Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 11 (1938)

Heft: I

Artikel: Méthode rapide pour l'étude des galvanomètres balistiques en circuit fermé

Autor: Gilbert, Jacques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110843

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Méthode rapide pour l'étude des galvanomètres balistiques en circuit fermé

par **Jacques Gilbert.**

(8. XII. 37.)

Sommaire. Rappel d'un certain nombre de formules connues. Introduction d'une fonction approchée conduisant à différentes formules simples de la sensibilité. Leur discussion générale en fonction des paramètres les plus importants. Comment on parvient à la notion de fluxmètre. Comparaison de celui-ci avec le balistique. Grandes lignes d'une méthode de calcul en vue de construction, avec introduction de quelques principes nouveaux. Description de galvanomètres construits à l'aide de cette méthode; contrôle expérimental de leur sensibilité.

Dès qu'on aborde l'étude de la sensibilité des galvanomètres balistiques en circuit fermé, on s'aperçoit qu'il est difficile d'avoir en peu de temps une vue d'ensemble suffisante; que, sauf dans des cas très particuliers, les calculs sont longs et malaisés; que le rôle des différents paramètres ne ressort pas clairement; enfin que des évaluations rapides ne sont guère possibles. Le mérite revient à STARING[1]) d'avoir trouvé une fonction approchée, qui rend le problème très facilement accessible. J'ai esquissé précédemment[2]) comment l'utilisation judicieuse de la fonction de STARING conduit à des formules remarquablement simples et suggestives. C'est ainsi que l'on retrouve immédiatement un bon nombre de propositions connues[3]), sans se heurter à des expressions mathématiques peu commodes, comme c'était le cas jusqu'alors.

Après avoir établi ces formules, je montrerai comment elles permettent de procéder à une discussion rapide et générale de la sensibilité en fonction des divers paramètres, comment elles aident à la solution de certains problèmes, et comment on peut, grâce à elles, fixer quelques règles de construction. Deux appareils calculés d'après celles-ci et exécutés entièrement au laboratoire même permettront de vérifier les considérations théoriques.

---

[1]) A. J. STARING, Les conditions optimum de sensibilité des galvanomètres balistiques en circuit fermé. Arch. Sc. phys. et nat., **5** (1923), p. 97 et 333. — Comm. à la Soc. suisse de physique, id., **4** (1922), p. 376.

[2]) J. GILBERT, Comm. à la Soc. suisse de physique, H. P. A., **10** (1937), p. 342.

[3]) Voir en particulier DIESSELHORST, Ann. der Physik, **9** (1902), p. 458; H. CHAUMAT, C. R., **174** (1922), p. 32 et 155.

Je rappelle ici, à seule fin de bien fixer les grandeurs qui entrent en jeu, un certain nombre d'expressions fondamentales (emploi sous-entendu des unités em cgs).

Si on néglige l'amortissement dû à l'air, l'équation différentielle du mouvement libre de l'équipage mobile s'écrit:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\,m\,\frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2\alpha = 0$$

où $$m = \frac{(Hns)^2}{2\,RI} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \frac{2\,\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{C}{I}}$$

m = coefficient d'amortissement
α = écart angulaire
T_0 = durée d'oscillation à circuit ouvert
C = couple élastique par radian
H = champ moyen dans l'entrefer (champ radial)
n = nombre de spires
s = surface d'une spire
I = moment d'inertie
} du cadre mobile
R = résistance totale du circuit.

Soit

$$\xi = \frac{m}{\omega_0} = \frac{(Hns)^2}{2\,R\sqrt{IC}} \tag{1}$$

le *degré d'amortissement*; le mouvement est périodique ou apériodique selon que ξ est < 1 ou $\geqslant 1$.

Si l'on attribue à R le rôle de variable indépendante, la condition limite $\xi = 1$ définit la résistance critique (totale)

$$R_{cr} = \frac{(Hns)^2}{2\sqrt{IC}}. \tag{2}$$

Si c'est à H qu'on attribue ce même rôle, on peut définir d'une façon tout à fait analogue, par la condition $\xi = 1$, une valeur critique du champ

$$H_{cr} = \frac{\sqrt{2\,R}\,\sqrt[4]{IC}}{ns}. \tag{2'}$$

On voit qu'on peut poser, selon les cas;

$$\xi = \frac{R_{cr}}{R} \quad (3) \qquad \text{ou} \qquad \xi = \left(\frac{H}{H_{cr}}\right)^2. \quad (3')$$

Le paramètre ξ joue un rôle important, et ces formes abrégées sont suggestives, la seconde étant toutefois moins usitée que la première.

Pour établir les formules de la sensibilité, je me placerai aux deux points de vue correspondant aux deux applications principales des balistiques: la mesure directe de *quantités d'électricité*, et la mesure de *variations de flux magnétique*.

1. Mesure d'une quantité d'électricité.

Par définition, on choisit pour expression de la sensibilité S_q la première élongation α_1 par unité de charge électrique:

$$S_q = \frac{\alpha_1}{q} = \frac{R}{Hns} f(\xi) \tag{4}$$

où

$$f(\xi) = 2\,\xi\, e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}.$$

Or STARING a montré qu'en posant

$$f(\xi) = 1 - \frac{1}{(\xi+1)^2},$$

la plus grande erreur possible reste inférieure à 2%.

L'équation (4) devient alors:

$$S_q = \frac{R}{Hns} \frac{\xi^2 + 2\,\xi}{(\xi+1)^2}. \tag{5}$$

On peut étudier la variation de S_q en fonction de l'un quelconque des paramètres contenus explicitement ou implicitement dans l'expression (5). Mais deux cas sont particulièrement intéressants: ceux où l'on considère comme variable indépendante la *résistance du circuit* d'une part, et *l'intensité du champ magnétique* d'autre part.

1. Portons notre attention d'abord sur le *premier cas*. Pour donner à la formule un tour plus simple et un caractère plus général, je ne choisis pas R comme variable indépendante, mais la grandeur $\chi = R/R_{cr} = 1/\xi$, que j'appelle «résistance réduite» (cf. formules (2) et (3)). En introduisant ce nouveau paramètre dans l'équation (5), et en tenant compte de (1), on obtient:

$$S_q = \frac{Hns}{2\sqrt{IC}} \frac{2\,\chi^2 + \chi}{(\chi+1)^2}.$$

Il est aisé de voir que la plus grande valeur possible du deuxième facteur, qui ne contient que le paramètre χ, est 2 $(\chi \to \infty)$.

