

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 11 (1938)  
**Heft:** V

**Artikel:** Zur Theorie des Durchgangs von Ultraschallwellen durch eine feste Platte  
**Autor:** Levi, Fritz / Nath, Nagendra  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-110860>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Theorie des Durchgangs von Ultraschallwellen durch eine feste Platte

von Fritz Levi und N. S. Nagendra Nath<sup>1)</sup>.

(31. V. 38.)

## § 1. Problemstellung.

BÄR und WALTI<sup>2)</sup> sowie WALTI<sup>3)</sup> haben experimentell untersucht, wie eine in einem flüssigen Medium erzeugte Ultraschallwelle eine in den Weg gestellte planparallele Glasplatte durchsetzt. H. REISSNER<sup>4)</sup> hat das Problem bei beliebigem Einfallswinkel theoretisch behandelt und eine vollständige Lösung unter der Voraussetzung gegeben, dass keinerlei Dämpfung der Schallwellen eintritt. Der von WALTI durchgeführte Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen scheint zu zeigen, dass diese Voraussetzung in weitem Masse berechtigt ist.

In der folgenden Arbeit werden wir die gleiche Voraussetzung machen und so auch zu genau den gleichen Ergebnissen gelangen, die schon REISSNER gefunden hat. Die erneute Behandlung auf einem etwas verschiedenen Wege ist aber vielleicht darum nicht ohne Nutzen, weil wir etwas genauer auf die Einzelheiten des physikalischen Vorgangs eingehen können. Auf diese Weise ist es einmal möglich, einige kürzlich von BÄR<sup>5)</sup> diskutierte Sonderfälle ungezwungen herzuleiten, und ferner wird der hier eingeschlagene Weg die Möglichkeit geben, abzuschätzen, in welchen Fällen die Dämpfung der Schallwellen von besonders grossem Einfluss sein kann.

Das gestellte Problem ist weitgehend dem optischen Problem des Durchgangs von Licht durch eine dünne Platte ähnlich; unser Problem ist nur insofern wesentlich komplizierter, als es zwei verschiedene Arten von elastischen Wellen gibt, longitudinale und transversale, und nicht nur eine Art, wie in der Optik. Genau wie im optischen Fall stehen zwei Methoden der Lösung zur Verfügung. Entweder werden die Wellengleichungen innerhalb und ausserhalb der Platte zusammen mit den Grenzbedingungen direkt

<sup>1)</sup> 1851 Exhibition Scholar, Trinity College, Cambridge.

<sup>2)</sup> R. BÄR und A. WALTI, *Helv. Phys. Acta* **7**, 658 (1934).

<sup>3)</sup> A. WALTI, *Helv. Phys. Acta* **11**, 113 (1938).

<sup>4)</sup> H. REISSNER, *Helv. Phys. Acta* **11**, 140 (1938).

<sup>5)</sup> R. BÄR, *Helv. Phys. Acta* **11**, 397 (1938).

gelöst. Diesen Weg ist REISSNER gegangen. Oder man leitet sich zunächst die verschiedenen Koeffizienten ab, die die Reflexion und Brechung an *einer* Grenzfläche zwischen den beiden Medien beherrschen, und behandelt dann das Problem als Summierung einer vielfachen Reflexion und Brechung. Dieser zweite Weg soll im folgenden gegangen werden; nach der in § 5 befolgten Methode gelingt die Summation überraschend einfach.

## § 2. Die Grenzbedingungen.

Die Grenzbedingungen an der Trennungsfläche zwischen Flüssigkeit und fester Platte sind die folgenden:

1. Die Schubspannungen an der Grenzfläche verschwinden.
2. An der Grenzfläche sind die Normalspannungen die gleichen für den festen Körper und die Flüssigkeit.
3. Die Normalkomponenten der Verschiebung sind an der Grenze in beiden Medien die gleichen.

Hätten wir an Stelle der Flüssigkeit einen zweiten festen Körper, der mit der Platte starr verbunden ist, so wäre die erste Bedingung zu ersetzen durch die Forderung, dass die Schubspannungen an der Grenzfläche stetig sind, und es würde ausserdem eine weitere Grenzbedingung auftreten, die die Gleichheit der tangentiellen Verschiebungen in beiden Medien fordert.

Die oben formulierten Grenzbedingungen sind die gleichen, die auch REISSNER seiner Arbeit zugrunde legt. Sie sind ausserdem vielfach<sup>1)</sup>, zuerst wohl von KNOTT<sup>2)</sup>, zur Lösung von Problemen der Erdbenenwellen herangezogen worden.

## § 3. Reine Longitudinalwellen und reine Transversalwellen in der Platte.

Im allgemeinen werden in der Platte sowohl transversale als auch longitudinale elastische Wellen erregt. Es existiert jedoch je ein Einfallswinkel, bei dem nur eine der beiden Wellenarten entsteht. Diese beiden Fälle können wir nun ohne jede mathematische Formulierung schon einigermaßen behandeln, wenn wir uns nur an einige Eigenschaften der Longitudinal- und Transversalwellen erinnern.

Im Fall einer Longitudinalwelle liegt eine der drei Hauptspannungsrichtungen in der Fortpflanzungsrichtung der Wellen, die beiden anderen Richtungen sind entartet und stehen senkrecht auf der Richtung der Schallfortpflanzung. Infolge dessen treten keine Schubspannungen auf in Ebenen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung und in Ebenen, die diese Richtung enthalten.

<sup>1)</sup> Handb. d. Exp. Phys. **XXV** 2, 450 oder Handb. d. Geophys. **IV** 42.

<sup>2)</sup> C. G. KNOTT, Phil. Mag. **V**. 48, 64 (1899).

Im Fall der Transversalwellen liegen zwei der drei Hauptspannungsrichtungen in einer Ebene, die die Fortpflanzungsrichtung und die Schwingungsrichtung enthält, so dass sie mit diesen Richtungen Winkel von  $45^\circ$  bilden. Die Schubspannungen verschwinden also in zwei Ebenen, welche zu diesen Hauptrichtungen senkrecht stehen, also mit der Schallfortpflanzung ebenfalls einen Winkel von  $45^\circ$  einschliessen und ausserdem senkrecht zur Schwingungsrichtung stehen.

Wir haben nun im ganzen sechs Grenzbedingungen zu erfüllen, nämlich drei für jede Seite der Platte. Es werden also im allgemeinen ausser der einfallenden Welle noch sechs verschiedene Wellen existieren. Es sind dies: in der Flüssigkeit eine von der ersten Grenzfläche reflektierte sowie die durchgelassene Welle; in der Platte je eine von der ersten zur zweiten Grenzfläche laufende Longitudinal- und Transversalwelle, und je eine Welle, die von der zweiten Grenzfläche zur ersten läuft. Da nun in der Flüssigkeit alle Schubspannungen verschwinden, müssen die ersten Grenzbedingungen, die das Verschwinden der Schubspannungen an der Grenze verlangen, durch die vier im festen Körper laufenden Wellen erfüllt werden.

a) Die einfallende Welle trifft senkrecht auf die Grenzfläche. Infolge des Snellius'schen Gesetzes, das in bekannter Weise aus den Grenzbedingungen und der Wellengleichungen folgt, müssen in diesem Fall alle Wellen in der gleichen Richtung laufen. Die Longitudinalwellen geben keinen Beitrag zu Schubspannungen in der Grenzfläche, da diese senkrecht auf der Wellennormalen steht. Transversalwellen in der gleichen Richtung geben Beiträge zu Schubspannungen in der Grenzfläche; damit diese verschwinden, müssen die Amplituden der Transversalwellen selber verschwinden. Bei senkrechter Inzidenz der Schallwellen laufen also nur Longitudinalwellen in der Platte. In diesem Fall folgt aus genau den gleichen Überlegungen wie in der Optik, dass die Platte ein Maximum der Schalldurchlässigkeit besitzt, wenn ihre Dicke  $l$  mit der Wellen- $\lambda_a$  der Longitudinalwellen in der Platte in der Beziehung

$$l = n \lambda_a / 2 \quad (1)$$

steht, wo  $n$  eine beliebige positive ganze Zahl ist.

