

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 11 (1938)

Heft: II

Artikel: Der senkrechte und schräge Durchtritt einer in einem flüssigen Medium erzeugten ebenen Dilatations-(Longitudinal)-Welle durch eine in diesem Medium befindliche planparallele feste Platte

Autor: Reissner, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110845>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der senkrechte und schräge Durchtritt einer in einem flüssigen Medium erzeugten ebenen Dilatations-(Longitudinal)-Welle durch eine in diesem Medium befindliche planparallele feste Platte

von **H. Reissner**, Berlin-Charlottenburg.

(17. XII. 37.)

Bei Gelegenheit einer von Herrn EDGAR MEYER veranlassten Besprechung über die Arbeit von BÄR und WALTI¹⁾ „Über die Bestimmung der Poissonschen Elastizitätskonstante mit Hilfe von Ultraschallwellen“ machte sich eine Lücke bemerkbar in bezug auf die mathematische Erfassung des Durchtritts einer Schallwelle durch eine feste Wand.

Verfasser hat es nun im folgenden unternommen, diese Aufgabe unter gewissen Voraussetzungen exakt durchzurechnen.

Diese Voraussetzungen sind:

Vernachlässigung der inneren Reibung,
Ebenheit des Wellensystems,
Planparallelität der Wand.

Zu diesen Voraussetzungen kam noch von seiten der obengenannten Herren hinzu:

Wachsen der Beugung einer quer durch den Schallstrahl hindurchtretenden Lichtwelle mit der Intensität der Ultraschallwelle.

Bei dieser Durchrechnung verdankt Verfasser dem Schriftwechsel mit Herrn BÄR wichtige Gesichtspunkte.

Die von Herrn WALTI sehr sorgfältig durchgeführten Experimente zeigen durch die gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie (siehe Arbeit von A. WALTI in dieser Zeitschrift), dass diese Vernachlässigungen und Annahmen an den wesentlichen Zusammenhängen sehr wenig geändert haben.

Die Erfüllung aller Übergangsbedingungen auf den beiden Seiten der Platte führt, solange keine „totale“ Reflexion stattfindet, entsprechend der Textfigur zu einem ebenen stationären Wellensystem bestehend aus zwei Wellenpaaren. Das eine Wellenpaar wird gebildet durch eine Dilatations-(Longitudinal)welle, die in der durch den Brechungsexponenten, d. h. das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestimmten Richtung fortschrei-

¹⁾ R. BÄR und A. WALTI, *Helv. Phys. Acta* **7**, 658, 1934.

tet und eine zweite Dilatationswelle, die unter demselben Winkel zur Plattennormale reflektiert ist. Das zweite Wellenpaar wird in derselben Weise von zwei Rotations-(Transversal)wellenfeldern innerhalb der Platte gebildet. Diese beiden Wellenpaare durchdringen einander und beeinflussen sich nur insoweit, dass ihre Amplituden und Phasen an den Grenzflächen gleiche Verschiebungen, gleiche Normalspannungen und verschwindende Schubspannungen wie die entsprechenden Grössen der aus der umgebenden Flüssigkeit eintretenden, reflektierten und in die Flüssigkeit auf der anderen Seite austretenden reinen Dilatations-(Longitudinal)welle haben müssen.

Diese Zustände sind jedoch nur bis zu demjenigen Stellungswinkel der Platte gegen die auftreffende Strahlrichtung möglich, bei dem das System der Dilatationswelle um einen rechten Winkel oder mehr abgelenkt wird.

Man spricht dann von totaler Reflexion, obgleich eine wirklich totale Reflexion im allgemeinen nur beim Eintritt in einen Halbraum stattfindet.

Dies Paar unterhalb des Grenzwinkels hin und her *laufender* Wellen von räumlich konstanter Amplitude verwandelt sich dann bei der Platte in zwei den Plattenebenen entlanggerichtete *stehende* Wellen, die eine mit einer nach dem Platteninnern exponentiell abnehmenden, die andere mit einer räumlich exponentiell zunehmenden Amplitude.

Nur bei unendlicher Dicke der Platte verschwindet die letztere Welle aus der Bedingung, dass im Unendlichen die Strahlung verschwinden soll.

Bei endlicher Dicke der Platte dagegen existiert auch die stehende Welle räumlich zunehmender Amplitude und kann an der Austrittseite der Platte eine in die Flüssigkeit austretende Welle mit sich bringen.

Das Entsprechende tritt auch ein, wenn die Rotationswelle um einen rechten Winkel oder mehr abgelenkt wird.

Das Folgende bringt die zahlenmässigen Zusammenhänge und stellt insbesondere die Strahlungsdurchlässigkeit der Platte abhängig von Dicke, Stellungswinkel, Dichte und Elastizitätskonstanten der Medien durch eine einheitliche auch die Bereiche totaler Reflexion umfassende Formel dar.

