels dem Gitter, beim Magnetron I. Art muss die Schrägstellung das fehlende Gitter ersetzen[6])[7]); diese erzeugt für alle Elektronen eine Bewegungskomponente auf die Anode. Statt der Schrägstellung können auch Endplatten verwendet werden [12])[6]). Bei den Magnetronschwingungen II. Art ist eine solche nicht erforderlich, da dasselbe Tangentialfeld (vgl. die zitierte Arbeit von Fischer u. Lüdi[9]) die energieabgebenden Elektronen an der Anode aussortiert.

Obschon die hin- und herschwingenden Elektronen ungedämpft sind, führen wir doch formal eine Dämpfung für das innere System ein; denn nicht alle Elektronen werden gerade im Energieminimum abgefangen, wie die früher zitierten Arbeiten zeigen.

§ 2. Aufstellung der Koppelungsgleichungen.

In Fig. 2 ist die Bremsfeldröhre schematisch mit den beiden negativen Elektroden, Kathode 1 und Anode 2 mit symmetrisch gelegenem Gitter gezeichnet. Um nicht mit transzendenten Gleichungen operieren zu müssen, sei das Lechersystem durch einen

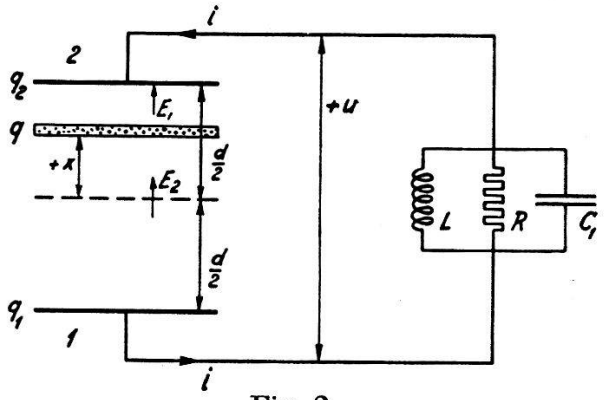

Fig. 2.

Schwingkreis wie bei der Dreipolröhre ersetzt. Beim Magnetron ist dies sogar weitgehend durch Verbindungsbügel zwischen den Anodensegmenten realisiert. Als wesentlicher Unterschied gegenüber dem Lechersystem tritt bei dieser Schaltung die Grundwelle nur bei einer Abstimmung auf, während sie dort periodisch bei verschiedenen Längen wiederkehrt; wir begnügen uns mit der

Betrachtung der Vorgänge bei einer Resonanzstelle. Die Gleichspannung zwischen Gitter und Kathode bzw. Anode ist nicht eingezeichnet, sie wird durch eine quasielastische Kraft ersetzt; u ist die Wechselspannung, die eigentliche Röhrenspannung. Die positiven Richtungen verlaufen vom Gitter zur Anode (2), die negativen vom Gitter zur Kathode (1). Nun sollen nach aussen keine Feldlinien verlaufen, sodass also für die influenzierten Ladungen pro cm² q_1 und q_2 und für die Raumladung q gilt:

$$q_1 + q_2 + q = 0 . \tag{1}$$

Dies gibt mit dem Satz von Gauss unter Verwendung der homogenen Feldstärken E_1 und E_2:

$$\begin{aligned} q_1 &= \beta_0 \mathfrak{E}_1 & \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 &= + \frac{q}{\beta_0} \\ q_2 &= -\beta_0 \mathfrak{E}_2 & \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 &= \frac{1}{\beta_0}(q_1 - q_2) . \end{aligned} \tag{2}$$

β_0 ist die Konstante im Volt-Amp.-Sek-Massystem,

$$\beta_0 = \frac{10^9}{4\pi c^2} .$$

Dann werde die Kraft K pro cm² auf die Ladungsschicht q von der Dicke Δx berechnet. Diese rührt erstens von den Influenzladungen q_1 und q_2, d. h. von der Röhrenspannung u her. Es ist

$$K = \varrho \Delta x \cdot \mathfrak{E} .$$

ϱ ist die Ladungsdichte pro Volumeneinheit, $\mathfrak{E}$ die mittlere Feldstärke an dieser Stelle, $\mathfrak{E} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2)$. Nach dem Satz von Gauss ist aber $\varrho \Delta x = \beta_0 (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)$, also:

$$K = \frac{\beta_0}{2}(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2)$$

oder mit (2)

$$K = \frac{q}{2\beta_0}(q_1 - q_2) . \tag{3}$$

Mit der zweiten quasielastischen Kraft, $-ax$, welche das Gleichfeld vom Gitter ersetze, lautet also die Bewegungsgleichung für die Elektronenmasse m pro cm²

$$m\ddot{x} = \frac{q}{2\beta_0}(q_1 - q_2) - ax .$$

Um $(q_1 - q_2)$ zu eliminieren, brauchen wir noch die Spannungsgleichung unter Berücksichtigung von

$$u = \int_{-d/2}^{+d/2} \mathfrak{E}\, dx = \mathfrak{E}_1 (d/2 + x) + \mathfrak{E}_2 (d/2 - x) = \frac{d}{2\beta_0}(q_1 - q_2) - \frac{q\,x}{\beta_0}. \quad (4)$$

Damit wird die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = \frac{q}{d}\left(u + \frac{q}{\beta_0}x\right) - a\,x. \quad (5)$$

Dann werde die Kopplungsgleichung für den angeschlossenen Schwingkreis bestimmt. Nach KIRCHHOFF ist:

$$i = i_L + i_{C_1} + i_R = \frac{u}{R} + \dot{u}C_1 + \int \frac{u}{L}\,dt \quad (6)$$

und nach (4)

$$\dot{u} = \frac{d}{2\beta_0}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - \frac{\dot{q}}{\beta_0}x - \frac{q}{\beta_0}\dot{x} = -\frac{d}{2\beta_0}\frac{2i}{F} - \frac{q}{\beta_0}\dot{x},$$

da aus (1) bei konstanter Raumladeschicht $\dot{q} = 0$ und $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2$ folgt, und $\dot{q}_1 = -i/F$, $\dot{q}_2 = +i/F$, also $\dot{q}_1 - \dot{q}_2 = -2i/F$ ist. (F = Elektrodenfläche). Bei Einführung der Röhrenkapazität $C_0 = F\beta_0/d$ wird also

$$\dot{u} = -\frac{i}{C_0} - \frac{q}{\beta_0}\dot{x}. \quad (7)$$

Aus (6) und (7) werde i eliminiert; dann liefert nochmalige Differentiation und Ordnung:

$$\ddot{u}\left(\frac{C_1}{C_0} + 1\right) = -\frac{u}{LC_0} - \frac{\dot{u}}{RC_0} - \frac{q}{\beta_0}\ddot{x}. \quad (8)$$

In (5) und (8) haben wir also die beiden Kopplungsgleichungen. Mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{array}{llll} C = C_0 + C_1 & \dfrac{q}{md} = \alpha & \dfrac{q}{\beta_0}\dfrac{C_0}{C} = \gamma & \dfrac{q}{\beta_0} = \beta \quad \tau = \alpha\gamma \\ \dfrac{1}{LC} = \omega_2^2 & \dfrac{a}{m} - \alpha\beta = \omega_1^2 & \dfrac{1}{RC} = \delta_2 & \delta_1 \quad \tau' = \dfrac{\alpha\gamma}{\omega_1^2} \end{array}\right\} \quad (9)$$

und bei Einführung einer formalen Dämpfung δ_1 in Gleichung (5) schreiben sich die beiden Gleichungen (5) und (8)

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + \delta_1 \dot{x} - \alpha u = 0 \quad (10a)$$

$$\ddot{u} + \omega_2^2 u + \delta_2 \dot{u} + \gamma\ddot{x} = 0. \quad (10b)$$

Wir sehen aus (9), dass die Eigenfrequenz des inneren Kreises ω_1, wie durch die Gleichspannung bestimmt wäre, durch die Bildkraft $\alpha\beta$ etwas herabgesetzt wird; und ebenso wird die des äusseren Kreises ω_2 durch Parallelschaltung der Röhrenkapazität etwas kleiner. Wenn der äussere Schwingkreis in Serieresonanz geschaltet wäre, so würde sie grösser. Vergleichen wir die beiden Gleichungen mit den Kopplungsgleichungen zweier ungedämpfter mechanischer Pendel

$$\ddot{x} + \frac{a}{m} x + \frac{C}{m} (x - y) = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{a}{m} y + \frac{C}{m} (y - x) = 0 .$$

so ist ersichtlich, dass in unserem Fall eine Beschleunigungskopplung und eine Kraftkopplung vorliegt, eine sogenannte gemischte Kopplung[13]). $q\ddot{x}$ bedeutet die Änderung des Verschiebungsstromes durch die bewegte Raumladung q, welche die induzierte Spannung erzeugt. Ist q oder C_0 gleich Null, so verschwindet die Kopplung und jedes Pendel schwingt in seiner Eigenfrequenz. Man erkennt hier auch, dass ein zeitlich veränderliches q, wie es zur vollständigen Differentialgleichung für die Anfachbedingung erforderlich wäre, zu nichtlinearen Gleichungen führen würde. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, behandeln wir q als Parameter und werden uns bei den entsprechenden Diskussionen erinnern, dass nicht x, sondern q die wachsende Variable bei konstanter Amplitude x_0 ist; doch kommt es ja nur auf das Moment $q \cdot x$ an.

§ 3. Die Lösung der Kopplungsgleichungen für die freie ungedämpfte Schwingung.

Die beiden simultanen Gleichungen (10) werden gelöst mit dem Ansatz

$$x = \mathfrak{X}\, e^{\varepsilon t} \qquad u = \mathfrak{U}\, e^{\varepsilon t} \tag{11}$$

damit wird aus (10)

$$\mathfrak{X}\,(\varepsilon^2 + \omega_1^2 + \delta_1\,\varepsilon) - \mathfrak{U}\,\alpha = 0\,, \tag{12a}$$

$$\mathfrak{X}\,(\gamma\,\varepsilon^2) + \mathfrak{U}\,(\varepsilon^2 + \omega_2^2 + \varepsilon\,\delta_2) = 0\,. \tag{12b}$$

Die Lösung dieses homogenen Gleichungssystems verlangt, dass die Determinante der Koeffizienten 0 sei, also:

$$(\varepsilon^2 + \omega_1^2 + \varepsilon\,\delta_1)\,(\varepsilon^2 + \omega_2^2 + \varepsilon\,\delta_2) + \alpha\gamma\,\varepsilon^2 = 0\,.$$

Ausgerechnet führt dies zur charakteristischen Gleichung für die Wurzeln:

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^3 (\delta_1 + \delta_2)$$
$$+ \varepsilon^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \delta_1 \delta_2 + \tau) + \varepsilon (\delta_1 \omega_2^2 + \delta_2 \omega_1^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 . \quad (13)$$

Die Dämpfungen δ_1 und δ_2 seien zuerst 0 gesetzt; die entstehende biquadratische Gleichung lässt sich sofort lösen.

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 , \quad (13a)$$

$$\varepsilon^2 = -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau)^2 - 4 \omega_1^2 \omega_2^2}{2}} . \quad (14)$$

Wo $\tau = \alpha\gamma$ der Kopplungsfaktor ist.

Für die Resonanz $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ bekommt man:

$$\varepsilon^2 = -\left(\omega^2 + \frac{\tau}{2}\right) \pm \sqrt{\omega^2 \tau + \left(\frac{\tau}{2}\right)^2} .$$

Wir erhalten zwei Koppelfrequenzen, welche infolge des zweiten Gliedes in der Klammer etwas gegen höhere Frequenzen verschoben sind. Da im ersten Glied unter der Wurzel ω^2 als Faktor auftritt, wollen wir die Grösse der beiden Glieder unter der Wurzel gegeneinander abschätzen.

Es sei angenommen

$$\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \gg \omega^2 \tau .$$

Dann treten zwei imaginäre Werte von ε auf, wovon der eine gleich $i\omega$ ist, während der andere höher liegt. Im Experiment liegen aber die Abweichungen der Koppelfrequenzen symmetrisch zur Resonanzfrequenz, wenn auch die kleinere etwas undeutlich ist (Fig. 4). Für die Abweichung der höheren Koppelfrequenz von der Abstimmungsfrequenz gilt für den imaginären Wert von $\varepsilon = j\Omega$

$$\Omega^2 = \omega^2 + \tau$$

oder

$$\Omega^2 - \omega^2 = \tau = (\Omega - \omega)(\Omega + \omega) = 2p\omega^2 ,$$

wobei $\Omega = \omega(1 + p)$ und p die prozentuale Abweichung der Koppelfrequenz bedeutet. Wir haben

$$\omega^2 \tau = 2p\omega^4 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 = p^2 \omega^4 . \quad (15)$$

Das erste Glied verhält sich also zum zweiten Glied wie $2p/p^2$. Aus dem Experiment liest man für eine 26 cm-Welle den grössten Wert für $p \sim 0{,}03$ ab, sodass das Verhältnis ~ 60 wird, d. h. wir

sind im Widerspruch mit unserer Annahme, welche wegen $\tau = \alpha\gamma$ ein viel zu grosses q erfordern würde. Das zweite Glied unter der Wurzel und damit das zweite in der Klammer, kann daher ohne grosse Einschränkung gestrichen werden, wodurch sich die weitere Diskussion sehr vereinfacht; für den Resonanzfall gilt

$$-\varepsilon^2 = \Omega^2 = \omega^2 \mp \sqrt{\omega^2 \tau} \tag{16}$$

und für den imaginären Wert von (14)

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau}{2} \mp \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau)^2 - 4\,\omega_1^2\,\omega_2^2}{2}}}. \tag{13a}$$

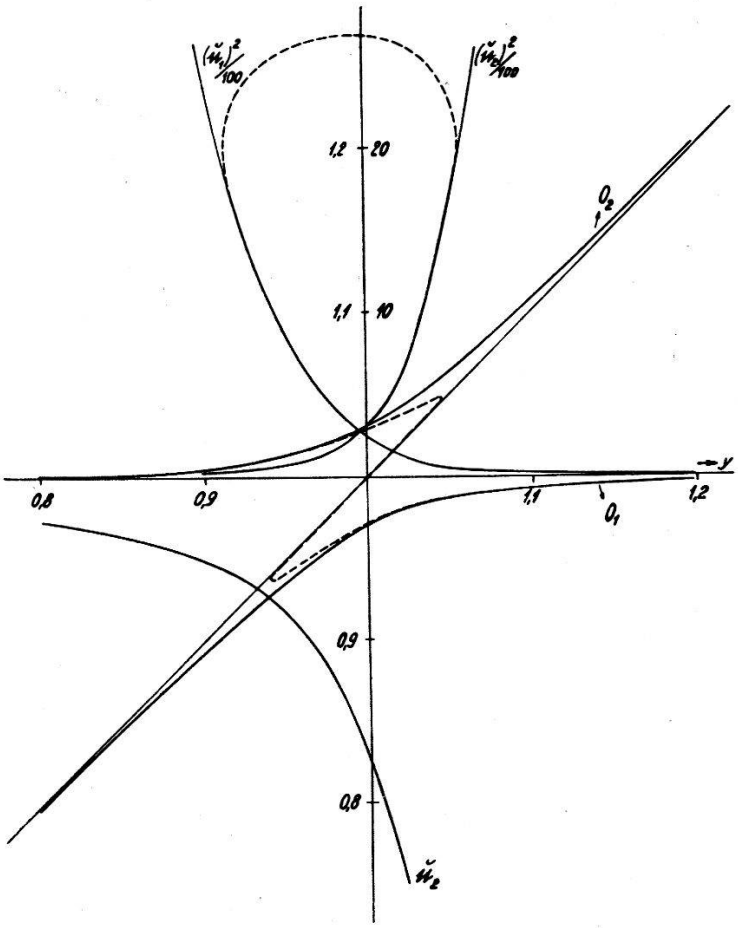

Fig. 3.

