Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 11 (1938)

Heft: III

Artikel: Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte. Teil I

Autor: Stueckelberg, E.C.G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110852

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte. (Teil I)

von **E. C. G. Stueckelberg.**

(21. II. 38.)

Inhalt: Es wird gezeigt, dass die Quantentheorie der Wellenfelder auf die gleichen Ausdrücke für die Wechselwirkung zwischen Ladungen führt wie die klassische Behandlung der retardierten Potentiale.

Der Wechselwirkungsoperator hat folgende Form: Retardiertes oder avanciertes Potential der einen Ladung am Orte der zweiten mal zweite Ladung. Kann eine dieser beiden Ladungen in erster Näherung schon Strahlung aussenden, so muss das retardierte Potential dieser Ladung oder aber das avancierte Potential der andern Ladung gewählt werden.

Der vorliegende erste Teil enthält die vollständige Diskussion eines skalaren Feldes. Die Verallgemeinerung auf ein Vierervektorfeld ist nur kurz gestreift und wird in einem zweiten Teile behandelt werden.

Einleitung.

Obwohl die Quantentheorie der Wellenfelder grosse innere Widersprüche enthält, ist sie zur Zeit dennoch das einzige brauchbare Mittel, um die korpuskulare Natur der Strahlung und der Materie zu beschreiben.

So folgt aus der Quantenelektrodynamik einerseits die Existenz diskreter *Lichtquanten*, d. h. das Ergebnis, dass Strahlung der Frequenz $k_0 c$ nur in Beträgen $h k_0 c$ emittiert oder absorbiert werden kann.

Andererseits lässt sich aus ihr das *klassische Ergebnis* der *retardierten Wechselwirkung* zwischen zwei Ladungen ableiten.

In vielen Fällen interessiert uns nur die zweite Eigenschaft des Feldes. Da diese retardierten Wechselwirkungen die Planck'sche Konstante nicht enthalten, so muss es möglich sein zu zeigen, dass alle aus einer Quantentheorie der Wellenfelder folgenden Wechselwirkungsgesetze identisch sind mit den entsprechenden klassischen Ergebnissen.

Wir wollen dies an einem skalaren Felde A beweisen, dessen Feldgleichung die Form hat:

$$(\Box - l^2) A = -4\pi J. \tag{0.1}$$

$A(x)$ nennen wir in Anlehnung an die Elektrodynamik *Potential* und $J(x)$ die *Ladung*. x ist der Vierervektor des Ortes mit

den Komponenten $x_0 = ct$, und x_1, x_2, x_3, welche drei letzteren wir mit $\vec{x}$ bezeichnen. Die Wellengleichung (0.1), deren statische Lösung für eine ruhende Punktladung am Koordinatenanfangspunkt

$$A = \frac{e^{-lr}}{r} \tag{0.2}$$

lautet, bildete den Ausgangspunkt der Feldtheorie YUKAWAS[1]), welche die Kernkräfte aus der Existenz eines neuen Feldes erklärt, dessen Partikel (welche ihm die Quantentheorie der Wellenfelder zuordnet) die Masse $hl|c$ haben. l ist also die reziproke Comptonwellenlänge dieser neuen Partikel. Aus der Reichweite der Kernkräfte ergibt sich ihre Masse grössenordnungsweise zu 100 Elektronenmassen. Wir werden im folgenden sehen, dass die Existenz geladener und ungeladener Partikel gefordert werden muss. Die geladenen Partikel wurden von verschiedenen Autoren in der kosmischen Strahlung beobachtet. Näheres hierüber findet sich in Notizen von YUKAWA[1]), KEMMER, BHABHA und vom Verfasser[2]).

1. Das retardierte und avancierte Potential.

Wir suchen eine Lösung von (0.1). Dazu entwickeln wir $J(x)$ in ein Fourierintegral mit dem Integranden $J(k)$, wobei k den Vierervektor mit der (reellen) Zeitkomponente k_0 und den Raumkomponenten $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ bedeutet. dx^4, dk^4 und $d\vec{x}^3$, $d\vec{k}^3$ bedeuten die vier- und dreidimensionalen Volumelemente im Raum resp. im Raum der Wellenvektoren. Es sei also

$$J(x) = \int dk^4 e^{i(k,x)} J(k) \tag{1.1}$$

Integrale ohne Grenzen sind immer vom $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken.

Entwickelt man $A(x)$ in analoger Weise, so folgt durch Koeffizientenvergleich für die Koeffizienten $A(k)$ die Beziehung:

$$A(k) = \frac{4\pi J(k)}{(k,k) + l^2} \tag{1.2}$$

(k,x) und (k,k) sind skalare Produkte von Vierervektoren.

Wir bezeichnen als *Eigenvektoren des Feldes* solche Vektoren, deren Zeitkomponente der Beziehung

$$k_0 = \pm \bar{k}_0(\vec{k}) = \pm \sqrt{(\vec{k}, \vec{k}) + l^2} \tag{1.3}$$

gehorcht. Dabei ist $(\vec{k}, \vec{k})$ das skalare Produkt des Raumanteils von k mit sich selbst.

Wir setzen voraus, dass $J(k)$ für reelle k-Werte keine Singularitäten besitze. Dann besitzt der Integrand $A(k)$ im Ausdruck für $A(x)$ auf der reellen k_0-Axe je eine Singularität bei $k_0 = \pm \bar{k}_0(\vec{k})$. Da $J(k)$ voraussetzungsgemäss keine Singularitäten in unmittelbarer Nähe der reellen k_0-Axe besitzt, so können wir den Integrationsweg über k_0 von $-\infty$ bis $+\infty$ in (1.1) schon vor dem Koeffizientenvergleich deformieren. Bezeichnen wir diesen deformierten Weg durch $(..)$, so können wir als Lösung von (0.1) schreiben:

$$\begin{aligned} A^{(..)}(y) &= \int d\vec{k}^3 \int_{(..)} dk_0\, A(k)\, e^{i(k,y)} \\ &= \int dx^4 J(x)\, D^{(..)}(y-x). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dabei bedeutet $D^{(..)}(z)$ eine Funktion, welche durch das Fourierintegral

$$D^{(..)}(z) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{(..)} e^{i(k,z)} \frac{1}{(k,k)+l^2}\, dk^4 \tag{1.5}$$

definiert ist.

Zur Ableitung der zweiten Identität in (1.4) ist von der vierdimensionalen δ-Funktion Gebrauch gemacht

$$\delta(k) = (2\pi)^{-4} \int dx^4\, e^{i(k,x)} \tag{1.6}$$

mit der Eigenschaft

$$\int_K dk^4 f(k)\, \delta(k) = f(0) \text{ oder } = 0, \tag{1.7}$$

je nachdem ob der Punkt $k_i = 0$ innerhalb oder ausserhalb des Integrationsbereiches K von (2.7) liegt.