Es möge noch hinzugefügt werden, dass die durchgeführte Theorie sich vielleicht auch für das Problem der Schalldämmung gewöhnlicher Schallwellen durch feste Wände bei gradem und schieferem Durchtritt von Nutzen erweisen könnte. In dieser

Richtung würde auch eine ergänzende analoge Durchführung der Theorie des axialsymmetrischen Problems des Durchtritts einer Kugelwelle aus einem flüssigen Medium durch eine feste Wand in ein wiederum flüssiges Medium erwünscht sein.

1. Bezeichnungen:

u, v, w Verschiebungen in Richtung der drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, y, z (Fig. 1).

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Dilatation des jeweiligen Mediums.

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

z Komponente des Rotationsvectors.

λ, μ Lamé'sche Elastizitätskonstanten des Plattenmediums.

λ_1 Lamé'sche Elastizitätskonstante der Flüssigkeit.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Normalspannungen.

$\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ Schubspannungen

ρ Dichte des Plattenmediums.

ρ_1 Dichte der Flüssigkeit.

K_1 Amplitude der einfallenden Dilatations-(Longitudinal)-welle.

K_2 komplexe Amplitude der reflektierten Welle.

K_3 komplexe Amplitude der aus der Platte austretenden Welle.

A_1, B_1 komplexe Amplituden der Dilatationswelle in der Platte.

B_2 komplexe Amplituden der Rotationswelle in der Platte.

w_1 Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Dilatationswellen in der Flüssigkeit.

w_d Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Dilatationswellen in der Platte.

w_r Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Rotationswellen in der Platte.

p Schwingungsfrequenz.

$n = p/2\pi$ Schwingungszahl (Hertz).

$\Lambda = w/n$ Wellenlänge.

ϑ = Einfallswinkel der Strahlung.

φ_d bzw. φ_r = Strahlrichtungswinkel der Dilatations- und der Rotationswelle in der Platte (Fig. 1).

$$\alpha = \frac{\sin \vartheta}{w_1} = \frac{\sin \varphi_d}{w_d} = \frac{\sin \varphi_r}{w_r}$$

d = Dicke der Platte.

$$\varphi_1 = \frac{pd \cos \vartheta}{w_1} = 2\pi \frac{d \cos \vartheta}{\Lambda_1}$$

$$Q_3 = K_3 e^{-i\varphi_1}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{w_d^2} - \alpha^2} = \frac{\cos \varphi_d}{w_d}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{w_r^2} - \alpha^2} = \frac{\cos \varphi_r}{w_r}$$

$$\varphi = p\beta d = \frac{pd}{w_d} \cos \varphi_d = \frac{2\pi d \cos \varphi_d}{\Lambda_d}$$

$$\psi = p\delta d = \frac{pd}{w_r} \cos \varphi_r = \frac{2\pi d \cos \varphi_r}{\Lambda_r}$$

$$F = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{w_d^2}{w_1^2} \frac{\sin 2\vartheta \cos^2 2\varphi_r}{\sin \varphi \sin 2\varphi_d}, \quad G = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{w_r^2}{w_1^2} \frac{\sin 2\vartheta}{\sin \psi} \sin 2\varphi_r$$

$$N = F + G, \quad M = F \cos \varphi + G \cos \psi$$

$$D = \frac{|K_3|^2}{K_1^2} = \frac{4N^2}{(M^2 - N^2 - 1)^2 + 4M^2} \text{ Durchlässigkeit } \dots \quad (27)$$