Koppelwellenverlauf nach (14c) Intensitätsverlauf nach (36a).

Das obere Vorzeichen gibt die langsamere, das untere die raschere Frequenz. Die innere Frequenz ω_1 und der Kopplungsfaktor τ werden als konstante Parameter betrachtet. Indem durch ω_1 dividiert, und

$$\frac{\Omega_{1,2}}{\omega_1} = O_{1,2} \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = y \qquad \frac{\tau}{\omega_1^2} = \tau'$$

gesetzt wird, bekommt man für O in Funktion der Abstimmung des äusseren Kreises ω_2:

$$\frac{\Omega_{1,2}}{\omega_1} = O_{1,2} = \sqrt{\frac{1+y^2+\tau'}{2} \mp \sqrt{\frac{(1+y^2+\tau')^2 - 4\,y^2}{2}}}. \quad (14\,\mathrm{b})$$

Und wenn die Summanden unter der zweiten Wurzel ausgerechnet und Glieder in τ'^2 nach der eben gemachten Abschätzung gestrichen werden, so bekommt man die für die Ausrechnung günstigere Form

$$O_{1,2} = \sqrt{\frac{1+y^2}{2} \mp \sqrt{\frac{1+y^4-2y^2+(1+y^2)\,2\,\tau'}{2}}}, \quad (14\,\mathrm{c})$$

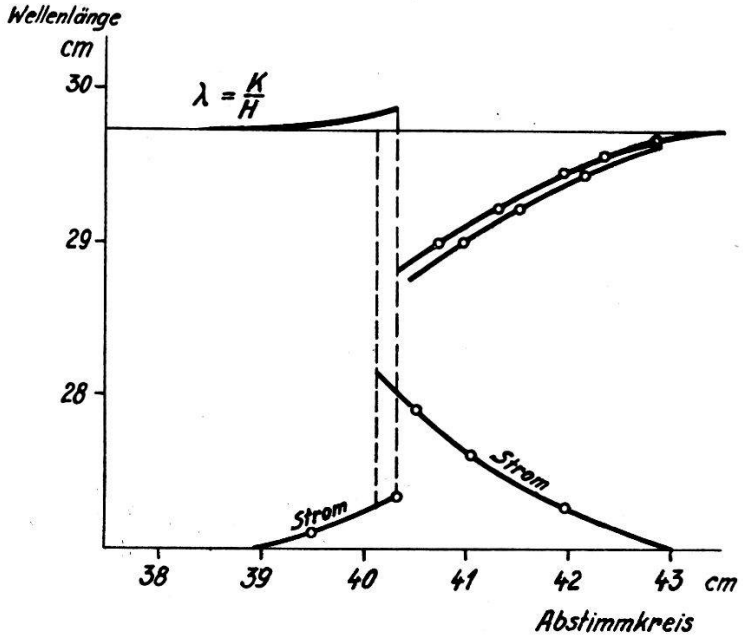

Fig. 4.
Koppelwellen- und Intensitätsverlauf nach Messungen von J. J. Müller[6]).

welche für Resonanz in den entsprechenden Ausdruck zu (16) übergeht

$$O_{1,2} = \sqrt{1 \mp \sqrt{\tau'}}. \quad (16\mathrm{a})$$

Man kann also aus Messung der Koppelfrequenzen im Resonanzfall den Kopplungsfaktor τ' und damit auch die Raumladung q bestimmen. Wir zeichnen zuerst den Koppelwellenverlauf für eine dreiprozentige Abweichung der Koppelwelle im Resonanzfall auf; dieser Wert entspricht ungefähr dem Experiment, er ist eher etwas zu gross. Hierfür ergibt sich

$$\tau\, p\, \omega^2 = \sqrt{\omega^2 \tau}$$

$$\tau' = \tau/\omega^2 = 4\,p^2 = 4\,(0{,}03)^2 = 0{,}0036 \qquad 2\tau' = 0{,}0072.$$

Mit diesem Wert liefert (14c) für die Nachbarschaft der Resonanz O_1 und O_2 (Fig. 3).

§ 4. Die Bestimmung der Spannungsamplitude für die freie ungedämpfte Schwingung im Resonanzfall.

Nach Gleichung (14) bekommen wir für ε vier Wurzeln, wovon je zwei konjugiert komplex sind; wir nennen sie ε_1, $-\varepsilon_1$, ε_2, $-\varepsilon_2$ bzw. $j\,\Omega_1$, $-j\,\Omega_1$, $j\,\Omega_2$, $-j\,\Omega_2$. Die allgemeinen Lösungen für x und u heissen:

$$\left.\begin{aligned} u &= \mathfrak{u}_1 e^{\varepsilon_1 t} + \mathfrak{u}_2 e^{-\varepsilon_1 t} + \mathfrak{u}_3 e^{\varepsilon_2 t} + \mathfrak{u}_4 e^{-\varepsilon_2 t} \\ x &= \mathfrak{X}_1 e^{\varepsilon_1 t} + \mathfrak{X}_2 e^{-\varepsilon_1 t} + \mathfrak{X}_3 e^{\varepsilon_2 t} + \mathfrak{X}_3 e^{-\varepsilon_2 t} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{X}$ sind aber durch die Gleichungen (12) miteinander verknüpft; aus (12b) bekommen wir ($\delta_1 = \delta_2 = 0$) unter Berücksichtigung des Wertes für γ und ω^2 nach (9)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{X}} = -\frac{q}{\frac{\beta_0}{C_0}\left(C + \frac{1}{L\varepsilon}\right)} \\ &\text{oder} \\ &\mathfrak{u} = -\mathfrak{M} q \qquad \mathfrak{X} = \mathfrak{M}\frac{\beta_0}{C_0}\left(C + \frac{1}{L\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Zur Bestimmung der vier Unbekannten gelten vier Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathfrak{X}_0 \\ \dot{x} &= 0 \\ u &= 0 \\ \dot{u} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0\,, \tag{19}$$

d. h. wir suchen Lösungen für den Fall, dass zur Zeit $t = 0$ das innere Pendel mit maximaler Amplitude in Bewegung gesetzt wird, während die übrigen Grössen Null sind. Rechnet man die Unbekannten nach (17), (18), (19) aus (am einfachsten mit der Determinantentheorie), so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \frac{+L}{2\left(\frac{1}{\varepsilon_1^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2}\right)\frac{\beta_0}{C_0}}\mathfrak{X}_0 \qquad & \mathfrak{M}_2 &= \frac{+L}{2\left(\frac{1}{\varepsilon_1^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2}\right)\frac{\beta_0}{C_0}}\mathfrak{X}_0 \\ \mathfrak{M}_3 &= \frac{-L}{2\left(\frac{1}{\varepsilon_1^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2}\right)\frac{\beta_0}{C_0}}\mathfrak{X}_0 \qquad & \mathfrak{M}_4 &= \frac{-L}{2\left(\frac{1}{\varepsilon_1^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2}\right)\frac{\beta_0}{C_0}}\mathfrak{X}_0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Mit den angenäherten Werten für ε aus (16) bekommt man mit Berücksichtigung von (18) und den Abkürzungen (9) aus (20):

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_3 = \mathfrak{X}_4 = \frac{\mathfrak{X}_0}{4}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2 &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{C_0\, d \quad q}{C\, \beta_0\, e/mLC}}\,\mathfrak{X}_0 = \frac{\omega}{4}\sqrt{\frac{C_0\, d \quad q}{C\, \beta_0\, e/m}}\,\mathfrak{X}_0 \\ \mathfrak{u}_3 = \mathfrak{u}_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad = -\frac{\omega}{4}\sqrt{\frac{C_0\, d \quad q}{C\, \beta_0\, e/m}}\,\mathfrak{X}_0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(hierbei ist für $q/m = e/m$ die spez. Elektronenladung gesetzt), so dass schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} u &= \mathfrak{u}\cos\Omega_1 t - \mathfrak{u}\cos\Omega_2 t = \mathfrak{u}\sin\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)t\cdot\sin\left(\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}\right)t \\ x &= \frac{\mathfrak{X}_0}{2}\cos\Omega_1 t + \frac{\mathfrak{X}_0}{2}\cos\Omega_2 t = \mathfrak{X}_0\cos\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)t\cdot\cos\left(\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}\right)t \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

herauskommt; durch die letzte Gleichung ist die Spannung mit der schwingenden Raumladung verknüpft. Für u und x existieren zwei Hauptschwingungen, die sich zu Schwebungen superponieren wie beim analogen Fall zweier mechanisch gekoppelter Pendel. Man sieht, dass die Phasenverschiebung, die im wesentlichen durch den ersten Faktor in (22) bestimmt wird, 90^0 ist, so dass pro Periode maximale Energieabgabe stattfindet.

§ 5. Berechnung der Koppeldämpfungen.

Es werde jetzt die Gleichung (13) unter Berücksichtigung der Dämpfungen δ_1, δ_2 gelöst. Wir machen für ε den Ansatz

$$\varepsilon = -\Delta + j\,\Omega \tag{23}$$

Unter der Annahme kleiner Dämpfungen, wobei also höhere Potenzen als die erste von Δ, δ vernachlässigt werden, wird damit aus (13)

$$\begin{aligned} &(j\,\Omega)^4 + (j\,\Omega)^2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau) + \omega_1^2\,\omega_2^2 \\ &- 4\,(j\,\Omega)^3\,\Delta + (j\,\Omega)^3\,(\delta_1 + \delta_2) + 2\,(j\,\Omega)\,(-\Delta)\,(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau) \\ &+ (j\,\Omega)\,(\delta_1\,\omega_2^2 + \delta_2\,\omega_1^2) = 0\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Die ersten drei Glieder sind wegen (13a) gleich Null, es bleibt

die untere Zeile von (24). Setzen wir $\delta' = \delta/2$, dividieren durch $2\,(j\,\Omega)$ und ordnen, so kommt

$$\Delta\,[2\,\Omega^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau)] = \Omega^2\,(\delta_1' + \delta_2') - (\delta_1\,\omega_2^2 + \delta_2\omega_1^2)$$

oder

$$\Delta = \frac{(\delta_1' + \delta_2')\,\Omega^2}{2\,\Omega^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau)} - \frac{\delta_1'\,\omega_2^2 + \delta_2'\,\omega_1^2}{4\,\Omega^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau)}$$

und wenn man weiter nach Koeffizienten von δ_1' und δ_2' ordnet und Zähler und Nenner mit ω_1^2 dividiert:

$$\Delta = \delta_1' \frac{O^2 - y^2}{2\,O^2 - (1 + y^2 + \tau')} + \delta_2' \frac{O^2 - 1}{2\,O^2 - (1 + y^2 + \tau')}\,. \tag{25}$$

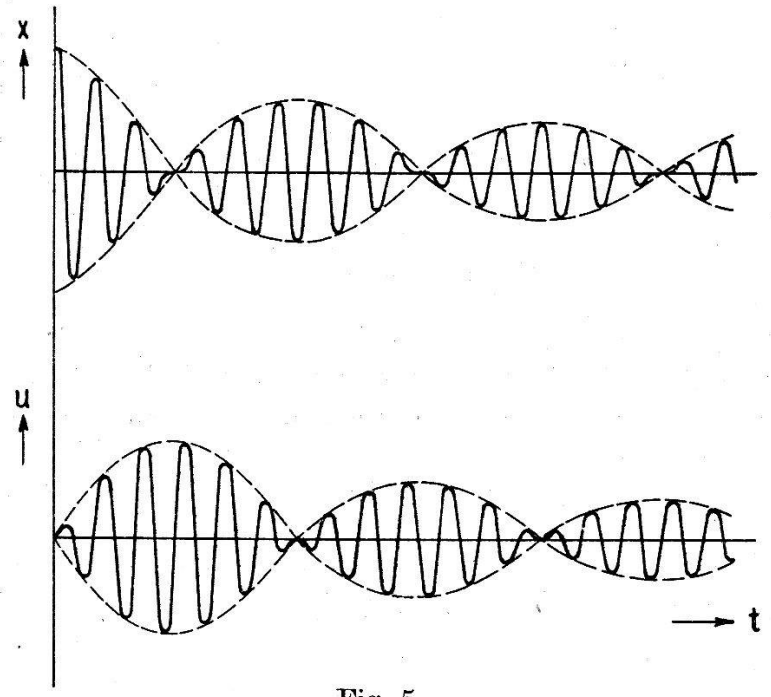

Fig. 5.