Wählt man als Integrationswege die beiden durch (+) und (—) bezeichneten Wege, die ganz in der positiven resp. negativen Halbebene verlaufen (Fig. 1), und berücksichtigt, dass

$$\begin{aligned} \int_{(\pm)} dk_0 \frac{e^{-ik_0x_0}}{k_0} &= \lim_{\alpha=0} \left(-2i \int_{\alpha}^{\infty} dk_0 \frac{\sin k_0 x_0}{k_0} + \int_{-\alpha_{(\pm)}}^{+\alpha} \frac{dk_0}{k_0} \right) \\ &= -i\pi \left(\frac{x_0}{|x_0|} \pm 1 \right); \left(\frac{x_0}{|x_0|} = 0 \text{ für } x_0 = 0 \right) \end{aligned}$$

(α ist hiebei eine positive kleine Grösse)

ist, so erhält man folgenden Ausdruck für $D^{(..)}$:

$$\begin{aligned} D^{(..)}(x) = g^{(..)}(x_0) \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d|\vec{k}| \frac{|\vec{k}|}{k_0} \big(&\cos(|\vec{k}|\,|\vec{x}| - \bar{k}_0 x_0) \\ &- \cos(|\vec{k}|\,|\vec{x}| + \bar{k}_0 x_0)\big) \end{aligned} \tag{1.8}$$

mit

$$g^{(+)} = \begin{cases} 1 \\ 1/2, \\ 0 \end{cases} \quad g^{(-)} = \begin{cases} 0 & > \\ -1/2 & \text{für } x_0 = 0 \\ -1 & < \end{cases}$$

In Formel (1.4) ist daher $A^{(+)}$ nur durch die Ladungsverteilung der Vergangenheit und $A^{(-)}$ nur durch diejenige der Zukunft bestimmt. Sie werden, in Verallgemeinerung der Elektrodynamik, als *retardiertes* und *avanciertes* Potential bezeichnet. $D^{(+)}$ und $D^{(-)}$ selbst sind das retardierte resp. avancierte Potential einer nur zur Zeit $x_0 = 0$ von null verschiedenen Punktladung am Koordinatenanfangspunkt, deren Raum-Zeitintegral den Wert eins hat. Ihrer Ableitung gemäss sind $D^{(+)}$ und $D^{(-)}$ in variante Funktionen.

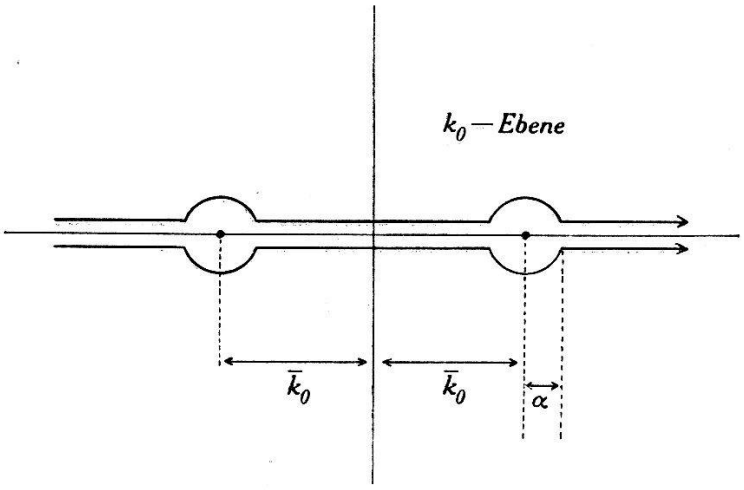

Fig. 1.

Für $l = 0$ (elektrodynamischer Fall) wird

$$D^{(\pm)}(x) = \frac{1}{|\vec{x}|}\,\delta(|\vec{x}| \mp x_0) \qquad (\delta = \text{eindimensionale } \delta\text{-Funktion})$$

Wir definieren noch die ebenfalls invariante Funktion

$$D(x) = D^{(-)}(x) - D^{(+)}(x)$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\,|\vec{k}|\,\frac{|\vec{k}|}{\bar{k}_0}\cos\left(|\vec{k}|\,|\vec{x}| + \bar{k}_0 x_0\right) - \cos\left(|\vec{k}|\,|\vec{x}| - \bar{k}_0 x_0\right)\Big) \quad (1.9)$$

welche für $l = 0$ in die Heisenberg-Pauli'sche invariante δ-Funktion übergeht. Mit ihrer Hilfe schreiben sich retardiertes und avanciertes Potential in der Form:

$$A^{(\pm)}(y) = \int d\vec{x}^{\,3} \int_{y_0}^{\mp\infty} d x_0\, D(y - x)\, J(x). \qquad (1.10)$$

Im allgemeinen sind also retardiertes und avanciertes Potential zwei verschiedene Ausdrücke. Es gibt aber spezielle Ladungsverteilungen, deren Fourierkoeffizienten $J(k)$ für solche k verschwinden, welche Eigenvektoren des Feldes sind. In diesem Falle ist ein Ausweichen des Integrationsweges in (1.4) nicht notwendig, d. h. beide Integrationswege geben denselben Wert: Das avancierte Potential dieser speziellen Ladungsverteilungen ist gleich dem retardierten.

Møller[3]) zeigte, dass die elektrodynamische Wechselwirkung zweier Elektronen in der Quantentheorie durch folgenden Wechselwirkungsansatz berücksichtigt werden kann: Man berechne das retardierte oder avancierte Potential des ersten Elektrons am Orte des zweiten und multipliziere es mit der Ladung des zweiten Elektrons. Für freie Elektronen führt diese Überlegung tatsächlich auf einen symetrischen Ausdruck, da die Matrixelemente des Stromes in ihrer Fourieranalyse keine Eigenvektoren des Feldes enthalten.

Aus dem Møller'schen Ansatz lässt sich alsdann die Breit'sche Wechselwirkung[4]) durch Entwicklung nach $1/c$ gewinnen, deren Reduktion auf die grossen Komponenten der Diracfunktionen tatsächlich die richtige Spin-Spin- und Spin-Bahn-Wechselwirkung der Pauli'schen Spintheorie liefert.

Erinnert man sich der Vorschrift, dass dieser Wechselwirkungsansatz nur als Störung erster Näherung bei Eigenwertberechnungen verwendet werden darf, so folgt, dass nur statische Ladungsverteilungen in Betracht kommen und somit retardiertes und avanciertes Potential tatsächlich gleich werden.

Hulme[5]) hat später gezeigt, dass diese Møller'sche Vorschrift jeweils dann durch eine strengere zu ersetzen ist, wenn das eine Teilchen strahlen kann: Dann muss nämlich das retardierte Potential dieses strahlenden Teilchens am Orte des zweiten Teilchens multipliziert mit der Ladung des zweiten Teilchens gewählt werden, oder aber das avancierte Potential des nichtstrahlenden Teilchens am Orte des strahlenden multipliziert mit dessen Ladung.

Wir werden im folgenden diese Hulme'sche Verschärfung der Møller'schen Vorschrift als Resultat allgemeiner quantentheoretischer Überlegungen wiederfinden. Ihr klassisches Analogon ist eben dieses Auftreten von Eigenvektoren des Feldes in der „gemischten Ladungsdichte" des einen Teilchens.