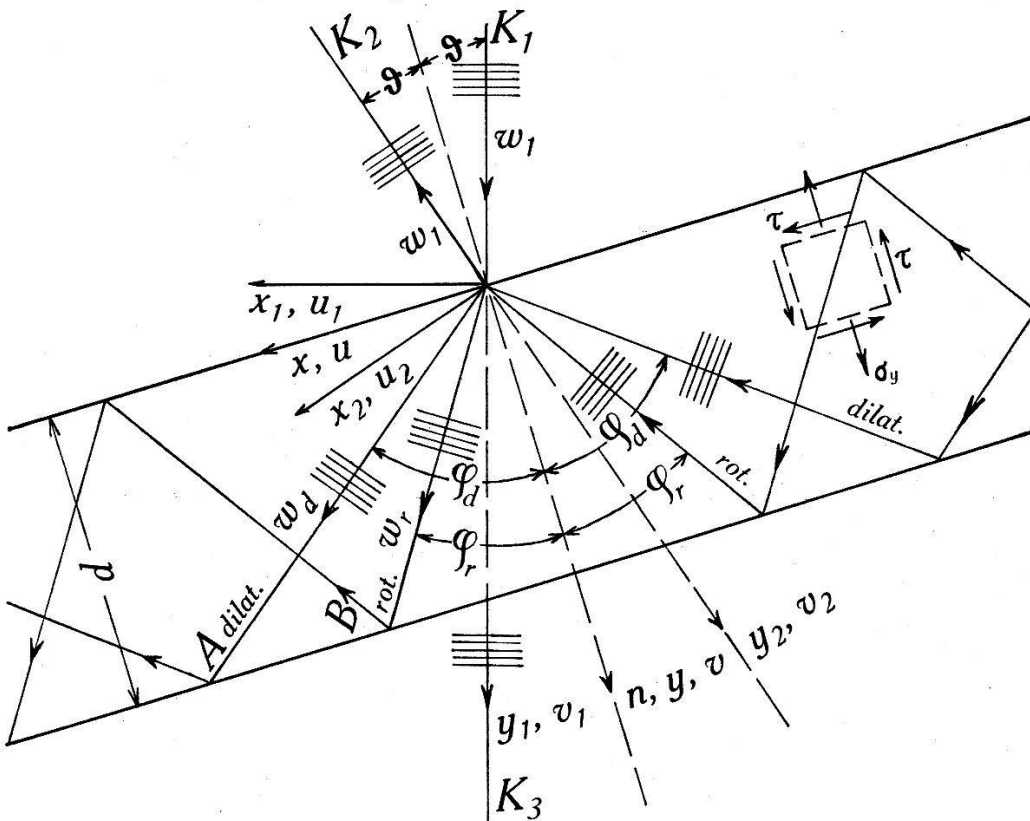


Fig. 1.

2. Der allgemeine Ansatz für elastische Wellen. Das ebene Problem.

Der allgemeinste Schwingungsvorgang in einem vollkommen elastischen isotropen Körper ohne innere Reibung ist beherrscht durch die Wellengleichung der Dilatation e und die Wellengleichung des Rotationsvektors $\bar{\omega}$.

In den drei Verschiebungskomponenten u, v, w drücken sich bekanntlich die Dilatation und die Rotationskomponenten folgendermassen aus:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2)$$

Die Normalspannungen σ und die Schubspannungen τ sind mit den Verschiebungen und den Laméschen Elastizitätskonstanten λ und μ verknüpft durch die Beziehungen

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

und die Wellengleichungen lauten dann:

$$\Delta e = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2 e}{dt^2} \quad (5)$$

$$\Delta \bar{\omega} = \frac{\rho}{\mu} \frac{d^2 \bar{\omega}}{dt^2} \quad (6)$$

wo ρ die Massendichte und Δ den Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

bedeuten.

Das ebene Problem ist gekennzeichnet durch die Bedingungen:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

wozu man entweder

$$w = 0 \quad (7a)$$

oder

$$\sigma_z = 0 \quad (7b)$$

hinzuzufügen hat.

Die erstere Bedingung setzt voraus, dass der Körper genügend stark an der Bewegung quer zur Fortpflanzungsrichtung gehindert ist, die zweite, dass in dieser Querrichtung gar kein Zwang herrscht.

Beide Bedingungen unterscheiden sich in den Folgerungen nur durch die Verknüpfung zwischen Dilatation e und den Dehnungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, nämlich im ersten Falle

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1a)$$

im zweiten Falle

$$e = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1b)$$

wie man aus (7b) in Verbindung mit der letzten Gleichung (3) und (1) sieht.

Dieser Unterschied macht sich in den Rand- oder Übergangsbedingungen für die Spannungen bemerkbar, dagegen nicht in den Wellengleichungen, welche für den ebenen Fall sich nun vereinfachen zu:

$$\Delta e = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \ddot{e} \quad (5a)$$

$$\Delta \omega_z = \frac{\rho}{\mu} \ddot{\omega}_z \quad (6a)$$

3. Die Dilatationswellen in der Flüssigkeit.

Die Wellenfortpflanzung in einer Flüssigkeit ist ein Sonderfall, der nur Dilatationswellen mit sich bringt, indem mit

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \omega_z &= 0, \quad u = 0 \\ e &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (1c)$$

wird, während die Bedingung $\sigma_z = 0$ in einer Flüssigkeit nur mit $e = 0$ verwirklicht ist.

Die Gleichung (5a) liefert für die mit der Frequenz p einfallende Welle (Index 1) und die reflektierte Welle (Index 2) die Lösung

$$e_{\frac{1}{2}} = K_{\frac{1}{2}} e^{ip \left(t \mp \frac{y_{1,2}}{w_1} \right)} \quad (8)$$

wo $K_{\frac{1}{2}}$ komplexe Amplituden und

$$w_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\rho_1}} \quad (9a)$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer Flüssigkeit mit der Elastizitätskonstanten λ_1 und der Dichte ρ_1 . Hieraus wird abgeleitet:

$$v_{\frac{1}{2}} = \pm p^{-1} i K_{\frac{1}{2}} w_1 e^{ip \left(t \mp \frac{y_{1,2}}{w_1} \right)}. \quad (10)$$

Da nun nach Fig. 1

$$y_{1,2} = y \cos \vartheta \pm x \sin \vartheta$$

ist, so wird die resultierende Dilatation an der *Vorderseite* ($y = 0$) mit der Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sin \vartheta \cdot w_1^{-1} \\ e &= e_1 + e_2 = (K_1 + K_2) e^{ip(t - \alpha x)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Normalspannung also

$$\sigma_y = \lambda_1 e = w_1^2 \rho_1 (K_1 + K_2) e^{ip(t - \alpha x)} \quad (8a)$$

und die y Verschiebung an der Vorderseite

$$v = (v_1 + v_2) \cos \vartheta = ip^{-1} w_1 \cos \vartheta (K_1 - K_2) e^{ip(t - \alpha x)}. \quad (10a)$$

An der *Hinterseite* ($y = b$) tritt in die Flüssigkeit nur *eine* Dilatationswelle aus und zwar, wie die Erfüllung der Grenzbedingungen zeigen wird, nur eine in der Einfallrichtung laufende.