b)<sup>1)</sup> Die einfallende Welle trifft unter einem solchen Winkel auf die Grenzfläche, dass die in die Platte gebrochene Transversal-

<sup>1)</sup> Den Fall des Einfalls einer Transversalwelle unter  $45^\circ$  im festen Körper auf eine Grenzfläche fester Körper-Vakuum, der mit unserm allgemeinen Fall verwandt ist, hat H. POINCARÉ, *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, 134, (1892) ausführlich behandelt.

welle mit der Normalen einen Winkel von  $45^\circ$  einschliesst. In diesem Fall geben die Transversalwellen keinen Beitrag zu den Schubspannungen an der Grenzfläche. Die Longitudinalwellen bilden mit der Grenzfläche einen von  $90^\circ$  verschiedenen Winkel und geben also Beiträge zu den Schubspannungen; genau wie in Fall a) folgt daraus das Verschwinden der Longitudinalwellen in der Platte. Bedeutet also

$\vartheta$  den Einfallswinkel der Schallwellen in der Flüssigkeit,

$\vartheta_r$  den Brechungswinkel der Transversalwellen in der Platte,

$w_1$  die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in der Flüssigkeit,

$w_a$  die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in der Platte,

$w_r$  die Geschwindigkeit der Transversalwellen in der Platte,

$\Lambda_r$  die Wellenlänge der Transversalwellen,

so treten für

$$\sin \vartheta = \frac{w_1}{w_r} \sin \vartheta_r = \frac{w_1}{w_r \sqrt{2}} \quad (2)$$

in der Platte nur Transversalwellen auf. Wir können nun wieder, genau wie in Fall a) schliessen, dass die Durchlässigkeit ein Maximum hat, wenn

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2} n \Lambda_r \quad (3)$$

ist. Dieser Spezialfall bildet die Grundlage der ersten Methode, die WALTJ l. c. zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Transversalwellen benutzt hat<sup>1)</sup>.

Aus (2) folgt nun aber

$$\sin \vartheta_a = \sin \vartheta_r \frac{w_a}{w_r} = \frac{w_a}{w_r \sqrt{2}} \quad (4)$$

oder, da ja

$$\begin{aligned} w_a &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ w_r &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \end{aligned} \quad (5)$$

wenn  $\lambda$  und  $\mu$  die Laméschen Elastizitätskonstanten sind, und  $\rho$  die Dichte des festen Körpers bedeutet.

$$\sin \vartheta_a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}} > 1 \quad \text{falls } \lambda > 0. \quad (6)$$

Es fällt also dieser Spezialfall immer in das Gebiet der Totalreflexion der Longitudinalwellen.

<sup>1)</sup> Vgl. auch R. BÄR, l. c.

#### § 4. Reflexion und Brechung an einer Grenzfläche.

(In diesem Paragraphen werden wir uns eng an die zitierte Arbeit von H. REISSNER halten, jedoch teilweise eine andere Bezeichnung verwenden. Wir wollen vor allem darin REISSNER folgen, dass wir die Wellengleichungen der Deformation der Betrachtung zu Grunde legen, und nicht zu den Gleichungen der Verschiebungen übergehen. Auf diese Weise ist von REISSNER nämlich eine wesentliche Vereinfachung gegenüber den früheren (§ 2 Fussnote zitierten) Lösungen erzielt worden.)

Im Folgenden wollen wir nun zunächst die Vorgänge betrachten, die sich an *einer* Grenzfläche abspielen, um so die akustischen Analoga der Fresnelschen Formeln zu gewinnen. Es sei  $y = 0$  die Grenzfläche. Der Halbraum  $y > 0$  sei von der Flüssigkeit mit der Dichte  $\varrho_1$  und der Laméschen elastischen Konstanten  $\lambda_1$  erfüllt, der Halbraum  $y < 0$  vom festen Körper mit den Laméschen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  und der Dichte  $\varrho$ .

Sind  $u, v, w$ , die Verrückungen in der  $x, y$  und  $z$  Richtung, so ist bekanntlich die Dilatation gegeben als

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (7)$$

die Rotation hat die Komponenten

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \quad (8)$$

für  $e$  und  $\omega$  gelten bekanntlich die Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2 e}{dt^2} \\ \Delta \omega &= \frac{\varrho}{\mu} \frac{d^2 \omega}{dt^2} \end{aligned} \quad (9)$$

im festen Körper und

$$\Delta e_1 = \frac{\varrho_1}{\lambda_1} \frac{d^2 e_1}{dt^2} \quad (10)$$

in der Flüssigkeit.

Wir betrachten ausschliesslich ebene Wellen, deren Normale in der  $xy$ -Ebene liegt. Dabei wollen wir alle Schallwellen als Wellen der Dilatation und der Rotation selber darstellen. Um den Umstand hervorzuheben, dass also alle unsere Amplituden nicht Amplituden der Verrückung sondern entweder Amplituden der Dilatation oder der Rotation sind, wollen wir im Folgenden von Dilatationswellen und Rotationswellen sprechen und nicht von Longitudinal- und Transversalwellen.

Die Geschwindigkeit der Dilatationswellen im festen Körper ist also

$$w_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (11)$$

die der Rotationswellen im festen Körper

$$w_r = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (12)$$

und die der Dilatationswellen in der Flüssigkeit

$$w_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\rho_1}}. \quad (13)$$

Eine ebene Dilatationswelle in der Flüssigkeit mit dem Einfallswinkel  $\vartheta$  ist dann dargestellt als

$$e_1 = K_a e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta + y \cos \vartheta}{\Lambda_1} \right)}, \quad (14a)$$

dabei ist  $\nu$  die Frequenz der Wellen und  $\Lambda_1 = w_1/\nu$  ihre Wellenlänge. Eine an der Grenzfläche reflektierte Welle ist dann

$$e_1 = K_b e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta - y \cos \vartheta}{\Lambda_1} \right)}. \quad (14b)$$

Eine Dilatationswelle im festen Körper, die aus (14a) durch Brechung entsteht, ist dann

$$e = A_b e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta_d + y \cos \vartheta_d}{\Lambda_d} \right)} \quad (14c)$$

und eine entsprechende Rotationswelle

$$w_z = B_b e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta_r + y \cos \vartheta_r}{\Lambda_r} \right)}, \quad (14d)$$

dabei gilt für die Winkel  $\vartheta_d$  und  $\vartheta_r$  das Snellius'sche Gesetz

$$\frac{\sin \vartheta}{w_1} = \frac{\sin \vartheta_d}{w_d} = \frac{\sin \vartheta_r}{w_r} \quad (15)$$

$\Lambda_d = w_d/\nu$  ist die Wellenlänge der Dilatationswellen,  
 $\Lambda_r = w_r/\nu$  die der Rotationswellen.

Wir müssen ferner noch Wellen betrachten, die im festen Körper auf die Grenzfläche zulaufen, und aus denen (14c) und (14d) durch Reflexion entstehen. Diese sind dargestellt als

$$e = A_a e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta_d - y \cos \vartheta_d}{\Lambda_d} \right)} \quad (14e)$$

$$w_z = -B_a e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta_r - y \cos \vartheta_r}{\Lambda_r} \right)}. \quad (14f)$$

Das negative Vorzeichen in dieser Darstellung ist notwendig, um die im nächsten Paragraphen verlangte Symmetrie des gesamten Systems herzustellen.