Setzt man für 0 den Wert (19) ein und geht man wieder auf δ zurück, so entsteht

$$\Delta = \frac{\delta_1}{4}\left[1 \mp \frac{1 + y^2 + \tau' - 2\,y^2}{\sqrt{(1 + y^2 + \tau')^2 - 4\,y^2}}\right] + \frac{\delta_2}{4}\left[1 \mp \frac{1 + y^2 + \tau' - 2}{\sqrt{(1 + y^2 + \tau')^2 - 4\,y^2}}\right]. \tag{26}$$

Dieser Ausdruck ist ganz ähnlich demjenigen für den Zweikreissender[4]), speziell für Resonanz $y = 1$ wird für sehr kleine Kopplungen

$$\Delta \simeq \frac{\delta_1}{4} + \frac{\delta_2}{4}\,. \tag{27}$$

Ist insbesondere die innere Dämpfung sehr klein gegen die äussere, so ist das ganze System trotzdem gedämpft, indem sich eben durch die Kopplung die Dämpfung auch auf das innere System überträgt und die beiden Pendel mit der Dämpfungskonstanten

$$\Delta = \frac{\delta_2}{4}$$

abklingen lässt. Dieser Wert stimmt mit demjenigen von M. WIEN[13]) für denselben Fall, aber auf genauere Art ebenfalls für die freie Schwingung berechneten Wert überein. Mit (27) und (23) können wir nun die Lösung (22) für den gedämpften Fall erweitern:

$$\left.\begin{aligned} u &= e^{-\frac{\delta_1+\delta_2}{4}t}\,\mathfrak{u}\sin\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)t\cdot\sin\left(\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}\right)t \\ x &= e^{-\frac{\delta_1+\delta_2}{4}t}\,\mathfrak{X}_0\cos\left(\frac{\Omega_1+\Omega_1}{2}\right)t\cdot\cos\left(\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}\right)t \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

was zu den gedämpften Schwebungen führt; Fig. 5.

§ 6. Erweiterung der Differentialgleichungen (10) auf den Fall der selbstgesteuerten Schwingung mit Berücksichtigung der Dämpfungen.

Im vorigen Paragraph wurde gezeigt, dass das massgebliche elektrische Moment $x \cdot q$ der Raumladung durch die Koppeldämpfung abnimmt. Es muss also durch eine Selbststeuerung im stationären Zustand aufrechterhalten werden, das heisst die Abnahme des Moments muss durch eine gleichwertige Zunahme ersetzt werden. Als solche betrachten wir die erste Aussortierung, wie sie im Paragraph 1 skizziert wurde. Durch diese wird dem inneren System periodisch neue elektrische Ladung mit maximaler Amplitude $\mathfrak{X}_0$ zugeführt, wodurch das elektrische Moment M in der Zeit dt um dM zunimmt. Da die Aussortierung, bzw. die Zunahme des Momentes durch die Wechselspannung selbst bestimmt ist, machen wir den Ansatz:

$$dM = \mathfrak{X}_0\,dq = \mathfrak{s}\,u\,dt \text{ bzw. } = \mathfrak{s}\,\frac{u}{|\mathfrak{u}|}\,dt \tag{29}$$

das heisst, die Zunahme des Momentes ist sicher proportional zur Spannung u, und zwar entweder proportional zu Phase und Amplitude oder nur zur Phase. Vorläufig wollen wir beide Möglichkeiten nebeneinander betrachten; hierbei ist Proportionalität mit der Amplitude genügend allgemein, da eine beliebige Amplituden-

abhängigkeit für kleine Grössen immer linearisiert werden kann; prinzipiell wichtiger sind vielmehr die beiden angeführten Möglichkeiten. Der Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{s}$ hat im amplitudenabhängigen Fall die Bedeutung einer Steilheit. Da über die Phase zwischen Momentzuwachs dM und Spannung u noch nichts vorausgesetzt sei, wird $\mathfrak{s}$ allgemein komplex angesetzt.

$$\mathfrak{s} = js + t. \tag{30}$$

Über diese Phase kann, wie bereits im ersten Paragraphen betont, nur auf Grund der Betrachtung der Elektronenbewegung etwas gesagt werden und wir verschieben die Aussage deshalb auf einen Nachtrag.

Die Abnahme des Momentes ist in unserer Behandlung durch die Abnahme von x bei konstantem q bestimmt. Um die Behandlung auf gleicher Basis weiterzuführen, soll jetzt die Zunahme ebenfalls durch x bestimmt sein, so dass also in (29) die Rollen von x und q als Variable und Parameter vertauscht werden müssen; für q wird der Wert im stationären Zustand gesetzt und ein entsprechendes dx gesucht; also

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot q = \mathfrak{s}\, u \text{ bzw.} = \mathfrak{s}\, \frac{u}{|\mathfrak{u}|}. \tag{31}$$

Um damit in die Bewegungsgleichung (10a) eingehen zu können, muss durch nochmalige Differentiation die Beschleunigung von x bestimmt werden:

$$\ddot{x} = \frac{\mathfrak{s}}{q}\, \dot{u} = \mathfrak{s}^* \cdot \dot{u} \text{ bzw.} = \mathfrak{s}^* \frac{\dot{u}}{|\mathfrak{u}|}. \tag{32}$$

$$\mathfrak{s}^* = \frac{\mathfrak{s}}{q}.$$

Diese Beschleunigung ist in der Bewegungsgleichung für x (10a) als positive Zusatzkraft einzuführen. Statt der Gleichungen (10) bekommen wir jetzt die für Rückkopplung erweiterten:

$$\ddot{x} + \omega_1^2\, x + \delta_1\, \dot{x} = \alpha\, u + \mathfrak{s}^*\, \dot{u} \text{ bzw.} = \alpha\, u + \mathfrak{s}^* \frac{\dot{u}}{|\mathfrak{u}|} \tag{33a}$$

$$\ddot{u} + \omega_2^2\, u + \delta_2\, \dot{u} = -\gamma\, \ddot{x}. \tag{33b}$$

Die zweite bleibt unverändert. Diese Gleichungen ermöglichen nun infolge des Rückkopplungsgliedes zum Unterschied von (10) stationäre Lösungen. Sie sind vom Typus für sekundär angefachte Systeme, denn die Koordinate x wird durch die Koordinate u gesteuert. Würde die Rückkopplung vom Typus primär ange-

fachter Systeme sein, so dass statt $\mathfrak{s}^* \dot{u}$, $\mathfrak{s}^* \dot{x}$ stehen würde, so könnte dieses Glied zu $\delta_1 \dot{x}$ geschlagen werden, $(\delta_1 - \mathfrak{s}^*)\ \dot{x} = \delta_1'\ \dot{x}$ wo $\mathfrak{s}^*$ dann als negativer Widerstand gedeutet würde; und die Diskussion für die Anfachbedingung könnte ebenso einfach mit den Koppeldämpfungen (26) erfolgen wie für den primär angefachten Zweikreissender bei OLLENDORFF[4]). Für den vorliegenden Fall des sekundär angefachten Systems könnte man auch die Koppeldämpfungen Δ ausrechnen und die Anfachbedingung $\Delta \leqq 0$ aufstellen. Statt dessen suchen wir gleich stationäre Lösungen, indem wir in (23) $\Delta = 0$ setzen, was aber im Prinzip auf dasselbe hinauskommt. Es werden also die Ansätze

$$x = \mathfrak{X}\, e^{j\Omega t} \qquad u = \mathfrak{u}\, e^{j\Omega t} \tag{34}$$

gemacht und in (33) eingesetzt:

$$\mathfrak{X}\,[(j\,\Omega)^2 + \omega_1^2 + (j\,\Omega)\ \delta_1] = \mathfrak{u}\ \alpha + (j\,\Omega)\,\mathfrak{s}^*\,\mathfrak{u} \text{ bzw. } = \mathfrak{u}\ \alpha + (j\,\Omega)\mathfrak{s}^* \tag{35a}$$

$$\mathfrak{u}\,[(j\,\Omega)^2 + \omega_2^2 + (j\,\Omega)\ \delta_2] = -\,(j\,\Omega)^2\,\gamma \cdot \mathfrak{X}\,. \tag{35b}$$

Wir bilden aus (35b) das Verhältnis der Amplituden $\mathfrak{u}/\mathfrak{X}$

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{X}} = -\,\gamma\,\frac{(j\,\Omega)^2}{(j\,\Omega)^2 + \omega_2^2 + (j\,\Omega)\ \delta_2} \tag{36}$$

und setzen es in (35a) ein; dieses Verhältnis gilt auf jeden Fall. Es gibt:

$$(j\,\Omega)^2 + \omega_1^2 + (j\,\Omega)\ \delta_1 = -\,\frac{(j\,\Omega)^2}{(j\,\Omega)^2 + \omega_2^2 + (j\,\Omega)\ \delta_2}\,(\alpha\gamma + \gamma\,(j\,\Omega)\,\mathfrak{s}^*)\,. \tag{37}$$

Dies ausmultipliziert und für $\mathfrak{s}^* = j s^* + t^*$ gesetzt, gibt weiter:

$$(j\,\Omega)^4 + (j\,\Omega)^2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau + \delta_1\,\delta_2) + \omega_1^2\,\omega_2^2$$
$$+ (j\,\Omega)^3\,(\delta_2 + \delta_1) + (j\,\Omega)\,(\delta_2\,\omega_1^2 + \delta_1\,\omega_2^2) = -\,(j\,\Omega)^3\,\gamma\,j\,s^* - (j\Omega)^3\,\gamma\,t^*.$$

Und nach Trennung der reellen und imaginären Werte:

$$\Omega^4 - \Omega^2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tau + \delta_1\,\delta_2) + \omega_1^2\,\omega_2^2 = -\,\Omega^3\,\gamma\,s^* \tag{38}$$

$$-\,\Omega^2\,(\delta_2 + \delta_1) + (\delta_2\,\omega_1^2 + \delta_1\,\omega_2^2) = \Omega^2\,\gamma\,t^*\,. \tag{39}$$

In (38) erkennt man bis auf Grössen δ_1, δ_2, Ω^3, $\gamma \cdot s^*$ die Frequenz der freien ungedämpften Schwingung (Gl. 14). Die Korrekturgrössen können in 1. Näherung als klein betrachtet werden, denn die Selbststeuerung ändert die Frequenz nicht wesentlich. Damit sind die Frequenzen vor den Amplituden bestimmt und (35a) und (35b) sind als Gleichungssystem für $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{u}$ mit konstanten Koeffizienten aufzufassen. Es enthält sowohl

die Amplituden-abhängige sowie die Amplituden-unabhängige Selbststeuerung. Im zweiten Falle ist statt $\mathfrak{s}^*$ $\mathfrak{s}^*/\mathfrak{u}$ zu setzen. Für den ersten Fall bilden .... (Gl. 35a) und (35b) ein homogenes Gleichungssystem für $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{u}$, so dass nur das Verhältnis $\mathfrak{u}/\mathfrak{X}$ bestimmt ist. Um die Amplituden einzeln zu bestimmen, muss noch eine empirische Beziehung zwischen zwei Grössen bekannt sein. Als solche werde diejenige zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{X}$ (resp. q) betrachtet; sie entspricht dem Schwingliniendiagramm des gewöhnlichen rückgekoppelten Senders. Im zweiten Fall sind die Amplituden einzeln bestimmt (inhomogenes Gleichungssystem). Sie stellen sich nach dem Emissionsstrom, der Verstimmung y und der Dämpfung δ ein. Reisserscheinungen können nicht auftreten. Eine einfache Überlegung an Hand der Fig. 1 zeigt, dass amplitudenabhängige Aussortierung dort zu erwarten ist, wo die Elektronen schon beim ersten Umlauf nahe an die Anode kommen (kritische Einstellung), also bei der Bremsfeldröhre und beim Magnetron I. Art; dagegen ist amplitudenunabhängige Aussortierung bei den Schwingungen II. Art zu erwarten, weil dort das Magnetfeld grösser ist als der kritische Wert und die Elektronen auf ihrer ersten Cykloidenbahn noch weit von der Anode entfernt sind. Damit in Übereinstimmung treten beim ersten Schwingungstyp Reisserscheinungen auf, beim zweiten dagegen nicht.

Noch einige Bemerkungen über die physikalische Bedeutung der Steilheit $\mathfrak{s}$. Im Idealfall ist diese durch die Maxwellverteilung der aus der Kathode austretenden Elektronen bestimmt. Nicht alle Elektronen haben beim Austritt dieselbe Geschwindigkeit und der Geschwindigkeitszuwachs durch die überlagerte Wechselspannung ist daher für jedes Elektron verschieden. Bei amplitudenabhängiger Aussortierung gelangen nur die schnellsten Elektronen nach einer Halbperiode auf die Anode und werden dort aussortiert. Im Realfall ist jedoch die Steilheit noch viel flacher, da der Spannungsabfall längs dem Heizfaden, sowie dessen Zentrierung mitbestimmend ist.

§ 7. Berechnung des Intensitätsverlaufes, der Koppeldämpfungen und Anfachungsgeraden.

Die Berechnung des Intensitätsverlaufes geschieht mittels (36), wobei q, das heisst γ über einen kleinen Verstimmungsbereich y als konstant betrachtet wird; dies ist nicht ohne weiteres selbstverständlich, vergleiche den Verlauf der Primär- und Sekundäramplituden beim Zweikreissender nach Ollendorff. Wir vernachlässigen zuerst die Dämpfung δ_2 in (36), dividieren Zähler

und Nenner durch $\omega_1{}^2$ und setzen für O die angenäherten Werte der freien Schwingung (Gleichung 19a) für das frühere Beispiel $p = 0{,}03$ ein; dieses Vorgehen wird später noch legitimiert. In willkürlichem Masstab ($\gamma\mathfrak{X} = 10$) aufgetragen, bekommt man für das Quadrat der Spannungsamplitude

$$(\mathfrak{u}_{1,2})^2/_{100} \cong \frac{O_{1,2}^2}{-O_{1,2}^2 + y^2} \tag{36a}$$

welche in Fig. 3 eingezeichnet sind. Diese Kurven, sowohl wie die Frequenzkurven O_1 und O_2 geben jedenfalls den experimentellen Verlauf qualitativ gut wieder, man vergleiche die Kurven für ein Magnetron I. Art Fig. 4, welche hier mit Erlaubnis von Herrn J. J. Müller, Zürich, wiedergegeben sind. Die grösste Intensität

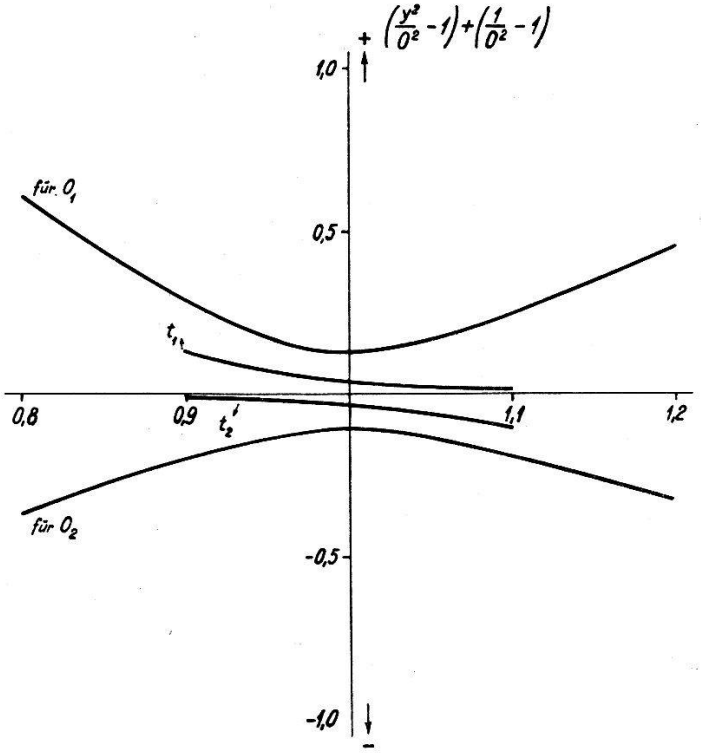

Fig. 6.

befindet sich (wie dies bei allen Zweikreissystemen oberhalb der kritischen Kopplung der Fall ist) ausserhalb, aber in der Nähe der Resonanzstelle $y = 1$. Doch auch über die Reisserscheinungen lässt sich etwas aussagen. Hierfür ist Beziehung (39) zuständig, die hier umgeschrieben werde in

$$\gamma\, t^* = \delta_1 \left(\frac{y^2}{O_{1,2}^2} - 1\right) + \delta_2 \left(\frac{1}{O_{1,2}^2} - 1\right). \tag{40}$$

Die Punkte, wo Gleichung (40) gerade erfüllt ist, bedeuten stationären Zustand. Die Punkte, für welche die linke Seite grösser

als die rechte Seite ist, bedeuten Anschwingen bis eine Nichtlinearität die Amplitude begrenzt; alle übrigen Punkte bedeuten Abreissen der Schwingung. In den Kurven der Fig. 6 ist die rechte Seite der (Gl. 40) für das erwähnte Beispiel $\gamma = 0{,}03$, aber der willkürlichen Setzung $\delta_1 = \delta_2 = 1$ aufgetragen, ferner die linke Seite nach Gleichung (77) des Nachtrages mit $\mathfrak{s}/q\ \pi = 1$.