Man erhält dementsprechend aus (8) und (10), wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\varphi_1 = p w_1^{-1} b \cos \vartheta$$

$$(\sigma_y)_{y=b} = w_1^2 \rho_1 K_3 e^{-i \varphi_1} e^{ip(t - \alpha x)} \quad (8b)$$

$$(v)_{y=b} = ip^{-1} w_1 \cos \vartheta K_3 e^{-i \varphi_1} e^{ip(t - \alpha x)}. \quad (10b)$$

4. Die Wellenfortpflanzung im Plattenkörper.

Man führe zunächst die folgenden Bezeichnungen bzw. Abkürzungen ein:

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = w_d \text{ Dilatationsgeschwindigkeit} \quad (9b)$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = w_r \text{ Rotationsgeschwindigkeit} \quad (9c)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{w_d^{-2} - \alpha^2} &= \beta \\ \sqrt{w_r^{-2} - \alpha^2} &= \delta \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

$$q_{\mp} = p(t - \alpha x \mp \beta y), \quad r_{\mp} = p(t - \alpha x \mp \delta y)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 komplexe Amplituden. Dann lassen sich die Lösungen der Gleichungen (5a) und (6a) schreiben wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} e &= A_1 e^{iq_-} + A_2 e^{iq_+} \\ \omega_z &= B_1 e^{ir_-} + B_2 e^{ir_+} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Aus den Exponenten q und r (solange sie reell sind) erkennt man, dass in der Platte gerade wie im unbegrenzten Körper die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten w_d und w_r sind und die Brechzahlen (Fig. 1)

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi_d} = \frac{w_1}{w_d}, \quad \frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi_r} = \frac{w_1}{w_r}. \quad (13)$$

Auf Grund dieser Beziehungen kann man schreiben

$$\alpha = \sin \vartheta w_1^{-1}, \quad \beta = \cos \varphi_d w_d^{-1}, \quad \delta = \cos \varphi_r w_r^{-1}. \quad (13a)$$

Ausserdem bedingt die Grenzbedingung (Reflexion) an der Hinterseite der Platte noch je eine symmetrisch zur Normale laufende Dilatations- bzw. Rotationswelle, wie es die zweiten Glieder von (12) angeben.

Aus den Elastizitätskonstanten und Dichtigkeiten der von den Herren BÄR und WALTI verwendeten Flüssigkeit und des Glases kann man nach (9a, b, c) die Dilatationsgeschwindigkeit w_1 der Flüssigkeit zu etwa 1500 m/sec, w_d des Glases zu 6000 m/sec und die Rotationsgeschwindigkeit w_r im Glase zu 3300 m/sec schätzen.

Der Strahl wird also nach der Normale hin abgelenkt und zwar für die Dilatationswelle erheblich stärker.

Man sieht ferner, dass im Innern der Platte keine Fortpflanzung zunächst der Dilatationswelle, sodann der Rotationswelle stattfindet, wenn der Winkel ϑ einen gewissen Betrag überschreitet.

Man hat also „totale“ Reflexion für Dilatation allein bzw. für beide Wellen, wenn

$$\sin \vartheta_a > \frac{w_1}{w_a} = \frac{1500}{6000} = 0,25 \quad (\vartheta_a \geq 14^\circ 30')$$

bzw.

$$\sin \vartheta_r > \frac{w_1}{w_r} = \frac{1500}{3300} = 0,455 \quad (\vartheta_r \geq 27^\circ 3').$$

Die Faktoren $e^{\mp i p \beta y}$ bzw. $e^{\mp i p \delta y}$ werden dann reell und ergeben parallel zur Plattenebene (x) verlaufende stehende Wellen mit in Richtung der Plattennormale (y) veränderlichen Amplituden.

Ob diese stehenden Wellen auch abgesehen von der hier nicht zu berücksichtigenden inneren Reibung einer Energiezufuhr bedürfen, d. h., ob man im eigentlichen Sinne von einer totalen Reflexion sprechen kann, hängt davon ab, ob die stehenden Schwingungen der Platte eine Wellenfortpflanzung in der Flüssigkeit hinter der Platte erzeugen, und diese Frage wiederum kann nur aus den Übergangs-Grenzbedingungen an den beiden Grenzebenen der Platte beantwortet werden.

In dem Folgenden soll nun ausschliesslich die Bedingung (7a), $w = 0$ des ebenen Problems durchgeführt werden, da für die Flüssigkeit nur diese, aber nicht die Alternativbedingung (7b), $\sigma_z = 0$ zu verwirklichen ist.

