Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 11 (1938)

Heft: VII

Artikel: Studie über die Abbildung der Zusammenstösse zwischen Gruppen elastischer Kugeln im Geschwindigkeitsraum : Ableitung des Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungssatzes

Autor: Peter, J.R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110867

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Studie über die Abbildung der Zusammenstösse zwischen Gruppen elastischer Kugeln im Geschwindigkeitsraum (Ableitung des Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungssatzes)

von **J. R. Peter** (Basel)

(22. VIII. 38.)

Inhalt. Ausgehend von einer Untersuchung über die Abbildung einer Gesamtheit von Zusammenstössen zwischen elastischen Kugeln, die zwei verschiedenen Geschwindigkeitsbereichen zugehören, im Geschwindigkeitsraum, wird eine geometrische Ableitung des MAXWELL'schen Geschwindigkeitsverteilungssatzes für ein Gemisch von zwei idealen Gasen entwickelt. Im Anschluss daran wird eine neue Berechnung der Funktionaldeterminante der Stossgleichungen gegeben und festgestellt, dass die von der Literatur übernommene, auf BOLTZMANNS „Vorlesungen über Gastheorie" zurückgehende geometrische Ableitung dieser Determinante unrichtig ist.

I. Einleitung.

Für die theoretische Behandlung der aus einer grossen, aber endlichen Zahl in ungeordneter Bewegung befindlicher, diskreter Teilchen bestehenden mechanischen Systeme, mit denen sich die kinetische Gastheorie zu befassen hat, reicht die rein mechanische Betrachtungsweise nicht aus und muss durch statistische Elemente ergänzt werden. Die in der „elementaren" Gastheorie befolgte Methode ist in ihren Grundzügen die folgende. Die Teilchen eines betrachteten Systems werden in eine sehr grosse Zahl von Gruppen aufgeteilt, welche bestimmten kleinen, aber endlichen Raum-, Geschwindigkeits-, Impuls- oder Energie-Bereichen entsprechen, und in jeder dieser Gruppen wird Gleichverteilung der Teilchen auf den gegebenen Bereich angenommen. Diese Annahme der Gleichverteilung stützt sich auf die Ungeordnetheit der Bewegung und wird deshalb um so besser zutreffen, je grösser die Zahl der auf einen Bereich entfallenden Teilchen ist. Durch die weitere Annahme, dass die Teilchenzahl von Gruppe zu Gruppe sich stetig ändere, wird das Diskontinuum der Teilchen in ein Kontinuum der statistischen Bereiche umgewandelt, in welchem an Stelle der Lage-, Geschwindigkeits-, Impuls- oder Energie-Koordinaten der einzelnen Teilchen die aus der angenommenen Gleichverteilung ableitbaren Koordinatenmittelwerte der Bereiche treten. Auf dieses Kontinuum ist nun die Infinitesimalrechnung anwendbar:

Die sehr kleinen Bereiche der grosse Partikelzahlen aufweisenden Gruppen, wie auch diese Zahlen selbst, werden in der Form von Differentialen geschrieben und dienen einerseits der Summen- und Mittelwertbildung, d. h. der Berechnung der makroskopischen, thermodynamischen Zustandsgrössen aus den mikroskopischen, mechanischen Bestimmungsgrössen, und sind anderseits — das gilt wenigstens für die Geschwindigkeitsbereiche — auch selbst Untersuchungsobjekt dort, wo die gegenseitigen Zusammenstösse der Moleküle in die Untersuchung einbezogen werden (Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung, der Stosszahl). Trotz den Erfolgen der Theorie ist indessen nicht zu übersehen, dass die auf der angegebenen Basis gehandhabte Infinitesimalrechnung nur ein Näherungsverfahren darstellt, da die vorausgesetzte Stetigkeit in der Änderung der Teilchenzahl von Gruppe zu Gruppe bei endlichen Teilchenzahlen nicht streng erfüllt sein kann. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass bei der Anwendung der geschilderten Methodik in der kinetischen Gastheorie von den folgenden drei Voraussetzungen ausgegangen wird: 1. Die Zahl der auf einen statistischen Bereich entfallenden Moleküle ist gross. 2. Sie ändert sich von Bereich zu Bereich nur wenig. 3. Die Bereiche selbst sind klein gegenüber dem gesamten Variabilitätsgebiet der betrachteten Variabeln.

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel eine von infinitesimalen Bestandteilen freie, geometrische Ableitung des Maxwell' schen Geschwindigkeitsverteilungs-Satzes für ein Gemisch von zwei idealen Gasen auf der Grundlage des Stosszahlansatzes. Ein, wie in Abschnitt V gezeigt werden wird, allerdings unzulänglicher Versuch einer geometrischen Ableitung dieses Satzes ist bisher einzig von L. Boltzmann unternommen worden. Die spätern Bearbeiter des Themas haben ihre Betrachtungen auf einheitliche Systeme beschränkt und sich mit der Ableitung für ein binäres Gemisch nicht mehr befasst. In allen diesen Arbeiten ist die oben dargestellte infinitesimale Betrachtungsweise massgebend. Indessen ist nicht einzusehen, warum die infinitesimale Auffassung der Geschwindigkeitsbereiche, die wohl für Summation und Berechnung von Mittelwerten Vorteile bietet, weil sie die Anwendung der Integralrechnung erlaubt, sich auch für Untersuchungen über die Zusammenstösse zwischen Molekülgruppen „hervorgehobener Art" eignen soll, wo Transformationen einzelner Geschwindigkeitsbereiche zur Behandlung kommen. Hier wird vielmehr der endliche Charakter der Geschwindigkeitsbereiche zur Geltung gebracht werden müssen. Diese Überlegung bildet den Ausgangspunkt der Studie. Die Moleküle des binären Gasgemisches werden zur Vereinfachung

der Darstellung als vollkommen elastische Kugeln betrachtet. Den Ausführungen wird dadurch eine geometrische Form gegeben, dass die Komponenten der Geschwindigkeiten als cartesische Koordinaten von „Geschwindigkeitspunkten" aufgefasst werden, deren Abstände vom Koordinatennullpunkt nach Grösse und Richtung den Geschwindigkeiten gleich sind. In dem durch das Koordinatensystem definierten „Geschwindigkeitsraum" stellen sich die Geschwindigkeitsbereiche nun als Raumteile dar.

II. Die in vorgegebener Zentrilinienrichtung erfolgenden Zusammenstösse zwischen zwei Gruppen elastischer Kugeln werden im Geschwindigkeitsraum abgebildet.