Die obere Seite der Figur gilt für die langsamere Frequenz O_1, die untere für die raschere O_2. Die Verhältnisse sind ganz ähnliche wie beim sekundärangefachten Zweikreissender (Ollendorff); im besonderen liegt der Anfachungswert für die kürzere Welle etwas niedriger als für die längere (Abstand der Geraden von den Kurven), so dass diese also leichter angefacht wird, was mit dem Experiment im Einklang stehen dürfte. Die Geraden sind im Gegensatz zum Zweikreissender etwas geneigt, wie weit der Gültigkeitsbereich geht, wird später noch diskutiert. Aus dieser Figur, die weitgehend symmetrisch ist, ist nicht ersichtlich, warum das Abreissen, wie das Experiment fast allgemein bei diesem Schwingungstyp zeigt, nach kürzeren Wellen verschoben ist, vgl. Fig. 4. Es scheint, dass dieser Effekt nur durch Nichtlinearitäten in den Bewegungsgleichungen zu erfassen ist[1]).

§ 8. Diskussion einiger Spezialfälle für die Spannungsamplitude.

Fall 1.

$S^* = 0$, $t^* \neq 0$ in (39), so dass die Frequenz durch (38), bzw. angenähert durch (16) festgelegt ist; damit bekommt man aus (36)

$$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{X}} = \gamma \frac{\omega^2 \pm \omega \sqrt{\tau}}{\mp \omega \sqrt{\tau} + j\,\omega \sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{\tau}}{\omega} \cdot \delta_2}}. \tag{41}$$

Erweitert man Zähler und Nenner mit

$$\left(\mp \omega \sqrt{\tau} - j\,\omega \sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{\tau}}{\omega} \cdot \delta_2}\right)$$

so dass der Nenner reell wird, so bekommt man unter Vernachlässigung kleiner Grössen und Kürzung mit ω^2

$$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{X}} = \gamma \frac{\mp [\omega \sqrt{\tau} \pm \tau] - j \frac{\delta_2}{\sqrt{\tau}} \left[\omega \sqrt{\tau} \pm \frac{\sqrt{\tau}}{2\,\omega}\right]}{\tau + \delta_2^2}$$

$$\simeq \gamma \frac{(\omega \sqrt{\tau}) \left(\mp 1 - j \frac{\delta_2}{\sqrt{\tau}}\right)}{\tau + \delta_2^2}. \tag{42}$$

Ist die Kopplung τ grösser als die Dämpfung, so wird die Amplitude von dieser unabhängig und mit (9) bekommt man für die Spannungsamplitude

$$\mathfrak{u} = \mp \omega \sqrt{\frac{q\, C_0\, d}{\beta_0\, C\, e/m}} \cdot \mathfrak{X} = \mp \omega \sqrt{\frac{q\, C_0\, d}{\beta_0\, C\, e/m}} \cdot \frac{\mathfrak{X}_0}{2}. \tag{43}$$

Das obere Vorzeichen gilt für die raschere Schwingung, die sich also in Gegenphase zur schwingenden Raumladung q befindet, das untere Vorzeichen für die langsamere (mitphasige) Schwingung. Das Resultat stimmt hinsichtlich Phase und Amplitude mit der freien Schwingung, Gleichung (21) überein; in (43) ist auch noch ein Faktor $\frac{1}{2}$ zu setzen, weil im stationären Zustand die Amplituden der schwingenden „Platten" alle Werte von 0 bis $\mathfrak{X}_0$ annehmen, der Schwerpunkt also die Amplitude $\mathfrak{X}_0/2$ hat.

Fall 2.

Ist dagegen die Dämpfung sehr viel grösser als die Kopplung $\delta_2 \gg \tau$, so resultiert für $\mathfrak{u}$ aus (42)

$$\mathfrak{u} = -j \frac{q\, C_0\, \omega}{\beta_0\, C\, \delta_2} \frac{\mathfrak{X}_0}{2}. \tag{44}$$

Die Spannungsamplitude ist genau um -90^0 gegen die Schwingungsamplitude der Raumladung verschoben, so dass pro Periode maximale Energieabgabe erfolgt.

Fall 3.

Für die Zwischenwerte von δ_2, τ gilt (42) und tg φ der Phasenverschiebung der beiden Schwingungen (die Abweichung von 0, bzw. 180^0 der ungedämpften Schwingung) ist bestimmt aus (42) zu

$$\operatorname{tg} \Phi = \pm \frac{\delta_2}{\sqrt{\tau}}. \tag{45}$$

Fall 4.

$t^* = 0$; aus (39) wird damit für Resonanz

$$\Omega^2 (\delta_1 + \delta_2) = \omega^2 (\delta_1 + \delta_2)$$

oder

$$\Omega = \omega.$$

Auch diese Lösung ist möglich, weil $\mathfrak{s}^*$ komplex ist und in diesem Fall gleich $j\,s^*$ wird. Bei kleiner Dämpfung δ verlangt (37), dass für $\Omega = \omega$ die Klammer

$$(\alpha\,\gamma + \gamma\,(j\,\Omega)\,\mathfrak{s}^*) = (\tau - \gamma\,\Omega\,s^*)\,\mathfrak{L}_0 \tag{46}$$

wird, was mit Berücksichtigung der Werte für τ, γ und s^* heisst, dass q einem entsprechenden Wert zustreben muss. Rechnet man aus (36) für $\Omega = \omega$ die Amplitude $\mathfrak{u}$ aus, so bekommt man für nicht zu grosse Kupplungen ($\omega \mathrel{\underline{\approx}} \Omega$)

$$\mathfrak{u} = \gamma \frac{\omega}{j\,\delta_2} = -j\,\frac{q\,C_0\,\omega}{\beta_0\,C\,\delta_2} \cdot \frac{\mathfrak{X}_0}{2} \tag{47}$$

also denselben Wert wie im Fall 2. Dieser Fall ist besonders interessant zum Verständnis des Unterschiedes zwischen Bremsfeldschwingungen sowie Magnetronschwingungen I. Art einerseits und Magnetronschwingungen II. Art (Posthumus) andererseits. In den beiden ersten Fällen treten die verschiedenen Koppelwellen in ganz gleicher Weise auf (M. Dick[1]), J. J. Müller[6]), O. Groos[14]) und andere), während bei den Posthumusschwingungen trotz der viel grösseren Intensität keine solchen nachzuweisen sind[15]). Dies lässt sich folgendermassen verstehen. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen für ein einzelnes Elektron zeigen nach den früher genannten Autoren im Fall der Bremsröhre und des Magnetrons I. Art eine Superposition von zwei Schwingungen verschiedener Frequenz ω_1 und Ω, wobei $\Omega \neq \omega_1$ ist. Jedes Elektron schwingt mit der Frequenz, die ihm die quasielastische Bindung vorschreibt und dazu überlagert mit derjenigen, welche durch die Wechselspannung der Röhre bestimmt wird, die ihrerseits durch das Zusammenwirken aller Elektronen entsteht. Im Fall der Posthumusschwingungen (II. Art) ergibt sich als Lösung der Bewegungsgleichungen, wie bei Fischer und Lüdi[9]) *) gezeigt, nur eine Fre-

*) Loc. cit. Von Herrn Dr. F. Ollendorff, Haifa, sind wir freundlich aufmerksam gemacht worden, dass die Transformation $\xi = \xi + wt$ unterhalb Gleichung (10) in der genannten Arbeit nicht richtig ist; sie gilt nur im Spezialfall, wo sich die Elektronen relativ zum Drehfeld im mitlaufenden Koordinatensystem gerade an den Stellen befinden, wo das Drehfeld nur eine radiale Komponente hat, wo also $\cos \frac{2\pi}{\lambda}\xi_0 = 0$ ist. Eine radiale elektrische Komponente bedeutet aber mit dem Magnetfeld eine Bewegung in der tangentialen Richtung, eine Zusatzgeschwindigkeit, wodurch die früher angenommene Synchronität gestört wird. Hierdurch ändert das Elektron seine Lage relativ zum Drehfeld, solange, bis es sich an der Stelle befindet, wo das Drehfeld im mitlaufenden Koordinatensystem nur eine Tangentialkomponente und also mit dem Magnetfeld eine Bewegung in der Radialrichtung erzeugt. Dort ist aber $\cos \frac{2\pi}{\lambda}\xi_0 = 1$ und obige Transformation ist

quenz, da die erzeugte Röhrenspannung durch das Radialfeld eine synchronisierende Wirkung auf die Leitbahngeschwindigkeit der Elektronen ausübt, wodurch die Frequenz des inneren Systems weitgehend gleich der Frequenz des äusseren Systems wird, so dass also Fall 4 vorliegt. Dieser Fall hat eine grosse Ähnlichkeit mit dem Dampfmaschinenmodell, das heisst mit einer erzwungenen Schwingung, wo sich die Phase auf maximale Energieabgabe einstellt und nur eine Frequenz, also keine Koppeleffekte, auftreten. Dass man es mit der Form einer erzwungenen Schwingung zu tun hat, erkennt man daran, dass die Eigenlösung der Bewegungsgleichung (10a) ohne Berücksichtigung der Kopplung (Glied in u) in (10b) eingeführt zur Lösung (47) führt.

Hier können wir auch sehen, dass der Verlauf der Anfachungsgeraden in Fig. 6 in der Nähe der Nullinie nicht mehr unbedingte Gültigkeit hat; denn das sind die Werte für t^*, wo O sich dem Wert 1 nähert, das heisst wo der Fall 4 vorliegt und Gleichung (46) für den stationären Zustand massgebend wird. Die Intensität ist

nicht richtig, sie muss nach Ollendorff durch $\xi = \varphi + \text{konst}$ mit $\text{konst} = -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}\xi_0$ ersetzt werden. Die Schlussfolgerungen über die Synchronisierung werden dadurch nicht geändert; man erkennt gerade hier, dass durch die Radialkomponente des Drehfeldes eine Häufung der Elektronen an den Stellen erfolgt, wo nur eine Tangentialkomponente, d.h. $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}\xi_0 = 0$ ist. Wenn die Leitbahngeschwindigkeit v (welche durch das elektrische Gleichfeld und Magnetfeld bestimmt ist) nicht mit der Drehfeldgeschwindigkeit (festgelegt durch den äusseren Schwingkreis) übereinstimmt, so werden sich die Elektronen dort anhäufen, wo das Gleichfeld plus die

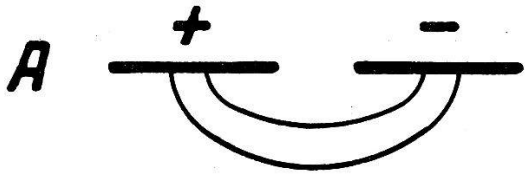

Fig. 7a.

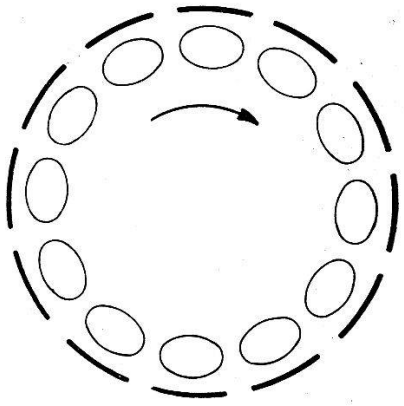

Fig. 7b.

Radialkomponente des Drehfeldes mit dem Magnetfeld gerade die Leitbahngeschwindigkeit = Drehfeldgeschwindigkeit erzeugt. Dies ist hier noch so ausführlich dargelegt, weil man durch diese Elektronenhäufung erkennt, wie eine Perlenschnur von Verdichtungen und Verdünnungen entsteht, das Polrad, welches sich an Stelle der schwingenden Platte in Fig. 2 dieses Aufsatzes im Kreise dreht. Der Effekt, das Entstehen einer induzierten Spannung durch die bewegte Raumladung ist jedoch derselbe wie dort.

an diesen Stellen trotzdem sehr klein wegen der grossen Verstimmung von innerem und äusserem System (Verlauf der Intensitätskurven in Fig. 3). Für die Posthumusschwingungen, wo weitgehende Synchronisierung vorhanden ist, hat der Resonanz-Nenner in (36) über grosse Bereiche den Wert $(j\,\Omega)\,\delta_2$, so dass die Intensität über viel grössere Verstimmungsbereiche noch relativ grosse Werte hat, was auch mit dem Experiment übereinstimmen dürfte; die Abstimmung ist dort lange nicht so scharf wie bei den Schwingungen I. Art. Durch die Synchronisierung wird auch die Bildung einer grösseren Raumladung ermöglicht, wodurch die höheren Spannungen bei diesem Schwingungstyp verständlich sind.