5. Die vollständige Lösung.

Aus den Lösungen (12) zusammen mit der letzten der Gleichung (2) und (1a) folgen nun zunächst die *Verschiebungen* in der Form:

$$\left. \begin{aligned} u &= i p^{-1} \alpha w_a^2 (A_1 e^{i a^-} + A_2 e^{i a^+}) - i p^{-1} \delta w_r^2 (B_1 e^{i r^-} - B_2 e^{i r^+}) \\ v &= i p^{-1} \beta w_a^2 (A_1 e^{i a^-} - A_2 e^{i a^+}) + i p^{-1} \alpha w_r^2 (B_1 e^{i r^-} + B_2 e^{i r^+}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Oder wenn man die Beziehungen (13) und (13a) beachtet und als Abkürzungen einführt:

$$p \beta d = \varphi, \quad p \delta d = \psi, \quad \frac{y}{d} = \eta \quad (13b)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= e^{i p (t - \alpha x)} \left[i p^{-1} w_a \sin \varphi_a (A_1 e^{-i \varphi \eta} + A_2 e^{i \varphi \eta}) \right. \\ &\quad \left. - i p^{-1} w_r \cos \varphi_r (B_1 e^{-i \psi \eta} - B_2 e^{i \psi \eta}) \right] \\ v &= e^{i p (t - \alpha x)} i p^{-1} \left[w_a \cos \varphi_a (A_1 e^{-i \varphi \eta} - A_2 e^{i \varphi \eta}) \right. \\ &\quad \left. + w_r \sin \varphi_r (B_1 e^{-i \psi \eta} + B_2 e^{i \psi \eta}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

Die Schubspannungen ergeben sich dann nach der letzten der Gleichung (4) zu:

$$\tau = e^{i p (t - \alpha x)} \mu [\sin 2 \varphi_d (A_1 e^{-i \varphi \eta} - A_2 e^{+i \varphi \eta}) - \cos 2 \varphi_r (B_1 e^{-i \psi \eta} + B_2 e^{+i \psi \eta})]. \quad (4a)$$

Die Normalspannungen senkrecht zur Plattenebene werden nach (3)

$$\sigma_y = e^{i p (t - \alpha x)} [w_d^2 \rho \cos 2 \varphi_r (A_1 e^{-i \varphi \eta} + A_2 e^{+i \varphi \eta}) + w_r^2 \rho \sin 2 \varphi_r (B_1 e^{-i \psi \eta} - B_2 e^{+i \psi \eta})]. \quad (3a)$$

Es werden also an der *Vorderfläche*

die Verschiebung

$$(v)_{y=0} = e^{i p (t - \alpha x)} i p^{-1} [w_d \cos \varphi_d (A_1 - A_2) + w_r \sin \varphi_r (B_1 + B_2)]$$

die Schubspannung

$$(\tau)_{y=0} = e^{i p (t - \alpha x)} \mu [\sin 2 \varphi_d (A_1 - A_2) - \cos 2 \varphi_r (B_1 + B_2)]$$

die Normalspannung

$$(\sigma)_{y=0} = e^{i p (t - \alpha x)} [w_d^2 \rho \cos 2 \varphi_r (A_1 + A_2) + w_r^2 \rho \sin 2 \varphi_r (B_1 - B_2)].$$

An der *Hinterfläche* ($y = b$, $\eta = 1$) erhält man:

$$(v)_{\eta=1} = e^{i p (t - \alpha x)} p^{-1} [w_d \cos \varphi_d \cos \varphi (A_1 - A_2) i + w_r \sin \varphi_r \cos \psi (B_1 + B_2) i + w_d \cos \varphi_d \sin \varphi (A_1 + A_2) + w_r \sin \varphi_r \sin \psi (B_1 - B_2)] \quad (14b)$$

$$(\tau)_{\eta=1} = e^{i p (t - \alpha x)} \mu [\sin 2 \varphi_d \cos \varphi (A_1 - A_2) - \cos 2 \varphi_r \cos \psi (B_1 + B_2) - \sin 2 \varphi_d \sin \varphi (A_1 + A_2) i + \cos 2 \varphi_r \sin \psi (B_1 - B_2) i] \quad (4b)$$

$$(\sigma_y)_{\eta=1} = e^{i p (t - \alpha x)} [w_d^2 \rho \cos 2 \varphi_r \cos \varphi (A_1 + A_2) + w_r^2 \rho \sin 2 \varphi_r \cos \psi (B_1 - B_2) - w_d^2 \rho \cos 2 \varphi_r \sin \varphi (A_1 - A_2) i - w_r^2 \rho \sin 2 \varphi_r \sin \psi (B_1 + B_2) i]. \quad (3b)$$

Die Fälle totalartiger Reflexion sowohl inbezug auf die Dilatation allein ($i\beta = \beta_1$) als inbezug auf beide Wellenarten ($i\beta = \beta_1$) und ($i\delta = \delta_1$) werden weiter unten behandelt werden.