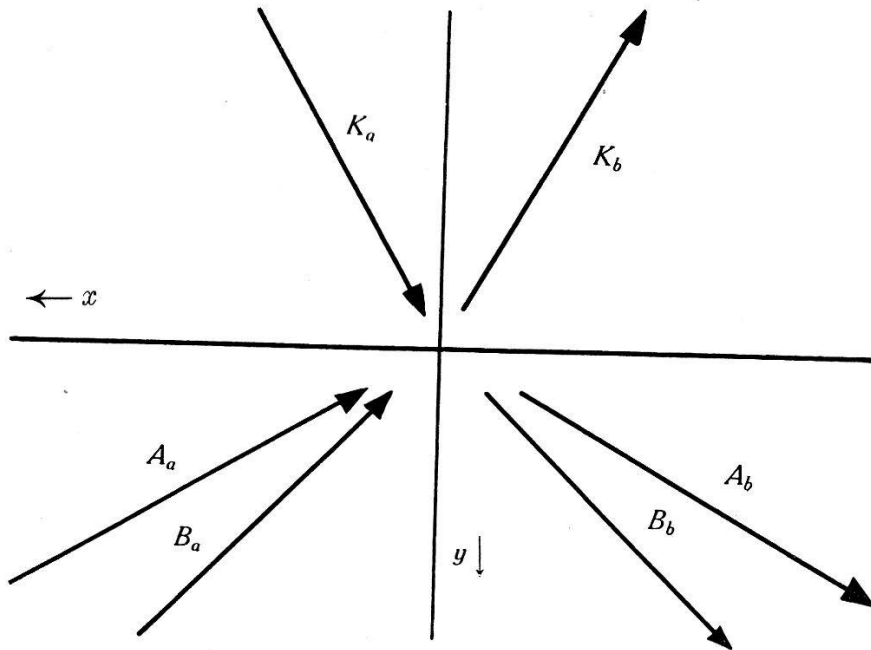


Fig. 1.

Fig. 1 gibt eine Übersicht über die verschiedenen Wellen. Allgemein sind alle Dilatationswellen im festen Körper mit einer Amplitude  $A$  bezeichnet, alle Rotationswellen mit einer Amplitude  $B$  und alle Wellen in der Flüssigkeit mit einer Amplitude  $K$ .

Wir haben nun folgende Fälle zu betrachten:

1. In der Flüssigkeit fällt eine Welle  $K_1$  der Form (14a) ein. Es existieren dann noch: in der Flüssigkeit die reflektierte Welle

$K_2^0$  der Form (14b); im festen Körper eine gebrochene Dilatationswelle  $B_1^0$  der Form (14c) und eine gebrochene Rotationswelle  $B_1^0$  der Form (14d). Die in § 2 formulierten Grenzbedingungen lassen sich dann schreiben als

$$\begin{aligned} A_1^0 \sin 2 \vartheta_a - B_1^0 \cos 2 \vartheta_r &= 0 \\ A_1^0 w_a^2 \varrho \cos 2 \vartheta_r + B_1^0 w_r^2 \varrho \sin 2 \vartheta_r &= (K_1 + K_2^0) w_1^2 \varrho_1 \\ A_1^0 w_a \cos \vartheta_a + B_1^0 w_r \sin \vartheta_r &= (K_1 - K_2^0) w_1 \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (15)$$

Führen wir nun als Abkürzung ein

$$f = \frac{\varrho w_a^2}{\varrho_1 w_1^2} \frac{\sin 2 \vartheta \cos^2 2 \vartheta_r}{\sin 2 \vartheta_a} \quad (16a)$$

$$g = \frac{\varrho w_r^2}{\varrho_1 w_1^2} \sin 2 \vartheta \sin 2 \vartheta_r, \quad (16b)$$

so können die Lösungen von (15) geschrieben werden als

$$K_2^0 = \frac{f + g - 1}{f + g + 1} K_1 \quad (17a)$$

$$A_1^0 = \frac{2}{f + g + 1} \frac{\cos 2 \vartheta_r \sin 2 \vartheta}{\sin 2 \vartheta_a} K_1 \quad (17b)$$

$$B_1^0 = \frac{2}{f + g + 1} \sin 2 \vartheta K_1. \quad (17c)$$

Es ist also z. B.

$$\frac{K_2^0}{K_1} = \frac{f + g - 1}{f + g + 1}$$

der Reflexionskoeffizient der ersten Grenzfläche für Wellen in der Flüssigkeit.

2. Im festen Körper fällt eine Dilatationswelle  $A^I$  der Form (14e) ein, es existieren dann ausserdem: im festen Körper eine reflektierte Dilatationswelle  $A^R$  der Form (14c) und eine reflektierte Rotationswelle  $B^R$  der Form (14d); in der Flüssigkeit eine durchgelassene Welle  $K^R$  der Form (14b). In diesem Fall lauten die Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} (A^I - A^R) \sin 2 \vartheta_a + B^R \cos 2 \vartheta_r &= 0 \\ (A^I + A^R) w_a^2 \varrho \cos 2 \vartheta_r + B^R w_r^2 \varrho \sin 2 \vartheta_r &= K^R w_1^2 \varrho_1 \\ (A^I - A^R) w_a \cos \vartheta_a - B^R w_r \sin \vartheta_r &= w_1 \cos \vartheta K^R. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Lösungen sind dann

$$\begin{aligned} A^R &= \frac{-f+g+1}{f+g+1} A^I \\ B^R &= \frac{-2f}{f+g+1} \frac{\sin 2\vartheta_a}{\cos 2\vartheta_r} A^I \\ K^R &= \frac{2f}{f+g+1} \frac{\sin 2\vartheta_a}{\cos 2\vartheta_r \sin 2\vartheta} A^I. \end{aligned} \quad (19)$$

3. Im festen Körper fällt eine Rotationswelle  $B$  der Form (14f) ein, es existieren dann ausserdem im festen Körper eine reflektierte Rotationswelle  $B^R$  der Form (14d) und eine reflektierte Dilatationswelle  $A^R$  der Form (14c); in der Flüssigkeit eine gebrochene Welle  $K^R$  der Form (14b). Die Grenzbedingungen lauten

$$\begin{aligned} A^R \sin 2\vartheta_a + (B^I - B^R) \cos 2\vartheta_r &= 0 \\ A^R w_a^2 \varrho \cos 2\vartheta_r + (B^I + B^R) w_r^2 \varrho \sin 2\vartheta_r &= K^R w_1^2 \varrho_1 \\ -A^R w_a \cos \vartheta_a + (B^I - B^R) w_r \sin \vartheta_r &= K^R w_1 \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (20)$$

Die Lösungen sind

$$\begin{aligned} B^R &= \frac{f-g+1}{f+g+1} B^I \\ A^R &= \frac{-2g}{f+g+1} \frac{\cos 2\vartheta_r}{\sin 2\vartheta_a} B^I \\ K^R &= \frac{2g}{f+g+1} \frac{1}{\sin 2\vartheta} B^I. \end{aligned} \quad (21)$$

Um nun im weiteren Verlauf der Rechnung von den in (17), (19), (21) *explizit* auftretenden goniometrischen Faktoren frei zu sein, wollen wir ausser den im natürlichen Masstab gemessenen Amplituden  $K, A, B$  noch in einem neuen Mass gemessene Amplituden einführen, die wir mit den entsprechenden kleinen Buchstaben  $k, a, b$  bezeichnen und die wir jeweils mit den gleichen Indices versehen wie  $K, A$  und  $B$ . Der neue Masstab ist gegeben durch

$$\begin{aligned} K &= k K_1 \\ A &= a \frac{\sin 2\vartheta \cos 2\vartheta_r}{\sin 2\vartheta_a} K_1 \\ B &= b \sin 2\vartheta K_1. \end{aligned} \quad (22)$$

(Wir bemerken, dass wir im nächsten § diese Definition noch etwas verändern werden.)

In diesem Masstab können wir also schreiben:

$$a_1^0 = b_1^0 = \frac{2}{f+g+1}, \quad (23a)$$

an Stelle von (17b, c)

$$\begin{aligned} a^R &= a^I \frac{-f+g+1}{f+g+1} = \alpha'_{dd} a^I \\ b^R &= a^I \frac{-2f}{f+g+1} = \alpha'_{dr} a^I \\ k^R &= a^I \frac{2f}{f+g+1} = -\alpha'_{dr} a^I \end{aligned} \quad (23b)$$

an Stelle von (19) und endlich

$$\begin{aligned} a^R &= b^I \frac{-2g}{f+g+1} = \alpha'_{rd} b^I \\ b^R &= b^I \frac{f-g+1}{f+g+1} = \alpha'_{rr} b^I \\ k^R &= \frac{2g}{f+g+1} b^I = -\alpha'_{rd} b^I \end{aligned} \quad (23c)$$

an Stelle von (21).