Schliesslich werde noch ein spez. Fall 5 besprochen. Der äussere Schwingkreis in Fig. 2 sei durch einen rein ohm'schen Widerstand R ersetzt; das bedeutet $L = \infty$ $C_1 = 0$ damit wird: $\omega_2^2 = 0$, $\gamma = \beta$, $\delta_2 = \frac{1}{R\,C_0}$ und mit Gleichung (14a) $\Omega = \omega_1$. Aus Gleichung (36) erhält man mit diesen Werten:

$$\mathfrak{u} = -\beta\,\frac{1 + j\,\frac{\delta_2}{\omega_1}}{1 + \left(\frac{\delta_2}{\omega_1}\right)^2} \cdot \mathfrak{X}$$

für kleine δ_2 und mit dem Wert von β

$$\mathfrak{u} = -\frac{q}{\beta_0}\left(1 + j\,\frac{\delta_2}{\omega_1}\right)\mathfrak{X}$$

Spannung und Raumladung befinden sich nahezu in Gegenphase. Für grosse δ_2 tritt eine Phasenverschiebung von $-\pi/2$ auf.

$$\mathfrak{u} = -j\,\frac{q}{\beta_0}\,\frac{\omega_1}{\delta_2}\,\mathfrak{X}.$$

§ 9. Genauere Bestimmung der stationären Frequenzen und Amplituden unter Berücksichtigung der Glieder s^* und t^*.

Wir gehen aus von den Gleichungen (38 und (39); beide werden durch ω_1^4 dividiert. Mit den Abkürzungen

$$D_1 = \frac{\delta_1}{\omega_1^2} \qquad D_2 = \frac{\delta_2}{\omega_2^2} \qquad s^{*\prime} = \frac{s^*}{\omega_1^2} \qquad t^{*\prime} = \frac{t^*}{\omega_1^2} \tag{48}$$

bekommt man:

$$O^4 - O^2\,(1 + y^2 + \tau' + D_1\,D_2) + y^2 = -O^2\,\Omega\,\gamma\,s^{*\prime} \tag{49}$$

$$O^2\,(D_1 + D_2) - (D_2 - D_1\,y^2) = -O^2\,\gamma\,t^{*\prime} \tag{50}$$

Die zweite werde nach D_1 aufgelöst

$$D_1 = D_2 \frac{O^2 - 1}{y^2 - 1} + \frac{O^2 \gamma t^*)}{y^2 - O^2} \tag{51}$$

und in (49) eingesetzt; man erhält:

$$O^6 - O^4 (2 y^2 + 1 + \tau' + \Omega \gamma s^{*\prime} - D_2^2 - D_2 \gamma t^{*\prime}) + O^2 (2 y^2 + y^4 + y^2 (\tau' + \Omega \gamma s^{*\prime}) - D_2^2) - y^4 = O . \tag{52}$$

Nun ist erstens $s^{*\prime} \gg t^{*\prime}$, siehe Nachtrag, und Ω ist sicher $\gg D_2$ für die praktischen Fälle, so dass das letzte Glied in der ersten Klammer gestrichen werden kann. Für Resonanz $y = 1$ wird damit aus (52)

$$O^6 - O^4 (1 + 2 + \tau' + \Omega \gamma s^{*\prime} - D_2^2) + O^2 (2 + 1 + \tau' + \Omega \gamma s^* - D_2^2) - 1 = 0 . \tag{53}$$

Aus dieser Gleichung kann man $O^2 - 1$ ausklammern:

$$O^4 (O^2 - 1) - O^2 (\tau' + \Omega \gamma s^{*\prime} - D_2^2) (O^2 - 1) - O_2^2 (O^2 - 1) + (O^2 - 1) = 0 \tag{54}$$

$$O = 1 \tag{55}$$

ist also eine Lösung. Damit wird der Frequenz- und der Intensitätsverlauf in Fig. 3 etwas korrigiert. Dieser Frequenzwert liefert mittels (36) bei Berücksichtigung der Dämpfung δ_2 einen weiteren Intensitätswert, der über den beiden andern liegt. Wir haben also für den Resonanzpunkt drei Frequenz- und drei Intensitätswerte. Weil die Form der Gleichung (53) wegen der Kleinheit von $t^{*\prime}$ ganz ähnlich derjenigen für den primär angefachten Zweikreissender ist, so ist anzunehmen, dass auch hier der korrigierte Frequenz- und Intensitätsverlauf mit jenem weitgehende Ähnlichkeit zeigt (vgl. Ollendorf). Er ist in Fig. 3 punktiert angedeutet.

Dann wird Gleichung (54) durch $(O^2 - 1)$ dividiert; es bleibt:

$$O^4 - 2 O^2 \left(\frac{\tau' + \Omega \gamma s^{*\prime} - D_2^2}{2} + 1 \right) + 1 = 0 . \tag{56}$$

Wir nehmen an, dass die korrigierte Lösung in der Nähe der unkorrigierten ist, was ja durch Vergleich des unkorrigierten theoretischen Kurvenverlaufs Fig. 3 mit dem experimentellen weitgehend verifiziert wird. In der Klammer (56) kann Ω als unkorrigierter Wert eingesetzt werden, so dass für die erste Approximation von O eine biquadratische Gleichung vorliegt. Es wird

$$\begin{aligned} O_{1,2}^2 &= 1 + \tfrac{1}{2} (\tau' + \Omega \gamma s^{*\prime} - D_2^2) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} (\tau' + \Omega \gamma s^{*\prime} - D_2^2 + 1)^2 - 1} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} (\tau' + \Omega \gamma s^{*\prime} - D_2^2) \\ &\pm \sqrt{\tfrac{1}{4} (\tau' + \Omega \gamma s^{*\prime} - D_2^2)^2 + \tau' + \Omega \gamma s^{*\prime} - D_2^2} \end{aligned} \tag{57}$$

$s^{*\prime}\,\tau'\,D_2^2$ sind alles kleine Grössen; rechnet man das Quadrat unter der Wurzel aus und vernachlässigt Produkte dieser Grössen untereinander, so bleibt mit derselben Näherung wie früher:

$$O_{1,2}^2 \cong 1 \pm \sqrt{\tau' + \Omega\,\gamma\,s^{*\prime} - D_2^2} \tag{58}$$

Gleichung (58) lässt drei Fälle unterscheiden:

1. Starke Kopplung $\tau' + \Omega\,\gamma\,s^{*\prime} \gg D_2^2$

$$O_{1,2}^2 = 1 \pm \sqrt{\tau'''} \qquad \tau''' = \tau' + \Omega\,\gamma\,s^{*\prime} = \frac{\tau''}{\omega_1^2} \tag{59}$$

ist ausserdem $\tau' \gg \Omega\,\gamma\,s^{*\prime}$ so hat man die beiden Koppelfrequenzen der ungedämpften freien Schwingung, Gleichung (16a).

2. $\tau' + \Omega\,\gamma\,s^{*\prime} = D_2^2$. Hierfür wird $O_{1,2} = 1$. Man hat nur noch eine Koppelfrequenz, dies ist die kritische Kopplung, die ebenfalls beim Zweikreissender bekannt ist.

3. Lose Kopplung $\tau' + \Omega\,\gamma\,s^{*\prime} \ll D_2^2$. Hier liefert die Annahme $O \neq 1$ sicher keine reelle Lösung und Gleichung (56) verliert dabei ihre Bedeutung. Wir sehen also, dass die Verhältnisse analog wie beim Zweikreissender sind und dass bei Vergrösserung der Dämpfung über den kritischen Wert die beiden Koppelfrequenzen in eine einzige übergehen. Der Vergleich mit dem Experiment sagt uns deshalb, dass der Fall 1 vorliegt. Da mit diesem Kriterium die Spannung in guter Näherung von der Dämpfung unabhängig wird, vgl. Fall 1 von § 8, so kann diese ohne Kenntnis der Dämpfung berechnet werden. Berechnet man mit (59) die Spannung $\mathfrak{u}$ aus (36) für Resonanz und Vernachlässigung der Dämpfung, so bekommt man

$$\mathfrak{u} = \mp\,\gamma\,\frac{\omega}{\sqrt{\tau''}} \cdot \frac{\mathfrak{X}_0}{2} \tag{60}$$

welcher Wert für $\Omega\,\gamma\,s^{*\prime} = 0$ in denjenigen der freien ungedämpften Schwingung, Gleichung (21) übergeht. Aus Messung der prozentualen Abweichung p der Koppelfrequenz von der Resonanzfrequenz lässt sich also τ'', daraus q und weiter γ berechnen. Es gilt wie in Gleichung (15)

$$\tau''' = 4\,p^2 = \frac{\alpha\,\gamma + \Omega\,\gamma\,s^*}{\omega_1^2} \tag{61}$$

oder, wenn die Werte für α, γ aus (9) und für $s^* = s/q$ eingesetzt werden:

$$4\,p^2\,\omega_1^2 = \frac{q}{m}\,\frac{q\;C_0}{\beta_0\,d\;C} + \frac{\Omega\,C_0\,s}{\beta_0\,C}$$

und, wenn weiter für $q/m = e/m$ die spez. Elektronenladung gesetzt wird:

$$q = \frac{4\,p^2\,w_1^2 - \Omega \cdot C_0/\beta_0\,C \cdot s}{e/m\;\;1/\beta_0 d\;\;C_0/C}. \tag{62}$$

Wir sehen: aus dem gemessenen Kopplungsfaktor τ'' bekommen wir für q und damit für $\mathfrak{u}$, Gleichung (60), eine obere Grenze, wenn der Wert $\Omega\gamma\,s^*$ vernachlässigt wird.

Bei Vernachlässigung dieses Wertes bekommen wir aus (60) (61) und (9)

$$\mathfrak{u} = \frac{\omega^2\,2\,p\,d}{e/m}\,\frac{\mathfrak{X}_0}{2} = \frac{\omega^2\,p\,d^2}{2\,e/m} \tag{63}$$

da ja $d = 2\,\mathfrak{X}_0$ ist. Dies ist also ein sehr einfacher Ausdruck, der sich gut kontrollieren lässt; es geschehe am Ende dieses Paragraphen

Wir holen noch eine Betrachtung über den Koppelwellenverlauf bei extrem starker Verstimmung nach. Dazu dient Gleichung (52)

für $y \to \infty$ wird daraus: $O^2 = 1 \quad O = 1$ (64)

für $y \to 0$ reduziert sich diese Gleichung auf

$$O^6 + O^4\,(1 + \tau' + \Omega\,\gamma\,s^{*\prime} - D_2^2) - D_2^2\,O^2 = 0$$

und

$$O^2 = \frac{1 + \tau' + \Omega\,\gamma\,s^{*\prime} - D_2^2}{2} \pm \frac{\sqrt{(1+\tau'+\Omega\,\gamma\,s^{*\prime} - D_2^2)^2 + 4\,D_2^2}}{2}.$$

Hier führt nur das positive Vorzeichen zu reellen Lösungen. Ist $D_2 \cong 0$ so wird

$$O^2 \cong 1 + \tau' + \Omega\,\gamma\,s^{*\prime}.$$

Man bekommt in beiden Extremfällen nur eine Lösung und diese Koppelfrequenz gleicht der Eigenfrequenz des inneren Systems, was mit dem Experiment ebenfalls in Übereinstimmung ist.

Es werde die Spannung nach (63) für $p = 0{,}01$ und $\omega = 2\,\pi \cdot 10^9$ (entsprechend einer 30 cm-Welle) berechnet; für d werde 0,5 cm gesetzt (meistens haben diese Magnetronröhren zwei Halbzylinder, zwischen denen die Raumladung hin- und herschwingt. Der Durchmesser für diese Wellenlänge beträgt etwa 1 cm; der äquivalente Plattenabstand ist kleiner, er sei halb so gross angenommen). Mit diesen Werten und $e/m = 0{,}18 \cdot 10^{16}$ im Volt-Amp. Sek.-System bekommt man für den Scheitelwert von $\mathfrak{u}$

$$\mathfrak{u} = 28 \text{ Volt}$$

und der Effektivwert ist $\mathfrak{u}_{\text{eff}} = 20$ Volt.

Dieser Wert stimmt grössenordnungsmässig als obere Grenze mit dem gemessenen überein (15 Volt[15]). Seite 231; dort wird für diesen Schwingungstyp die Bezeichnung Schwingung 1. Ordnung gebraucht. Da für höhere Frequenzen auch die Anodendurchmesser entsprechend kleiner gemacht werden, so befinden sich alle Spannungen in der Nähe dieses Wertes. Für die Posthumus-Schwingungen gelten diese Werte nicht, sie sind nach Messungen[5]) auch viel grösser.

Der obere Grenzwert von q berechnet sich nach (62) für dieselben Grössen und ausserdem für $C/C_0 = 1$ zu

$$q = 10^{-14} \text{ Coulomb/cm}^2.$$

Das sind $\frac{10^{-14}}{1{,}56 \cdot 10^{-19}} = 64000$ Elektronen pro cm². Nimmt man an, sie seien in einer Schicht von 1/100 mm Dicke (was einer untersten Grenze entsprechen dürfte), so bekommt man

$$64 \cdot 10^6 \text{ Elektronen/cm}^3$$

also eine so kleine Dichte, dass unsere Annahme über die Unabhängigkeit der einzelnen Elektronen voneinander weitaus gerechtfertigt erscheint. Wegen der hohen Frequenz sind eben nur so kleine Raumladungen notwendig.

§ 10. Nachtrag über die Berechnung des Winkels φ zwischen den Grössen s und t in Gleichung (30).