*

2. Lagrange und Hamilton Funktion des Feldes.

Das Feld und die Ladung sollen, der Allgemeinheit halber, als komplex angesehen werden. Dann folgt aus der Lagrangefunktion

$$L = \int d\vec{x}\, \mathfrak{L}$$

mit der Lagrangefunktionsdichte

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{8\pi}\left(\left(\frac{\partial A^*}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial x}\right) + l^2 A^* A\right) + \frac{1}{2}\left(A^* J + \left(\frac{\partial A^*}{\partial x}, S\right) + \text{conj.}\right) \tag{2.1}$$

(conj. bedeutet den konjugiert komplexen Ausdruck der Klammerterme) in der üblichen Weise (wenn man A und A^* als zwei unabhängige Funktionen betrachtet) die Formel (0.1). An Stelle von J steht der Ausdruck

$$J_{\text{eff}} = J - \left(\frac{\partial}{\partial x}, S.\right) \tag{2.2}$$

Bezeichnet man J mit *Ladung*, so ist (aus Dimensionsgründen) der Vierervektor S als *Polarisation* aufzufassen. (2.2) ist also die *effective Ladung* in Gl. (0.1).

Die konjugierten Momente folgen in der üblichen Weise zu

$$P = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\delta A} - \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \frac{\partial \dot{A}}{\partial \vec{x}}}\right) = \frac{1}{8\pi c}\frac{\partial A^*}{\partial x_0} + \frac{1}{2c} S_0^* \tag{2.3}$$

und entsprechend für P^*. Die Hamiltonfunktion errechnet sich nach der Beziehung:

$$H = -L + \int d\vec{x}^3 (\dot{A} P + \dot{A}^* P^*) = W + V. \tag{2.4}$$

Dabei sind W und V die Volumintegrale von Energiedichten $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{V}$, welche ihrerseits die Form

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{8\pi}\left(\left(\frac{\partial A^*}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial A}{\partial \vec{x}}\right) + l^2 A^* A\right) + 8\pi c^2 P^* P \tag{2.5}$$

und

$$\mathfrak{V} = -\frac{1}{2}\left(A^* J + \left(\frac{\partial A^*}{\partial \vec{x}}, \vec{S}\right) + \text{conj.}\right) - 4\pi c\,(P S_0 + \text{conj.}) \tag{2.6}$$

haben*).

*) Formel (2.4) ergibt ausser dem angeschriebenen W und V noch einen, nur von der Materie abhängigen (und daher für die Feldgleichungen belanglosen) Zusatzterm der Form

$$+ 2\pi \int d\vec{x}^3 S_0^* S_0 \tag{2.6a}$$

Dieser Term ist aber, wie im zweiten Teile gezeigt werden wird, notwendig, damit die Bewegungsgleichungen der Materie sinnvoll werden.

Die kanonischen Gleichungen folgen durch die, im zweiten und dritten Glied der Gl. (2.3) definierte, funktionelle Differentiation des Hamiltonfunktionals nach A^* resp. P zu

$$\dot{A} = \frac{\delta H}{\delta P} = 8\,\pi c^2 P^* - 4\,\pi c S_0 \tag{2.7}$$

und

$$\dot{P}^* = -\frac{\delta H}{\delta A^*} = \frac{1}{8\,\pi}(\Delta - l^2)A + \frac{1}{2}\left(J - \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \vec{S}\right)\right) \tag{2.8}$$

Differentiation nach der Zeit von (2.7) und Elimination von $\dot{P}^*$ aus (2.8) gibt dann tatsächlich die Gl. (0.1) mit der in (2.2) definierten effektiven Ladung an Stelle von J.

3. Quantisierung der Feldtheorie.

Die Quantisierung der skalaren Feldtheorie wurde von Pauli und Weisskopf[6]) durchgeführt. Die Operatoridentitäten

$$\begin{aligned} \dot{P} &= (i/h)[H, P] = -\,\delta H/\delta A \\ \dot{A} &= (i/h)[H, A] = \delta H/\delta P \end{aligned} \tag{3.1}$$

folgen für jedes analytische Funktional H der Operatoren P und A, wenn gilt

$$[P(\vec{x}), A(\vec{x}')] = (h/i)\,\delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{3.2}$$

und wenn gesternte Operatoren A^* und P^* mit nichtgesternten A und P vertauschbar sind. Dabei bedeutet eine eckige Klammer

$$[a, b] = ab - ba.$$

Somit folgen die Bewegungsgleichungen (2.7) und (2.8) auch für die quantentheoretischen Operatoren, wenn wir für H den Operator verwenden, welcher aus den klassischen Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.6) folgt, nachdem man darin die P^*, A^*, P und A durch Operatoren ersetzt, welche (3.2) erfüllen.

Dasselbe gilt noch, wenn wir statt V einen Operator K verwenden, für welchen gilt

$$\begin{aligned} (i/h)[K, P^*] &= -\,\delta K/\delta A^* = \frac{1}{2}\left(J - \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \vec{S}\right)\right) \\ (i/h)[K, A] &= \delta K/\delta P \qquad = -4\,\pi c S_0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Diese Gleichung kann auch als Definition der Ladungsgrössen J und S angesehen werden.

J und S sind Funktionen der kanonischen Variablen, welche den Zustand der Materie beschreiben. Bezeichnen wir diese mit p und q, so sollen aus

$$\begin{aligned} \dot{p} &= (i/h)[K,p] \\ \dot{q} &= (i/h)[K,q] \end{aligned} \tag{3.4}$$

die (klassischen) Bewegungsgleichungen für die Materie folgen.

Das quantentheoretische Problem besteht in der Lösung der Schroedinger-Gleichung

$$\left(H + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi(t) = 0. \tag{3.5}$$

Wir folgen einer von Dirac, Fock und Podolski[7]) vorgeschlagenen Methode:

Es wird eine Funktion resp. Funktional $\Psi'(T,t)$ eingeführt, für welche gilt

$$\Psi'(t,t) = \Psi(t) \tag{3.6}$$

und ein Operator $K'(T,t)$, der ebenfalls der Beziehung

$$K'(t,t) = K \tag{3.7}$$

genügt. In (3.7) wird angenommen, dass der Operator K die Zeit t nicht explizit enthalte. K' wird dann im allgemeinen explizit von T und t abhängen. Genügt nun die Funktion Ψ' simultan den beiden Gleichungen:

$$C_T\Psi' = \left(W + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial T}\right)\Psi'(T,t) = 0 \tag{3.8}$$

$$C_t\Psi' = \left(K'(T,t) + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi'(T,t) = 0 \tag{3.9}$$

so folgt daraus die Schroedingergleichung für das durch (3.6) definierte einzeitige Ψ mit $H = W + K$.

Damit nun die beiden Gl. (3.8) und (3.9) simultan lösbar sind, müssen die Operatoren C_T und C_t vertauschbar sein. Diese Bedingung

$$[C_T, C_t] = [W, K'(T,t)] + \frac{h}{i}\frac{\partial K'(T,t)}{\partial T} = 0 \tag{3.10}$$

stellt eine Differentialgleichung für die Abhängigkeit des Operators K' von T dar. Ihre Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (3.7) ist

$$K'(T,t) = e^{iW(t-T)/h}\, K\, e^{-iW(t-T)/h} \tag{3.11}$$

Die Gl. (3.8) lässt sich formal lösen durch

$$\Psi'(T,t) = e^{-iWT/h}\psi(t). \tag{3.12}$$

Für die nur von einer Zeit abhängige Funktion $\psi(t)$ gilt dann die aus (3.9), (3.11) und (3.12) folgende Schroedingergleichung

$$\left(K''(t) + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(t) = 0 \tag{3.13}$$

wo $K''(t)$ den Operator

$$K''(t) = e^{iWt/h} K e^{-iWt/h} \tag{3.14}$$

bedeutet.