6. Die Grenzbedingungen:

Es müssen nun die Bedingungen formuliert werden, dass an den Plattenoberflächen:

1. die Schubspannungen τ Null sind,
2. die Verschiebungen v für Flüssigkeit und festen Körper gleich sind,
3. die Normalspannungen σ_y für Flüssigkeit und festen Körper gleich sind.

Dass die Erfüllung dieser Bedingungen überhaupt möglich ist, erforderte, dass in allen Ausdrücken der Faktor $e^{i p(t-\alpha x)}$ heraustritt.

Um die Bedingungen übersichtlich zu schreiben, ist es zweckmässig, für die Amplitudensummen- und Differenzen die folgenden Abkürzungen einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} A_1 - A_2 &= C_1, & i(A_1 + A_2) &= C_2 \\ B_1 + B_2 &= D_1, & i(B_1 - B_2) &= D_2 \\ K_3 e^{-i \varphi_1} &= Q_3 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Dann lassen sich die Grenzbedingungen schreiben wie folgt:

Schubspannungsbedingungen

$$C_1 \sin 2 \varphi_d - D_1 \cos 2 \varphi_r = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} C_1 \sin 2 \varphi_d \cos \varphi - D_1 \cos 2 \varphi_r \cos \psi \\ - C_2 \sin 2 \varphi_d \sin \varphi + D_2 \cos 2 \varphi_r \sin \psi = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Normalspannungsbedingungen

$$C_2 w_d^2 \varrho \cos 2 \varphi_r + D_2 w_r^2 \varrho \sin 2 \varphi_r = i(K_1 + K_2) w_1^2 \varrho_1 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} C_2 w_d^2 \varrho \cos 2 \varphi_r \cos \varphi + D_2 w_r^2 \varrho \sin 2 \varphi_r \cos \psi + \\ + C_1 w_d^2 \varrho \cos 2 \varphi_r \sin \varphi + D_1 w_r^2 \varrho \sin 2 \varphi_r \sin \psi = i Q_3 w_1^2 \varrho. \end{aligned} \quad (19)$$

Verschiebungsbedingungen

$$C_1 w_d \cos \varphi_d + D_1 w_r \sin \varphi_r = w_1 \cos \vartheta (K_1 - K_2) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C_1 w_d \cos \varphi_d \cos \varphi + D_1 w_r \sin \varphi_r \cos \psi - \\ - C_2 w_d \cos \varphi_d \sin \varphi - D_2 w_r \sin \varphi_r \sin \psi = w_1 \cos \vartheta Q_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Die Gleichungen (16) und (20) erlauben zunächst, C_1 und D_1 durch $K_1 - K_2$ und sodann aus den Gleichungen (17) und (21) C_2 und D_2 durch $K_1 - K_2$ und Q_3 auszudrücken wie folgt¹⁾:

$$D_1 = (K_1 - K_2) \sin 2 \vartheta$$

$$C_1 = (K_1 - K_2) \sin 2 \vartheta \frac{\cos 2 \varphi_r}{\sin 2 \varphi_d}$$

$$\sin \psi D_2 = (K_1 - K_2) \sin 2 \vartheta \cos \psi - Q_3 \sin 2 \vartheta$$

$$\sin \varphi C_2 = (K_1 - K_2) \sin 2 \vartheta \cos \varphi \frac{\cos 2 \varphi_r}{\sin 2 \varphi_d} - Q_3 \sin 2 \vartheta \frac{\cos 2 \varphi_r}{\sin 2 \varphi_d}.$$

¹⁾ Man benutze dabei die Brechungsbeziehungen $\frac{w_d}{\sin \varphi_d} = \frac{w_r}{\sin \varphi_r} = \frac{w_1}{\sin \vartheta}$.

Führt man nun diese Ergebnisse in (18) und (19) ein, so ist es zweckmässig die folgenden Abkürzungen festzusetzen:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{\varrho}{\varrho_1} \frac{w_d^2}{w_1^2} \frac{\sin 2 \vartheta}{\sin \varphi} \frac{\cos^2 2 \varphi_r}{\sin 2 \varphi_d} \\ G &= \frac{\varrho}{\varrho_1} \frac{w_r^2}{w_1^2} \frac{\sin 2 \vartheta}{\sin \psi} \sin 2 \varphi_r \\ N &= F + G \\ M &= F \cos \varphi + G \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Es ergeben sich dann aus (18) und (19) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} K_1 - K_2 &= Q_3 \frac{i + M}{N} \\ K_1 + K_2 &= Q_3 i N \\ &= Q_3 \frac{i N^2 + M - i M^2}{N} \end{aligned}$$

und durch Addition die für die Berechnung der austretenden im Verhältnis zur eintretenden Amplitude massgebende Beziehung:

$$Q_3 = K_1 \frac{2 i N}{M^2 - N^2 - 1 + 2 i M}. \quad (23)$$

Ferner für die reflektierte Amplitude

$$K_2 = K_1 \frac{M^2 - N^2 + 1}{M^2 - N^2 - 1 + 2 i M}. \quad (24)$$

Dann für die innere Dilatationswellenamplitude

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= Q_3 \frac{i + M}{N} \sin 2 \vartheta \frac{\cos 2 \varphi_r}{\sin 2 \varphi_d} \\ C_2 &= Q_3 \left[\frac{i + M}{N} \cos \varphi - 1 \right] \frac{\sin 2 \vartheta}{\sin \varphi} \frac{\cos 2 \varphi_r}{\sin 2 \varphi_d} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

und schliesslich für die Rotationsamplitude:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= Q_3 \frac{i + M}{N} \sin 2 \vartheta \\ D_2 &= Q_3 \left[\frac{i + M}{N} \cos \psi - 1 \right] \frac{\sin 2 \vartheta}{\sin \psi} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Die Amplitudengrössen sind zunächst alle komplex.