1. Geometrische Formulierung des Stosses von Kugeln gegeneinander.

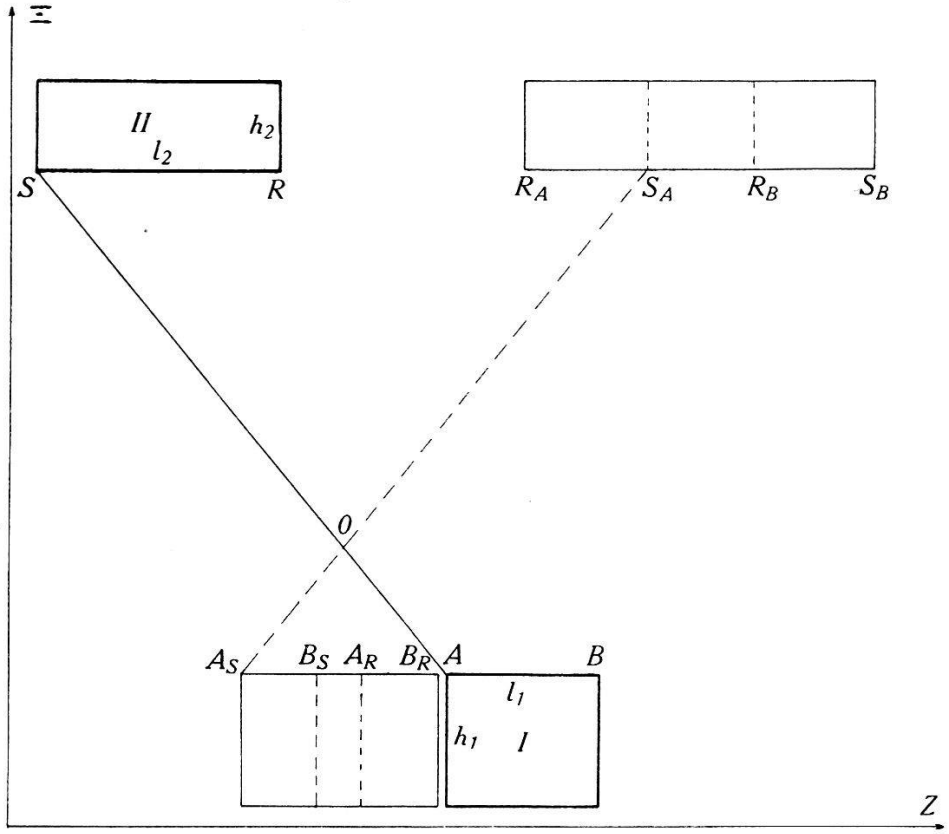
Die vollkommen elastischen, glatten und quasi-starren, in geradliniger Bewegung befindlichen Kugeln der einen Gruppe (I) mögen die Masse m_1, die der andern Gruppe (II) die Masse m_2 besitzen. Das Verhältnis der Massen sei $m_1 : m_2 = a : b$, wobei $a > b$. Ausser durch die Masse sollen sich die Kugeln der beiden Gruppen auch dadurch unterscheiden, dass sie verschiedenen Geschwindigkeitsbereichen angehören. Um diese festzulegen, orientieren wir ein rechtwinkliges Ξ, H, Z-Koordinatensystem, das zur Definition des Geschwindigkeitsraumes dient, derart, dass die Z-Achse die vorgegebene Zentrilinienrichtung besitzt, teilen durch senkrecht zu den Koordinatenachsen gelegte Ebenen zwei mit I und II bezeichnete quaderförmige Räume ab und weisen die Geschwindigkeitspunkte der Kugeln aus Gruppe I dem ersten, die der Kugeln aus Gruppe II dem zweiten Quader zu. Die beiden Rechtkante mögen mindestens eine zur H-Achse senkrechte Ebene als Schnittebene gemeinsam haben, so dass die Zeichnung der nachstehenden Figur möglich wird, in der die Rechtecke I und II den Schnitt einer dieser Ebenen durch die Rechtkante I und II darstellen. Bezüglich der Lage der Kugeln im Raum (X, Y, Z-Koordinatensystem) sei angenommen, die Kugeln seien derart vergesellschaftet, dass Zusammenstösse in der vorgegebenen Zentrilinie dauernd möglich sind.

Bei jedem derartigen Zusammenstoss einer Kugel aus Gruppe I mit einer Kugel aus Gruppe II wird gleichzeitig je ein Geschwindigkeitspunkt aus Quader I und II disloziert. Sind ξ_1, η_1, ζ_1 die Koordinaten des Geschwindigkeitspunktes in Quader I, ξ_2, η_2, ζ_2 die des Punktes in Quader II, so werden

die Orte der beiden Punkte nach dem Stosse bestimmt durch die Stossgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_1, \quad \eta_1' = \eta_1, \quad \zeta_1' = \frac{a-b}{a+b}\,\zeta_1 + \frac{2\,b}{a+b}\,\zeta_2, \\ \xi_2' &= \xi_2, \quad \eta_2' = \eta_2, \quad \zeta_2' = \frac{2\,a}{a+b}\,\zeta_1 - \frac{a-b}{a+b}\,\zeta_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

in denen die gestrichenen Variabeln die Koordinaten der Geschwindigkeitspunkte nach dem Stosse darstellen. Auf geometrischem Wege findet man die Orte der beiden Punkte nach dem Stosse, indem man die Verbindungsstrecke der Punkte vor dem Stosse im umgekehrten Verhältnis der Massen der zugehörigen Kugeln teilt, durch den Teilungspunkt eine Ebene senkrecht zur Zentrilinie des Stosses legt und die Geschwindigkeitspunkte an dieser Ebene



spiegelt. Die Punkte A und S der Figur z. B. gehen so über in die Punkte A_S und S_A, welche als Abbildungen der erstern bezeichnet werden mögen, ihre Konstruktion als Abbildungsverfahren. Der erste Teil dieses Abbildungsverfahrens, die Konstruktion der Spiegelebene, ist als geometrische Hilfsoperation aufzufassen; die Spiegelung selbst ist eine Abbildung des Stossvorganges. Die Geschwindigkeitspunkte bewegen sich nämlich bei einem Zusammenstoss der zugehörigen Kugeln während der sehr kurzen

Dauer des Stosses in Richtung der Zentrilinie, die erste Hälfte des Weges in beschleunigter, die zweite in verzögerter Bewegung zurücklegend, bis sie als Bildpunkte ihre neue Ruhelage erreicht haben. Da in den folgenden Untersuchungen die Zentrilinienrichtung bzw. das Ξ, H, Z-Koordinatensystem unverändert beibehalten wird, ist das Verfahren zur Abbildung zweier Punkte A und S ausreichend bestimmt durch den Doppelausdruck „Spiegelung des Punktes A bezüglich des Punktes S" und „Spiegelung des Punktes S bezüglich des Punktes A", sofern das Teilungsverhältnis der Strecke $\overline{AS}$ bekannt ist. Um dieses ebenfalls in die Formulierung einbeziehen zu können, übertragen wir die Gruppenbezeichnung der Kugeln auf ihre Geschwindigkeitspunkte und sprechen von der „Spiegelung eines Punktes der ersten Gruppe, A, in bezug auf einen Punkt der zweiten Gruppe, S, und umgekehrt". Oder aber wir sprechen von einer „Spiegelung des Punktes A bezüglich des Punktes S, gemäss dem (Teilungs-) Verhältnis $b : a$ (der Strecke $\overline{AS}$)" und von einer „Spiegelung des Punktes S bezüglich des Punktes A, gemäss dem Verhältnis $a : b$". Die gegebene Formulierung, durch die der einheitliche physikalische Vorgang des Stosses in zwei gesonderte geometrische Operationen aufgeteilt wird, ermöglicht die folgenden Weiterungen. Statt nur den Punkt S bezüglich des Punktes A zu spiegeln, kann man z. B. alle Punkte der Strecke $\overline{RS}$ in bezug auf den Punkt A spiegeln. Diese Operation wird als „Spiegelung der Strecke $\overline{RS}$ in bezug auf den Punkt A" bezeichnet. Man kann auch umgekehrt den Punkt S in bezug auf alle Punkte der Strecke $\overline{AB}$ spiegeln: „Spiegelung des Punktes S in bezug auf die Strecke $\overline{AB}$". Von der Strecke kann man zum Flächenstück, vom Flächenstück zum Körper übergehen und kommt so dazu, von der Spiegelung eines Punktes, einer Strecke, einer Figur, eines Körpers in bezug auf einen Punkt, eine Strecke, eine Figur oder einen Körper zu sprechen. Die Spiegelung ganzer geometrischer Gebilde in bezug aufeinander hat folgende Bedeutung. Da bei diesen Spiegelungen jeder Punkt des einen in bezug auf jeden Punkt des andern Gebildes gespiegelt wird, entsprechen die als Resultat der Spiegelungen entstehenden Abbildungen der maximal möglichen Raumbeanspruchung der Geschwindigkeitspunkte, die aus diesen Gebilden beim Zusammenstoss der zugehörigen Kugeln in Richtung Z disloziert werden.

2. *Grössenbeziehung zwischen Original und Abbildung im Geschwindigkeitsraum.*

Aus den Gleichungen (1), welche das vorstehend geometrisch formulierte Verfahren der Punktabbildung analytisch definieren,

lassen sich die nachstehenden Angaben über Lage und Grösse der Abbildungen von in bezug aufeinander gespiegelten geometrischen Gebilden gewinnen (siehe Figur).