Der Hamiltonoperator K'' in Gl. (3.13) ist also der ursprüngliche Operator K, in welchem die Operatoren $A(\vec{x})$ durch Operatoren $A''(\vec{x},t)$ ersetzt sind, die sich durch dieselbe untäre Transformation (3.14) aus den $A(\vec{x})$ errechnen lassen wie $K''(t)$ aus K. Sieht man vom Operatorcharakter der A ab, so ist (3.13) die Schroedingergleichung der Materie unter dem Einfluss eines gegebenen, explizit von der Zeit t abhängigen Potentialfeldes $A''(\vec{x},t)$.

Dasselbe gilt für P. Um eine explizite Form für die neuen Operatoren A'' und P'' zu haben, entwickeln wir A'' in die Reihe

$$A''(x,t) = A''(\vec{x},0) + t\frac{\partial A''}{\partial t}(\vec{x},0) + \frac{t^2}{2}\frac{\partial^2 A''}{\partial t^2}(\vec{x},0) + \ldots$$

Dabei gelten folgende Beziehungen, welche aus (3.14) folgen:

$$\begin{aligned}
A''(\vec{x},0) &= A(\vec{x}) \\
\frac{\partial A''}{\partial t}(\vec{x},0) &= (i/h)[W, A(\vec{x})] = \frac{\delta W}{\delta P} = 8\pi c^2 P^*(\vec{x}) \\
\frac{\partial^2 A''}{\partial t^2}(\vec{x},0) &= (i/h)^2[W,[W,A]] = 8\pi c^2 (i/h)[W,P^*] \\
&= -8\pi c^2 \frac{\delta W}{\delta A^*} = c^2(\Delta - l^2)A(\vec{x})
\end{aligned}$$

usw.

Führt man den, nur auf den Parameter $\vec{x}$ wirkenden, symbolischen Operator

$$b(\vec{x}) = \sqrt{-\Delta + l^2} \tag{3.15}$$

ein, so erhält man allgemein:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{2n} A''}{\partial t^{2n}}(\vec{x},0) &= (icb(\vec{x}))^{2n} A(\vec{x}) \\
\frac{\partial^{2n+1} A''}{\partial t^{2n+1}}(\vec{x},0) &= 8\pi c^2 (icb)^{-1}(icb)^{2n+1} P^*(\vec{x}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Zur Abkürzung der Reihenentwicklungen des symbolischen Operators b führen wir die Ausdrücke $\cos(bct) = \cos(bx_0)$ und $\sin(bct) = \sin(bx_0)$ ein. Dann kann man schreiben:

$$A''(\vec{x},t) = A(x) = \cos(b(\vec{x})x_0)\,A(\vec{x}) + 8\pi c^2 b(\vec{x})^{-1}\sin(b(\vec{x})x_0)\,P^*(\vec{x}). \quad (3.17)$$

Wir werden im folgenden jeweils für $A''(\vec{x},t)$ das Symbol $A(x)$ verwenden, wo x wieder den Weltvector bedeutet.

Diese vom Weltvector x abhängigen Potentiale gehorchen bestimmten Vertauschungsrelationen. Seien x und y zwei Ereignisse, so gilt

$$[A(x), A(y)] = [A(x)^*, A(y)^*] = 0 \quad (3.18)$$

da $A(\vec{x})$ und $P(\vec{x})^*$ in (3.17) vertauschbar sind.

Benützt man die Vertauschungsrelation (3.2) und die dazu konjugierte, und schreibt man die δ-Funktion in Form ihrer Fourierentwicklung (analog (1.6))

$$\delta(\vec{x}) = (2\pi)^{-3}\int d\vec{k}^3 e^{i(\vec{k},\vec{x})}$$

so folgt bei Berücksichtigung von

$$b(\vec{x})\,e^{i(\vec{k},\vec{x})} = \bar{k}_0(\vec{k})\,e^{i(\vec{k},\vec{x})} \quad (3.19)$$

(wo $k_0(\vec{k})$ wieder die (positive) Quadratwurzel aus (1.3) bedeutet) die Vertauschungsrelation

$$[A(x)^*, A(y)] = -2\frac{hc}{i}\,D(x-y). \quad (3.20)$$

Dabei ist D wieder die, durch ihre Fourierdarstellung (1.9) definierte invariante Funktion.

Das in K eventuell vorkommende $P''(\vec{x},t)$ kann durch eine (3.17) analoge Reihe ausgedrückt werden. Man findet dann, dass

$$P''(\vec{x},t) = P(x) = \frac{1}{8\pi c^2}\frac{\partial A''(\vec{x},t)^*}{\partial t} = (8\pi c)^{-1}\frac{\partial A(x)^*}{\partial x_0}. \quad (3.21)$$

Hat der Wechselwirkungsanteil Feld-Materie von K speziell die Form V, deren Dichte durch (2.6) gegeben ist, so ist die entsprechende Dichte $\mathfrak{V}''(\vec{x},t)$ durch den invarianten Ausdruck

$$\mathfrak{V}''(\vec{x},t) = -\frac{1}{2}\left(A(x)^* J(\vec{x}) + \left(\frac{\partial A(x)^*}{\partial x}, \; S(\vec{x})\right) + \text{conj.}\right) \quad (3.22)$$

gegeben. $J(\vec{x})$ und $S(\vec{x})$ sind die (skalare) Ladung und der Vierervektor ihrer Polarisation am Orte $\vec{x}$. Falls sie, wie in der Diracschen Theorie, nicht von den Potentialen A abhängen, so tritt in ihnen t nach wie vor nicht explizit auf.

4. Ableitung des Wechselwirkungsoperators im Konfigurationenraum.

Beschreibt man die Materie nicht durch ein Materiefeld, sondern durch die Koordinaten q^s $(s = 1, 2, \ldots n)$ von n Teilchen (Konfigurationenraum), so sind die Schroedingerfunktionen Ψ, Ψ' und ψ, welche wir im Paragraphen 3 verwendeten, Funktionale der Funktionen $A(\vec{x})$ und Funktionen der q^s. Der Hamiltonoperator der Materie K'' wird sich dann in eine Summe ΣK^s zerlegen, wo K^s (neben Feldoperatoren) nur auf q^s wirkende Operatoren enthält. Jedes K^s selbst zerfällt in einen Term $R^s(q^s)$, welcher nur auf q^s wirkende Operatoren enthält und in einen Term

$$V^s(q^s, A''(\vec{x}, t)) = V^s(t),$$

welcher ausser auf q^s wirkenden Operatoren, noch Feldoperatoren enthält, die gemäss dem vorhergehenden Paragraphen die Zeit t explizit enthalten.