Il en résulte que la *valeur maximale de la sensibilité,* en fonction de la résistance, est

$$S_{q\,\max} = \frac{Hns}{\sqrt{IC}}\,.$$

Si on appelle « sensibilité réduite » S_q' le rapport $S_q/S_{q\,\max}$, on parvient à la relation

$$S_q' = \frac{2\,\chi^2 + \chi}{2\,(\chi + 1)^2}\,. \tag{6}$$

C'est *l'équation réduite de la sensibilité,* que l'on pourrait aussi écrire simplement

$$S_q' = \frac{2\,R^2 + R}{2\,(R + 1)^2}\,,$$

à condition de choisir comme unité de résistance la résistance critique elle-même.

Je répète enfin, avec ces nouvelles notations, l'expression générale de la sensibilité:

$$S_q = S_{q\,\max} \cdot S_q' = \frac{Hns}{\sqrt{IC}}\,\frac{2\,\chi^2 + \chi}{2\,(\chi + 1)^2}\,. \tag{7}$$

2. Passons ensuite au *deuxième cas,* où toutes les grandeurs sont maintenues constantes, sauf le *champ de l'aimant.* Pour faciliter l'écriture, je ne choisis pas H comme variable indépendante, mais le paramètre $\eta = H/H_{cr} = \sqrt{\xi}$ (voir formules (2′) et (3′)). La transformation de (5) conduit cette fois-ci à l'expression

$$S_q = \sqrt{\frac{R}{2}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{IC}}\,\frac{\eta^3 + 2\,\eta}{(\eta^2 + 1)^2} = \text{const.}\,\sqrt{\xi}\,\frac{\xi + 2}{(\xi + 1)^2}\,. \tag{8}$$

C'est la formule de la *sensibilité en fonction du champ* (η prop. à H), ou *de la résistance critique* (ξ prop. à R_{cr}).

Ces diverses formules sont discutées au § 3.

2. Mesure d'une variation de flux magnétique.

La première élongation a dans ce cas pour expression générale

$$\alpha_1 = \frac{\Phi}{Hns}\,f(\xi),$$

si l'on désigne par Φ la variation *totale* de flux dans le circuit extérieur. Comme précédemment, la sensibilité est définie par

$$S_\Phi = \frac{\alpha_1}{\Phi} = \frac{1}{Hns}\,f(\xi)\,. \tag{9}$$

On voit que

$$S_\Phi = \frac{S_q}{R} \cdot \tag{10}$$

Toutes les formules seront analogues à celles qui ont été établies plus haut.

1. Dans le cas où la *résistance* est variable, la transformation de (9) conduit à la relation

$$S_\Phi = \frac{1}{Hns} \frac{2\chi + 1}{(\chi + 1)^2} \cdot \tag{11}$$

Les autres grandeurs se déduisent immédiatement de l'expression (11), dont l'écriture correspond déjà à celle de la formule (7). En effet, *la plus grande valeur de la sensibilité,* en fonction de la résistance, est ($\chi = 0$):

$$S_{\Phi\,\max} = \frac{1}{Hns} \tag{11'}$$

et la *sensibilité réduite* s'exprime par

$$S'_\Phi = \frac{S_\Phi}{S_{\Phi\,\max}} = \frac{2\chi + 1}{(\chi + 1)^2}, \tag{12}$$

formule qu'on peut aussi écrire

$$S'_\Phi = \frac{2R + 1}{(R + 1)^2},$$

à condition de choisir convenablement l'unité de résistance. Notons que (11') est la formule de la sensibilité d'un fluxmètre.

2. Enfin si la variable est le *champ H,* la formule qui a été établie pour une mesure de quantité d'électricité (8) est encore valable à un facteur constant près, puisque $S_\Phi = S_q/R$ (10), et que R est cette fois-ci une constante. La relation devient, dans le cas d'une mesure de flux:

$$S_\Phi = \frac{1}{\sqrt{2R}\,\sqrt[4]{IC}} \frac{\eta^3 + 2\eta}{(\eta^2 + 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2R}\,\sqrt[4]{IC}} \frac{\sqrt{\xi}\,(\xi + 2)}{(\xi + 1)^2}. \tag{13}$$

3. Discussion des formules.

a) Rôle de la résistance.

Il faut se reporter aux formules (7) et (11), ou mieux encore aux formules réduites (6) et (12), qui ne contiennent pratiquement pas d'autres paramètres que la résistance du circuit galvano-

métrique. Un bref examen des courbes représentatives donnera tous les renseignements voulus (fig. 1)[1]. La première constatation générale est que la sensibilité varie de façon *inverse* selon qu'on mesure des quantités d'électricité ou des variations de flux; l'explication de ce fait se trouve dans la relation (10), qui est d'ailleurs une conséquence directe de la loi d'Ohm. Un coup d'oeil sur les courbes de la fig. 1 fait prévoir d'emblée que le domaine périodique sera réservé davantage aux mesures de charges, le domaine apériodique, davantage aux mesures de flux.

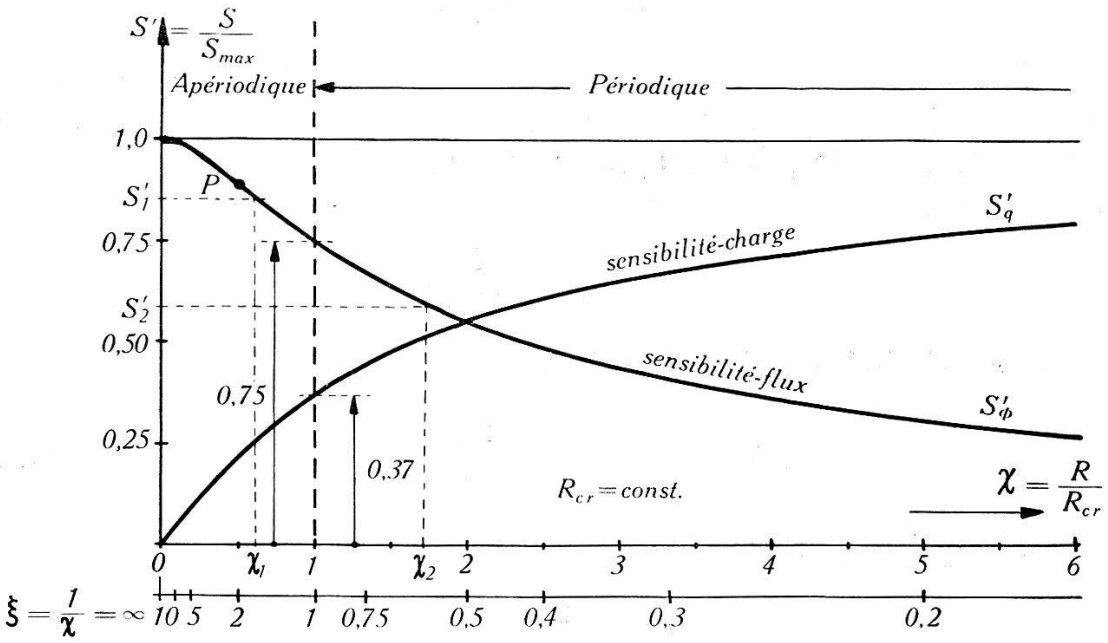

Fig. 1.
Sensibilité en fonction de la résistance.