7. Die Durchlässigkeit.

In den Gleichungen (23) bis (26) können wir in voller Allgemeinheit voraussetzen, dass die Einfallsamplitude K_1 reell ist, indem wir den Anfangspunkt der Zeit so wählen, dass die Einfallswelle durch eine Cosinusfunktion dargestellt wird; dagegen wird $Q_3 = K_3 e^{-i \varphi_1}$ eine komplexe Amplitude vorstellen, und es gilt

$$\begin{aligned} Q_3 &= Q_4 + i Q_5 = (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) (K_4 + i K_5) \\ K_4 &= Q_4 \cos \varphi_1 - Q_5 \sin \varphi_1 \\ K_5 &= Q_4 \sin \varphi_1 + Q_5 \cos \varphi_1 \\ |K_3|^2 &= K_4^2 + K_5^2 = Q_4^2 + Q_5^2. \end{aligned}$$

Andererseits ist $K_4^2 + K_5^2$ die Intensität der austretenden Dilatationswelle und $K_4/K_5 = \operatorname{tg} \varepsilon$ bestimmt die Phasenverschiebung ε der austretenden gegen die einfallende Welle.

Es ergibt sich nun nach Gleichung (23)

$$\begin{aligned} Q_4 &= K_1 \frac{4 M N}{(M^2 - N^2 - 1)^2 + 4 M^2} \\ Q_5 &= K_1 \frac{2 N (M^2 - N^2 - 1)}{(M^2 - N^2 - 1)^2 + 4 M^2}. \end{aligned}$$

Die Durchlässigkeit D , d. h. das Verhältnis zwischen austretendem und eintretendem Amplitudenquadrat, wird also:

$$\frac{|K_3|^2}{K_1^2} = \frac{K_4^2 + K_5^2}{K_1^2} = D = \frac{4 N^2}{(M^2 - N^2 - 1)^2 + 4 M^2} \quad (27)$$

und die Phasenverschiebung

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{2 M}{M^2 - N^2 - 1} - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \frac{2 M}{M^2 - N^2 - 1} \operatorname{tg} \varphi_1}$$

also, wenn

$$\begin{aligned} \varkappa &= \operatorname{artg} \frac{2 M}{M^2 - N^2 - 1} \\ \varepsilon &= \varkappa - \varphi_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Diese Phasenverschiebung würde sich allerdings nur bei stehenden Wellen beobachten lassen.

8. Die Grenzfälle der Reflexion und die Gebiete zwischen den beiden Grenzfällen und jenseits derselben.

Es ist bekannt, dass ein Grenzfall eintritt, wenn der ein tretende Strahl um einen rechten Winkel abgelenkt wird. Wenn der Strahl in einen Halbraum eindringt und es gilt die Bedingung, dass aus dem Unendlichen keine Energie einströmt, dann hat man von diesem Winkel ab totale Reflexion. Tritt aber der Strahl in einen begrenzten Körper, hier in eine planparallele Platte, ein, so braucht der Grenzfall keine totale Reflexion zu bedeuten.

8a. Der erste Grenzfall tritt ein, wenn

$$\varphi = 0, \quad \varphi_a = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi}{p d} = 0, \quad \alpha = w_a^{-1}, \quad \sin \vartheta = \frac{w_1}{w_a}.$$

Es wird dann nach Formel (27), wie man sieht, wenn man mit $\sin^4 \varphi \sin^4 2 \varphi_a$ durchmultipliziert und beachtet, dass

$$\left(\frac{\sin 2 \varphi_a}{\sin \varphi} \right)_{\varphi \rightarrow 0} = \left(\frac{2 w_a^2}{p b w_1} \sin \vartheta \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right)_{\varphi \rightarrow 0} = \frac{2 w_a^2}{p b w_1} \sin \vartheta$$

die Durchlässigkeit

$$D = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho} \frac{w_1}{p b} \frac{1}{\cos^2 2 \varphi_r \cos \vartheta} \right)^2.$$

Es tritt also keine totale Reflexion im eigentlichen Sinne ein.

8b. Das Zwischengebiet zwischen dem ersten und zweiten Grenzfall.

Jenseits der totalen Reflexion der Dilatations-(Longitudinal)-wellen, aber noch vor der totalen Reflexion der Rotations-(Transversal)wellen sind die folgenden Umformungen in der komplexen Amplitude Q_3 und daraus folgend in der Durchlässigkeit D zu beachten.