Die Schroedingergleichung (3.13)

$$\left(K'' + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \left(R + V + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0 \tag{4.1}$$

(worin K'' die Summe der K^s und R resp. V die Summen aus den R^s resp. V^s bedeuten) lösen wir durch ein Näherungsverfahren. Dazu denken wir uns den *Störungsterm* V proportional einer kleinen Zahl, nach der wir entwickeln.

Es sei also

$$\psi = \psi^0 + \psi^1 + \psi^2 + \ldots \tag{4.2}$$

wo ψ^m der m-ten Potenz dieser kleinen Zahl proportional sei. Setzt man die Faktoren der einzelnen Potenzen null, so erhält man aus (4.1) das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\left(R + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi^0 = 0 \\
&\left(R + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi^1 + V\psi^0 = 0 \\
&\left(R + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi^2 + V\psi^0 = 0. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Lösung $\psi^1 + \psi^1 + \psi^2$ der drei angeschriebenen Gln. (4.3) ergibt somit die *zweite Näherung* der Lösung von (4.1). Sie enthält neben der Einwirkung von Materie auf Feld, bereits die Rückwirkung des durch die Materie erzeugten Feldes auf diese

selbst. Somit ist die Wechselwirkung zweier Teilchen aufeinander in *ihrer ersten Näherung* enthalten. Gelingt es uns, eine Relation

$$V^s(t)\,\psi^1 = \sum_r U^{sr}\psi^0 \tag{4.4}$$

aufzufinden, so kann man die beiden letzten Gl. des ausgeschriebenen Systems (4.3) durch Addition in die Gleichung

$$R + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^1 + \psi^2) + \left(V + \sum_s\sum_r U^{rs}\right)\psi^0 = 0 \tag{4.5}$$

zusammenziehen.

Entwickelt man die Lösung der Gl.

$$\left(R + V + \sum_r\sum_s U^{rs} + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0\,, \tag{4.6}$$

wo man sich V und $\Sigma\Sigma U^{rs}$ mit *demselben* kleinen Parameter multipliziert denkt, so erhält man als erste Gleichung (für ψ^0) die erste Gl. von (4.3), während man für die *erste Näherung* ψ^{I} (wo die römischen Indices die Entwicklung nach dem Störungsterm $V + \Sigma\Sigma U^{rs}$ in (4.6) bedeuten) die Gl. (4.5) mit ψ^{I} statt $\psi^1 + \psi^2$ findet. Somit ist die *erste Näherung* von (4.6) identisch mit der *zweiten Näherung* der richtigen Gl. (4.1). Die höheren Näherungen von (4.6) führen aber selbstverständlich zu falschen Ausdrücken für ψ, d. h. solchen, welche der Schroedingergleichung des Problems nicht genügen.

Der Term

$$U^{rs} + U^{sr},\quad r \neq s \tag{4.7}$$

stellt dann offenbar die *Wechselwirkungsenergie erster Näherung* zwischen den Teilchen r und s dar.

Zur Auffindung einer Relation (4.4) betrachten wir das Gleichungssystem der n-Gleichungen:

$$\left(R^s + V^s(t^s) + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t^s}\right)\psi(t^1..t^s..t^n) = 0\,. \tag{4.8}$$

Finden wir die Lösung dieses mehrzeitigen Systems, so stellt die Funktion

$$\psi(t, t, , , t) = \psi(t) \tag{4.9}$$

eine Lösung des Problems (4.1) dar. t^s ist die „Partikelzeit" der s-ten Partikel. Tatsächlich sind aber diese Gln. (4.8) nicht simultan lösbar. Näheres hierüber findet sich bei Bloch[8]). Wir werden aber sehen, dass sie in erster Näherung lösbar sind und uns tatsächlich eine Relation (4.4) vermitteln werden.

Dazu muss die Existenz eines Lorenzsystems gefordert werden, in welchem R^s keine explizit zeitabhängigen Kräfte enthält. Dies ist bei freien Teilchen natürlich der Fall. Ebenso im Ruhsystem des Atomkernes eines gebundenen Elektrons. Es existieren dann Eigenlösungen, für welche gilt (wenn $f(z)$ eine beliebige, durch Reihenentwicklung darstellbare Funktion von z ist)

$$f(R^s)\, u_{\nu_1 \ldots \nu_n} = u_{\nu_1 \ldots \nu_n} \cdot f(h\, \nu_s)\,. \tag{4.10}$$

Die u_{ν_s} sind von den t^s unabhängige Funktionen. Die zeitabhängigen Funktionen

$$v_{\nu_1 \ldots \nu_n} = u_{\nu_1 \ldots \nu_n}\, e^{-i \Sigma \nu_s t^s} \tag{4.11}$$

erfüllen dann die (4.8) in nullter Näherung.

Wir betrachten jetzt den Ausdruck

$$f\left(R^s + \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t^s}\right) w(t^1 \ldots t^n)\,, \tag{4.12}$$

wo w eine beliebige Funktion der q^s und t^s und Funktional der Feldvariablen ist, die in bezug auf ihre Zeitabhängigkeit in der Form

$$w = \sum_{\omega_1} \ldots \sum_{\omega_n} e^{-i \Sigma \omega_s t^s}\, w_{\omega_1 \ldots \omega_n} \tag{4.12a}$$

darstellbar sei.

Dann wird (4.12) die Summe

$$\sum_{\omega_1} \ldots \sum_{\omega_n} e^{-\Sigma \omega_s t^s} f(R^s - h\, \omega_s)\, w_{\omega_1 \ldots \omega_n}\,.$$

Das Integral hat dann folgenden Sinn:

$$\int dq^s \ldots = \int dq^s v^*_{\nu_1 \ldots \nu_s} f\left(R^s + \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t^s}\right) w =$$

$$= \int dq^s \sum_{\omega_1} \ldots \sum_{\omega_n} e^{-i \sum_r (\nu_r - \omega_r) t^r} (f(R^s - h\, \omega_s)^* u_{\nu_1 \ldots \nu_n})^* w_{\omega_1 \ldots \omega_n}\,.$$

Dabei ist f^* der zu f hermiteisch konjugierte Operator. Ist $f(z)$ eine reelle Funktion, so ist $f^* = f(R^s - h\, \omega_s^*)$, da R^s ein hermiteischer Operator ist. Somit kann für das Integral geschrieben werden:

$$\int dq^s \ldots = \int dq^s \sum_{\omega_1} \ldots \sum_{\omega_n} f(h(\nu_s - \omega_s))\, e^{i \Sigma (\nu_r - \omega_r) t^r}\, u^*_{\nu_1 \ldots \nu_n} w_{\omega_1 \ldots \omega_n} \tag{4.13}$$

Da hiemit jede, durch Reihenentwicklung darstellbare, Funktion des Operators $R^s + h\partial/i\partial t^s$ definiert ist, können die Gleichungen des

zu (4.3) analogen Systems, welches durch Entwickeln von ψ in (4.8) erhalten wird, in erster Näherung durch

$$\psi^1 = -\sum\left(R^r + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t^r}\right)^{-1} V^r(t^r)\,\psi^0 \tag{4.14}$$

gelöst werden.