Dans le cas *d'une mesure de charge,* on voit que la sensibilité atteint sa plus haute valeur *à circuit ouvert*: c'est le cas classique de la *décharge d'un condensateur,* et la formule (7) ($\chi = \infty$; $S_q' = 1$) redonne alors exactement l'expression connue

$$S = \frac{Hns}{\sqrt{IC}}.$$

La formule (7) offre donc l'avantage de représenter la sensibilité à la charge comme le produit de la sensibilité à circuit ouvert par un facteur, variant entre 0 et 1, qui ne dépend que de la résistance. Pour $R = \infty$, le mouvement est périodique et inamorti; à mesure que la résistance diminue, le mouvement devient de plus

[1]) Quelques propriétés de ces courbes ont été signalées par CHAUMAT (l. c.), qui les a obtenues par l'étude des formules exactes.

en plus amorti et finit par être apériodique. En même temps, la sensibilité décroît de façon monotone et tend vers 0 pour un amortissement très grand, limité du reste par la résistance propre du galvanomètre (il peut même arriver que cette dernière soit plus grande que la résistance critique). Pour $\xi = \chi = 1$ (apériodicité critique), on obtient $S_q' = 0{,}375$, soit un peu plus du tiers de la sensibilité maximale. On sait que rigoureusement le rapport est $1/e = 0{,}368$.

On voit par ces chiffres que l'approximation est assez bonne; sans permettre des calculs de précision, la formule rend possible des évaluations rapides.

Si on mesure *des variations de flux*, on obtient au contraire le maximum de sensibilité lorsque la résistance est aussi faible que possible (mouvement apériodique). Quand celle-ci augmente, l'amortissement diminue de plus en plus, et la sensibilité décroît, pour devenir extrêmement petite lorsque la résistance est très élevée. Dans les conditions critiques, la sensibilité vaut encore les $^3/_4$ de sa valeur maximale. Or on sait que ces conditions sont les plus favorables pour la facilité de la lecture et la rapidité de la mesure; il n'y a donc pas grand avantage à choisir une résistance inférieure à la valeur critique. Ce n'est cependant pas le seul point de vue; en effet, si on considère la courbe $S_\Phi' = f(\chi)$ vers l'origine, ou mieux la courbe $S_\Phi' = f(\xi)$ pour ξ suffisamment grand, on se rend compte qu'à partir d'une certaine valeur de ξ, la sensibilité reste pratiquement constante (fig. 2). Dans cette région de grand amortissement, le galvanomètre est à proprement parler un *fluxmètre*; en fait, on retrouve par la formule (11) l'expression connue de sa sensibilité $S = 1/Hns$; l'étalonnement est alors *indépendant de la résistance du circuit:* c'est une des propriétés caractéristiques du fluxmètre. J'y reviens au paragraphe suivant.

Pour conclure, je dirai que l'intérêt de ces formules réduites (6) et (12) est de pouvoir *calculer approximativement la sensibilité d'un galvanomètre balistique pour une résistance* quelconque *du circuit, dès qu'il a été étalonné pour* une *résistance donnée.* Il est même facile de passer de la mesure d'un flux à celle d'une charge, si on remarque que

$$\frac{S_q'}{S_\Phi'} = \frac{\chi}{2}.$$

(Ces calculs supposent seulement la connaissance de la résistance interne et de la résistance critique.)

Si on veut connaître plus à fond la variation de la sensibilité

en fonction de la résistance, il est aisé de pousser plus loin l'analyse:

$$\frac{dS_q'}{d\chi} = \frac{1}{2}\,\frac{3\chi+1}{(\chi+1)^3} \qquad \frac{dS_\Phi'}{d\chi} = -\frac{2\chi}{(\chi+1)^3}$$

$$\frac{d^2S_q'}{d\chi^2} = -\frac{3\chi}{(\chi+1)^4} \qquad \frac{d^2S_\Phi'}{d\chi^2} = 2\,\frac{(2\chi-1)}{(\chi+1)^4}$$

Alors que la courbe S'_q ne présente aucune particularité, la courbe S_Φ' possède un point d'inflexion P à l'abscisse $\chi = 0{,}5$ (fig. 1). Remarquons enfin qu'aucune des deux courbes ne possède à proprement parler de maximum.

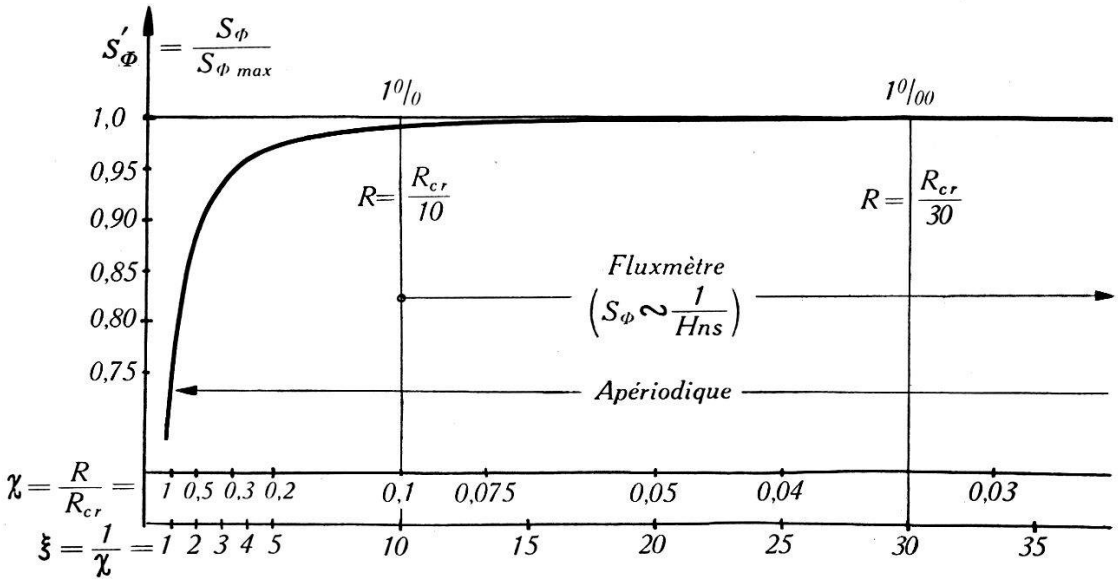

Fig. 2.
Sensibilité au flux dans la région de grand amortissement.

b) Un cas particulier: le fluxmètre[1]).