### § 5. Der allgemeine Ansatz der multiplen Reflexion.

Wenn wir nun die Vorgänge in einer Platte beschreiben wollen, ist es zweckmässig, ausser dem bisher benutzten Koordinatensystem  $x, y, z$  ein neues  $x, \eta, z$ , einzuführen, das relativ zur zweiten

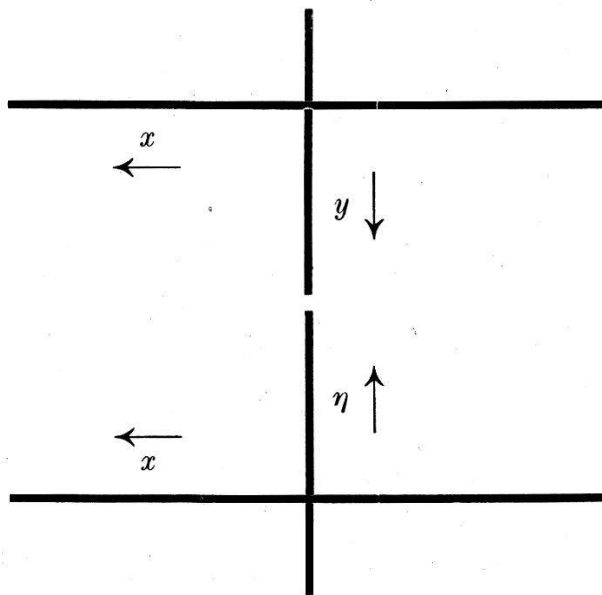


Fig. 2.

Grenzfläche genau so festgelegt ist, wie  $x, y, z$  relativ zur ersten — vgl. Fig. 2. —. Die beiden Systeme entstehen also auseinander durch Spiegelung an einer Ebene  $y = l/2$ . Bei dieser Spiegelung geht eine Welle der Form (14c) gerade in eine Welle der Form (14e) über und eine Welle der Form (14d) in eine solche der Form (14f). Die in die Flüssigkeit gebrochene Welle nimmt, wenn wir sie im System der brechenden Fläche darstellen, beide Male die Form (14b) an.

Beim Übergang von der Beschreibung der Wellen im einen System zur Beschreibung im anderen sind ausserdem die Amplituden der Dilatationswellen mit dem Phasenfaktor  $e^{-i\varphi}$  die der Rotationswellen mit dem Phasenfaktor  $e^{-i\psi}$  zu multiplizieren, dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$\varphi = 2\pi \frac{l}{\Lambda_d} \cos \vartheta_d \quad (24a)$$

$$\psi = 2\pi \frac{l}{\Lambda_r} \cos \vartheta_r. \quad (24b)$$

Betrachten wir nun nach diesen Bemerkungen die Vorgänge in der Platte im einzelnen. Eine auf die erste Grenzfläche auftreffende Welle wird an der Fläche nach (17a) reflektiert und nach (17b, c) oder (23a) gebrochen, d. h. also die Welle wird in eine Dilatationswelle mit der Amplitude  $a_1^0$  und eine Rotationswelle mit der Amplitude  $b_1^0$  aufgespalten. Beide Wellen laufen zur zweiten Grenzfläche und werden dort wiederum jede in eine reflektierte Dilatationswelle und in eine reflektierte Rotationswelle aufgespalten, und ausserdem wird jede in die Flüssigkeit hineingebrochen. Wollen wir auf diese Vorgänge an der zweiten Grenze die Gleichungen des § 4 anwenden, so müssen wir zur Beschreibung im System  $x, \eta, z$  übergehen. In diesem System entsteht also aus der einfallenden Dilatationswelle und der einfallenden Rotationswelle zusammen eine neue Dilatationswelle mit der Amplitude

$$a_2^1 = \alpha'_{dd} e^{-i\varphi} a_1^0 + \alpha'_{rd} e^{-i\psi} b_1^0, \quad (25a)$$

eine neue Rotationswelle mit der Amplitude

$$b_2^1 = \alpha'_{dr} e^{-i\varphi} a_1^0 + \alpha'_{rr} e^{-i\psi} b_1^0 \quad (25b)$$

und eine in die Flüssigkeit gebrochene Welle mit der Amplitude

$$k_3^1 = -\alpha'_{dr} e^{-i\varphi} a_1^0 - \alpha'_{rd} e^{-i\psi} b_1^0. \quad (25c)$$

Die beiden Wellen mit den Amplituden  $a_2^1$  und  $b_2^1$  laufen nun wieder zur ersten Grenzfläche. Zur Beschreibung der Reflexion und Brechung müssen wir jetzt wieder zur Darstellung im

System  $x, y, z$  übergehen; wir erhalten dann ganz analog neue Wellen, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \alpha'_{ad} e^{-i\varphi} a_2^1 + \alpha'_{rd} e^{-i\psi} b_2^1 \\ b_1^1 &= \alpha'_{dr} e^{-i\varphi} a_2^1 + \alpha'_{rr} e^{-i\psi} b_2^1 \\ k_2^1 &= -\alpha'_{dr} e^{-i\varphi} a_2^1 - \alpha'_{rd} e^{-i\psi} b_2^1. \end{aligned} \quad (25d)$$

Die Wellen  $a_1^1, b_1^1$  laufen zur zweiten Grenzfläche zurück und das gleiche Spiel wiederholt sich. Wir wollen nun alle von der ersten zur zweiten Grenze laufenden Wellen mit dem unteren Index 1, alle von der zweiten Grenzfläche fortlaufenden Wellen mit dem unteren Index 2 versehen. Alle Amplituden  $a_2, b_2, k_3$  sollen zur Darstellung der Wellen im  $x, \eta, z$ -System gehören, alle Amplituden  $a_1, b_1, k_1, k_2$  ausserdem aber auch die Amplituden  $A_1, A_2, B_1, B_2, K_1, K_2$  zur Beschreibung im System  $x, y, z$ . Wir wollen jetzt also genauer an Stelle von (22) schreiben

$$\begin{aligned} A_1^n &= a_1^n \frac{\sin 2\vartheta \cos 2\vartheta_r}{\sin 2\vartheta_d} K_1 \\ A_2^n &= a_2^n \frac{\sin 2\vartheta \cos 2\vartheta_r}{\sin 2\vartheta_d} e^{-i\varphi} K_1 \\ B_1^n &= b_1^n \sin 2\vartheta K_1 \\ B_2^n &= b_2^n \sin 2\vartheta e^{-i\psi} K_1. \end{aligned} \quad (22a)$$

Um weiter noch die Schreibweise der Formeln (25) zu vereinfachen, wollen wir die Phasenfaktoren  $e^{-i\varphi}$  und  $e^{-i\psi}$  mit den verschiedenen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten zusammenziehen. Wir wollen also die folgenden Übergangskoeffizienten definieren:

$$\begin{aligned} \alpha_{ad} &= \frac{-f + g + 1}{f + g + 1} e^{-i\varphi} & \alpha_{rd} &= \frac{-2g}{f + g + 1} e^{-i\psi} \\ \alpha_{dr} &= \frac{-2f}{f + g + 1} e^{-i\varphi} & \alpha_{rr} &= \frac{f - g + 1}{f + g + 1} e^{-i\psi}. \end{aligned} \quad (26)$$

Es beschreibt also z. B. der Übergangskoeffizient  $\alpha_{dr}$  den Übergang von einer Dilatationswelle zu der aus ihr durch Reflexion entstehenden Rotationswelle, dabei ist jede Welle in demjenigen Koordinatensystem dargestellt, das zu der Grenzfläche gehört, an der die betreffende Welle entstanden ist. Durch  $-\alpha_{dr}$  und  $-\alpha_{rd}$  wird gleichzeitig der Übergang von einer Dilatationswelle bzw. einer Rotationswelle im festen Körper zur zugehörigen gebrochenen Welle in der Flüssigkeit beschrieben.