Wir haben andererseits die Beziehung

$$\psi^0(t^1..t^n) = e^{-i\,\Sigma R^r(t^r-t)}\,\psi^0(t) \tag{4.15}$$

Sie ist leicht zu verifizieren, wenn man in Betracht zieht, dass ψ^0 eine Linearkombination von Eigenfunktionen $u_{\nu_1..\nu_n}$ sein muss, deren Koeffizienten die Zeitabhängigkeit exp $(-i\,\Sigma\,\nu_r t)$ haben.

Der Operator

$$U^{sr} = -\left\{\left(R^r + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t^r}\right)^{-1} V^s(t^s)\,V^r(t^r)\,e^{-i\,\Sigma R^m(t^m-t)}\right\}_{t^1=t^2=\ldots=t} \tag{4.16}$$

hat also tatsächlich die Eigenschaft (4.4).

Gemäss der Ableitung des Operators U^{rs} dürfen wir diesen nur in seiner ersten Näherung verwenden. Somit interessieren uns nur solche Matrixelemente, welche zeitunabhängig sind. Berechnet man das vorerst mehrzeitige Matrixelement*)

$$U^{sr}_{\nu',\nu} = \int dq^1..\int dq^n \int dA\, v^*_{\nu_1'..\nu_n'}\left(R^r + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t^r}\right)^{-1} V^s(t^s)\,V^r(t^r)\,v_{\nu_1..\nu_n} \tag{4.17}$$

und verwendet man die Beziehung (4.13), so enthält es den Faktor

$$\frac{i}{h}\,\frac{e^{i(\nu_r'-\omega_r)t^r}\cdot e^{i(\nu_s'-\omega_s)t^s}}{i(\nu_r'-\omega_r)}\,. \tag{4.18}$$

Die $\omega_s t^s$ kommen von der Entwicklung von

$$w = V^s(t^s)\,V^r(t^r)\,v_{\nu_1..\nu_n}(t^1..t^n)$$

gemäss (4.12a).

Mit Hilfe des convergement gemachten Ausdruckes

$$\lim_{\gamma=0}\frac{e^{i(\nu\pm i\gamma)t}}{i(\nu\pm i\gamma)} = -\lim_{\gamma=0}\int_t^{\pm\infty} dt\, e^{i(\nu\pm i\gamma)t}$$

kann dieser Faktor in ein Integral umgeformt werden und man erhält für das (mehrzeitige) Matrixelement die Form

$$U^{sr}_{\nu',\nu}(t^1..t^n) = \int_{t^r}^{\pm\infty} dt^r \int dq^1..\int dq^n \int dA\, v^*_{\nu_1'..\nu_n'}\frac{i}{h}\,V^s(t^s)\,V^r(t^r)\,v_{\nu_1..\nu_n} \tag{4.19}$$

*) $\int dA$ bedeutet Integration über den Funktionenraum $A(\vec{x})$ (= z. B. Raum der Lichtquanten).

Berücksichtigen wir noch die Bedingung, dass nur zeitunabhängige Matrixelemente eine Rolle spielen, so bedeutet das, dass nur Terme deren Exponenten der Beziehung

$$(\nu_s' - \omega_s) + (\nu_r' - \omega_r) + \sum_{m \neq s,\, r} (\nu_m' - \nu_m) = 0 \qquad (4.19a)$$

gehorchen, verwendet werden. Wählt man die $v_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ in der üblichen Weise als orthogonales Funktionensystem, so muss $\nu_m' = \nu_m$ sein, da für $m \neq r, s$ der Operator keine auf q^m wirkenden Operatoren enthält. Daher kann $(\nu_r' - \omega_r)$ überall durch $-(\nu_s' - \omega_s)$ ersetzt werden. Das bedeutet, in Gl. (4.18), dass das Integral über dt^r in (4.19) durch

$$-\int_{t^s}^{\pm\infty} dt^s$$

ersetzt werden kann. Addiert man also zum Matrixelement von U^{sr} dasjenige von U^{rs} um dasjenige des Wechselwirkungsoperators (4.7) zu erhalten, und macht beim zweiten von dieser Alternative Gebrauch, so findet man, dass die zeitfreien Matrixelemente des Wechselwirkungsoperators den Matrixelementen des Operators

$$\int_{t}^{\pm\infty} dt^r e^{i R^r (t^r - t)} \frac{i}{h} [V^s(t), V^r(t^r)] e^{-i R^r (t^r - t)} \qquad (4.20)$$

gleich sind. Hat nun V^s die Form

$$V^s = -\frac{1}{2} \int d\vec{x}^{\,3} (A(x)^* J^s(\vec{x})) + \left(\frac{\partial A(x)^*}{\partial x}, S^s(\vec{x}) \right) + \text{conj.} + \text{Terme in } A^2$$

worin J^s und S^s die Ladungs- und Polarisationsoperatoren bei *Abwesenheit des Feldes* bedeuten (ihre Abänderung bei Anwesenheit eines Feldes ist durch „+ Terme in A^2" berücksichtigt), so genügt es in (4.20) nur die in A linearen Terme zu berücksichtigen. Die höheren Terme mitzunehmen, wäre inkorrekt, da wir bei unserem Näherungsverfahren die kleine Grösse, nach der wir entwickeln, nur bis zur zweiten Potenz berücksichtigen wollen. Die Ausdrücke J^s und S^s enthalten also keine Feldoperatoren mehr und sind daher mit den Feldoperatoren vertauschbar.

Wir führen den Operator

$$J^s(y) = e^{i R^r (y_0 - ct)/ch} J^s(\vec{y}) e^{-i R^r (y_0 - ct)/ch} \qquad (4.21)$$

ein, dessen Erwartungswert den Erwartungswert der Ladung des Teilchens s am Orte $\vec{y}$ zu der (im allgemeinen von der in der Schroedingergleichung vorkommenden Zeit t verschiedenen) Zeit y_0/c ergibt (*Operator der retardierten Ladung*). Der Wechselwir-

kungsoperator darf dann wegen der Vertauschungsrelation (3.18) und (3.20) in der Form geschrieben werden

$$U^{rs}+U^{sr}=-\tfrac{1}{2}\int d\vec{x}^{\,3}\left\{J^s(\vec{x})\,A^r(x)^*+\left(S^s(\vec{x}),\,\frac{\partial A^r(x)^*}{\partial x}\right)+\text{conj.}\right\}_{x_0=ct} \tag{4.22}$$

mit*)

$$A^r(x)=\int_{x_0}^{\pm\infty} d y_0 \int d\vec{y}^{\,3}\left(J^r(y)\,D(x-y)+\left(S^r(y),\,\frac{\partial D(x-y)}{\partial y}\right)\right).$$

Den zweiten Term des Integranden kann man durch partielle Integration noch umformen, da die D-Funktion auf der Oberfläche des vierdimensionalen Halbraumes verschwindet, und erhält

$$A^r(x)=\int_{x_0}^{\pm\infty} d y_0 \int d\vec{y}^{\,3} J^r_{\text{eff}}(y)\,D(x-y), \tag{4.23}$$

wo

$$J^r_{\text{eff}}(y)=J^r(y)-\left(\frac{\partial}{\partial y},\,S^r(y)\right) \tag{4.24}$$

die in (2.2) definierte effektive Ladung des Teilchens r am Orte $\vec{y}$ zur Zeit y_0/c bedeutet.