Zur Z-Achse senkrechte Strecken und ebene Figuren werden bei der Spiegelung bezüglich eines Punktes durch blosse Parallelverschiebung, d. h. unverändert, abgebildet. Infolgedessen genügt es, nachstehend die Spiegelung von Punkten und von zu Z parallelen Strecken zu untersuchen. Jede Spiegelung bezüglich eines Punktes ist aequivalent einer Spiegelung, die in bezug auf die senkrecht zu Z durch den Punkt gelegte unendliche Ebene oder irgendeine in dieser Ebene liegende Figur erfolgt. Jede Spiegelung in bezug auf ein geometrisches Gebilde, das nicht in einer zu Z senkrechten Ebene liegt, kann ersetzt werden durch eine Spiegelung, die sich auf den unendlichen Teil des Raumes bezieht, der zwischen den zwei zu Z senkrechten Ebenen liegt, die das Gebilde einschliessen und es berühren, oder auf irgendein anderes geometrisches Gebilde, das zwischen diesen Ebenen liegt und sie berührt. Daher kann die Betrachtung auf Spiegelungen beschränkt werden, die in bezug auf Punkte und auf zu Z parallele Strecken erfolgen.

Die Spiegelung einer zu Z parallelen Strecke l_2 in bezug auf einen Punkt A, bzw. eines Punktes S in bezug auf eine zu Z parallele Strecke l_1, gemäss dem Verhältnis $a:b$, liefert als Abbildung eine zu Z parallele Strecke von der Länge $\frac{a-b}{a+b}\,l_2$ bzw. $\frac{2a}{a+b}\,l_1$. Die gemäss dem Verhältnis $b:a$ erfolgende Spiegelung der Strecke l_1 in bezug auf den Punkt S, bzw. des Punktes A in bezug auf die Strecke l_2, liefert als Abbildung eine zu Z parallele Strecke von der Länge $\frac{a-b}{a+b}\,l_1$ bzw. $\frac{2b}{a+b}\,l_2$. Wird l_2 in bezug auf l_1 gemäss Verhältnis $a:b$ gespiegelt, so entsteht als Abbildung von l_2 eine in dessen Verlängerung liegende Strecke von der Länge (2) $\frac{a-b}{a+b}\,l_2 + \frac{2a}{a+b}\,l_1$; wird l_1 in bezug auf l_2 gemäss dem Verhältnis $b:a$ gespiegelt, so ergibt sich als Abbildung von l_1 eine in dessen Verlängerung gelegene Strecke von der Länge (3) $\frac{a-b}{a+b}\,l_1 + \frac{2b}{a-b}\,l_2$. Die Abbildungen der in bezug aufeinander gespiegelten Rechtecke, bzw. Rechtkante II und I sind Rechtecke bzw. Rechtkante von den Längen (2) und (3) und den Höhen h_2 und h_1 bzw. den Querschnitten F_2 und F_1 der abgebildeten Rechtkante.

Für die Abbildungen beliebiger Körper lassen sich allgemeine Volumformeln nur aufstellen, wenn die Oberfläche der Körper von Parallelen zu Z höchstens zweimal geschnitten werden kann. In diesem Falle erhält man für die gemäss dem Verhältnis $a:b$

erfolgende Abbildung eines Körpers II vom Volumen V_2, dessen Projektion auf eine zu Z senkrechte Ebene den Flächeninhalt F_2 besitzt, das Bildkörpervolumen $\frac{a-b}{a+b} V_2 + \frac{2a}{a+b} F_2 l_1$, sofern die Spiegelung sich auf den unendlichen Teil des Raumes bezieht, der zwischen zwei zu Z senkrechten Ebenen vom Abstand l_1 eingeschlossen ist. Erfolgt die Spiegelung gemäss dem Verhältnis $b:a$, so ist das Volumen der Abbildung des gleichen Körpers $\frac{a-b}{a+b} V_2 + \frac{2b}{a+b} F_2 l_1$. Wird ein anderer Körper, I, vom Volumen V_1, der zwischen den genannten Ebenen eingeschlossen sei und dessen Projektion auf eine dieser Ebenen den Flächeninhalt F_1 habe, gemäss dem Verhältnis $b:a$ gespiegelt, in bezug auf den Körper II, bzw. in bezug auf den unendlichen Teil des Raumes, der von zwei zu Z senkrechten, den Körper II einschliessenden Ebenen vom Abstand l_2 begrenzt wird, so ergibt sich das Volumen des Bildkörpers von I, der vorigen Formel entsprechend, zu $\frac{a-b}{a+b} V_1 + \frac{2b}{a+b} F_1 l_2$[1]).

Aus den eben gegebenen allgemeinen Ausdrücken lässt sich eine bemerkenswerte Folgerung ziehen: *Das Produkt der Volumina von zwei in bezug aufeinander gespiegelten Körpern ist im allgemeinen kleiner als das Volumprodukt ihrer Bildkörper, nie grösser.* Es ist

$$\frac{\left(\frac{a-b}{a+b} V_2 + \frac{2a}{a+b} F_2 l_1\right) \cdot \left(\frac{a-b}{a+b} V_1 + \frac{2b}{a+b} F_1 l_2\right)}{V_1 V_2} =$$

$$= \frac{(a-b)^2 + 4ab \frac{F_1 l_1}{V_1} \frac{F_2 l_2}{V_2}}{(a+b)^2} + \frac{2(a-b)}{(a+b)^2} \left(\frac{F_2 l_1}{V_2} a + \frac{F_1 l_2}{V_1} b\right) \geqq 1.$$

Daraus ergibt sich, dass die Spiegelung zweier Körper in bezug aufeinander im allgemeinen nicht umkehrbar ist, d. h. es ist nicht möglich, durch Spiegelung der Bildkörper in bezug aufeinander zu den ursprünglichen Körpern zurück zu gelangen. Nur in einem speziellen Falle wird obige Ungleichung zur Gleichung und die Spiegelung reversibel, dann nämlich, wenn $F_1 l_1 = V_1$ und $F_2 l_2 = V_2$, d. h., wenn die abgebildeten Körper gerade Prismen darstellen, deren Grundflächen zu Z senkrecht stehen, und wenn überdies $a = b$ ist.

---

[1]) Die Abbildungen von Körpern, die von Parallelen zu Z in mehr als zwei Punkten geschnitten werden, haben ein grösseres Volumen als diese Ausdrücke angeben, da die konkaven Stellen bei der Abbildung ganz oder teilweise ausgefüllt werden.

Der Fall $a = b$ zeigt folgende Besonderheit. Die Abbildung eines geometrischen Gebildes in bezug auf einen Punkt ist gleich der Projektion des Gebildes auf die senkrecht zu Z durch den Bezugspunkt gelegte Ebene. Daraus folgt: Die Abbildung einer zu Z parallelen Strecke, einer zu Z parallelen ebenen Figur, eines Körpers in bezug auf einen Punkt ist ein Punkt bzw. eine Strecke bzw. eine ebene Figur. Die Abbildung eines Punktes in bezug auf eine zu Z parallele Strecke ist gleich dieser Strecke. Die Spiegelung eines Körpers in bezug auf einen andern Körper ergibt, unabhängig von der Form des einen wie des andern Körpers, stets ein gerades Prisma, dessen Grundflächen zur Spiegelungsrichtung senkrecht stehen. Im besonderen liefert die gemäss dem Verhältnis $1:1$ durchgeführte Spiegelung unseres Rechtkants II vom Volumen l_2F_2 in bezug auf das Rechtkant I vom Volumen l_1F_1 als Abbildung ein Rechtkant l_1F_2, und die Abbildung von Rechtkant I in bezug auf das Rechtkant II ist ein Rechtkant l_2F_1.