Nous avons vu, en examinant la courbe de la sensibilité, comment les formules (11) ou (12) permettent de passer de la notion de balistique à celle de fluxmètre: nous avons en effet constaté qu'on peut considérer le fluxmètre comme un balistique dont la sensibilité est pratiquement indépendante de la résistance, et j'ai montré qu'une telle condition est remplie lorsque l'amortissement est suffisamment grand ($\xi \gg 1$) (fig. 2). Si je désigne par $\delta S_\Phi'$ la variation de sensibilité consécutive à un changement de résistance, et si l'incertitude de la mesure est de $1^0/_{00}$,

[1]) On sait que la notion de fluxmètre a été introduite par Grassot (Journ. de Phys., **3** (1904), p. 696).

Il ne sera question ici que du *fluxmètre à suspension*. Pour le *fluxmètre à pivots*, voir en particulier l'étude de Darmois et Ribaud (Ann. de Phys. (10), **1** (1924), p. 173).

la condition d'existence du fluxmètre s'exprime analytiquement par l'inégalité

$$\delta S'_\Phi \leqslant 0{,}001 .$$

Cela revient à exprimer que la différence d'ordonnée entre la courbe et son asymptote ne doit pas excéder $1^0/_{00}$. En d'autres termes:

$$S'_\Phi = \frac{2\chi + 1}{\chi^2 + 2\chi + 1} \geqslant 0{,}999 . \tag{14}$$

On tire de cette inégalité la *condition fondamentale*

$$\chi \leqslant 0{,}033, \text{ c.-à-d. } R \leqslant \frac{R_{cr}}{30} \text{ ou } \xi \geqslant 30 \text{ [1]}. \tag{15}$$

On a ainsi délimité un certain intervalle de résistance, à l'intérieur duquel la sensibilité ne varie pratiquement pas. (Du côté des résistances décroissantes, on peut aller aussi loin que le permet la résistance interne de l'instrument.) L'existence de cet intervalle caractérise sans ambiguïté un fluxmètre.

---

[1]) Ce résultat n'indique qu'un ordre de grandeur, puisque les formules employées sont approchées. Cependant, nous allons voir qu'il peut-être confirmé.

En partant d'un point de vue très différent, H. Busch (Zeitschr. f. techn. Phys. **7** (1926), p. 361) arrive à un résultat qui ne concorde pas avec celui-ci; il exige en effet $\xi \geqq 50$, lorsque l'erreur admise est de $1^0/_{00}$. Examinons donc la question de plus près. Busch intègre terme à terme l'équation différentielle du mouvement avec second membre, et trouve ainsi une relation entre l'écart angulaire et la variation de flux. Il détermine les conditions aux limites en supposant que l'équipage ne part pas de la position d'équilibre, mais d'une position écartée de celle-ci d'un angle α_0 et parvient ainsi à la relation (je conserve mes propres notations):

$$\frac{\Phi}{Hns} = (\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{\omega_0^2}{4m^2}\alpha_0 + \frac{\omega_0^2}{2m}\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} t_1 .$$

t_1 désigne le temps pendant lequel α passe de la valeur α_0 à la valeur α_1. C'est à peu près le temps du premier maximum (balistique). Pour que l'écart angulaire $(\alpha_1 - \alpha_0)$ mesure la variation de flux Φ, il faut que les deuxième et troisième termes du second membre soient négligeables. Pour le troisième, qu'il importe avant tout de considérer, cette condition s'exprime par l'inégalité

$$\frac{\omega_0^2 t_1}{4m} \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \ll 1 .$$

En général, on ne peut rien conclure puisque tout dépend de la valeur de α_0, et qu'en choisissant α_0 et α_1 à peu près symétriques, l'erreur devient aussi petite que l'on veut. Mais il n'est pas toujours très commode de réaliser cela, et il faut trouver une condition plus précise. Busch pose alors

$$\frac{\omega_0^2 t_1}{2m} \ll 1,$$

Un coup d'oeil sur la formule de la sensibilité suggère de remplacer la condition (14) par la condition plus simple et presque équivalente:

$$\chi^2 \leqslant 0{,}001.$$

Si on tolère une variation de sensibilité de 1%, la condition correspondante est

$$\chi^2 \leqslant 0{,}01;\ \text{d'où}\ \chi \leqslant 0{,}1,\ \text{c.-à-d.}\ R \leqslant \frac{R_{cr}}{10}\ \text{ou}\ \xi \geqslant 10.$$

Plus exactement, on obtient

$$\chi \leqslant 0{,}11\ \text{ou}\ \xi \geqslant 9.$$

La seule analyse de la *formule réduite* de la sensibilité d'un balistique (12) nous a permis de formuler dans les grandes lignes une *1ère condition fondamentale* pour le fluxmètre (15). Mais à celle-ci s'en ajoute une autre, qui correspond à une seconde propriété caractéristique du fluxmètre: elle exprime que sa sensibilité est aussi indépendante, dans une assez large mesure, du temps de variation du flux (voir § 5).

c) Rôle du champ magnétique.

Il faut cette fois-ci se reporter aux formules (8) (pour la quantité d'électricité) et (13) (pour le flux). On a pu remarquer que toutes les expressions complètes de la sensibilité peuvent être

---

ce qui paraît assez arbitraire, et il tire de là condition annoncée plus haut $\xi \geq 50$.

Par contre, en faisant l'hypothèse $\alpha_0 = 0$, l'inégalité à satisfaire devient

$$\frac{\omega_0{}^2 t_1}{4\,m} \ll 1.$$

Comme l'amortissement est grand, on peut poser simplement

$$t_1 = \frac{1}{m} \ln 2\,\xi$$

et l'inégalité prend la forme

$$\frac{\ln 2\,\xi}{4\,\xi^2} \ll 1. \qquad \left(\text{Chez Busch: } \frac{\ln 2\,\xi}{2\,\xi^2} \ll 1\right).$$

En particulier si $\xi = 30$, on trouve

$$\frac{\ln 2\,\xi}{4\,\xi^2} = 0{,}0011;$$

l'erreur de la mesure est de $1^0/_{00}$ et la concordance est bonne avec le résultat que j'ai obtenu. La méthode qu'a employée Busch conduit donc à la *même condition fondamentale du fluxmètre.* Il suffit de faire l'hypothèse que l'équipage part de sa position d'équilibre (Il va de soi que les formules de sensibilité que j'ai établies contiennent implicitement cette condition).

considérées comme le produit de deux facteurs, l'un essentiellement constant, l'autre essentiellement variable. Or les formules (8) et (13) possèdent le même facteur variable, et ne diffèrent que par le facteur constant (fait qui ressort immédiatement de la relation (10), puisque maintenant le champ est variable et la résistance constante). *On en déduit que le rôle de H ne change pas, qu'on mesure des décharges électriques ou des variations de flux magnétique.* Il suffira d'analyser le facteur

$$A = \frac{\eta^3 + 2\,\eta}{(\eta^2 + 1)^2} = \frac{\sqrt{\xi}\,(\xi + 2)}{(\xi + 1)^2} \qquad (\eta^2 = \xi).$$

Remarquons en passant que si on fait un choix approprié des unités, on peut remplacer η par H, et ξ par R_{cr}.