(4.23) ist aber nichts anderes als die klassische Formel (1.10) für das retardierte oder avancierte Potential in operatorieller Form.

Der Operator (4.22) enthält keine Feldoperatoren mehr und führt ohne weiteres auf die Møller'sche Vorschrift. Dabei ist offenbar retardiertes und avanciertes Potential gleich.

Kann aber das Teilchen r strahlen, so bedeutet das, dass die Funktion ψ^1 in (4.14) unendlich wird, d. h., dass im Nenner von (4.18) Glieder mit $\nu_r'=\omega_r$ vorkommen. Das ist immer dann der Fall, wenn die Fourieranalyse des Matrixelementes des Operators $J^r(x)$ für gewisse Übergänge die im Paragraphen 1 definierten Eigenvektoren des Feldes enthält. Die erste Näherung

*) Im Zeitanteil des skalaren Produktes muss eigentlich stehen:

$$-\tfrac{1}{2}\int d\vec{x}^{\,3} S_0{}^s(\vec{x})\int_{x_0}^{\pm\infty} d y_0 \frac{\partial}{\partial x_0}\int d\vec{y}^{\,3}(J^r(y)^* D\,\ldots\ldots)$$

d. h. $\partial/\partial x_0$ steht *unter dem Integralzeichen* nach $d y_0$. Setzt man es, wie in Formel (4.22), *vor das Integralzeichen*, so erhält man wegen der Beziehung:

$$D(x)_{x_0=0}=0\,;\quad \left\{\frac{\partial D(x)}{\partial x_0}\right\}_{x_0=0}=-4\pi\delta(\vec{x})\,;\qquad \left\{\frac{\partial D(x)}{\partial x_i}\right\}_{\substack{x_0=0\\ i\neq 0}}=0$$

einen Zusatzterm von der Form

$$-2\pi\int d x^3(S^s{}_0(\vec{x})\,S_0{}^r(\vec{x})^*+\text{conj.}),$$

welcher sich gegen den in der Anm. zu S. 230 (2.6a) erwähnten Term forthebt.

gibt einen wesentlichen Beitrag zur Störung der Wellenfunktion ψ^0. Der Anfangszustand wird exponentiell abklingen. Trägt man dem schon in der nullten Näherung dadurch Rechnung, dass man an Stelle von (4.11)

$$\left.\begin{aligned} v_{\nu_1 \ldots \nu_n} &= u_{\nu_1 \ldots \nu_n}\, e^{-i \sum\limits_{m \neq r} \nu_m t^m} \cdot F(-\nu_r + i\gamma, t^r) \\ \text{mit} \quad F(\nu, t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{i\nu t} & \text{für } t > 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

schreibt, so lautet, wie man sich durch Fourierdarstellung (oder Integration nach der Zeit in der üblichen Weise) leicht überzeugt (4.18)

$$-\frac{i}{h} \int\limits_{t^r}^{-\infty} dt\, F(\nu_r' - \omega_r + i\gamma, t) \cdot e^{i(\nu_s' - \omega_s) t^s} \tag{4.18a}$$

Formel (4.19) bleibt also zu Recht bestehen, wenn man nur das Vorzeichen $-\infty$ als obere Integrationsgrenze behält.

Die Formel (4.17) für U^{rs} enthält nach wie vor den Faktor (4.18) mit r und s vertauscht. Fügt man jetzt den Term

$$\frac{i}{h} \cdot \frac{-e^{i(\nu_s' - \omega_s) t^s}}{i(\nu_s' - \omega_s)}$$

zu diesem Faktor hinzu, so überzeugt man sich, dass dieser Zusatz *keinen Beitrag* zu zeitunabhängigen Matrixelementen liefert, wenn das s-te Teilchen nicht strahlen kann. Da γ eine, im Vergleich zu $\nu_s' - \omega_s$ verschwindend kleine Grösse bedeutet, so gilt nach wie vor die Energierelation (4.19a), welche wieder gestattet, das mit Zusatzterm versehene (s und r vertauscht) (4.18) als Integral über dt^r von t^r bis $-\infty$ auszudrücken.

Der in (4.22) auftretende Operator (4.23) enthält also nur die Grenze $-\infty$ und ist, gemäss der Definition (1.10) der Operator des retardierten Potentials des r-ten (strahlen könnenden) Teilchens [5]).

5. Ableitung des Wechselwirkungsoperators im gewöhnlichen Raum.

Die Darstellung der Materie durch die Koordinaten von n Raumpunkten q^s ist nur dann möglich, wenn die Teilchenzahl der Materiequanten erhalten bleibt. Das ist aber, wie das Experiment und die Theorie zeigen, nicht der Fall (Paarerzeugung). Man griff daher zu der Felddarstellung der Materie, deren einfachste Form die Darstellung durch einen Schroedinger'schen Feldskalar $q(\vec{x})$ ist. Seine Quantisierung ist von Pauli und Weisskopf[6]) angegeben worden. Eine andere Möglichkeit (die einzige, welche den Halbzahligen Spin der Materiequanten vermittelt) ist

die Dirac'sche Darstellung durch einen vierkomponentigen Feldspinor $q^\alpha(\vec{x})$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Die Quantisierung des Diracfeldes bringt gewisse Schwierigkeiten mit sich (Löchertheorie). In einer, von MAJORANA[9]) vorgeschlagenen, Quantisierungsmethode tritt diese Löcherdarstellung nicht explizit in Erscheinung.

Die Schroedingergleichung (3.13) kann auch bei Felddarstellung in der Form (4.1) zerlegt werden. Nur sind R und V nicht mehr Summen von n Termen R^s und V^s, sondern Raumintegrale von gewissen Dichten

$$R = \int d\vec{x}^3 \mathfrak{R}(\vec{x}) \qquad V = \int d\vec{x}^3 \mathfrak{V}(\vec{x})\, t. \tag{5.1}$$

Die Überlegungen bis zu Formel (4.4) behalten ihre Gültigkeit*). (4.4) selbst ist hingegen durch die Forderung zu ersetzen, dass ein Operator $\mathfrak{U}(\vec{x}, \vec{y})$ existiert, für den gilt

$$\mathfrak{V}(\vec{x}, t)\, \psi^1 = \int d\vec{y}^3\, \mathfrak{U}(\vec{x}, \vec{y})\, \psi^0 \tag{5.2}$$