3. *Einfluss einer Lageveränderung abgebildeter Rechtkante auf ihre Abbildungen.*

Bei einer Verschiebung des einen oder andern der beiden Rechtkante I und II, oder beider zusammen, in Richtung Ξ, H oder Z, erfahren auch ihre Bildkörper Verschiebungen in der gleichen Richtung, deren Betrag und Richtungssinn den Gleichungen (1) zu entnehmen ist: Verschiebungen der Rechtkante in Richtung Ξ oder H bedingen nach Richtungssinn und Betrag gleiche Verschiebungen ihrer Bildquader. Die in Richtung Z erfolgenden Verschiebungen λ_1 und λ_2 der Rechtkante I und II ergeben, an Stelle von ζ_1 und ζ_2 in die Gleichungen eingesetzt, die Verschiebungen λ_1' und λ_2' der zugehörigen Bildquader. — In Hinsicht auf die nachfolgenden Ausführungen interessiert vor allem, unter welchen Bedingungen, bei gleichzeitiger Verschiebung beider Rechtkante in Richtung Z, das Bildquader des einen seine Lage beibehalten kann. Für die Fixierung der Abbildung des gemäss dem Verhältnis $a:b$ gespiegelten Rechtkants II ergibt sich die Bedingung, dass die Verschiebungen von Rechtkant II und I gleichsinnig und im Streckenverhältnis $2a:(a-b)$ erfolgen. Es gelten die Gleichungen $\frac{\lambda_2}{2a} = \frac{\lambda_1}{a-b} = \frac{\lambda_1'}{a+b}$; $\lambda_2' = 0$. Die Fixierung der Abbildung des gemäss dem Verhältnis $b:a$ gespiegelten Rechtkants I ist an die Bedingung geknüpft, dass die Verschiebungen der Rechtkante I und II gegensinnig und im Streckenverhältnis $2b:(a-b)$ erfolgen. Es gelten die Gleichungen $\frac{\lambda_1}{2b} = \frac{-\lambda_2}{a-b} = \frac{\lambda_2'}{a+b}$;

$\lambda_1' = 0$. Sollen die abzubildenden Rechtkante I und II eben um ihre eigene Länge verschoben werden ($|\lambda_1| = l_1$, $|\lambda_2| = l_2$), so müssen demnach diese Längen im Verhältnis $(a - b) : 2\,a$ bzw. $2\,b : (a - b)$ zueinander stehen. Während das eine Bildquader seinen Ort beibehält, verschiebt sich in diesem Falle das andere Bildquader genau um seine eigene Länge!

Die bis dahin abgeleiteten Beziehungen sind von den Beträgen und den Richtungen der Geschwindigkeiten unabhängig. Insbesondere macht es keinen Unterschied aus, ob die betrachteten, abgegrenzten Geschwindigkeitsbereiche endlich seien oder unendlich klein.

4. *Abbildung als Funktion der Zeit.*

Zahl sowie örtliche und zeitliche Anordnung der in einem Zeitintervall $t - t_0$ in vorgegebener Zentrilinienrichtung erfolgenden Zusammenstösse zwischen den Kugeln zweier Gruppen, deren Geschwindigkeitspunkte zur Zeit t_0 zwei bestimmte Abschnitte des Geschwindigkeitsraumes erfüllen, sind mitbedingt durch die Radien der Kugeln und ihre Lagekoordinaten zur Zeit t_0. Von diesen Grössen hängt daher auch ab, ob die Bildkörper der beiden Raumabschnitte von den während $t - t_0$ dislozierten Geschwindigkeitspunkten ganz oder nur zu einem Teile beansprucht werden. Da die vorliegenden Untersuchungen sich auf den Geschwindigkeitsraum beschränken sollen, wird darauf verzichtet, die verschiedenen Möglichkeiten der räumlichen Anordnung der Kugeln zu diskutieren. An die Stelle von Festsetzungen bezüglich der Lage der Kugeln treten Annahmen über das „Gruppen-Abbildungsverfahren" im Geschwindigkeitsraum, d. h. über das Auswahlprinzip der in bezug aufeinander gespiegelten Geschwindigkeitspunkte der beiden Gruppen.

Zu den Kugelgruppen I und II zurückkehrend, deren Geschwindigkeitspunkte zur Zeit t_0 in den Quadern I und II liegen, nehmen wir an, während einer Zeitspanne $\triangle t$ trete jeder beliebig abgegrenzte, nicht zu kleine Bezirk des einen Rechtskants mit jedem beliebig abgegrenzten, nicht zu kleinen Bezirk des andern Rechtkants in Beziehung, und die Zahl der Geschwindigkeitspunkte, die aus zwei solchen Quaderabschnitten durch Spiegelung in bezug aufeinander disloziert werden, sei proportional dem Zeitintervall $\triangle t$ — sofern dieses sehr klein ist —, proportional der Zahl der Geschwindigkeitspunkte in jedem der beiden Abschnitte — sofern die Punkte darin gleichmässig verteilt sind — und drittens abhängig von der Lage der Abschnitte im Geschwindigkeitsraum. Bei diesem „ungeordneten" Verfahren der Gruppenabbildung, das

in Abschnitt IV durch den *Stosszahlansatz* seine spezielle Fassung erhalten wird, nehmen die dislozierten Geschwindigkeitspunkte offensichtlich das ganze Volumen der Bildquader in Anspruch. Sind die Rechtkante I und II gleichmässig von Geschwindigkeitspunkten erfüllt, und sind ihre Abmessungen klein gegenüber ihrem Abstand voneinander und vom Nullpunkt, so dass bei den Abschnitten eines Rechtkants der Einfluss ihres Lageunterschiedes vernachlässigt werden kann, so lässt sich die Verteilung der während $\triangle t$ dislozierten Geschwindigkeitspunkte in den Bildquadern bestimmen. Werden nämlich die beiden Rechtkante durch parallel zu den Koordinatenebenen gelegte Ebenen derart in gleichviele und unter sich gleiche Abteilungen unterteilt, dass deren Form der Würfelform möglichst nahe kommt, und dass deren Anzahl, ins Quadrat erhoben, gleich der Zahl der während $\triangle t$ aus *einem* Rechtkant dislozierten Punkte ist (bei geeigneter Wahl von $\triangle t$ realisierbar), so tritt bei den während $\triangle t$ erfolgenden Spiegelungen der Geschwindigkeitspunkte jede Abteilung des einen mit jeder Abteilung des andern Rechtkants einmal in Beziehung, und es ergibt sich: Die Dichte der Punkte nimmt im Bildquader von Rechtkant II bzw. I vom Werte 0 an den beiden Endflächen nach der Mitte hin gleichmässig zu, bis sie — in einem Abstand von den Endflächen gleich dem kleinern Summanden des Ausdrucks (2) bzw. (3) — einen Maximalwert erreicht, der dann im mittleren Teil des Quaders unverändert beibehalten wird. Sind die Summanden gleich, d. h. ist $l_2 : l_1 = 2\,a : (a - b)$ bzw. $(a - b) : 2\,b$, so wird der Maximalwert der Dichte erst in der Mittelebene des Bildquaders erreicht. Im Falle $a = b$ besteht kein Dichteanstieg; das ganze Bildquader ist gleichmässig von Bildpunkten erfüllt, und die Punkte einer Abteilung verteilen sich nach der Spiegelung über die ganze Längenausdehnung des Bildquaders. — Die Angaben über die Punktverteilung in den Bildquadern treffen um so genauer zu, je grösser die Zahl der während $\triangle t$ aus den Rechtkanten dislozierten Geschwindigkeitspunkte ist.

III. Zeitliche Änderung der Zahl der Geschwindigkeitspunkte in einem Element des Geschwindigkeitsraumes durch Stösse vorgegebener Zentrilinienrichtung.

Der durch das Ξ, H, Z-Koordinatensystem, dessen Z-Achse die vorgegebene Zentrilinienrichtung besitzt, definierte Geschwindigkeitsraum sei in orts- und zeitvariabler Dichte $\sigma\,(\xi, \eta, \zeta)$ und $\tau\,(\xi, \eta, \zeta)$ von Geschwindigkeitspunkten erfüllt, die zu einer endlichen Zahl von Kugeln der Masse m_1 und m_2 gehören. Die beiden

Kugelarten mögen als Kugeln erster und zweiter Art unterschieden werden. Durch Ebenen, die in gleichen Abständen voneinander parallel zu den Koordinatenebenen gelegt seien, werde der Raum in kongruente Quader $\triangle \omega_1'$ von der in Richtung Z gemessenen Länge l_1 und dem Querschnitt F_1 aufgeteilt. Überdies werde durch vier Ebenen, die paarweise der HZ- und der $Z\Xi$-Ebene parallel laufen, eine in Richtung Z orientierte unendliche Vierkantröhre vom Querschnitt F_2 abgegrenzt, die durch senkrecht dazu gelegte Ebenen in Quader $\triangle \omega_2'$ von der Länge l_2 unterteilt sei. Schliesslich möge in dieser Vierkantröhre durch zwei weitere, senkrecht dazu gelegte Ebenen ein besonderes Quader $\triangle \omega_2$ von der Länge Λ_2 abgegrenzt werden. Darin soll während der sehr kleinen Zeit $\triangle t$ der in Richtung Z vor sich gehende Zu- und Abgang von Geschwindigkeitspunkten zweiter Art bestimmt werden. Um nun die bereits eingeführten Punktdichten σ und τ als Quotient $\frac{\text{Punktzahl}}{\text{Quadervolumen}}$ definieren und als Funktionen der ξ, η, ζ darstellen zu können, nehmen wir an, die Geschwindigkeitspunkte seien in dem Teil des Raumes, der die überwiegende Anzahl davon enthält, derart verteilt, dass die Quader $\triangle \omega_1'$ und $\triangle \omega_2'$ bei geeigneter Wahl ihrer Abmessungen den in der Einleitung angeführten drei Bedingungen genügen[1]).