Mit den Übergangskoeffizienten (26) können wir nunmehr die allgemeinen Gleichungen der multiplen Reflexion schreiben als

$$\begin{aligned} a_1^n &= \alpha_{ad} a_2^n + \alpha_{rd} b_2^n \\ b_1^n &= \alpha_{dr} a_2^n + \alpha_{rr} b_2^n \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} a_2^n &= \alpha_{ad} a_1^{n-1} + \alpha_{rd} b_1^{n-1} \\ b_2^n &= \alpha_{dr} a_1^{n-1} + \alpha_{rr} b_1^{n-1}. \end{aligned} \quad (27b)$$

Die insgesamt von der ersten Grenzfläche reflektierte Welle ist dann

$$k_2 = k_2^0 - \sum_1^{\infty} a_2^n d_{dr} - \sum_1^{\infty} b_2^n d_{rd}. \quad (28a)$$

Die insgesamt durchgelassene Welle

$$k_3 = - \sum_0^{\infty} a_1^n d_{dr} - \sum_0^{\infty} b_1^n d_{rd}. \quad (28b)$$

Der Index  $n$  läuft dabei in (27a) und (27b) von 1 an.

Bezeichnen wir noch die

$$\begin{aligned} &\sum_0^{\infty} a_1^n \text{ mit } a_1 \\ &\sum_0^{\infty} b_1^n \text{ mit } b_1 \\ &\sum_1^{\infty} a_2^n \text{ mit } a_2 \\ &\sum_1^{\infty} b_2^n \text{ mit } b_2 \end{aligned}$$

so können wir, indem wir alle Gleichungen (27a) und (27b) von 1 bis  $\infty$  summieren, schreiben

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha_{ad} a_1 + \alpha_{rd} b_1 \\ b_2 &= \alpha_{dr} a_1 + \alpha_{rr} b_1 \end{aligned} \quad (28c)$$

$$\begin{aligned} a_1 - a_1^0 &= \alpha_{ad} a_2 + \alpha_{rd} b_2 \\ b_1 - b_1^0 &= \alpha_{dr} a_2 + \alpha_{rr} b_2; \end{aligned} \quad (28d)$$

dabei ist  $a_1^0$  und  $b_1^0$  nach (23a) gegeben durch

$$a_1^0 = b_1^0 = \frac{2}{f + g + 1}. \quad (23a)$$

Wir können nunmehr die Gleichungen (28c) und (28d) auflösen, die erhaltenen Werte in (28a) und (b) einsetzen und so die

allgemeine Lösung unseres Problems anschreiben. Bevor wir diese allgemeine Lösung durchführen, wollen wir im § 6 zunächst einige Spezialfälle betrachten.

An dieser Stelle sei noch folgende Bemerkung über die Grössen  $f$  und  $g$  nachgetragen, die in den Definitionsgleichungen unserer Übergangskoeffizienten vorkommen. Wie man aus (16a, 16b) ohne weiteres sieht, ist für kleine Winkel  $\vartheta$  sowohl  $f$  als auch  $g$  zunächst positiv reell, für solche  $\vartheta$ , das  $\sin \vartheta_d > 1$  wird — d. h. im Gebiet der Totalreflexion der Dilatationswellen — wird zuerst  $f$  rein imaginär, und für solche  $\vartheta$ , dass ausserdem auch noch  $\sin \vartheta_r > 1$ , — d. h. im Gebiet der Totalreflexion beider Wellenarten — wird dann auch  $g$  rein imaginär.

Für den späteren Gebrauch merken wir noch an, dass nach unseren Definitionen die insgesamt in der Platte herrschende Dilatation gegeben ist durch

$$e = A_1 e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta_d + y \cos \vartheta_d}{\Lambda_d} \right)} + A_2 e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta_d - y \cos \vartheta_d}{\Lambda_d} \right)}, \quad (29a)$$

die insgesamt herrschende Rotation durch

$$\omega_2 = B_1 e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta_r + y \cos \vartheta_r}{\Lambda_r} \right)} - B_2 e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{x \sin \vartheta_r - y \cos \vartheta_r}{\Lambda_r} \right)} \quad (29b)$$

### § 6. „Wechselwellen“, sowie ein weiterer Spezialfall.

Wir wollen hier zunächst die folgenden drei Spezialfälle behandeln

1.  $a_2 = b_1 = 0$
2.  $b_2 = a_1 = 0$
3.  $a_2 = b_2 = 0$ .

Fall 1 und 2 sind also identisch mit den kürzlich von BÄR (l. c.) auf Grund der Reissnerschen Theorie diskutierten „Wechselwellen“. Rein formal wäre noch ein Spezialfall  $a_1 = b_1 = 0$  denkbar. Man sieht aber leicht ein, dass dieser Fall erfordern würde  $f + g = 0$ , was nach der Bemerkung am Schluss des letzten Paragraphen unmöglich ist, man sieht auch leicht, dass dieser Fall zu völlig absurden physikalischen Resultaten führen würde.

Fall 1. In diesem Fall heissen die Gleichungen (28c) und (28d).

$$\begin{aligned} \alpha_{dd} &= 0 & a_1 - a_1^0 &= \alpha_{rd} b_2 \\ b_2 &= \alpha_{dr} a_1 & - b_1^0 &= -a_1^0 = \alpha_{rr} b_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Daraus folgen aber für die Übergangskoeffizienten die Bedingungen

$$\alpha_{da} = 0 \quad (30a)$$

$$\alpha_{dr} (\alpha_{ra} - \alpha_{rr}) = 1. \quad (30b)$$

Unter Benutzung der Definitionsgleichungen (26) können wir diese Bedingungen aber schreiben

$$f - g = 1 \quad (30c)$$

$$e^{-i(\varphi+\psi)} = 1 \text{ oder } \varphi + \psi = 2n\pi, \quad (30d)$$

wobei  $n$  eine beliebige ganze Zahl ist.

Bei gegebenen elastischen Konstanten, d. h. bei gegebenen Materialien, ist nun (30c) offenbar eine Bedingung für den Einfallswinkel, und zwar besagt nach (30a) diese Bedingung, dass der innere Einfallswinkel  $\vartheta_a$  der Dilatationswellen so gewählt sein muss, dass die Dilatationswellen als reine Rotationswellen reflektiert werden. Wird nun dank der Phasenbedingung (30d), die wir ausführlicher als

$$\frac{l \cos \vartheta_a}{A_a} + \frac{l \cos \vartheta_r}{A_r} = n \quad (30e)$$

schreiben können, gerade die von der ersten zur zweiten Platte laufende Rotationswelle durch Interferenz vernichtet, so laufen von der ersten zur zweiten Fläche nur Dilatationswellen von der zweiten zur ersten nur Rotationswellen. (30e) zeigt, dass dies nur bei einer diskreten Menge von Plattendicken möglich ist. In diesem Fall ist dann die Amplitude der durchgelassenen Welle nach (28b) gegeben zu

$$k_3 = -\alpha_{dr} a_1 = -\frac{\alpha_{dr}}{(1 - \alpha_{dr} \alpha_{ra})} a_1^0 = e^{-i\varphi}. \quad (30f)$$

Die Amplitude der durchgelassenen Welle hat also den gleichen Betrag wie die der einfallenden Welle, d. h. aber die Durchlässigkeit ist gleich 1. Wir erhalten also für diesen Fall exakt die von BÄR und WALTJ (l. c.) allgemein vermuteten Bedingungen, genau wie es kürzlich BÄR (l. c. § 4) zeigen konnte.