Da dies eine Frage des Aussortiermechanismus ist, muss man, wie in § 1 betont, auf die Bewegungsgleichung für ein einzelnes Elektron zurückgehen. Ein Elektron, das unter dem Einfluss einer quasielastischen Kraft mit der Eigenfrequenz ω schwingt und ausserdem noch durch eine periodische Kraft mit der Frequenz Ω beeinflusst wird, genügt der Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = k \sin \Omega t. \tag{66}$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichung ist für $\omega \neq \Omega$

$$x = a \sin (\omega t - \varphi) + b \sin \Omega t \tag{67}$$

mit

$$b = \frac{k}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

Um zu erfahren, wo der Schwerpunkt der aussortierten, resp. neu hinzugekommenen Elektronen liegt, berechnen wir die Arbeit,

die ein Elektron pro Periode aufnimmt, oder abgibt; maximale Arbeit bedeutet maximale Veränderung der Amplitude und damit Bestimmung des Schwerpunktes, das heisst des Phasenwinkels der aussortierten Elektronen. Die Arbeit unter dem Einfluss der beiden Kräfte ist mit (67):

$$dE = dx\,(k \sin \Omega t - A\,x) = \dot{x}\,(k \sin \Omega t - A\,x)\,dt. \tag{68}$$

Der erste Summand gibt die Arbeit der Bewegung mit der äusseren Kraft; der zweite Summand diejenige mit der inneren quasielastischen Kraft. Über eine Periode $T = 2\,\pi/\Omega$ gibt der erste Summand mit Berücksichtigung von (67):

$$\int_0^T \dot{x}\,dt \cdot k \sin \Omega t = k\,\omega\,a \int_0^T \cos(\omega t - \varphi) \sin \Omega t\,dt$$
$$+ k\,b\,\Omega \int_0^T \cos \Omega t \sin \Omega t\,dt. \tag{69}$$

Hier fällt der zweite Summand bei der Integration über eine Periode weg; der erste wird mit

$$\cos \alpha \sin \beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta - \alpha)]$$

umgeformt; man bekommt:

$$E_1 = k \cdot \omega a\,\tfrac{1}{2} \int_0^T \{\sin[(\omega + \Omega)\,t - \varphi] + \sin[(\Omega - \omega)\,t + \varphi]\}\,dt$$
$$= -\frac{k\,a\,\omega}{2}\left\{\cos\left(\frac{2\,\pi\,\omega}{\Omega} - \varphi\right)\left[\frac{1}{\Omega + \omega} + \frac{1}{\Omega - \omega}\right]\right.$$
$$\left. - \cos\varphi\left[\frac{1}{\Omega + \omega} + \frac{1}{\Omega - \omega}\right]\right. = -\frac{k\,a\,\omega\,\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}\left\{\cos\left(2\,\pi\,\frac{\omega}{\Omega} - \varphi\right) - \cos\varphi\right\}$$
$$= -\,c\,\{\cos(2\,\pi\,\lambda - \varphi) - \cos\varphi\}$$
$$\text{mit} \quad c = \frac{k\,a\,\omega\,\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \qquad \lambda = \frac{\omega}{\Omega} \tag{70}$$

Der zweite Summand von (68) gibt:

$$E_2 = -\int_0^T A\,x\,dx = -A\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^T$$

und mit Berücksichtigung von (67)

$$E_2 = -\frac{A\,a^2}{2}\,\{\sin^2(2\,\pi\,\lambda - \varphi) - \sin^2\varphi\}.$$

Die Klammer kann geschrieben werden:

$$1 - \cos^2(2\pi\lambda - \varphi) - (1 - \cos^2\varphi) = [\cos\varphi + \cos(2\pi\lambda - \varphi)] \cdot [\cos\varphi - \cos(2\pi\lambda - \varphi)]$$

so dass E_2 mit (70) wird:

$$E_2 = a\frac{A}{2}[\cos\varphi + \cos(2\pi\lambda - \varphi)]\frac{\varepsilon_1}{k\,\omega\,\Omega}(\Omega^2 - \omega^2)$$

und also

$$E_1 + E_2 = E_1\left\{1 + \frac{aA}{2k\omega\Omega}(\Omega^2 - \omega^2)[\cos\varphi + \cos(2\pi\lambda - \varphi)]\right\}. \quad (71)$$

Für $\Omega \cong \omega$ kann der zweite Summand beliebig klein werden, so dass mit guter Näherung gilt

$$E = E_1.$$

Der Maximalwert der Klammer (70) bestimmt die Phase des Schwerpunktes der neuhinzugekommenen Elektronen relativ zur Steuerspannung u. Wir sagen der neuhinzugekommenen, weil das Minuszeichen in (70) Energieabgabe bedeutet und diese Elektronen gerade komplementär zu den aussortierten liegen. Die Klammer (70) werde noch trigonometrisch umgeformt in:

$$\cos\varphi\,[\cos(2\pi\lambda - 1)] + \sin\varphi\sin 2\pi\lambda = A\cos\varphi + B\sin\varphi.$$

Für das Maximum dieses Ausdruckes gilt:

$$-A\sin\varphi + B\cos\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A} = \frac{\sin 2\pi\lambda}{\cos 2\pi\lambda - 1}. \quad (72)$$

Für $\Omega = \omega$, das heisst $\lambda = 1$ wird der Ausdruck unbestimmt und man muss Zähler und Nenner nochmals differenzieren:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos 2\pi\lambda}{-\sin 2\pi\lambda}. \quad (73)$$

Für $\lambda = 1$ wird $\operatorname{tg}\varphi = -\infty$, das heisst $\varphi = -90^0$. Mit der Bewegungsgleichung (67) bedeutet dies, dass alle Elektronen, die zwischen 0 und $+180^0$ starten (schraffierter Teil Fig. 7), deren Schwerpunkt der Spannung $b\sin\Omega t$ um $+90^0$ vorauseilt, nicht aussortiert werden (Verkleinerung der Amplitude) und welche daher eine Vergrösserung des elektrischen Momentes (§ 6) bedeuten; für diese Elektronen ist $t = 0$ vgl. Fig. 8a und Gleichung (30). Damit ist Fall 4, § 8, für die Posthumusschwingungen legitimiert.

Wir betrachten die Abweichungen $\Omega \mp \omega$: da die Abweichungen durchwegs sehr klein sind, können Zähler und Nenner in (72) entwickelt werden. Setzt man $\lambda = 1 + \alpha$, $\alpha = \omega/\Omega - s$ und macht man diese Entwicklung, so folgt aus (72)

$$\frac{s}{t} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{-\pi \alpha} \tag{74}$$

welcher Wert für $\alpha = 0$ in (73) übergeht. Es können s und t in (30) geschrieben werden:

$$t = \mathfrak{s} \cdot \cos \varphi \qquad s = \mathfrak{s} \cdot \sin \varphi .$$

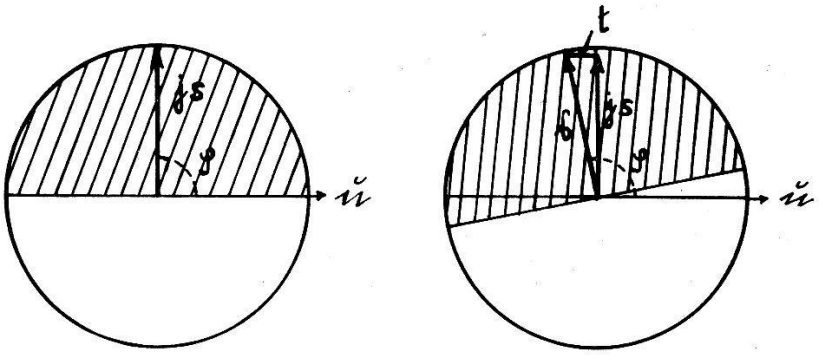

Fig. 8a. Fig. 8b.

Daraus ist sofort ersichtlich, dass s das Vorzeichen in der Umgebung $\lambda = 1$ nicht ändert. Für t wird mit trigonometrischer Umformung

$$t = \mathfrak{s} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2 \alpha^2}}} \cong \mathfrak{s} \cdot \pi \alpha = \mathfrak{s} \pi \left(\frac{1}{O_{1,2}} - 1 \right) \tag{76}$$

da α eine sehr kleine Grösse und $\lambda = 1/O_{1,2}$ ist.

Für die Diskussion von Gleichung (40) gilt also

$$t^* = \frac{\mathfrak{s}}{q} \pi \left(\frac{1}{O_{1,2}} - 1 \right). \tag{77}$$

Nun folgt aus der Fig. 3, dass für die grössere Koppelfrequenz

$$O_2 > y, \; O_2 > 1$$

ist; dadurch wird die rechte Seite von (40) negativ. Nach (77) wird für die grössere Frequenz t^* auch negativ; das Umgekehrte gilt für die kleinere Frequenz. In Fig. 6 kommt dies in der Lage der Anfachungsgeraden zum Ausdruck. Wir sehen also, dass unser etwas rohes Modell für die Rückkopplung zum mindesten das richtige Vorzeichen liefert, was eine wichtige Kontrolle be-

deutet. Die Einführung von Nichtlinearitäten in der Bewegungsgleichung (Abweichung von der quasielastischen Kraft, Berücksichtigung der Raumladung auf die Bewegung eines einzelnen Elektrons, siehe Dick, loc. cit.) würde diesen Effekt lediglich noch vergrössern. (Abdrängung der Vektorbahnkurven bei Dick Fig. 36 und 37.) Ein wesentlicher Unterschied zum sekundär angefachten Zweikreissender muss hier noch festgestellt werden, dort ist das Vorzeichen von t^* durch das Vorzeichen der Steilheit und der Kopplungen bestimmt, so dass man also entweder nur die eine oder die andere Frequenz (durch Umpolen der Kopplung = Vorzeichenwechsel) bekommt. Hier geschieht dieses „Umpolen" automatisch durch Sprung von einer Frequenz auf die andere, wofür lediglich die Grösse der Koppeldämpfungen (Fig. 6) massgebend ist; beide Frequenzen treten sozusagen miteinander in Konkurrenz. Hierin nähern sich die Reisserscheinungen der Laufzeitschwingungen denjenigen des primärangefachten Zweikreissenders. Dies ist ebenfalls in Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen. Eine Überdeckung der Koppelwellen tritt praktisch nicht auf.

Schliesslich sei noch eine Bemerkung über die Anfachbedingung gemacht: Schreibt man (40) mit dem Ungleichheitszeichen und setzt für γ und t^* die Werte ein, (9) und (77), so erhält man statt (40)

$$\frac{C_0}{\beta_0 C}\,\mathfrak{s}\,\pi\left(\frac{1}{O_{1,2}}-1\right) \geqq \delta_1\left(\frac{y^2}{O_{1,2}^2}-1\right)+\delta_2\left(\frac{1}{O_{1,2}^2}-1\right). \tag{78}$$

Beachtet man, dass für Resonanz $y = 1$, und dass weiter für kleine Abweichungen $O_{1,2}$ von 1 (entsprechend den experimentellen Feststellungen) $O_{1,2} \approx O_{1,2}^2$ ist, so kann (78) geschrieben werden:

$$\frac{C_0\,\pi}{\beta_0\,C}\,\mathfrak{s} \geqq \delta_1+\delta_2$$

oder:

$$\mathfrak{s} \geqq \frac{\beta_0}{\pi}\,\frac{C}{C_0}\,(\delta_1+\delta_2) \tag{79}$$

und für amplitudenunabhängige Rückkopplung

$$\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{u}} = \frac{\beta_0}{\pi}\,\frac{C}{C_0}\,(\delta_1+\delta_2). \tag{80}$$

Dazu sei bemerkt: Die Setzung $\Delta = 0$ in (23) heisst, dass man von vornherein stationäre Lösungen sucht und zwar unter welchen Bedingungen sie auftreten. Im Falle amplitudenunabhängiger Aussortierung ändert sich $\mathfrak{u}$ als Funktion von q so lange, und zwar im

richtigen Sinne, bis Gleichung (80) erfüllt ist. Im Gegensatz zu (79) hat man hier unter allen Umständen Ausschwingung, und eo ipso auch keine Reisserscheinungen.

Für die Steilheit $\mathfrak{s}$ besteht also eine ganz analoge Anschwingbedingung wie für den Zweikreissender, oder die einfache Dreipolröhre mit Rückkopplungsschaltung. Die Steilheit, welche nach (29) für die Aussortierung massgebend ist und die ihrerseits wieder mit der Kathodenemission wächst, muss nach (79) proportional zur Summe der Eigendämpfungen sein und ausserdem proportional zum Verhältnis von Aussenkapazität zu Röhrenkapazität. Das letztere tritt hier an Stelle der Beziehung zwischen Induktivität und Kapazität, da die Kopplung eine rein kapazitive ist. Im besondern erkennt man die Notwendigkeit einer minimalen Steilheit (Kathodenheizung) zur Anfachung von Schwingungen: dies ist eine bekannte experimentelle Erscheinung. Aus (38), (39) und (76) ist ersichtlich, dass für die Anschwingung als wirksame Rückkopplung nur die kleine Komponente t auftritt. In den entsprechenden Gleichungen für den Zweikreissender (Ollendorff) ist für phasenreine Rückkopplung $t = \mathfrak{s}$ und $s = 0$ zu setzen. Unserem Fall, wo eine Komponente $j \cdot s$ auftritt, würde beim Zweikreissender die Einschaltung eines Widerstandes und einer Kapazität in Reihe zwischen Rückkopplungsspule und Gitter entsprechen, wodurch die Rückkopplung nicht mehr phasenrein wird. Jedoch ist zu bemerken, dass im stationären Zustand sich eine solche Frequenz einstellt, dass Amplitudenbedingung und Phasenbedingung für die Gesamtrückkopplung erfüllt sind. Die Phasenbedingung wird in unserem Fall durch Gleichung (38) verbürgt. Die unter Berücksichtigung der rechten Seite bestimmte Frequenz gibt mit (36) eine solche Phase zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{X}$, dass der Schwerpunkt der neu hinzukommenden Ladung mit dem Schwerpunkt der schwingenden Raumladung in Phase ist. Die Phase zwischen neu hinzukommender Raumladung und Spannung ist durch den Aussortiermechanismus festgelegt (Gleichung 74), entsprechend dem in die Rückkopplung eingeschalteten Widerstand und Kondensator beim Zweikreissender.

Diese Bemerkungen schliessen in sich, dass die früher berechnete Spannung mit Hilfe der angenäherten Koppelfrequenz nur Grössenordnungsmässige Richtigkeit haben kann. Ferner muss betont werden, dass beim Zweikreissender im Resonanzfall (beide Kreise auf gleiche Frequenz abgestimmt und ausserdem gleiche Kapazitäten der beiden Parallelkreise) bei phasenreiner Rückkopplung Spannung und Strom für beide Koppelfrequenzen in Phase sind, also keine Blindkomponente auftritt. Dies findet

man durch Einsetzen der Spannungswerte in die Stromgleichung für den Zweikreissender

$$i = u_1 C_1 + \frac{u_1}{R_1} + \int \frac{u_1}{L_1} dt - \frac{L_{12}}{L_1} \int \frac{u_2}{L_2} dt \tag{81}$$

wobei

$$u_2 = \pm \mathfrak{u}_1 \cdot e^{j\Omega t} \qquad \Omega_2 = \omega^2 \pm \frac{L_{12}}{L^2 C}$$

zu setzen ist. Ein Abweichen von dieser Koppelfrequenz durch nicht-phasenreine Rückkopplung würde sofort eine Blindkomponente der Spannung hervorrufen.