La question essentielle est de savoir s'il existe une valeur optimum de la résistance critique, c.-à-d. du champ magnétique H. Il est certain que cette question intéresse le constructeur, mais elle a aussi une grande importance pour le praticien du laboratoire, puisque dans un bon nombre d'instruments, on peut changer à volonté la valeur du champ H par le réglage d'un shunt magnétique. Calculons donc la dérivée du facteur $A(\eta)$; on trouve

$$\frac{dA}{d\eta} = -\frac{\eta^4 + 3\,\eta^2 - 2}{(\eta^2 + 1)^3}\,.$$

On voit immédiatement que la fonction A possède des extrema déterminés par la condition

$$\eta^4 + 3\,\eta^2 - 2 = \xi^2 + 3\,\xi - 2 = 0\,.$$

L'examen plus détaillé montre que, lorsque $\xi > 0$, il n'y a qu'un seul maximum, pour $\xi = 0{,}56$ ($\eta = 0{,}75$). Il existe donc bien une valeur optimum du champ: il faut choisir $R_{cr} = 0{,}56\,R$, ou, pour s'exprimer plus explicitement, donner au champ les $^3/_4$ de la valeur qu'il possède à l'apériodicité critique ($H = 0{,}75\,H_{cr}$). On tire alors de la formule (2'):

$$H^2 = 1{,}12\,\frac{R\sqrt{IC}}{n^2 s^2}\,. \tag{16}$$

Cette expression importante permet de déterminer, *pour chaque valeur de la résistance, le champ qui donne le maximum de sensibilité.* Le mouvement de l'équipage mobile est encore périodique, mais déjà très fortement amorti.

Examinons les courbes $A(\eta)$ et $A(\xi)$ de la fig. 3. La première représente la variation de la sensibilité en fonction du champ (η prop. à H), la seconde, en fonction de la résistance critique, ou du degré d'amortissement (ξ prop. à R_{cr}, prop. à H^2). La caractéristique essentielle de ces courbes est qu'elles possèdent l'une et l'autre un maximum, dont la valeur est

$$A_{\max} = 0{,}787.$$

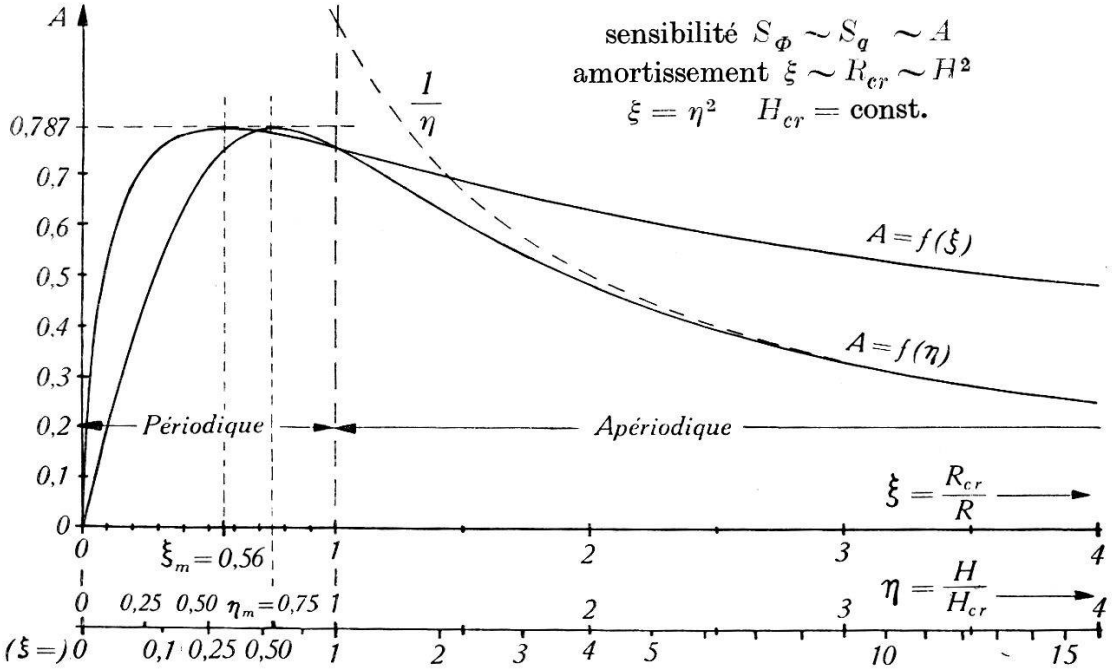

Fig. 3.
Sensibilité en fonction du champ (R = const.).

La courbe A (ξ), en particulier, possède un maximum très aplati. Il en résulte qu'on peut faire varier dans une certaine mesure les conditions d'amortissement sans diminuer beaucoup la sensibilité. En particulier, à l'amortissement critique ($\xi = 1$), le facteur A vaut encore 0,75. On pourra donc travailler dans ces conditions-là, qui sont à certains points de vue les plus favorables, sans une perte notable de sensibilité.

Si le *champ est suffisamment élevé*, la formule de la sensibilité se simplifie; on peut en effet poser:

$$A = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \qquad (\xi \gg 1).$$

La courbe de la sensibilité se rapproche progressivement d'une *hyperbole* (en pointillé sur la fig. 3), à mesure que l'amortisse-

ment devient plus grand. De même que la formule (11), aux grands amortissements, la formule (13) devient:

$$S_\Phi = \frac{1}{\sqrt{2R\xi}\,\sqrt[4]{IC}} = \frac{1}{Hns} \qquad (\xi \gg 1)$$

Dans les deux cas, on retrouve donc la formule connue (11'): l'hyperbole en question n'est autre que la *courbe de sensibilité du fluxmètre* (pour autant que $\xi \gg 1$). Celui-ci apparaît ici encore comme un cas particulier du balistique. On a ainsi une nouvelle manière de formuler la première condition fondamentale (15); il suffit d'exiger p. ex. que la différence d'ordonnée entre la courbe A et l'hyperbole correspondante soit inférieure à $1^0/_{00}$ [1]).