1. Die Zahl der im Zeitelement $\triangle t$ aus Richtung Z in ein Element des Geschwindigkeitsraumes einfallenden Geschwindigkeitspunkte.

Die in das Element $\triangle \omega_2$ einfallenden Punkte stammen aus den Elementen $\triangle \omega_2'$ der gemeinsamen Vierkantröhre. Sie lassen sich in zwei Gruppen ordnen, die nachstehend gesondert behandelt werden.

A. Zusammenstösse von Kugeln zweiter Art mit Kugeln erster Art. ($m_1 : m_2 = a : b$; $a > b$.)

In den Elementen $\triangle \omega_1'$ werden nur die Geschwindigkeitspunkte erster Art, in den Elementen $\triangle \omega_2'$ nur die zweiter Art berücksichtigt. Ein Element $\triangle \omega_2'$ und ein Element $\triangle \omega_1'$, die so gelagert seien, dass bei der Spiegelung von $\triangle \omega_2'$ in bezug auf $\triangle \omega_1'$ der Mittelpunkt des Bildquaders von $\triangle \omega_2'$ mit dem Mittelpunkt von $\triangle \omega_2$ zusammenfällt, seien hervorgehoben. Das erwähnte Bildquader, „hervorgehobenes" Bildquader genannt, hat

[1]) Diesen Elementen fehlt der infinitesimale Charakter der Differentiale. Deshalb wird an Stelle des Differentialzeichens d das Differenzenzeichen Δ verwendet. An die Stelle des Integralzeichens müsste das Summenzeichen treten; der Raumersparnis wegen wird jedoch das erstere benützt.

die Länge (2); das Bildquader des bezüglich $\triangle \omega_2'$ gespiegelten Elementes $\triangle \omega_1'$ besitzt die Länge (3); es werde mit $\triangle \omega_1$, seine Länge mit L_1 bezeichnet. Wir setzen nun

$$\frac{a-b}{a+b}\, l_2 = \frac{2\,a}{a+b}\, l_1 = \Lambda_2 . \tag{4}$$

Dieser auf den Ergebnissen von Abschnitt II, 3) basierende Ansatz führt allein zu den gewünschten Integralgleichungen. $\triangle \omega_2$ liegt innerhalb des „hervorgehobenen" Bildquaders und nimmt die Hälfte von dessen Volumen ein. l_2, l_1, L_1 sind durch Λ_2 bestimmt. Es ist

$$L_1 = \frac{(a+b)^2}{2\,a\,(a-b)}\, \Lambda_2 .$$

Aus den drei angegebenen Bestimmungsgleichungen lässt sich die nur für den gewählten Ansatz gültige Beziehung

$$\triangle \omega_1' \cdot \triangle \omega_2' = \triangle \omega_1 \cdot \triangle \omega_2 \tag{5}$$

entnehmen. Die Mittelpunktkoordinaten der Raumelemente seien von $\triangle \omega_1$ ξ_1, η_1, ζ_1, von $\triangle \omega_2$ ξ_2, η_2, ζ_2, von $\triangle \omega_1'$ $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$; von $\triangle \omega_2'$ $\xi_2', \eta_2', \zeta_2'$.

Die Mittelpunktkoordinaten der hervorgehobenen Elemente und ihrer Abbildungen genügen den Beziehungen (1).

Für die Zahl der während $\triangle t$, durch Spiegelung in bezug auf Punkte erster Art des hervorgehobenen Elementes $\triangle \omega_1'$, aus dem hervorgehobenen Element $\triangle \omega_2'$ in Richtung Z entfernten Geschwindigkeitspunkte zweiter Art ergibt sich auf Grund der in Abschnitt II, 4) gemachten Annahmen, die hier übernommen und auf den ganzen Geschwindigkeitsraum angewendet werden, der Ausdruck

$$\begin{aligned} &\triangle t \cdot \Phi_{21}(\xi_2'-\xi_1', \eta_2'-\eta_1', \zeta_2'-\zeta_1') \\ &\cdot \tau(\xi_2', \eta_2', \zeta_2') \cdot \triangle \omega_2' \cdot \sigma(\xi_1', \eta_1', \zeta_1') \cdot \triangle \omega_1' . \end{aligned} \tag{6}$$

(Die Lageabhängigkeit ist berücksichtigt in Faktor Φ_{21}, der als Funktion der Koordinatendifferenzen von $\triangle \omega_2'$ und $\triangle \omega_1'$ aufgefasst wird.) Die gemäss (6) dislozierten Geschwindigkeitspunkte gelangen in das „hervorgehobene" Bildquader, welches das Element $\triangle \omega_2$ enthält. Bildet man nun durch Verlängerung der Längsflächen des hervorgehobenen Elementes $\triangle \omega_1'$ eine in Richtung Z orientierte Vierkantröhre vom Querschnitt F_1 und bestimmt die Gesamtzahl der Punkte, die während $\triangle t$ aus dem hervorgehobenen Element $\triangle \omega_2'$ in bezug auf Punkte erster Art dieser Vierkantröhre in das „hervorgehobene "Bildquader gespiegelt werden, so erkennt man: 1. Ausser dem hervorgehobenen Element $\triangle \omega_1'$ sind noch

die dazu beidseits benachbarten Elemente $\triangle \omega_1'$ als Bezugselemente an der Lieferung von Geschwindigkeitspunkten beteiligt, da die durch Spiegelung in bezug auf diese beiden Elemente gewonnenen Bildquader von $\triangle \omega_2'$ in der Mitte von $\triangle \omega_2$ zusammenstossen und je zur Hälfte in das „hervorgehobene" Bildquader hineinragen. 2. Da Φ_{21} und σ für die drei benachbarten Elemente $\triangle \omega_1'$ angenähert den gleichen Wert besitzen, liefern diese Elemente zusammen, gemäss den in Abschnitt II, 4) enthaltenen Angaben über die Verteilung der Bildpunkte, angenähert doppelt soviele Punkte in das „hervorgehobene" Bildquader als das hervorgehobene Element $\triangle \omega_1'$ allein, und da diese Bildpunkte annähernd gleichmässig verteilt sind, entfällt die Hälfte davon auf $\triangle \omega_2$. Das bedeutet, dass die Zahl der Geschwindigkeitspunkte, die während $\triangle t$ aus dem hervorgehobenen Element $\triangle \omega_2'$, durch Spiegelung in bezug auf die Punkte erster Art der zu $\triangle \omega_1'$ gehörenden Vierkantröhre, in das Element $\triangle \omega_2$ befördert werden, gleich der Zahl der Geschwindigkeitspunkte ist, die in derselben Zeit aus dem hervorgehobenen Element $\triangle \omega_2'$ durch Spiegelung in bezug auf Punkte des hervorgehobenen Elementes $\triangle \omega_1'$ disloziert werden, also gleich dem Ausdruck (6). Durch Summierung des Ausdrucks über alle Werte von ξ_1' und η_1' erhält man die Gesamtzahl der Punkte, die während $\triangle t$ aus dem hervorgehobenen Element $\triangle \omega_2'$ in das Element $\triangle \omega_2$ gelangen. Bei weiterer Summation, bezüglich ζ_1', resultiert die Gesamtzahl der aus Richtung Z in das Element $\triangle \omega_2$ einfallenden Punkte zweiter Art:

$$\triangle N_{21} = \triangle t \cdot \triangle \omega_2' \int_{\zeta_1'} \int_{\eta_1'} \int_{\xi_1'} \tau \left(\xi_2', \eta_2', \frac{2a}{a-b} \zeta_1' - \frac{a+b}{a-b} \zeta_2 \right)$$
$$\cdot \Phi_{21} \cdot \sigma (\xi_1', \eta_1', \zeta_1') \cdot \triangle \omega_1',$$

wobei $\Phi_{21} = \Phi_{21} \left(\xi_2' - \xi_1', \eta_2' - \eta_1', \frac{a+b}{a-b} (\zeta_1' - \zeta_2) \right)$.