Für unser Modell findet man für die Beziehung zwischen Strom und Spannung nach Gleichung (6) mit $u = \mathfrak{u}\, e^{j\Omega t}$, $i = i\, e^{j\Omega t}$ für den Resonanzfall, wobei für Ω die angenäherte Gleichung (16) benützt wird.

$$j\,\Omega \frac{\mathfrak{i}}{C_1 \mathfrak{u}} = j\,\Omega \frac{1}{R\,C_1} + \frac{1}{L\,C_1} \frac{C_0}{C_1} \pm \sqrt{\omega^2 \tau} \tag{82}$$

hierbei ist für

$$\frac{C_0}{C_1} < 1 \qquad \frac{1}{L\,(C_0 + C_1)} \approx \frac{1}{L C_1} \left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right)$$

gesetzt. Man erkennt aus Gleichung (82) das Auftreten einer Blindkomponente, die für die kleinere Frequenz (oberes Vorzeichen) grösser als für die grössere Frequenz ist.

Für Fall 5, § 8, wird die Anschwingbedingung (39) bei amplituden-abhängiger Rückkopplung unter Berücksichtigung von $\omega_2 = 0$ $\gamma = \beta$

$$\beta t \geqq \delta_1$$

oder mit Gleichung (76) $(O_{1,2} = 1)$

$$\frac{\mathfrak{s}}{\beta_0} \pi \cdot o \geqq \delta_1$$

das heisst die Anschwingbedingung wäre in diesem Falle nur erfüllt, wenn die innere Dämpfung δ_1 Null wäre, was aber nicht der Fall ist, weil die Elektronen nicht bei der Energie Null abgefangen werden.

Es werde noch eine Bemerkung an (79) und Fig. 2 angeknüpft: Aus der ganzen Ableitung ist ersichtlich, dass der Röhrenkapazität nicht die Rolle eines inneren Widerstandes zukommt, sondern diejenige eines Kopplungsgliedes. Deshalb kann man nicht von einem inneren Kurzschluss durch die Röhrenkapazität sprechen, wie dies bei den gewöhnlichen Dreipolröhren der Fall sein kann.

Auch ist es unzutreffend, von einem statischen Widerstand als Verhältnis von Anodenspannung und Anodenstrom in Analogie zur Dreipolröhre zu sprechen (vgl. O. Groos), denn aus Fig. 2 und der Darstellung ist ersichtlich, dass Anodenstrom- und Anodenspannung nichts mit innerem Widerstand zu tun haben. Die Spannung bestimmt bei der Bremsröhre in erster Linie die Frequenz der schwingenden Raumladung und diese hängt mit dem Anodenstrom nur indirekt zusammen.

§ 11. Experimente und ihre Deutung.

Es seien noch einige experimentelle Ergebnisse und Beobachtungen, die der Verfasser an zahlreichen Röhren verschiedener Konstruktion erhalten hat im Zusammenhang mit der Theorie besprochen. Am Ende von § 6 wurde betont, dass die statische Steilheit $\mathfrak{s}$ durch die Maxwell-Verteilung der Glühemmission und durch den Spannungsabfall längs des Heizfadens sowie

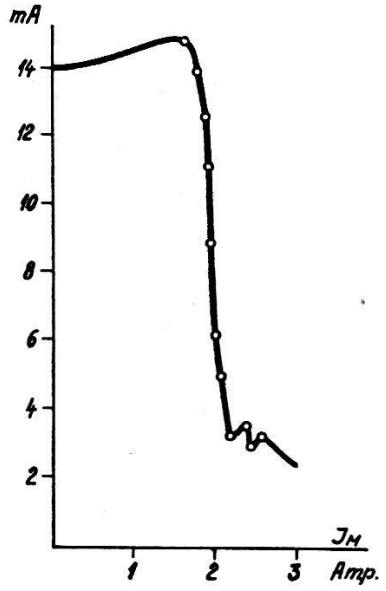

Fig. 9a.
Heizfaden zentrisch.

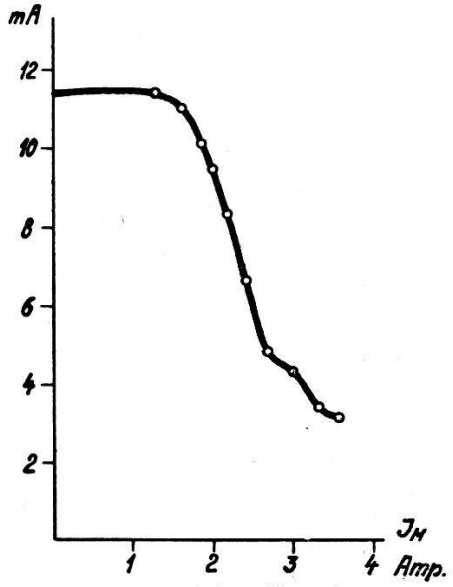

Fig. 9b.
Heizfaden schief.

durch dessen Zentrierung bestimmt ist. Versuche an ein und derselben Magnetonröhre (2 mm Anodendurchmesser, Wellenlänge ca. 8 cm, Schwingung I. Art) zeigten sehr deutlich, dass bei einer gewissen Schiefstellung des Heizfadens relativ zur Anodenachse, welche die Steilheit verflacht, keine Schwingungen mehr erhalten wurden, dass diese aber bei Rückversetzung der schiefen in die zentrische Lage wieder auftraten. (Fig. 9.)

Dies scheint eine weitere Stütze für die Auffassung amplitudenabhängiger Rückkopplung zu sein.

Ferner wurde eine Röhre nach Konstruktion HELBIG mit seitlich des Anodenzylinders angebrachter Kathode gebaut, um die lästige Kathodenrückheizung zu verhindern. Der Anodendurchmesser ist 5 mm, die Kathode möglichst punktförmig ca. 1 mm², die Anode hat zwei Schlitze, wobei die beiden Anodenhälften durch ein Lechersystem von 1 cm Länge verbunden sind, das ganze ist aus einem massiven Kupferstück herausgearbeitet. Das Magnetron sollte nach dem Typus I. Art schwingen, weil für diese Wellenlänge (ca. 4 cm) die elektrischen und magnetischen Felder für eine Schwingung II. Art viel zu hoch wären. Schwingungen wurden unter keinen Umständen erhalten; die Aufnahme der Anodenstromcharakteristik bei veränderlichem Magnetfeld und konstanter Anodenspannung ergab auch hier eine zu flache Steilheit im Vergleich zu Fig. 8a, siehe Fig. 9, der Masstab ist derselbe.

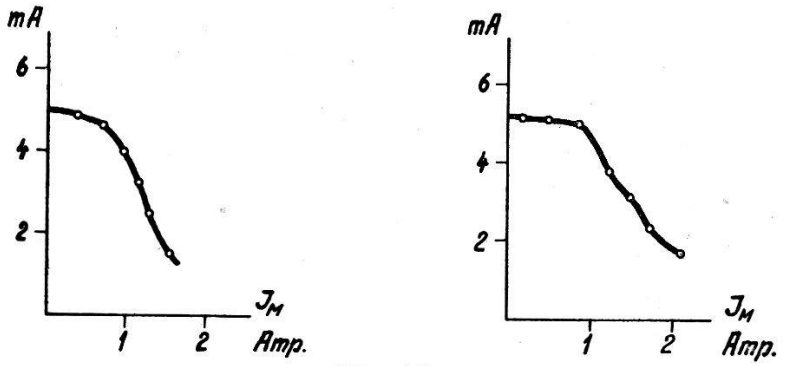

Fig. 10.

Man kann fragen, warum dann die Röhren von HELBIG zum Schwingen gebracht werden. Die Erklärung scheint mir in folgendem zu liegen: Die Röhre von HELBIG war entsprechend dem angeschlossenen Schwingkreis für eine viel längere Welle bestimmt (ca. 1 m). Die Vierschlitzanode konnte sich daher in der Schwingung II. Art erregen, was schon aus der grossen Leistung (ca. 800 Watt) hervorgeht. Man weiss, dass diese Schwingungsart leichter als die I. Art anzuregen ist, also eine flachere Steilheit erlaubt. Dies ist nach Gleichung (79) der Fall, wenn die Dämpfungen kleiner als für die Schwingung I. Art sind. Die Dämpfung des Aussensystems δ_2 ist im Prinzip für beide Schwingungstypen dieselbe, jedoch ist die Eigendämpfung δ_1 des Generators für beide Typen verschieden. Diese rührt ja, wie am Ende von § 1 angedeutet wurde, wesentlich von der mehr oder weniger guten phasenrichtigen Gruppierung der schwingenden Elektronen her. Für die Schwingungen II. Art, wo die energieabgebenden Elektronen durch das synchronisierende Wechselfeld zu Paketen gruppiert werden, muss deshalb die Dämpfung δ_1 kleiner sein als

für den ersten Schwingungstypus, wo die synchronisierende Wirkung fehlt. Auch ist der zweite Aussortiereffekt bei den Schwingungen II viel geordneten als bei den Schwingungen I.

Eine weitere Feststellung werde besprochen: Aus der Theorie folgt in keiner Weise, dass es eine optimale Raumladung gibt, bei der die Schwingintensität am grössten ist. Danach ist diese um so grösser, je grösser die schwingende Raumladung ist. Bekannt ist aber, dass es bei gegebenen Daten für Spannung und Magnetfeld eine optimale Emission gibt, für welche die Schwingintensität I. Art den grössten Wert erreicht. Diese Beobachtung wurde auch vom Verfasser an zahlreichen Versuchen mit Magnetronschwingungen speziell unter 10 cm Wellenlänge gemacht. Auch diese Erscheinung kann erklärt werden. Durch Vergrösserung der Emission werden die kritischen Daten geändert, so dass die Schwingung auf einem anderen für die Aussortierung ungünstigeren Arbeitspunkt der statischen Charakteristik erfolgt. Es ist klar, dass dies nur für die Schwingungen I. Art zutrifft, da nur für diese die Elektronen die Anode nahezu tangieren müssen. Bei der Schwingung II. Art. beobachtet man diese kritische Einstellung auch nicht. Dass die kritischen Daten wirklich geändert werden und zwar so, dass die Spannung grösser oder das Magnetfeld kleiner eingestellt werden muss bei grösserer Emission zeigen folgende Messungen an einer Röhre mit 2 mm Anodendurchmesser und ca. 6,5 cm Wellenlänge:

Tabelle 1: Die Emission J_A wurde entsprechend der Kathodenheizung J_A bei konstantem Magnetfeld (Erregerstrom J_M) vergrössert und die zugehörige Anodenspannung V_A aufgesucht, bei der die Schwingintensität I_{HF} (in willkürlichen Einheiten, gemessen mit Thermokreuz und Galvanometer) ein Maximum wurde.

Tabelle 1.

J_M Amp.	J_H Amp.	J_A m Amp.	V_A Volt	I_{HF}
1,07	5,8	3	540	3
1,07	5,9	5,5	560	5,5
1,07	6,0	7,2	610	7,2
1,07	6,1	15	610	0
1,07	6,1	14,5	740	8

Die Neigung der Anodenachse gegen das Magnetfeld betrug ca. 10°, die Wellenlänge änderte sich von 7 auf 6 cm.

Dann wurde die Spannung konstant gehalten und bei Ver-

grösserung der Emission das Magnetfeld so geändert, dass die Schwingintensität möglichst gross war, Tabelle 2.

Tabelle 2.

V_A Volt	J_H Amp.	J_A m. Amp.	J_M Amp.	I_{HF}
500	5,8	2,5	1,07	3
500	5,9	3,5	1,07	3
500	6,0	5,0	1,07	0,7
500	6,0	6,0	1,00	5

Wellenlänge und Winkeleinstellung wie vorher. Eine Verkleinerung des Magnetfeldes ist also einer Vergrösserung der Anodenspannung äquivalent, wie es sein muss. Schliesslich wurde noch der kritische Wert des Magnetfeldes bei Vergrösserung der Kathodenemission bestimmt, das heisst der Punkt, wo bei konstanter Anodenspannung der Anodenstrom bei grösserwerdendem Magnetfeld zu sinken beginnt und die Röhre noch schwingungsfrei ist. Auch diese Messung bestätigt obige Aussage. Tabelle 3.

Tabelle 3.

V_A Volt	J_H Amp.	J_A m Amp.	J_M Amp.
500	5,8	3	1,0
500	5,9	4	1,0
500	6,0	5,5	0,96
500	6,1	8	0,93
500	6,2	10	0,91
500	6,3	14	0,87

Damit mag die Erscheinung zusammenhängen, dass beim Einsetzen der Kathodenrückheizung durch die falschphasigen Elektronen sich der Generator infolge des Emissionsanstieges aus dem günstigen Arbeitspunkt der statischen Charakteristik entfernt und die Schwingintensität verkleinert wird. Durch Vorschalten einer Diode[16]), welche im Sättigungsgebiet den Emissionsstrom des Magnetrons begrenzt und so die Rückheizung stabilisiert, konnte bei einem 4,2 cm Magnetron bei entsprechender Spannungserhöhung der Emissionsstrom durch Rückheizung von 4 mA auf 25 mA gebracht werden, wobei die Schwingintensität noch etwas grösser wurde. Wenn dann die Schwingung aus irgend einem

Grund abreisst und mit Verschwinden der Rückheizung der Emissionsstrom zurückfällt, so befindet man sich unangenehmer Weise ganz ausserhalb der kritischen Daten und muss diese neu einstellen*).

Es werde jetzt noch die Modulation beim Sender sowie die Gleichrichtung und Entdämpfung beim Empfänger im Zusammenhang mit der statischen Charakteristik besprochen. Da der Anschwingvorgang auf die statische Charakteristik der Laufzeitschwingungen zurückgeführt ist, so muss wie bei der Triode auch die Modulation, Gleichrichtung und Entdämpfung auf diese zurückgeführt werden können. Die statische Charakteristik, für den Aussortiereffekt massgebend, spielt hier dieselbe Rolle wie bei der Triode, nur dass die Verschiebung des Arbeitspunktes nicht durch die Gitterspannung wie bei der Triode geschieht, sondern in den verschiedenen Fällen durch das Bremspotential, das Magnetfeld oder die Anodenspannung. Auch darf bei den Laufzeitschwingungen aus der Charakteristik bei veränderlicher Spannung oder Magnetfeld nicht einfach eine zugehörige Stromänderung abgelesen und so das Schwingliniendiagramm konstruiert werden. Die Charakteristik ist hier vielmehr bestimmend für die entstehende, schwingende Raumladung wie schon früher besprochen (§ 6).