Pour terminer, une remarque d'ordre général. Puisque dans les grandes lignes, H est le seul paramètre pour lequel on ait une condition optimum bien définie, il sera bon de le déterminer en dernier lieu seulement, en fonction des autres paramètres, qu'on aura déjà choisis de la manière la plus judicieuse.

On pourra constater enfin qu'une grande partie des résultats de ce paragraphe se trouvent déjà mentionnés chez DIESSELHORST[2]); mais la façon d'y parvenir est beaucoup plus simple avec les formules proposées ici.

d) Durée d'oscillation et sensibilité.

1. *Balistique.* On sait que T_0 doit être suffisamment grand pour que la condition fondamentale du balistique soit réalisée. Inversement, l'erreur qui provient par exemple d'une variation de flux trop prolongée est essentiellement fonction de T_0[3]). Mais en dehors de ce point de vue, quelle peut être l'influence d'une période plus ou moins longue sur la valeur même de la sensibilité? Qu'on observe les diverses formules (7), (8), (11), (13); on y rencontre toujours, explicitement ou implicitement, le produit $I \cdot C$, et jamais le rapport I/C: la durée d'oscillation n'intervient donc pas naturellement dans l'expression de la sensibilité; celle-ci sera d'ailleurs d'autant plus grande que I et C, simultanément, seront

---

[1]) On peut montrer qu'il existe une relation purement formelle entre le facteur A et la sensibilité réduite définie par (12); on a en effet

$$A = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \cdot S'_\Phi .$$

On peut interpréter cette expression en disant que *la courbe $S_\Phi = f(H)$ est une hyperbole dans la mesure où la sensibilité est indépendante de R.* L'approximation est la même. Cette propriété ressort d'ailleurs aussi de la formule (11).

[2]) l. c.

[3]) DIESSELHORST, Ann. der Physik, **9** (1902), p. 712. Voir aussi: H. WITTKE, id., **26** (1936), p. 138.

plus petits. Ce qui signifie *seulement* qu'une longue période risque de s'obtenir au détriment de la sensibilité.

2. *Fluxmètre.* Tout ce que je viens de dire pour le balistique subsiste en principe, mais il s'agit de savoir si les conditions imposées au fluxmètre n'apportent pas une modification. On peut se demander par exemple si la durée d'oscillation intervient dans la 1ère condition fondamentale $\xi > 30$ (15), que j'ai déduite en postulant la constance de la sensibilité lors d'une variation de résistance (même en définissant le fluxmètre idéal par l'absence d'un couple de torsion, on arrive toujours pratiquement à cette condition). Une fois de plus, le rapport I/C ne figure pas dans l'inégalité, mais seulement le produit $I \cdot C$: ceci montre que la condition (15) n'ajoute rien à ce que nous savons déjà.

La conclusion est que le rôle de T_0 est le même, qu'il s'agisse d'un balistique ou d'un fluxmètre[1]).

Quant à l'influence de la durée de variation du flux sur la sensibilité d'un fluxmètre, on ne peut pas impunément appliquer les résultats obtenus pour le balistique. Le problème est assez délicat et je ne fais que le poser au § 5.

4. Sensibilité comparée du balistique et du fluxmètre[2]).

Le problème peut être résolu d'une façon assez satisfaisante si on examine quelques-unes des formules qui viennent d'être discutées.

Voyons d'abord ce qui se passe pour un fluxmètre. D'une manière générale, on réalisera la condition fondamentale $\xi \geqslant 30$ (15) avant tout par le choix convenable des deux paramètres H et R. Pour laisser un intervalle de résistance suffisamment étendu, il faudra choisir H assez grand. Par exemple fixer le champ de manière à obtenir le degré d'amortissement minimum $\xi = 30$, pour une résistance donnée (qui, par là-même, devient la plus haute résistance compatible avec une mesure fluxmétrique). On sait qu'on pourra encore diminuer à volonté la résistance sans modifier la sensibilité. Pour calculer celle-ci, considérons la formule (13). Dans les conditions précisées plus haut ($\xi = 30$) le facteur A vaut 0,182, ce qui représente environ un quart de sa valeur maximale (0,787). Autrement dit, toutes choses égales d'ailleurs, la sensibilité est alors 4 fois moins grande que dans les conditions optimum ($\xi = 0{,}56$).

---

[1]) Toujours en dehors du point de vue durée de l'impulsion.

[2]) Il est bien évident que seule une mesure de flux peut entrer en ligne de compte.

On constate donc qu'*un fluxmètre quelconque, et en particulier le plus sensible de tous, peut toujours, au moyen d'un shunt magnétique, fonctionner en balistique avec une sensibilité quadruplée.* La réciproque, par contre, n'est pas toujours vraie: on ne peut pas utiliser n'importe quel balistique comme fluxmètre. S'il existe en fait des galvanomètres susceptibles de fonctionner indifféremment sous l'une ou l'autre forme (c'est spécialement le cas lorsque la résistance extérieure est faible), il ne sera pas toujours possible, et surtout si l'on doit travailler avec des résistances extérieures élevées, d'atteindre les grands amortissements exigés par le fluxmètre. En effet, on ne pourra pas diminuer beaucoup la résistance, puisqu'elle sera plus ou moins imposée, ni augmenter le champ au delà d'une certaine limite: il ne restera plus qu'à faire appel à un autre instrument, dans lequel p. ex. le nombre de spires sera plus grand, la surface du cadre plus étendue, le couple de torsion plus faible, etc. Ces nouvelles valeurs des divers paramètres entraîneront presque à coup sûr un chiffre plus bas de la sensibilité. On en conclut que, pour des résistances extérieures élevées, la différence de sensibilité entre fluxmètre et balistique s'accentue. Ce raisonnement conduit à affirmer *d'une façon générale que la limite naturelle du côté des hautes sensibilités est atteinte par le fluxmètre avant que de l'être par le balistique.* Et dans le cas le plus favorable, celui-ci est encore 4 à 5 fois plus sensible que celui-là.

5. Quelques propriétés du fluxmètre.

On vient de voir que le balistique est seul à donner satisfaction dans des mesures de flux qui exigent une très haute sensibilité. Mais ce cas mis à part, les applications du fluxmètre sont nombreuses: je ne veux pas les énumérer ici. Cependant puisque j'ai été amené naturellement, au cours de cette étude sur le balistique, à parler du fluxmètre, je voudrais en dire encore quelques mots.