Es ist zu setzen:

$$\text{statt } \beta: i \beta^{(1)} = i \frac{\mathfrak{S}in \varphi_a^{(1)}}{w_a}, \quad \text{wo } \mathfrak{C}os \varphi_a^{(1)} = \sin \vartheta \frac{w_a}{w_1} = \sin \varphi_a$$

$$\varphi: i \varphi^{(1)} = i p \beta^{(1)} b, \quad \text{wo } \cos i \varphi^{(1)} = \mathfrak{C}os \varphi^{(1)}$$

$$\sin i \varphi^{(1)} = i \mathfrak{S}in \varphi^{(1)}$$

$$\beta^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{\sin \vartheta}{w_1} \right)^2 - \frac{1}{w_a^2}}.$$

Es ist dann in M und N zu setzen:

$$\text{statt } F: F^{(1)} = -\frac{\varrho}{\varrho_1} \frac{w_d^2}{w_1^2} \frac{\sin 2 \vartheta}{\text{Sin } \varphi^{(1)}} \frac{\cos^2 2 \varphi_r}{\text{Sin } 2 \varphi_d}; \quad G \text{ unverändert}$$

$$\text{statt } \cos \varphi: \text{Cos } \varphi^{(1)}, \quad \varphi^{(1)} = b p \frac{\text{Sin } \varphi_d^{(1)}}{n_d}$$

und damit bleibt die Form der Durchlässigkeitsfunktion im übrigen erhalten.

8c. Der zweite Grenzfall der totalen Reflexion der Rotationswellen.

Der zweite Grenzfall tritt ein, wenn die Rotationswelle um einen rechten Winkel abgelenkt wird, also wenn

$$\varphi_r = \frac{\pi}{2}, \quad \delta = 0, \quad \psi = 0, \quad \alpha = \frac{1}{w_r}$$

wird. Es erscheint dann in der Durchlässigkeitsformel in G der Quotient

$$\frac{\sin 2 \varphi_r}{\sin \psi} = \frac{2 w_r \delta}{\sin p d \delta} = \frac{2 w_r}{p d}$$

und im übrigen bleibt auch dann wieder die Durchlässigkeitsformel (27) erhalten.

8d. Das Gebiet jenseits der Grenzfälle.

Zu den Beziehungen von (8a) treten noch die ganz entsprechenden für die Grösse δ hinzu, nämlich:

$$\text{statt } \delta: i \delta^{(1)} = i \frac{\text{Sin } \varphi_r^{(1)}}{w_r} \quad \text{wo} \quad \text{Cos } \varphi_r^{(1)} = \sin \vartheta \frac{w_r}{w_1}$$

$$\text{statt } \psi: i \psi^{(1)} = i p \delta^{(1)} b \quad \text{wo} \quad \cos i \psi^{(1)} = \text{Cos } \psi^{(1)}, \quad \sin i \psi^{(1)} = i \text{Sin } \psi^{(1)}$$

$$\text{statt } \sin \varphi_r: \text{Cos } \varphi_r^{(1)}$$

$$\text{statt } \cos \varphi_r: i \text{Sin } \varphi_r^{(1)}$$

$$\delta^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{\sin \vartheta}{w_1}\right)^2 - \frac{1}{w_r^2}}$$

Es tritt dann in den Bezeichnungen (22) nur die folgende Änderung ein:

$$\text{statt } \frac{\sin 2 \varphi_r}{\sin \psi}: \frac{\text{Sin } 2 \varphi_r^{(1)}}{\text{Sin } \psi^{(1)}}$$

$$\text{also statt } G: G^{(1)} = \frac{\varrho}{\varrho_1} \frac{w_r^2}{w_1^2} \sin 2 \vartheta \frac{\text{Sin } 2 \varphi_r^{(1)}}{\text{Sin } \psi^{(1)}}$$

$$\text{statt } G \cos \psi: G^{(1)} \text{Cos } \psi^{(1)}$$

und im übrigen bleibt die Formel der Durchlässigkeitsfunktion erhalten.

Die hier erhaltenen Ergebnisse, insbesondere die Durchlässigkeitsformel (27) sind der gleichzeitig in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit von WALTJ zugrunde gelegt, mathematisch diskutiert und mit den Messungen verglichen. Die einfache Darstellung der Durchlässigkeit mit Hilfe der übersichtlichen Ausdrücke M und N in (22) verdanke ich Herrn V. BARGMANN.

Wie man aus der Experimentalarbeit sieht, zeigen die Messungen im allgemeinen sehr gute Übereinstimmung, nur im Grenzgebiet grosser Dicken und grosser Einfallswinkel kleine systematische Abweichungen.

Es ist offenbar zu bedenken, dass die Voraussetzungen ebener Wellenzüge, Abwesenheit innerer Reibung, eindeutiger Beziehung zwischen Schallintensität und Beugung der Lichtwellen und Ersetzung der planparallelen durch eine schwach keilförmige Platte, kleine systematische Abweichungen hineinbringen können.