Auch die Aussortierung ist hier entsprechend dem Sättigungsstrom auf endliche Werte begrenzt, so dass die Schwingintensität infolge Nichtlinearität wie bei einem gewöhnlichen Sender nicht ins Unendliche steigt; es stellt sich eine mittlere Steilheit für die Aussortierung ein und die Modulation ist ganz analog zu verstehen wie bei der gittergeregelten Triode in Senderschaltung, wo durch Änderung der Gittervorspannung sich verschiedene Endamplituden einstellen[17]). Bei dieser Modulationsart sind wie bei der Triode Reisserscheinungen zu erwarten. Die Gleichrichtung mit Magnetron I oder mit Bremsfeldröhre ist ebenfalls auf Grund der statischen Charakteristik zu verstehen. Befindet sich der Arbeitspunkt an einem Knick, so werden in der positiven Halbperiode der angelegten Hochfrequenzspannung mehr Elektronen aussortiert als in der negativen Halbperiode. Nun sind diese im Telefon den niederfrequenten Gleichstrom liefernden Elektronen die falschphasigen, während die richtigphasigen im Generator zurückbleiben, und mit der Eigenfrequenz entsprechend den eingestellten Daten schwingen.

*) Die Rückheizung ist überhaupt ein Punkt in der unbefriedigenden Funktion vieler Magnetrons, der allzuoft mit Schweigen übergangen wird; man vergleiche dagegen die sehr interessante Untersuchung von E. G. Linder (Proc. I.R.E. vol. 26, p. 347, März 1938) wonach Kathodenrückheizung auch ohne Schwingung (d. h. es braucht keine falschphasigen Elektronen) auftreten kann.

Damit ist die Entdämpfung ursächlich mit der Gleichrichtung verknüpft, was eine bekannte Erscheinung ist (für die Bremsfeldröhre vgl. H. E. Hollmann, für das Magnetron I. Art A. Esau und E. Ahrens[18])). Es ist auch verständlich, dass die Einstellung kritisch ist, das heisst, dass, wenn der Arbeitspunkt in das Gebiet genügender Steilheit rückt, Anschwingung erfolgt, was für den Empfang unerwünscht ist. Eigene Versuche mit einer Übertragung durch ein Wave-Guide mit Magnetronsender und -Empfänger, auf 4,2 cm Wellenlänge (Rohrdurchmesser 3 cm), haben diese Erscheinungen vollauf bestätigt, auch die Reisserscheinungen beim Sender konnten bei ungünstiger Einstellung der Daten beobachtet werden. Bei guter Einstellung kann die Übertragung der Musik trotz grosser Aussteuerung als klangrein bezeichnet werden. Es sei noch eine kurze Bemerkung über die Modulation bei Magnetronschwingungen II. Art angebracht. Versuche auf dem gleichen Prinzip wie für die Schwingungen II. Art gaben ein negatives oder doch ein schlechtes Resultat. Nach dem Mechanismus dieser Schwingungen ist dies auch verständlich. Da bei gutem Wirkungsgrad das Magnetfeld bedeutend grösser als das kritische ist, die Elektronen also die Anode nicht tangieren, sondern erst allmählich durch die Wechselspannung auf die Anode laufen, ist eine Beeinflussung der schwingenden Raumladung q durch die Anodenspannung nicht möglich, die Aussortierung erfolgt amplitudenunabhängig. Nur bei kleinem Wirkungsgrad, wo die Elektronen auf ihren Zykloidenbahnen schon beim ersten Umlauf in die Nähe der Anode kommen (Magnetfeld nahe dem kritischen Wert), ist eine Beeinflussung der Aussortierung durch das Anodenpotential zu erwarten. Auch dies wird durch die Versuche bestätigt. Diese Modulation ist aber ungünstig, weil durch Veränderung der Anodenspannung die Leitbahngeschwindigkeit verändert und damit zugleich eine Frequenzmodulation erzeugt wird. Hier wäre eine Beeinflussung der schwingenden Raumladung durch ein achsiales elektrisches Feld, welches die Leitbahngeschwindigkeit nicht verändert, günstiger. Die Elektronen müssen allerdings durch dieses Feld in einer kürzeren Zeit auf die Endplatten gezogen werden als sie benötigen, um durch das tangentiale Wechselfeld auf die Anode zu gelangen. Aus diesem Grund hat man wohl für diesen Schwingungstyp zu einer Rastermodulation gegriffen, welcher die Anodenspannung derart herauf- und herabsetzt, dass die Schwingungen ein- und aussetzen. Endlich sei noch auf eine interessante Konstruktion von H. Gutton und S. Berline[19]) hingewiesen. Diese Röhren zeichnen sich durch eine Vielzahl von Segmenten aus, in der Weise, dass benachbarte Segmente an achsial

gegenüberliegenden Ringen befestigt, welche unter sich wieder mit einem Bügel (Induktivität) verbunden sind.

Dadurch kommen benachbarte Segmente auf verschiedenes Hochfrequenzpotential, es können sich Schwingungen II. Art erregen, die Röhre braucht nicht schief im Magnetfeld zu stehen. Für die längeren Schwingungen (16 cm) stimmt die Posthumusformel ziemlich genau, sie braucht nicht absolut genau zu stimmen, da durch das synchronisierende Wechselfeld eine weitgehende Verstimmung möglich ist; wesentlich ist vielmehr auch, dass die kritischen Daten eingestellt werden, die Elektronen also gerade die

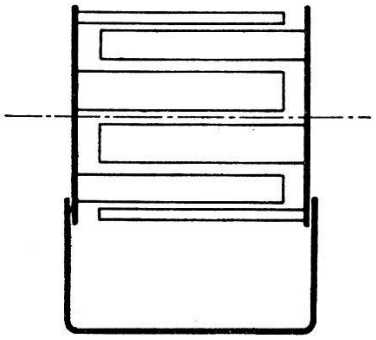

Fig. 11.

Anode nicht mehr berühren. Wenn das Drehfeld zwischen den Schlitzen räumlich nicht sinusförmig verläuft, so können auch Oberschwingungen erregt werden; Hauptsache ist, dass sich die Elektronen im Mittel gegen die Anode bewegen. Dass auch für die Erregung der Schwingung II. Art nicht eine statische negative Charakteristik die Ursache sein kann, wurde von Okabe mit allem Nachdruck betont und durch schöne Experimente bewiesen[20]).

Die zahlreichen Röhren verschiedener Bauart wurden mit der Hilfe von Herrn Reck, Glasbläser am Institut für techn. Phys. Zürich, hergestellt; ihm sei für seine stete und gewandte Hilfsbereitschaft bestens gedankt.

Zusammenfassung.

1. Die Laufzeitschwingungen werden als gekoppeltes System von schwingender Raumladung und elektrischem Schwingkreis aufgefasst. Die dafür aufgestellten Differentialgleichungen zeigen formale Analogie mit denen des Zweikreissenders. Die Lösung der Gleichungen für die freie ungedämpfte Schwingung gibt den Koppelwellenverlauf und den Intensitätsverlauf Fig. 3; er stimmt qualitativ gut mit dem Experiment überein.

2. Unter sinngemässer Einführung der Rückkopplung werden die Differentialgleichungen erweitert in diejenigen für das selbst-

gesteuerte System mit Berücksichtigung der Dämpfung. Die formale Einführung der Rückkopplung wird auf Grund des Aussortiermechanismus und der Bewegungsgleichungen für das einzelne Elektron begründet.

3. Die Untersuchung der Raumladung einerseits und der einzelnen Elektronenbewegung andererseits hat ihre Berechtigung, weil wohl die Effekte wie Koppelwellenverlauf, Intensitätsverlauf und Anfachbedingung durch die Zusammenwirkung aller Elektronen bedingt sind, dass aber die Elektronendichte noch klein genug ist, um die einzelnen Elektronenbahnen als voneinander unabhängig zu betrachten; und diese sind ihrerseits massgebend für die Eigenfrequenz, die Aussortierung und die Energiebilanz.

4. Die stationären Lösungen für das selbstgesteuerte System geben für kleine Dämpfungen denselben Koppelwellen- und Intensitätsverlauf (im besonderen gleiche Resonanzspannung) wie die Lösungen der freien ungedämpften Schwingung. Ausserdem liefern sie eine für rückgekoppelte Systeme typische Anfachbedingung (Formel 79), welche auch die Reisserscheinungen enthält. Durch die Beschränkung auf lineare Systeme werden diese nur qualitativ wiedergegeben, die beobachtete Verschiebung des Reissens nach kürzeren Wellen wird damit nicht erfasst.

5. Die genauere Untersuchung der Koppelwellen im Resonanzfall unter Berücksichtigung der Dämpfung zeigt, dass verschiedene Koppelwellen nur auftreten können, wenn die Kopplung über einem kritischen Wert liegt.

6. Im stationären Schwingungszustand ist der Phasenwinkel zwischen Spannung und schwingender Raumladung durch den Kopplungsfaktor, die Dämpfung und durch die Phase der Rückkopplung relativ zur Wechselspannung (Aussortierung) Gleichung 36, 38 und 74) derart bestimmt, dass Phasengleichheit zwischen vorhandener und neu hinzukommender Raumladung besteht.

7. Die Spannungswerte sind in erster Näherung von der Dämpfung unabhängig und stimmen mit denjenigen für die freie, ungedämpfte Schwingung überein. Die Gleichungen zeigen einen Zusammenhang zwischen prozentualer Abweichung der Koppelfrequenz von der Resonanzfrequenz und der Resonanzspannung. Der so berechnete Spannungswert stimmt mit dem gemessenen grössenordnungsmässig (ca. 20 Volt) überein. Weiter kann die Raumladungsdichte aus dem gemessenen Kopplungsfaktor bestimmt werden; man findet als obere Grenze $6 \cdot 10^7$ Elektronen pro cm^3. Dadurch wird die Annahme freier Elektronenbahnen weitgehend gerechtfertigt.

8. Für Kopplungen kleiner als die kritische, tritt in Übereinstimmung mit einzelnen experimentellen) Veröffentlichungen[14]),[21]) nur eine Frequenz und damit nur eine Spannung (verschieden von obiger) auf; sie hat gegen die schwingende Raumladung -90^0 Phasenverschiebung.

9. Die Entstehung der Koppelwellen ist an die Bedingung geknüpft, dass die Koppelfrequenz verschieden von der Eigenfrequenz der Elektronen ist. Bei der Bremsfeldröhre und beim Magnetron I. Art (ungeschlitzte Anoden) ist dies der Fall, da die Lösung der Bewegungsgleichungen eine Überlagerung von zwei Schwingungen (Eigenfrequenz plus Koppelfrequenz) ergibt. Bei den Magnetronschwingungen II. Art (geschlitzte Anoden) zeigt die Lösung der Bewegungsgleichungen eine weitgehende Synchronisierung der Eigenfrequenz mit der Koppelfrequenz und dadurch mit der Frequenz des Abstimmkreises. Deshalb treten bei diesen Schwingungen die Koppeleffekte nicht auf und die Abstimmung ist nicht so scharf wie bei den obgenannten Schwingungen. Die Synchronisierung ist auch verantwortlich für den relativ grossen Wirkungsgrad bei den Schwingungen II. Art, weil sich hier die Elektronen immer in der Phase für Energieabgabe befinden, während sich bei den Schwingungen I. Art ihre Bewegungsphase zur Spannung dauernd ändern. Durch den zweiten Aussortiermechanismus muss dafür gesorgt werden, dass sie vor der ersten Phasenumkehr entfernt werden, was bei noch relativ grossen Amplituden der Fall sein kann.

10. Die verschiedenen Arten der Modulation, sowie die Entdämpfungsmöglichkeit sind implizit in der Dämpfung des Innensystems (schwingende Raumladung) enthalten, weil durch Beeinflussung der Aussortierung diese sich weitgehend ändern lässt.

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Ing. W. Amrein und Herrn Ing. E. Baumann für viele fördernde Diskussionen aufs beste zu danken.

Auch Herrn Prof. Dr. F. Fischer, E.T.H. Zürich, sei bestens gedankt für die Möglichkeit, in seinem Institut zu arbeiten.

Literaturverzeichnis.

[1]) M. Dick, Züricher-Diss. Sonderheft E.N.T. 1936.

[2]) H. G. Möller, Die Elektronenröhren und ihre techn. Anwendungen. Verl. Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1929.

[3]) B. van der Pol, Z.S.f. Hochfrequenz, Bd. 28 (1926) S. 178.

[4]) F. Ollendorff, Grundlagen der Hochfrequenztechnik, Verlag Julius Springer, Berlin, 1926.

[5]) F. Herriger und F. Hülster, Die Telefunkenröhre (1936), Heft 7, S. 71; Heft 8, S. 221.
[6]) J. J. Müller, Zürcher-Diss. Revue Générale de l'Electricité 1937 XLII, p. 389—406 et 419—434. Hochfr. u. El. Ak. (1936) **48**, S. 155.
[7]) K. Fritz, Telefunkenzeitung Bd. 17 (1936), Nr. 72, S. 31.
[8]) K. Posthumus, Wireless Eng. Bd. 12 (1935) S. 126.
[9]) F. Fischer und F. Lüdi, Bull. Schweiz. elektrotechn. Verein, Bd. 28 (1937) S. 272.
[10]) F. Tank und E. Schiltknecht, Helv. Phys. Acta, Bd. 1 (1925) S. 110.
[11]) R. Wundt, Z.S.f. Hochfrequenztechnik Bd. 36 (1930) S. 133.
[12]) Wolff, Linder und Braden, Ref. Jahrb. d. drahtl. Telegr. Bd. 46 (1835) S. 9.
[13]) M. Wien, Ann. d. Phys. N.F. **61** (1897) Formel auf Seite 175.
[14]) O. Groos, Hochfr. und Elek. Akust. Bd. 51 (1938) Heft 2.
[15]) O. Groos, E.N.T. Bd. 14 (1937), S. 325. (Der Magnetfeldröhren-Sender.)
[16]) H. Richter, Hochfr. und Elektroak. Bd. 51 (1938) S. 10.
[17]) F. Ollendorff, l. c. Seite 240.
[18]) A. Esau und E. Ahrens, „Luftfahrt-Forschung" 14 (1937), Lfg. 7, S. 368/370.
[19]) H. Gutton und S. Berline, Bull. d. l. Soc. Française Radioélectrique 12e Année, N⁰ 2, deuxième Trimestre 1938.
[20]) K. Okabe, Proc. I.R.E. Bd. 27 No. 1 1939.
[21]) A. Lerbs und K. Lämmchen, Hochfr. und Elek. Akust. Bd. **52** S. 190, Dez. 1938.
[22]) Zus.fass. Darstellung im Hollmann'schen Buch: Physik und Technik der ultrakurzen Wellen, Bd. I, Verlag Julius Springer, Berlin 1936.