Statt bezüglich $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$ kann der Ausdruck (6) bezüglich ξ_1, η_1, ζ_1 summiert werden; mit Hilfe der Beziehungen (1) und (5) erhält man:

$$\triangle N_{21} = \triangle t \cdot \triangle \omega_2 \int_{\zeta_1} \int_{\eta_1} \int_{\xi_1} \tau \left(\xi_2, \eta_2, \frac{2a}{a+b} \zeta_1 - \frac{a-b}{a+b} \zeta_2 \right)$$
$$\cdot \Phi_{21} \cdot \sigma \left(\xi_1, \eta_1, \frac{a-b}{a+b} \zeta_1 + \frac{2b}{a+b} \zeta_2 \right) \cdot \triangle \omega_1. \tag{7}$$

Φ_{21} steht für $\Phi_{21} (\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1, \zeta_1 - \zeta_2)$.

B. Zusammenstösse der Kugeln zweiter Art untereinander. ($a = b$.)

Während das Element $\triangle \omega_2$ unverändert aus A. übernommen wird, samt der zugehörigen Vierkantröhre, erfahren die Längen der Elemente $\triangle \omega_1'$ und $\triangle \omega_2'$ eine Veränderung, da der Ansatz (4) nicht anwendbar ist. Setzt man $\triangle \omega_1'' = l_1' F_1$, $\triangle \omega_2'' = l_2' F_2$, und bezeichnet die Länge des Bildquaders von $\triangle \omega_1''$ mit L_1', so ist nach dem Schlussatz von Abschnitt II, 2) $l_1' = \Lambda_2$, $l_2' = L_1'$. l_2' ist durch Λ_2 nicht bestimmt; es wird der Einfachheit halber gleich der Länge L_1 des unter A. eingeführten Elementes $\triangle \omega_1$ gesetzt: $l_2' = L_1' = L_1$; $L_1' F_1 = L_1 F_1 = \triangle \omega_1$. In den Elementen $\triangle \omega_1''$ und $\triangle \omega_2''$ werden nur die Geschwindigkeitspunkte zweiter Art berücksichtigt.

Die Zahl der Geschwindigkeitspunkte zweiter Art, die während $\triangle t$ aus einem hervorgehobenen Element $\triangle \omega_2''$ durch Spiegelung in bezug auf Punkte eines in passender Lage befindlichen hervorgehobenen Elementes $\triangle \omega_1''$ in Richtung Z disloziert werden, ist gegeben durch den Ausdruck

$$\triangle t \cdot \Phi_{22}(\xi_2'' - \xi_1'', \eta_2'' - \eta_1'', \zeta_2'' - \zeta_1'') \cdot \tau(\xi_2'', \eta_2'', \zeta_2'') \cdot \triangle \omega_2'' \cdot \tau(\xi_1'', \eta_1'', \zeta_1'') \cdot \triangle \omega_1''.$$

Diese Punkte gelangen tatsächlich, nicht nur rechnungsmässig, in das Quader $\triangle \omega_2$, das anderseits keine Nebeneinkünfte zu verzeichnen hat; denn nur die in Richtung Z sich erstreckende Vierkantröhre vom Querschnitt F_2 und die dazu senkrechte, unendlich ausgedehnte Scheibe von der Dicke $l_1' = \Lambda_2$, welche beide das Element $\triangle \omega_2$ enthalten, sind an der Lieferung der Geschwindigkeitspunkte beteiligt. Summation des Ausdrucks bezüglich ξ_1'' und η_1'' führt zur Gesamtzahl der aus dem hervorgehobenen Element $\triangle \omega_2''$ in das Element $\triangle \omega_2$ gelangenden Punkte; weitere Summation bezüglich ζ_2'' liefert die Gesamtzahl der aus Richtung Z in das Element $\triangle \omega_2$ einfallenden Punkte. Unter Benützung der Gleichungen (1) und der Beziehung

$$\triangle \omega_1'' \cdot \triangle \omega_2'' = \triangle \omega_1 \cdot \triangle \omega_2 \tag{8}$$

erhält man so

$$\triangle N_{22} = \triangle t \cdot \triangle \omega_2 \int_{\zeta_1} \int_{\eta_1} \int_{\xi_1} \tau(\xi_2, \eta_2, \zeta_1) \cdot \Phi_{22}(\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1, \zeta_1 - \zeta_2) \cdot \tau(\xi_1, \eta_1, \zeta_2) \cdot \triangle \omega_1. \tag{9}$$

Gleichung (7) geht für $a = b$ in (9) über.

In ganz entsprechender Weise lässt sich die Zahl der Geschwindigkeitspunkte erster Art berechnen, die während $\triangle t$ in Richtung Z in ein gegebenes Raumelement $\triangle \Omega_1$ hineingelangen. Die beiden Integralgleichungen, die man dabei erhält, können auch rein formal aus den Gleichungen (7) und (9) hergeleitet werden, indem man in diesen ω durch Ω, σ durch τ, τ durch σ, a durch b, b durch a, und bei den Indices 1 durch 2 und 2 durch 1 ersetzt.

2. *Die Zahl der im Zeitintervall $\triangle t$ aus einem Element des Geschwindigkeitsraumes in Richtung Z dislozierten Geschwindigkeitspunkte.*

Die Zahlen $\triangle M_{21}$ und $\triangle M_{22}$ der Geschwindigkeitspunkte zweiter Art, die in der Zeit $\triangle t$ durch Spiegelung in bezug auf Geschwindigkeitspunkte erster bzw. zweiter Art aus dem Raumelemente $\triangle \omega_2$ in Richtung Z entfernt werden, sind nach Abschnitt II, 4) gegeben durch die Gleichungen

$$\triangle M_{21} = \triangle t \cdot \triangle \omega_2 \cdot \tau(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \cdot \int_{\zeta_1}\int_{\eta_1}\int_{\xi_1} \Phi_{21}(\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1, \zeta_2 - \zeta_1) \cdot \sigma(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \cdot \triangle \omega_1,$$

$$\triangle M_{22} = \triangle t \cdot \triangle \omega_2 \cdot \tau(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \cdot \int_{\zeta_1}\int_{\eta_1}\int_{\xi_1} \Phi_{22}(\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - n_1, \zeta_2 - \zeta_1) \cdot \tau(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \cdot \triangle \omega_1.$$

Die Zahl der Geschwindigkeitspunkte erster Art, die während $\triangle t$ aus dem Raumelement $\triangle \Omega_1$ in Richtung Z disloziert werden, ist durch zwei entsprechende Integralgleichungen bestimmt. Sie lassen sich nach dem in 1) angegebenen formalen Verfahren aus dem eben angeschriebenen Gleichungspaar ableiten.