Fall 2. Dieser Fall erledigt sich völlig analog wie Fall 1. Wir schreiben darum ohne nähere Erläuterung die den Beziehungen (30—30f) entsprechenden Gleichungen an.

$$a_2 = \alpha_{ra} b_1, \quad -a_1^0 = \alpha_{da} a_2 \quad (31)$$

$$0 = \alpha_{rr} b_1, \quad -a_1^0 + b_1 = \alpha_{dr} a_2$$

$$\alpha_{rr} = 0 \quad (31a)$$

$$\alpha_{rd} (\alpha_{dr} - \alpha_{dd}) = 1 \quad (31b)$$

$$f - g = 1 \quad (31c)$$

$$\varphi + \psi = 2n\pi \quad (31d)$$

$$\frac{l \cos \vartheta_d}{A_d} + \frac{l \cos \vartheta_r}{A_r} = n \quad (31e)$$

$$k_3 = e^{-i\psi}. \quad (31f)$$

Wie eine Diskussion des Wertes von  $f$  und  $g$  zeigt, gibt es im allgemeinen für jeden der Fälle 1 und 2 genau je zwei Winkel<sup>1)</sup>.

Fall 3. In diesem Fall findet überhaupt keine Reflexion in der Platte statt. Einsetzen von  $a_2 = b_2 = 0$  in (28c), (28d) ergibt

$$\begin{aligned} \alpha_{dd} + \alpha_{rr} &= 0 \\ \alpha_{dr} + \alpha_{rd} &= 0; \end{aligned} \quad (32)$$

daraus folgen die Bedingungen

$$f + g = 1 \quad (32a)$$

$$\varphi - \psi = 2n\pi. \quad (32b)$$

Auch in diesem Fall ist die Durchlässigkeit gleich Eins. Die numerische Diskussion zeigt allerdings, dass für die meisten Kombinationen Flüssigkeit — fester Körper die Beziehung (32a) für keinen Einfallswinkel erfüllbar ist.

## § 7. Die allgemeine Durchlässigkeitsformel.

Wir kehren nunmehr zu der Aufgabe der allgemeinen Lösung der Gleichungen (28c) (28d) zurück. Bei der Auflösung sind die folgenden Beziehungen nützlich, die unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (26) der Übergangskoeffizienten folgen:

$$\alpha_{dd} - \alpha_{dr} = e^{-i\varphi} \quad (33a)$$

$$\alpha_{rd} - \alpha_{rr} = e^{-i\psi} \quad (33b)$$

$$\alpha_{dr} \alpha_{rd} - \alpha_{rr} \alpha_{dd} = \frac{f + g - 1}{f + g + 1} e^{-i(\varphi + \psi)}. \quad (33c)$$

---

<sup>1)</sup> Eine ausführliche numerische Diskussion unserer Ergebnisse wird in einer demnächst erscheinenden Arbeit gegeben werden.

Die Lösungen von (28c), (28d) lassen sich dann schreiben in der Form

$$a_1^0 = a^0 \frac{1 + \alpha_{rd} e^{-i\varphi} - \alpha_{rr} e^{-i\psi}}{\{(1 - \alpha_{dd}^2 - \alpha_{dr} \alpha_{rd})(1 - \alpha_{rr}^2 - \alpha_{dr} \alpha_{rd}) - (\alpha_{dd} + \alpha_{rr})^2 \alpha_{rd} \alpha_{dr}\}} \quad (34a)$$

$$b_1 = a_1^0 \frac{1 - \alpha_{dr} e^{-i\psi} - \alpha_{dd} e^{-i\varphi}}{\{ \quad \}} \quad (34b)$$

$$a_2 = a_1^0 \frac{\alpha_{dd} + \alpha_{rd} + (\alpha_{rd} \alpha_{rr} - \alpha_{rr} \alpha_{dd}) e^{-i\psi}}{\{ \quad \}} \quad (34c)$$

$$b_2 = a_1^0 \frac{\alpha_{dr} + \alpha_{rr} + (\alpha_{rd} \alpha_{dr} - \alpha_{rr} \alpha_{dd}) e^{-i\varphi}}{\{ \quad \}}. \quad (34d)$$

Dabei haben wir den im Nenner auf der rechten Seite stehenden Ausdruck in (34b–d) als  $\{ \}$  wiederholt. Indem wir nun die Definitionen (26) einführen, erhalten wir die Ausdrücke

$$a_1 = \frac{g(\cos \varphi \cos \psi - 1) - (f+1) \sin \varphi \sin \psi + i \{ (f+1) \cos \varphi \sin \psi + g \cos \psi \sin \varphi \}}{[ \{ 2fg(\cos \varphi \cos \psi - 1) - (f^2 + g^2 + 1) \sin \varphi \sin \psi \} + 2i \{ f \cos \varphi \sin \psi + g \cos \psi \sin \varphi \} ]} \quad (35a)$$

$$b_1 = \frac{f(\cos \varphi \cos \psi - 1) - (g+1) \sin \varphi \sin \psi + i \{ f \cos \varphi \sin \psi + (g+1) \cos \psi \sin \varphi \}}{[ \quad ]} \quad (35b)$$

$$a_2 e^{-i\varphi} = \frac{g(\cos \varphi \cos \psi - 1) - (f-1) \sin \varphi \sin \psi - i \{ (f-1) \cos \varphi \sin \psi + g \cos \psi \sin \varphi \}}{[ \quad ]} \quad (35c)$$

$$b_2 e^{-i\psi} = \frac{f(\cos \varphi \cos \psi - 1) - (g-1) \sin \varphi \sin \psi - i \{ f \cos \varphi \sin \psi + (g-1) \cos \psi \sin \varphi \}}{[ \quad ]}, \quad (35d)$$

wo wiederum  $[ \quad ]$  als leicht verständliche Abkürzung steht. Die Amplitude der reflektierten und der durchgelassenen Welle in der Flüssigkeit ist dann nach (28a), (28b)

$$k_2 = \frac{(1 - f^2 - g^2) \sin \varphi \sin \psi + 2fg(\cos \varphi \cos \psi - 1)}{[ \quad ]} \quad (36a)$$

$$k_3 = \frac{2i(f \sin \psi + g \sin \varphi)}{[ \quad ]}. \quad (36)$$

Gehen wir nun wieder zu den natürlichen Masstäben zurück, so erhalten wir Ausdrücke, die sich als mit den von REISSNER gegebenen identisch erweisen. (REISSNERS  $B_2$  entspricht unserem  $-B_2$ ). Die Durchlässigkeit, die definiert ist als  $|K_3|^2/|K_1|^2$ , erhalten wir zu

$$D = \frac{4(f \sin \psi + g \sin \varphi)^2}{[(f^2 + g^2 - 1) \sin \varphi \sin \psi - 2fg(\cos \varphi \cos \psi - 1)]^2 + 4(f \sin \psi + g \sin \varphi)^2} \quad (37)$$

Für kleine Einfallswinkel, d. h.  $f$  und  $g$  reell, folgt die Richtigkeit von (37) ohne weiteres, die Formel bleibt aber auch in den Gebieten der Totalreflexion gültig, da  $\sin \varphi$  zusammen mit  $f$  und  $\sin \psi$  zusammen mit  $g$  rein imaginär wird. Mit den Gebieten der Totalreflexion werden wir uns in § 9 näher beschäftigen.

Die Formel (37) unterscheidet sich nur äusserlich von REISSNERS Formel (27), unsere Schreibweise, die im wesentlichen mit derjenigen identisch ist, die WALTJ und auch BÄR ihren Diskussionen zu Grunde legen, erweist sich für das Weitere als etwas bequemer.

Aus (37) erhält man als Bedingung für vollkommene Durchlässigkeit  $D = 1$

$$0 = (f^2 + g^2 - 1) \sin \varphi \sin \psi - 2fg (\cos \varphi \cos \psi - 1) \quad (38)$$

unter der Voraussetzung, dass  $f \sin \psi + g \sin \varphi$  endlich bleibt oder schwächer als die rechte Seite von (38) verschwindet. Wir wollen (38) noch in etwas anderer Form schreiben

$$\frac{\sin \varphi \sin \psi}{\cos \varphi \cos \psi - 1} = \frac{2fg}{f^2 + g^2 - 1} \quad (38a)$$

oder auch

$$\left[ \frac{\sin \frac{\varphi + \psi}{2}}{\sin \frac{\varphi - \psi}{2}} \right]^2 = \frac{(f - g)^2 - 1}{(f + g)^2 + 1}. \quad (38b)$$

Entsprechend ist die Bedingung für völlige Undurchlässigkeit  $D = 0$  zu schreiben als

$$f \sin \psi + g \sin \varphi = 0, \quad (39)$$

dies unter der Bedingung, dass die rechte Seite von (38) endlich bleibt oder genügend schwach verschwindet.