La notion de fluxmètre, introduite aux paragraphes précédents, était toujours liée à une approximation plus ou moins grande. Pour être exact, il faut caractériser le fluxmètre par *l'absence totale d'un couple de torsion (couple directeur)*, ou, ce qui est équivalent, par un degré d'amortissement ξ infini (le coef. m restant fini). Ce fluxmètre idéal, alors, possède une durée d'oscillation *infinie* ($\omega_0 = 0$); une résistance critique *infinie*; sa sensibilité est *entièrement indépendante de la résistance du circuit* ($\chi = 0$, toujours), elle vaut exactement $1/Hns$, et se trouve enfin *totalement indépendante*

de la durée-même τ de la variation du flux[1]). On conçoit combien ce dernier point est important: nous sommes à l'opposé du balistique.

Que deviennent alors ces propriétés quand on revient aux fluxmètres pratiquement concevables?

J'ai montré qu'en choisissant la résistance à l'intérieur d'un intervalle bien déterminé, la sensibilité ne dépend plus de celle-ci à la précision des mesures (1ère condition fondamentale). Existe-t-il une condition analogue pour assurer l'indépendance par rapport à la durée de variation τ? Une étude générale et approfondie de cette question[2]) nous entraînerait trop loin et sortirait du cadre de l'exposé; je me contente de reproduire ici un raisonnement très simple.

Nous avons vu que la sensibilité du fluxmètre idéal est tout à fait indépendante de la durée τ de la variation du flux: une fois celle-ci terminée, l'équipage reste à son maximum de déviation et n'en bouge plus. Qu'en est-il pratiquement? Dès qu'un couple directeur apparaît ($\omega_0 \neq 0$), l'équipage revient lentement à sa position d'équilibre[3]) selon la loi exponentielle

$$\alpha = \text{const.}\ e^{-\frac{\omega_0^2}{2m}t}.$$

Le bon sens conduit à supposer que l'erreur due à τ sera *d'autant plus faible* que l'on se rapprochera davantage du cas idéal, c.-à-d. *que ce mouvement de retour sera plus lent.* Il faut donc postuler que le coefficient de l'exposant doit être *aussi petit que possible*:

$$\frac{\omega_0^2}{2m} \ll 1.$$

Le calcul montre que l'élongation maximale (qui «doit» être proportionnelle à la variation de flux) est une fonction compliquée du temps τ et des divers paramètres de l'instrument. Mais l'erreur commise par rapport à l'élongation due à une variation instantanée n'est fonction que de τ, ω_0, et m. Il n'est d'ailleurs pas facile d'en tirer une condition numérique exacte, mais l'essentiel est de constater qu'on peut en déduire l'inégalité postulée plus haut.

Sans préciser davantage, nous pouvons conclure qu'on obtient, pour réaliser l'indépendance par rapport à la durée de variation

---

[1]) Mais on peut rattacher pratiquement la notion de fluxmètre à celle de galvanomètre en général (avec couple directeur), en introduisant *deux conditions fondamentales* supplémentaires, correspondant aux deux propriétés essentielles du fluxmètre: l'indépendance à l'égard de la *résistance* d'une part, et du *temps de variation du flux* d'autre part.

[2]) A paraître ultérieurement dans le détail.

[3]) En «rampant», d'où le nom allemand «Kriechgalvanometer».

du flux, une *2ème condition fondamentale*, assez complexe du reste, qui exprime en particulier que la *durée d'oscillation doit être aussi grande que possible*, et *l'amortissement élevé*[1]). Il est intéressant de remarquer que dans ce problème, le degré d'amortissement $\xi = m/\omega_0$ n'est plus le seul à intervenir; mais le résultat le plus remarquable est qu'il est possible de mesurer sans erreur appréciable des variations de flux d'autant plus lentes que l'amortissement est plus grand[2]).

6. Méthode de construction (cas d'une mesure de flux).

L'emploi des formules simplifiées facilite grandement l'établissement de la marche à suivre pour calculer un galvanomètre balistique. D'autre part la lecture du travail très poussé de STARING[3]) m'a suggéré quelques idées directrices; ce dernier a cherché avant tout des conditions précises pour les dimensions du cadre mobile: je ne reviendrai pas sur les résultats très complets qu'il a obtenus. Mais d'autres aspects de sa méthode me paraissent moins favorables. Les données initiales qu'il choisit sont le champ H, le couple élastique C, la largeur du cadre mobile, la section de l'enroulement, et la résistance extérieure. Il me paraît par contre important de pouvoir disposer, au début même, de la période T_0. De plus, comme le champ H est une grandeur essentiellement variable, je trouve inutile de fixer arbitrairement sa valeur en premier lieu. Enfin, pour le choix des diverses résistances, je ferai appel à un raisonnement nouveau.

Je rappelle la formule (13), car c'est sur elle que je base les calculs:

$$S_\Phi = \frac{1}{\sqrt{2R}\,\sqrt[4]{IC}} \cdot \mathrm{A}(\xi)\,.$$

La *marche à suivre* peut se résumer en quelques mots:

On choisit d'abord la résistance et le couple élastique C, tous deux aussi petits que possible, puis la période T_0, d'où l'on tire le moment d'inertie I. Les autres grandeurs ne dépendent plus alors que du choix de ξ. On est donc encore libre de décider entre un fluxmètre et un balistique. On sait que pour le premier,

---

[1]) Les deux conditions fondamentales présentent une analogie certaine: mais elles sont loin d'être identiques.

[2]) DIESSELHORST (Ann. der Physik, **9** (1902), p. 712) a déterminé pour un balistique que l'erreur due à une impulsion de durée τ ne dépend que de la forme du courant et du rapport τ/T_0. L'amortissement n'intervient donc pas, et il y a là une difficulté si l'on compare avec le résultat obtenu pour le fluxmètre.

[3]) l. c.

il faut satisfaire à l'inégalité $\xi > 30$ (15), tandis que pour le second, il convient de prendre toujours $\xi = 0{,}56$. C'est une condition pour H (16), pour autant qu'on aura choisi les dimensions du cadre mobile, et déterminé le nombre de spires n, à partir de l'expression de la résistance. On aura ainsi fixé très rapidement les principales caractéristiques de l'instrument.