IV. Ableitung des Geschwindigkeitsverteilungs-Satzes.

1. *Bestimmung des Faktors Φ durch den Stosszahlansatz.*

Die im Geschwindigkeitsraum verteilten Punkte mögen sich auf die als elastische Kugeln aufgefassten Moleküle beziehen, die in einem Kubikzentimeter eines im stationären Zustand befindlichen, ruhenden Gemisches von zwei idealen Gasen enthalten seien. Die Moleküle des einen Gases — Moleküle erster Art genannt — mögen die Masse m_1 und den Kugelradius R_1, die des andern Gases — Moleküle zweiter Art geheissen — die Masse m_2 und den Kugelradius R_2 besitzen. Es sei $m_1 > m_2$. Bei Abwesen-

heit äusserer Kräfte ist nach dem Stosszahlansatz[1]) die Zahl der Geschwindigkeitspunkte zweiter Art, die während $\triangle t$ aus einem Element $\triangle \omega_2$ in Richtung Z disloziert werden infolge von Zusammenstössen der zugehörigen Kugeln mit Kugeln der ersten Art, deren Geschwindigkeitspunkte sich in einem Element $\triangle \omega_1$ befinden,

$$\triangle t \cdot \triangle \mathrm{o} \cdot (R_1 + R_2)^2 \cdot g \cos \varepsilon \cdot \tau(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \cdot \triangle \omega_2 \cdot \sigma(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \cdot \triangle \omega_1.$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für die andern Stosskombinationen der beiden Molekülarten. Daraus geht hervor, dass die im vorstehenden Abschnitt abgeleiteten Integralgleichungen sich ohne weiteres auf das vorliegende Molekülsystem anwenden lassen, wenn man für Φ die durch die nachstehenden Gleichungen gegebenen Ausdrücke einsetzt:

$$\Phi_{21} = \Phi_{12} = \triangle \mathrm{o} \cdot (R_1 + R_2)^2 \cdot g \cos \varepsilon, \; \Phi_{22} = \triangle \mathrm{o} \cdot (2\, R_2)^2 \cdot g \cos \varepsilon,$$

$$\Phi_{11} = \triangle \mathrm{o} \cdot (2\, R_1)^2 \cdot g \cos \varepsilon.$$

$\triangle \mathrm{o}$ ist der absolute Betrag des sehr kleinen Raumwinkels, in dem sich die vorgegebene Zentrilinie befindet, g der absolute Betrag des Mittelpunktabstandes der Elemente $\triangle \omega_1$ und $\triangle \omega_2$, bzw. $\triangle \Omega_1$ und $\triangle \Omega_2$; ε ist der spitze Winkel zwischen dem genannten Abstand und der Zentrilinie (der Z-Achse). Es ist $g \cos \varepsilon = |\zeta_2 - \zeta_1|$.

Der Faktor $\triangle \mathrm{o}$ im Ausdruck für Φ bedeutet, dass der Zentrilinie nicht eine genau bestimmte Richtung zukommt, sondern dass ihr alle im Raumwinkelelement vorkommenden Richtungen zuerteilt werden müssen. Dieser Umstand bedingt eine Modifikation der bisherigen geometrischen Betrachtungsweise. Die Geschwindigkeitspunkte, die in das Element $\triangle \omega_2$ gespiegelt werden, befinden sich nicht mehr in einer Vierkantröhre vom Querschnitt F_2, sondern in einem Raumwinkel von der Öffnung $\triangle \mathrm{o}$ und der Form einer an der Spitze leicht abgestumpften, vierseitigen, körperlichen Ecke. Die Abbildung eines Punktes, der in bezug auf einen andern Punkt gespiegelt wird, ist nicht mehr ein Punkt, sondern ein Kugelflächenstück, das bei grossen Werten von g beträchtliche Ausmasse erreichen kann. Trotzdem bleiben die für eine Zentrilinie genau bestimmter Richtung abgeleiteten Integralgleichungen richtig, sofern eine aus den veränderten Verhältnissen sich ergebende Bedingung erfüllt ist. Wir nehmen eine der durch $\triangle \mathrm{o}$ gegebenen Richtungen zur Hauptrichtung und

[1]) Vgl. P. und T. Ehrenfest, Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. Enzykl. mathem. Wissenschaft. Bd. IV, D, Heft 32 (1911), S. 13.

rechnen so, als ob die aus einem hervorgehobenen Element $\triangle \omega_2'$ in den Raumwinkel $\triangle$ o gestreuten Bildpunkte alle genau in die Hauptrichtung gespiegelt würden. Die Rechnung ist zulässig, wenn der Streuungsverlust durch einen Streuungsgewinn kompensiert wird. Der letztere stammt entweder aus benachbarten Elementen $\triangle \omega_2'$, die bei der Spiegelung in Richtung $\triangle$ o und in bezug auf das hervorgehobene Element $\triangle \omega_1'$ Bildpunkte in das Element $\triangle \omega_2$ streuen; oder er wird dargestellt durch Punkte aus demselben hervorgehobenen Element $\triangle \omega_2'$, die nicht in bezug auf das hervorgehobene Element $\triangle \omega_1'$ selbst, sondern auf dazu benachbarte Elemente gespiegelt werden an Ebenen, die zu den Nebenrichtungen im Raumwinkel $\triangle$ o senkrecht stehen. (Nebenrichtungen sind in $\triangle$ o alle Richtungen ausser der Hauptrichtung der Zentrilinie.) Damit der Verlust durch den Gewinn vollständig ausgeglichen werde, muss die Dichte der Geschwindigkeitspunkte in der in Betracht fallenden Umgebung des hervorgehobenen Elementes $\triangle \omega_2'$ bzw. $\triangle \omega_1'$ die gleiche sein wie im Element selbst, wenigstens in grosser Näherung. Das ist die oben genannte Bedingung. Sind nun, wie man annimmt, im ruhenden Gasgemisch, das sich im stationären Zustand befindet, alle Geschwindigkeitsrichtungen gleichwertig, so sind die Dichten σ und τ Funktionen der Summe $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, und jedes Element des Geschwindigkeitsraumes gehört einer Kugelschale konstanter Dichte an. Damit ist der gegebenen Bedingung Genüge geleistet.

2. *Zusammenstösse in vorgegebener Zentrilinienrichtung.*

Die in Richtung Z erfolgenden Zusammenstösse zwischen den Molekülen bewirken in der Zeit $\triangle t$ im Element $\triangle \omega_2$ des Geschwindigkeitsraumes eine Zunahme der Zahl der Geschwindigkeitspunkte zweiter Art um

$$\begin{aligned} &\triangle N_{21} - \triangle M_{21} + \triangle N_{22} - \triangle M_{22} \\ &= \triangle t \cdot \triangle \omega_2 \cdot \triangle \mathrm{o} \cdot \int\limits_{\zeta_1}\int\limits_{\eta_1}\int\limits_{\xi_1} |\zeta_2 - \zeta_1| \cdot \{(R_1 + R_2)^2 [\tau_2' \sigma_1' - \tau_2 \sigma_1] \\ &\quad + (2\, R_2)^2 [\tau_2'' \tau_1'' - \tau_2 \tau_1]\} \cdot \triangle \omega_1 \end{aligned} \tag{10}$$

und im Element $\triangle \Omega_1$ eine Zunahme der Zahl der Geschwindigkeitspunkte erster Art um

$$\begin{aligned} &\triangle N_{12} - \triangle M_{12} + \triangle N_{11} - \triangle M_{11} \\ &= \triangle t \cdot \triangle \Omega_1 \cdot \triangle \mathrm{o} \cdot \int\limits_{\zeta_2}\int\limits_{\eta_2}\int\limits_{\xi_2} |\zeta_1 - \zeta_2| \cdot \{(R_1 + R_2)^2 [\sigma'_1 \tau_2' - \sigma_1 \tau_2] \\ &\quad + (2R_1)^2 [\sigma_1'' \sigma_2'' - \sigma_1 \sigma_2]\} \cdot \triangle \Omega_2 . \end{aligned} \tag{11}$$

In diesen Gleichungen ist gesetzt

$$\sigma(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)=\sigma_1,\ \sigma(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)=\sigma_2,\ \sigma(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_2^2)=\sigma_1'',$$

$$\sigma(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_1^2)=\sigma_2'',\ \sigma\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\left[\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\zeta_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\zeta_2\right]^2\right)=\sigma_1';$$

$$\tau(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)=\tau_1,\ \tau(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)=\tau_2,\ \tau(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_2^2)=\tau_1'',$$

$$\tau(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_1^2)=\tau_2'',\ \tau\left(\xi_2^2+\eta_2^2+\left[\frac{2m_1}{m_1+m_2}\zeta_1-\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\zeta_2\right]^2\right)=\tau_2'.$$

Alle bis dahin angeschriebenen Integrale erstrecken sich von $-\infty$ bis $+\infty$.