### § 8. Spezialfälle der Durchlässigkeitsformel.

Alle bisher behandelten Sonderfälle geben auch besonders einfache Ausdrücke in unserer Formel (38b).

Fall 1 und 2 des § 6, d. h. die Fälle der „Wechselwellen“. In diesen Fällen gilt entweder

$$(f - g) = 1 \quad \text{oder} \quad (f - g) = -1,$$

also allgemein  $(f - g)^2 = 1$ ; dann folgt aber aus (38b)

$$\varphi + \psi = 2n\pi; \quad D = 1.$$

Fall 3 des § 6 ergibt wegen  $f + g = 1$ :  $\varphi - \psi = 2n\pi$ ;  $D = 1$ .

Aus (16b) folgt ferner, dass für senkrechte Inzidenz, d. h. für  $\vartheta = 0$ ,  $g = 0$  wird. Aus (38b) folgt dann als Bedingung vollkommener Durchlässigkeit zunächst

$$\sin \frac{\varphi + \psi}{2} = \pm \sin \frac{\varphi - \psi}{2}, \quad (40)$$

das heisst aber entweder  $\varphi = n\pi$  oder  $\psi = n\pi$ . Im letzteren Fall ist aber auch (39) erfüllt. Geht man nun zur allgemeinen Durchlässigkeitsformel (37) zurück, so sieht man, dass sich diese für senkrechte Inzidenz schreiben lässt als

$$D_{\vartheta=0} = \frac{4f^2}{(f^2-1)^2 \sin^2 \varphi + 4f^2} \quad (41)$$

also unabhängig von  $\psi$ , wie es ja auch physikalisch ohne weiteres klar ist, da ja bei senkrechter Inzidenz, wie wir in § 3 sahen, gar keine Rotationswellen in der Platte erregt werden.

Es wird  $f = 0$  für den ebenfalls in § 3 behandelten Fall, dass die Rotationswellen mit der Plattennormalen einen Winkel von  $45^\circ$  bilden. Ähnlich wie im vorigen Fall ergeben sich hier wieder für vollkommene Durchlässigkeit die Bedingungen  $\psi = n\pi$  oder  $\varphi = n\pi$ . Ganz analog wie oben ist die letztere Bedingung auszuschliessen. Die Durchlässigkeit lautet hier nämlich

$$D_{\vartheta_r=\pi/4} = \frac{4g^2}{(g^2-1) \sin^2 \psi + 4g^2} \quad (42)$$

also unabhängig von  $\varphi$  wie es sein muss.

Man sieht aus (41) und (42), dass in den beiden zuletzt behandelten Fällen die Durchlässigkeit niemals Null werden kann; (41) gibt für

$$\varphi = (n + \frac{1}{2})\pi; \quad l = \frac{1}{4}(2n + 1)A_d \quad (41a)$$

ein Minimum vom Betrag

$$\frac{4f^2}{(f^2 + 1)^2}. \quad (41b)$$

Analog gibt (42) ein Minimum für

$$\psi = (n + \frac{1}{2})\pi; \quad l = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2n + 1)A_r \quad (42a)$$

vom Betrag

$$\frac{4g^2}{(g^2 + 1)^2}. \quad (42b)$$

Die Formel für die Durchlässigkeit Null nimmt eine besonders einfache Gestalt an für den Fall

$$f = g. \quad (43)$$

Dann wird  $D = 0$  für

$$\varphi + \psi = 2n\pi \quad \text{oder} \quad \varphi - \psi = (2n - 1)\pi. \quad (43a)$$

Unsere Formel (37) versagt, wenn

$$\begin{aligned} \sin \varphi = \sin \psi &= 0 \\ \cos \varphi = \cos \psi &= \pm 1. \end{aligned} \quad (44)$$

In unseren bisherigen Rechnungen hatten wir diesen Fall, der eintritt wenn  $\varphi$  und  $\psi$  beides gerade oder beides ungerade Vielfache von  $\pi$  sind, ausdrücklich ausgeschlossen. Seine Behandlung erfordert ein Zurückgehen auf die allgemeinen Gleichungen der multiplen Reflexion (28c und 28d). Wir wollen hier den Fall  $\varphi = 2n\pi$ ,  $\psi = 2m\pi$ ;  $m, n$  ganze Zahlen, behandeln. Der andere Fall ist völlig gleich zu behandeln, und führt auch zum gleichen Resultat.

In unserem Fall ist  $e^{-i\varphi} = e^{-i\psi} = 1$ , also wird

$$\begin{aligned} \alpha_{dd} &= \frac{-f + g + 1}{f + g + 1} & \alpha_{dr} &= \frac{-2f}{f + g + 1} \\ \alpha_{rd} &= \frac{-2g}{f + g + 1} & \alpha_{rr} &= \frac{f - g + 1}{f + g + 1}. \end{aligned} \quad (45)$$

Es ist also

$$(\alpha_{dd} - \alpha_{dr}) = (\alpha_{rd} - \alpha_{rr}) = 1, \quad (46)$$

dann folgt aber aus (28d)

$$a_1 = b_1 \quad (47)$$

und darauf aus (28c)

$$a_2 = b_2. \quad (47a)$$

Die Gleichungen (28c, d) können dann geschrieben werden

$$\begin{aligned} -a_1^0 + a_1 &= (\alpha_{dd} + \alpha_{rd}) a_2 \\ a_2 &= (\alpha_{dd} + \alpha_{rd}) a_1, \end{aligned} \quad (47b)$$

es ist dann also

$$\begin{aligned} a_1 = b_1 &= a_1^0 \frac{1}{1 - (\alpha_{rd} + \alpha_{dd})^2} \\ a_2 = b_2 &= a_1^0 \frac{\alpha_{rd} + \alpha_{dd}}{1 - (\alpha_{rd} + \alpha_{dd})^2} \end{aligned} \quad (47c)$$

oder die durchgelassene Amplitude ist dann

$$k_3 = -\alpha_{dr} a_1 - \alpha_{rd} b_1 \quad (47d)$$

oder

$$k_3 = \frac{-(\alpha_{rd} + \alpha_{dr})}{1 - (\alpha_{rd} + \alpha_{dr})^2} a_1^0 = 1. \text{ da } a_1^0 = \frac{2}{f + g + 1}. \quad (47e)$$

Die Durchlässigkeit ist also ebenfalls gleich Eins.

### § 9. Die Gebiete der Totalreflexion.

Wir fügen diesen Paragraphen der Vollständigkeit halber bei. Die meisten hier aufgeführten Formeln finden sich, im wesentlichen identisch, bei REISSNER (l. c. siehe auch Helv. Phys. Acta **11**, 268.)

Steigert man den Einfallswinkel, von Null beginnend, allmählich, so bleiben zunächst  $f$ ,  $g$  und alle auftretenden Winkel reell. Wird dann  $\sin \vartheta > w_1/w_a$ , so wird  $\vartheta_a$  und damit  $\varphi$  und  $f$  imaginär, wir sprechen von Totalreflexion der Dilatationswellen. Wächst dann  $\vartheta$  weiter, so dass auch  $\sin \vartheta > w_1/w_r$  wird, so wird auch  $\vartheta_r$  und damit  $\psi$  und  $g$  imaginär. Wir sprechen von Totalreflexion beider Wellenarten. Es ist daran zu erinnern, dass genau wie im Fall der Optik, auch im Gebiet der Totalreflexion die Deformation im zweiten Medium durchaus nicht verschwindet. Wir können also das Gebiet der möglichen Einfallswinkel in drei Teilgebiete einteilen, die durch zwei Grenzwinkel voneinander getrennt werden. Es sind dies

Gebiet 1,  $0 < \sin \vartheta < w_1/w_a$ .

Erster Grenzwinkel  $\sin \vartheta = w_1/w_a$ .

Gebiet 2,  $w_1/w_a < \sin \vartheta < w_1/w_r$ . Totalreflexion der Dilatationswellen.