Gl. (4.6) enthält dann an Stelle der Doppelsumme über U^{rs} ein Doppelintegral über den Operator $\mathfrak{U}(\vec{x}, \vec{y})$. Entsprechend der Funktion $\psi(t^1 \ldots t^n)$ führt man ein Funktional $\psi(t(\vec{x}))$ ein, welches der Gleichung:

$$\left(\int d\vec{x}^3 \delta(\vec{x} - y)\, \mathfrak{R}(\vec{x}) + \int d\vec{x}^3 \delta(\vec{x} - \vec{y})\, \mathfrak{V}(\vec{x}, t(\vec{y})) + \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t(\vec{y})}\right) \psi = 0 \tag{5.3}$$

genügt. Dabei soll $\delta(\vec{x})$ vorerst noch einen endlichen Bereich ausfüllen. Die zeitfreien Eigenfunktionen nullter Näherung u der Gleichung (5.3) sind dann die Eigenfunktionen des Operators, welcher der in einem durch die δ-Funktion um den Ort $\vec{y}$ definierte Volumen enthaltenen Energie der Materie entspricht. $t(\vec{y})$ ist, analog der „Partikelzeit", als „Lokalzeit" zu bezeichnen. Man kann nun leicht die weiteren Rechnungen in voller Analogie zum vorhergehenden Paragraphen durchführen und erhält nach dem Übergang zur δ-Funktion für den Wechselwirkungsoperator statt (4.22)

$$U = -\frac{1}{4} \int d\vec{x}^3 \left\{ J(\vec{x})\, A(x) + \left(S(\vec{x}), \frac{\partial A(x)}{\partial x} \right) + \text{conj.} \right\}_{x_0 = ct} \tag{5.4}$$

mit

$$A(x) = \int_{x_0}^{\pm\infty} d y_0 \int d\vec{y}^3\, J_{\text{eff}}(y)\, D(x - y). \tag{5.5}$$

---

*) Die Schroedingerfunktion ψ ist natürlich jetzt Funktional von $A(\vec{x})$ und $q(\vec{x})$.

Dabei sind $J(y)$ und $S(y)$ wieder die retardierten Ladungsoperatoren nullter Näherung ($A = 0$), welche sich aus den Operatoren $J(\vec{y})$ und $S(\vec{y})$ durch

$$J(y) = e^{i R (y_0 - ct)/hc} J(\vec{y}) e^{-i R (y_0 - ct)/hc} \tag{5.6}$$

ergeben. Der Faktor 1/4 in (5.4) kommt davon her, dass $\vec{x}$ und $\vec{y}$ über den ganzen Raum integriert werden und somit jedes Volumelement doppelt gezählt worden ist. Eine Absonderung des Selbstenergieterms, die in (4.22) durch Auslassen der Terme $r = s$ geschieht, wird hier natürlich unmöglich. Ausser (5.4) erhält man, wegen der Nichtvertauschbarkeit der Ladungsoperatoren miteinander, noch Glieder, welche dem Quadrat der Feldoperatoren proportional sind, und welche zu Selbstenergie, Doppelabsorption und -emission und Comptoneffekt beitragen.

6. Verallgemeinerung auf mehrkomponentige Felder.

Die Verallgemeinerung auf mehrkomponentige Tensorfelder kann formal einfach dadurch erhalten werden, dass A, J und S_i weitere Tensorindices erhalten, z. B. für ein Vierervektorfeld A_i, J_i und S_{ik}.

Dann wird aber die Energie W ihren positiv definiten Charakter verlieren. Dem kann nur dadurch abgeholfen werden, dass man Nebenbedingungen einführt.

Für den Fall $l = 0$ lautet diese Nebenbedingung im materiefreien Raum bekanntlich[7])

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, A\right) \psi = 0. \tag{6.1}$$

Sie ist mit sich selbst und mit ihrer konjugiert komplexen (d. h. für zwei Ereignisse x und y) verträglich.

Für den Fall $l \neq 0$ ist es nicht möglich, eine Nebenbedingung zu finden. Führt man aber, neben dem Feld A_i noch ein skalares Feld B ein, das einer Feldgleichung vom Typus (0.1) mit demselben l genügt, so ergibt

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}, A\right) + lB\right) \psi = 0 \tag{6.2}$$

eine positiv definite Energie und ist mit sich selbst und mit seiner konjugiert komplexen vertauschbar.

Bei Anwesenheit von Materie sind die Nebenbedingungen in bestimmter Weise abzuändern, damit sie im Laufe der Zeit t erhalten bleiben.

Aus (6.1) folgen in bekannter Weise die Maxwell'schen Gleichungen. Sie besagen u. a., dass ein Photon neben seinem Impuls einen weiteren Freiheitsgrad besitzt: die Polarisation. Diese ist nur zweier Werte fähig (z. B. links- und rechtszirkular), resp. das Photon hat nur zwei Einstellmöglichkeiten des Spins. Aus (6.2) folgen gewisse Maxwell-ähnliche und von PROCA[10]) diskutierte Gleichungen: Das Feld kennt drei linear unabhängige Polarisationsformen, welche einem Teilchen mit drei Einstellmöglichkeiten des Spins entsprechen. Die Eigenwerte des Spins sind natürlich die ganzzahligen Vielfachen h, 0 und $-h$ von h.

In einem zweiten Teile soll das Procafeld als Anwendung der vorgeschlagenen Methode behandelt werden.

Wie mir Herr Dr. N. KEMMER freundlicherweise mitteilt, sind von ihm selbst und von anderen Autoren[11]) verschiedene Arbeiten im Erscheinen, welche das Procafeld und seine Anwendung auf die Wechselwirkung zwischen Neutronen und Protonen behandeln.

Der Vorteil der vorliegenden Methode liegt darin, dass sie, ohne explizites Eingehen auf die Quantenstruktur der Felder und ohne spezielle Annahmen über die Darstellung der Materie, die Berechnung der retardierten und natürlich auch der nichtretardierten Wechselwirkungsterme gestattet.

In Übereinstimmung mit Kemmer scheint es mir möglich, dass ein komplexes Procafeld (dessen Teilchen „schwere Elektronen" und „schwere Antielektronen" sind) und ein Procafeld (dessen Teilchen ungeladen sind) die Kernkräfte vollständig beschreibt.

Institut de Physique, Université de Genève.

Literatur.

[1]) YUKAWA, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **17**, 48 (1935) und **19**, 1084 (1937).

[2]) STUECKELBERG, Phys. Rev. **52**, 41 (1937). — OPPENHEIMER und SERBER, Phys. Rev. **51**, 1113 (1937). — KEMMER, Nature **141**, 116 (1938). — BHABHA, Nature **141**, 117 (1938).

[3]) MØLLER, Zs. für Phys. **70**, 786 (1931). Quantentheoretische Ableitungen: BETHE und FERMI, Zs. f. Phys. **77**, 296 (1932).

[4]) BREIT, Phys. Rev. **39**, 616 (1932).

[5]) HULME, Proc. Roy. Soc. **145**, 487 (1936).

[6]) PAULI und WEISSKOPF, Helv. Phys. Acta **7**, 709 (1934).

[7]) DIRAC, FOCK und PODOLSKI, Sow. Phys. **2**, 468 (1932).

[8]) BLOCH, Sow. Phys. **5**, 301 (1934).

[9]) MAJORANA, Nuovo Cim. **14** (No. 4) (1937).

[10]) PROCA, Journ. Phys. **7**, 347 (1936).

[11]) KEMMER, Proc. Roy. Soc. im Erscheinen. — KEMMER, FROEHLICH und HEITLER, Proc. Roy. Soc. im Ersch. — BHABHA, Proc. Roy. Soc. im Ersch.