3. Zusammenstösse in allen Zentrilinienrichtungen. Die Verteilungsfunktion.

Das Ξ, H, Z-Koordinatensystem habe mit einem festen U, V, W-Koordinatensystem den Nullpunkt gemeinsam und rotiere derart in bezug auf dieses System, dass die Z-Achse stets die Richtung der Zentrilinie aufweise, während die H-Achse dauernd in der UV-Ebene liege. Für diese beiden Koordinatensysteme gelten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}\xi &= u\cos\vartheta\cos\varphi + v\cos\vartheta\sin\varphi - w\sin\vartheta,\\ \eta &= -u\sin\varphi + v\cos\varphi,\\ \zeta &= u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta,\end{aligned}$$

in denen ϑ den Winkel zwischen Z- und W-Achse bedeutet und φ den Winkel, den die $Z\Xi$-Ebene mit der U-Achse, bzw. die H- mit der V-Achse, einschliesst. $\triangle$ o lässt sich nun durch $\sin\vartheta\triangle\vartheta\triangle\varphi$ ausdrücken. In den Funktionen σ und τ werden die Variabeln ξ, η, ζ mittels der Transformationsgleichungen durch $u, v, w, \vartheta, \varphi$ substituiert, und für die entstehenden Funktionen von $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \vartheta, \varphi$ werden neue Bezeichnungen eingeführt, indem an Stelle der Buchstaben σ und τ die Buchstaben f und F gesetzt werden. Für $g\cos\varepsilon$ ergibt sich

$$|(u_2-u_1)\sin\vartheta\cos\varphi + (v_2-v_1)\sin\vartheta\sin\varphi + (w_2-w_1)\cos\vartheta|.$$

Aus den solchermassen umgewandelten Gleichungen (10) und (11) erhält man nunmehr durch Summation bezüglich $\triangle$ o und Division mit $\triangle t\cdot\triangle\omega_2$ bzw. $\triangle t\cdot\triangle\Omega_1$ die neuen Gleichungen

$$\frac{\triangle F_2}{\triangle t} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\triangle\vartheta\triangle\varphi\iiint_{-\infty}^{+\infty}\{(R_1+R_2)^2[F_2'f_1'-F_2f_1]$$
$$+(2R_2)^2[F_2''F_1''-F_2F_1]\}\cdot g\cos\varepsilon\cdot\triangle\omega_1,$$

$$\frac{\triangle f_1}{\triangle t} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin\vartheta \triangle\vartheta \triangle\varphi \iiint_{-\infty}^{+\infty} \{(R_1 + R_2)^2 [F_2' f_1' - F_2 f_1] + (2R_1)^2 [f_2'' f_1'' - f_2 f_1]\} \cdot g \cos\varepsilon \cdot \triangle \Omega_2 .$$

Von ihnen aus gelangt man in bekannter Weise[1]) zu den gesuchten Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen:

$$f(c^2) = Ae^{-k m_1 c^2};\ F(c^2) = Be^{-k m_2 c^2}.$$

Die im Vorstehenden durchgeführte, mit endlichen Grössen operierende Ableitung dieser Funktionen lässt erkennen, dass die Beziehungen (5) und (8), welche bei infinitesimaler Betrachtungsweise als mathematische Konsequenzen der Stossgleichungen (1) erscheinen, eine besondere Annahme zur Voraussetzung haben, die Annahme der „ungeordneten Gruppenabbildung". Diese Beziehungen besitzen demnach, wie der Stosszahlansatz, hypothetischen Charakter; wie dieser beruhen sie auf der Hypothese der molekularen Unordnung.

V. Bemerkungen.

Der in den Abschnitten II und III gegebenen geometrischen Ableitung der Beziehungen (5) und (8) ist eine analytische Ableitung an die Seite zu stellen. Wir substituieren in einem Integranden $\Psi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2$, in welchem Ψ eine beliebige, stetige Funktion der 6 Variabeln ist, mittels der Gleichungen (1) eine nach der andern dieser ungestrichenen Variabeln durch gestrichene. Lassen wir zunächst ξ_2, η_2, ζ_2 unverändert, so bekommen wir

$$d\xi_1 = d\xi_1',\ d\eta_1 = d\eta_1',\ d\zeta_1 = \frac{a+b}{a-b} d\zeta_1' = \frac{a+b}{2a} d\zeta_2';\ d\zeta_2' = \frac{2a}{a-b} d\zeta_1'.$$

Demnach gilt für konstantes ξ_2, η_2, ζ_2:

$$d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = \frac{a+b}{a-b} d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_1';\quad d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = \frac{a+b}{2a} d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_2'. \tag{12}$$

Die letztere Gleichung ist sowohl für $a > b$ wie für $a = b$ brauchbar; sie liefert für $a = b$ $d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_2'$. Bei der Substitution von ξ_2, η_2, ζ_2 erhalten wir dann weiter

$$d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2 = -\frac{a-b}{a+b} d\xi_2'\, d\eta_2'\, d\zeta_2' = \frac{2a}{a+b} d\xi_2'\, d\eta_2'\, d\zeta_1',$$

[1]) Vgl. L. Boltzmann, a. a. O. S. 30 ff.; L. Boltzmann und J. Nabl, Enzykl. math. Wissenschaften, Bd. V (1903—1921), S. 493 ff. (1905).

und $d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2$ geht über in $d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_1'\, d\xi_2'\, d\eta_2'\, d\zeta_2'$. Statt ξ_2, η_2, ζ_2 kann man zunächst ξ_1, η_1, ζ_1 unverändert lassen und erhält dabei die Beziehungen

$$d\zeta_1' = -\frac{2b}{a-b}\, d\zeta_2';$$

$$d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2 = -\frac{a+b}{a-b}\, d\xi_2'\, d\eta_2'\, d\zeta_2' = \frac{a+b}{2b}\, d\xi_2'\, d\eta_2'\, d\zeta_1';$$

$$d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = \frac{a-b}{a+b}\, d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_1' = \frac{2b}{a+b}\, d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_2'.$$

Die Ableitung tritt also in zwei Varianten auf, je nachdem $d\omega_2$ oder $d\Omega_1$ festgehalten wird.

Zwei weitere Ableitungen dieser Art sind bereits beschrieben. In der einen, von L. Boltzmann gegebenen[1]), werden zunächst die Differenzen $\xi_2 - \xi_1$, $\eta_2 - \eta_1$, $\zeta_2 - \zeta_1$ konstant gehalten, was einfach eine Parallelverschiebung der konstant gehaltenen Verbindungsstrecke g bedeutet; in der andern, von H. A. Lorentz angedeuteten[2]), und von L. Boltzmann und J. Nabl ausgeführten[3]) Ableitung werden die Summen $\xi_1 + \xi_2$, $\eta_1 + \eta_2$, $\zeta_1 + \zeta_2$ konstant gehalten, was einer Drehung von g um den festgehaltenen Punkt O (siehe Figur) gleichkommt. Der zu lösenden Aufgabe: Berechnung der Zahl der in einem fixen Raumelement ein- und austretenden Geschwindigkeitspunkte, ist nur die hier in ihren zwei Varianten gegebene Ableitung adaequat, bei der dieses Element tatsächlich festgehalten wird. Die andern beiden Ableitungen liefern für die erste Transformationsstufe statt der Beziehung (12) übereinstimmend die Gleichung $d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_1'$. Diese, im Rahmen der Ableitung richtige Beziehung mag Boltzmann[4]) zur Aufstellung seiner irrigen Behauptung veranlasst haben, die später von A. Byk[5]) und G. Jäger[6]) übernommen worden ist, es sei bei Festhaltung des einen Raumelements $d\omega_1 = d\omega_1'$ und $d\omega_2 = d\omega_2'$.

---

[1]) Wiener Sitzungsberichte **94** (1886), 2. Abt., S. 640.
[2]) Ebenda **95** (1887), 2. Abt., S. 127.
[3]) Enzykl. mathem. Wissenschaften Bd. V, S. 512 (1905).
[4]) „Vorlesungen über Gastheorie." I. Teil (1896), S. 27 und 111.
[5]) „Einführung in die kinet. Theorie der Gase." I. (1910), S. 40.
[6]) Hdb. d. Physik, Bd. IX (1926), S. 365 (mit Figur).