Zweiter Grenzwinkel  $\sin \vartheta = w_1/w_r$ .

Gebiet 3,  $w_1/w_r < \sin \vartheta < 1$  Totalreflexion beider Wellenarten.

Im Gebiet 1 sind alle nicht explizit mit der imaginären Einheit multiplizierten Größen reell. Dies Gebiet verlangt keine weitere Diskussion. Im ersten Grenzwinkel  $\vartheta_1$  wird  $\sin \vartheta_1 = w_1/w_a$ , daher  $\cos \vartheta_a = 0$ ,  $\sin \vartheta_a = 1$ .  $f$  wird unendlich wie  $1/\cos \vartheta_a$ ,  $\sin \varphi$  wird Null wie  $\frac{2\pi v l}{A_a} \cos \vartheta_a$ . Wir können daher die Durchlässigkeit in diesem Fall schreiben

$$D_{\vartheta_1} = \frac{1}{\left(\frac{\varrho \cos \vartheta_1}{\varrho_1 w_1}\right)^2 \left[ \frac{2\pi v l}{2} \cos^2 2 \vartheta_r + 2 w_r \sin \vartheta_r \sin 2 \vartheta_r \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right]^2 + 1} \quad (48)$$

Rechnen wir nach (35a) bis (35d) die Deformation in der Platte für den Grenzwinkel aus, so ergibt sich, dass  $A_1$  und  $A_2$  beide unendlich werden wie  $1/\cos \vartheta_a$ . Die in der Platte herrschende Dilatation wird aber nach (29a) zu

$$e^{2\pi i \left( vt - \frac{x \sin \vartheta_a}{A_d} \right)} \left\{ (A_1 + A_2) \cos \frac{\cos \vartheta_a y}{A_d} - (A_1 - A_2) \sin \frac{\cos \vartheta_a y}{A_d} \right\} \quad (48a)$$

nun bleibt aber  $A_1 + A_2$  endlich, während  $A_1 - A_2$  wie  $1/\cos \vartheta_a$  unendlich wird, für  $\cos \vartheta_a = 0$  bleibt also die Dilatation selber durchaus endlich.

Aus (48) folgt, dass im ersten Grenzwinkel die Durchlässigkeit Null wird für  $\psi/2 = (n + 1/2) \pi$ , d. h. für  $l = (n + 1/2) A_r / \cos \vartheta_r$ . Die Durchlässigkeit wird 1 für

$$\frac{\operatorname{tg} \psi/2}{l} = - \frac{\pi}{2 A_r} \frac{\cos^2 2 \vartheta_r}{\sin \vartheta_r \sin 2 \vartheta_r}. \quad (48b)$$

Um auch im Gebiet 2 alle imaginären Teile in Evidenz zu setzen, führen wir eine neue reelle Veränderliche  $\vartheta_d^I$  ein, so dass

$$i \operatorname{Sin} \vartheta_d^I = - \sqrt{1 - \frac{w_d^2}{w_1^2} \sin 2 \vartheta}, \quad (49a)$$

dann wird

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos} \vartheta_d^I &= \sin \vartheta_a \\ \operatorname{Sin} \varphi &= i \operatorname{Sin} \varphi^I \\ \sin 2 \vartheta_a &= -i \operatorname{Sin} 2 \vartheta_d^I \end{aligned} \quad (49b)$$

$$\varphi^I = - \frac{2 \pi e}{A_d} \operatorname{Sin} \vartheta_d^I,$$

mit der neuen Abkürzung  $f = i f^I$

$$f^I = \frac{e}{e_1} \frac{w_d^2}{w_1^2} \frac{\sin 2 \vartheta \cos^2 2 \vartheta_r}{\operatorname{Sin} 2 \vartheta_a}$$

erhalten wir dann für die Durchlässigkeit den Ausdruck

$$D = \frac{4 (f^I \sin \psi + g \operatorname{Sin} \varphi^I)^2}{[(g^2 - f^{I^2} - 1) \operatorname{Sin} \varphi^I \sin \psi + 2 f^I g (\operatorname{Cos} \varphi^I \cos \psi - 1)]^2 + 4 (f^I \sin \psi + g \operatorname{Sin} \varphi^I)^2}. \quad (50)$$

Im zweiten Grenzwinkel wird  $\sin \vartheta_2 = w_1/w_2$  und daher  $\cos \vartheta_r = 0$ ;  $\sin \psi = 0$ ;  $g = 0$ . Dagegen nimmt  $g/\sin \psi$  den Wert

$$\Gamma = \frac{4 \varrho w_2^r}{\varrho_1 w_1 2 \pi \nu l} \cos \vartheta_r \quad (51a)$$

an. Die Durchlässigkeit wird dann

$$D_{\vartheta_2} = \frac{4 (\Gamma \operatorname{Sin} \varphi^I + f^I)}{[(f^{I2} + 1) \operatorname{Sin} \varphi^I + 2 f \Gamma (\operatorname{Cos} \varphi^I - 1)]^2 + 4 (\Gamma \operatorname{Sin} \varphi^I + f^I)^2} \quad (51)$$

Ähnlich wie im ersten Grenzwinkel wird im zweiten  $B_1$  und  $B_2$  unendlich. Analog wie im ersten Grenzwinkel lässt sich aber auch hier zeigen, dass die Rotation in der Platte endlich bleibt.

Im Gebiet 3 führen wir in analoger Weise wie in Gebiet 2 eine neue reelle Variable  $\vartheta_r^I$  ein, so dass

$$\begin{aligned} i \operatorname{Sin} \vartheta_r^I &= - \sqrt{\frac{w_1^2}{w_r^2}} \sin^2 \vartheta \\ \operatorname{Cos} \vartheta_r^I &= \sin \vartheta_r \\ \sin \psi &= i \operatorname{Sin} \psi^I \quad \psi^I = - \frac{2 \pi l}{A_r} \operatorname{Sin} \vartheta_r^I \\ \cos \psi &= \operatorname{Cos} \psi^I. \end{aligned} \quad (52)$$

An Stelle von  $f^I$  schreiben wir hier  $f^{II}$

$$f^{II} = \frac{\varrho}{\varrho_1} \frac{w_d^2}{w_1^2} \frac{\sin 2 \vartheta \operatorname{Cos}^2 2 \vartheta_r}{\operatorname{Sin} 2 \vartheta_r}$$

und führen ferner durch  $g = i g^I$

$$g^I = \frac{\varrho}{\varrho_1} \frac{w_r^2}{w_1^2} \sin 2 \vartheta \operatorname{Sin} 2 \vartheta_r^I$$

ein. Mit diesen Bezeichnungen wird die Durchlässigkeit zu

$$D = \frac{4 (f^{II} \operatorname{Sin} \psi^I + g^I \operatorname{Sin} \varphi^I)}{* *} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} * * \quad & [(f^{II2} + g^{I2} + 1) \operatorname{Sin} \varphi^I \operatorname{Sin} \psi^I - 2 f^{II} g^I (\operatorname{Cos} \varphi^I \operatorname{Cos} \psi^I - 1)]^2 \\ & + 4 [f^{II} \operatorname{Sin} \psi^I + g^I \operatorname{Sin} \varphi^I]^2 \end{aligned}$$

Einfache Spezialfälle des vorliegenden Problems sind in der Literatur häufig behandelt, wir erwähnen vor allem RAYLEIGH,

Theory of sound II § 271, wo der Durchgang von Schall durch eine aus einer Flüssigkeit gebildete planparallele Schicht behandelt ist.

Die vorliegende Arbeit entstand — (während eines Ferienaufenthalts des einen von uns [N. S. N.-N.] in Zürich) — angeregt durch eingehende Besprechungen mit Herrn Prof. Dr. R. BÄR über die Resultate der Arbeiten von BÄR, WALTI und REISSNER und über das Auftreten der l. c. behandelten Sonderfälle. Es ist uns ein Bedürfnis, Herrn Prof. BÄR auch an dieser Stelle unseren Dank für viele fördernde Diskussionen auszusprechen.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

---