Je vais reprendre plus en détail divers points de cette méthode. D'abord *la résistance.* Il est en général bon de subordonner la construction de l'appareil au choix d'un intervalle bien délimité de résistance extérieure; et cela, même s'il ne s'agit pas d'un fluxmètre. Je vais au contraire me placer dans le cas d'un balistique quelconque. Soit r, la résistance extérieure; r_g, la résistance totale du galvanomètre; r_i, la résistance du cadre mobile; r_s, la résistance de la suspension, etc., de telle sorte que $r_g = r_i + r_s$. Je fixe avant tout les résistances limites r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$), entre lesquelles variera la résistance extérieure r. Soit:

$$R_1 = r_1 + r_g \qquad \chi_1 = \frac{R_1}{R_{cr}}$$

$$R_2 = r_2 + r_g \qquad \chi_2 = \frac{R_2}{R_{cr}}$$

r_g sera déterminé dès que j'aurai trouvé une condition pour le choix de $R_2/R_1 = \chi_2/\chi_1$. Or qu'on se reporte à la fig. 1: quand χ varie de χ_1 à χ_2, la sensibilité prend successivement toutes les valeurs comprises entre S_1' et S_2'. Il suffit d'exiger que le rapport

$$\frac{S_1'}{S_2'} = \frac{2\,\chi_1 + 1}{(\chi_1 + 1)^2} \cdot \frac{(\chi_2 + 1)^2}{2\,\chi_2 + 1}$$

garde une valeur admissible (p. ex. $^3/_2$). Pour simplifier[1]), on pose

$$\chi_1 = 1$$

Cette façon de faire semble suffisamment légitimée par tout ce que l'on sait de la sensibilité, et il ne s'agit que d'un calcul approché. Il en résulte:

$$\frac{S_1'}{S_2'} = 0{,}75\,\frac{(\chi_2 + 1)^2}{2\,\chi_2 + 1}$$

---

[1]) On peut concevoir différentes méthodes plus rationnelles pour résoudre le problème: elles conduisent à des résultats très peu différents.

En choisissant S_1'/S_2', on détermine ainsi la valeur de χ_2. Or puisque $\chi_1 = 1$, on peut poser

$$\frac{r_2 + r_g}{r_1 + r_g} = \chi_2$$

d'où l'on tire r_g. La résistance r_s est déterminée par le choix qu'on a fait de la suspension (C): il s'en suit que r_i est finalement connu, et toutes les résistances sont ainsi fixées.

Je passe aux autres constantes de l'appareil. C est donné; I se déduit de $T_0 = 2\pi\sqrt{I/C}$. La résistance du cadre mobile et le moment d'inertie ont pour expression

$$r_i = \varrho n \frac{2h(z+1)}{\sigma_1}$$

$$I = y\,\mu\, n \sigma_1 \frac{b^2 h}{6}(z+3)$$

ϱ = résistivité du cuivre
b = largeur; h = hauteur du cadre mobile; $s = bh$; $z = b/h$
σ_1 = section du fil de cuivre; μ = masse spécifique du cuivre
y = coefficient qui tient compte de tout ce qui n'est pas cuivre.

Puisque les dimensions b et h sont données, il n'y a, dans ces deux équations, que deux inconnues: n et σ_1; leur calcul, qui est immédiat, termine, dans ses grandes lignes, la détermination des différentes constantes du galvanomètre. Il ne reste plus que le champ H: on le tire de la formule (16):

$$H^2 = 1{,}12 \frac{R\sqrt{IC}}{n^2 s^2}$$

On a ainsi la possibilité d'obtenir, par ce choix de H, le maximum de sensibilité, pour chaque valeur de la résistance comprise entre R_1 et R_2.

L'esquisse que je viens de tracer d'une méthode de construction montre combien les formules simplifiées facilitent la tâche, et font ressortir d'une façon claire le rôle propre des différents paramètres. Cette méthode est naturelle, en ce sens qu'elle tient compte directement des propriétés fondamentales du galvanomètre balistique. En particulier, elle ne fait pas intervenir le champ H et on peut calculer toutes les caractéristiques de l'instrument sans s'en occuper: ceci correspond à la possibilité de faire varier H dans de larges limites.

Ces calculs sont évidemment de nature approximative. Ils ont servi de base à la construction de deux galvanomètres balistiques, construction entièrement réalisée au laboratoire même.

Le *premier* a été prévu pour des résistances extérieures variant *entre 30 et 300 ohms.* Ses caractéristiques sont:

$T_0 = 12$ sec $n = 66$ $b = 1{,}8$ cm. $r_g = 100$ ohms
$C = 0{,}018$ cgs $d = 0{,}035$ mm. $h = 2{,}2$ cm. $r_i = 95$ ohms
(d = diamètre du fil des spires).

Sensibilité optimum ($\xi = 0{,}56$):

pour $r_1 = 30$ ohms ($R_1 = 130$): $S_1 = 0{,}8 \cdot 10^{-5}$ radian/maxwell
ce qui donne: 63 maxwells pour 1 mm à 1 m.
mesuré: *78* „ „ 1 „ à 1 „

pour $r_2 = 300$ ohms ($R_2 = 400$): $S_2 = 0{,}45 \cdot 10^{-5}$
c.-à-d. 110 mx pour 1 mm à 1 m.
mesuré: *150* „ „ 1 „ à 1 „

Le *second* balistique a été construit pour des résistances extérieures variant *entre 0 et 5 ohms.* Ses caractéristiques sont:

$T_0 = 10$ sec $n = 14$ $b = 2{,}3$ cm. $r_g = 3{,}5$ ohms
$C = 0{,}12$ cgs $d = 0{,}15$ mm. $h = 2$ cm. $r_i = 1$ ohm

Sensibilité optimum:

pour $r_1 = 0$ ($R_1 = 3{,}5$): $S_1 = 2{,}1 \cdot 10^{-5}$ radian/maxwell
c.-à-d. 24 maxwells pour 1 mm. à 1 m.
mesuré: *30* „ „ 1 „ à 1 „

pour $r_2 = 5$ ohms ($R_2 = 8{,}5$): $S_2 = 1{,}35 \cdot 10^{-5}$
c.-à-d. 37 mx. pour 1 mm. à 1 m.
mesuré: *45* „ „ 1 „ à 1 „

La concordance entre les prévisions et les mesures peut être considérée comme assez bonne, d'autant plus que l'amortissement dû à l'air a été négligé d'un bout à l'autre des calculs.

Je ferai remarquer pour terminer que ces galvanomètres balistiques, employés en courant continu, sont remarquablement sensibles pour les *mesures de f. é. m.* Les mesures de sensibilité ont donné:

galv. N° 1 ($r_g = 100$) $13 \cdot 10^{-8}$ volt pour 1 mm. à 1 m.
galv. N° 2 ($r_g = 3{,}5$) $5 \cdot 10^{-8}$ „ „ 1 „ à 1 „

(tous deux dans les environs de l'apériodicité critique).

Lausanne, Laboratoire de Physique de l'Université.
(Prof. Perrier.)