

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 10 (1937)
Heft: VI

Artikel: Über den Stern-Gerlach-Versuch mit Elektronen
Autor: Adler, Felix
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110756>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über den Stern-Gerlach-Versuch mit Elektronen

von Felix Adler.

(11. IX. 37.)

§ 1. Einleitung.

Während ein Atomstrahl in der Versuchsanordnung von STERN und GERLACH in mehrere Strahlen aufgespalten wird, ist dies bekanntlich bei einem Elektronenstrahl unmöglich. Dies entspricht einer These von BOHR¹⁾: „Das Spinnmoment des Elektrons kann niemals, vom Bahnmoment eindeutig getrennt, durch solche Versuche bestimmt werden, auf die der klassische Begriff der Partikelbahn anwendbar ist.“ Nichtsdestoweniger wird das Vorhandensein des Spins den Verlauf eines Elektronenbündels im inhomogenen Magnetfeld irgendwie beeinflussen, und es ist zu erwarten, dass der Strahl, wenn er beim Eintritt in das Feld unpolarisiert ist, stellenweise eine partielle Polarisierung aufweisen wird, die im Prinzip zum Nachweis des Elektronenspins verwendet werden könnte. Nur ist hierbei eine *wellenmechanische* Diskussion unerlässlich; die Beugung der Elektronen an der Blende, die den Strahl definiert, muss in Rechnung gesetzt werden, und dies geschieht automatisch durch die Verwendung des wellenmechanischen Formalismus.

Im folgenden wird ein Versuch unternommen, eine solche wellenmechanische Diskussion des Stern-Gerlach-Experiments mit Elektronen durchzuführen, und zwar wird versucht, durch eine Störungsrechnung, in welcher nach Potenzen der Elektronenladung entwickelt wird, eine Näherungslösung der Wellengleichung zu erhalten, welche die Polarisierung der Elektronen wenigstens in gewissen Raumbereichen zu berechnen gestattet. Die Wirkung der Feldinhomogenität besteht ja, grob gesagt, darin, dass die Elektronen mit entgegengesetzt orientierten Spins in entgegengesetzten Richtungen beschleunigt werden, und falls die Massendichte einen Gradienten besitzt, entsteht dadurch eine Polarisierung; dieser Vorgang wird zwar durch die Lorentzkraft $e/c[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$ gestört, doch besteht die Möglichkeit, dass diese Störung in gewissen Gebieten gering ist (etwa in der Nähe einer Achse, wo

¹⁾ Zit. nach W. PAULI, Handb. d. Phys. 2, A, Bd. 24/1, 242.

die Feldstärke \mathfrak{H} verschwindet). Die Störungsrechnung wird dies bestätigen; leider zeigt sich aber, dass der Bereich, wo die Reihenentwicklung schnell konvergiert, zu schmal ist, als dass man hoffen dürfte, die theoretischen Voraussagen experimentell prüfen zu können.

Die folgenden Rechnungen sind nur für Elektronen unrelativistischer Geschwindigkeiten durchgeführt (d. h. auf Grund der Pauli'schen Wellengleichung), da die Aussichten für eine experimentelle Prüfung bei hohen Geschwindigkeiten noch geringer sind.

§ 2. Bezeichnungen.

Die Pauli'sche Wellengleichung lautet (ohne skalares Potential):

$$\left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \sum_k \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{e}{c} \mathfrak{A}_k \right)^2 + \frac{e \hbar}{2mc} \sum_k \mathfrak{H}_k \sigma_k \right\} \varphi(xt) = 0$$

\mathfrak{A} bedeutet das Vektorpotential eines statischen, sonst noch ganz beliebigen Magnetfeldes $\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}$ ($\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = 0$), und

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind die Pauli'schen Spinmatrizen.

In der Störungsrechnung soll nach Potenzen von e entwickelt werden. Der Hamiltonoperator enthält dann folgende Terme:

$$H^{(0)} = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2m} \Delta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= \frac{e}{mc} (\mathfrak{A} \text{ grad}) + \frac{e i}{2mc} (\mathfrak{H} \vec{\sigma}) \\ &= \frac{e i}{2mc} \begin{pmatrix} -2i \mathfrak{A} \text{ grad} + \mathfrak{H}_3; & \mathfrak{H}_1 - i \mathfrak{H}_2 \\ \mathfrak{H}_1 + i \mathfrak{H}_2 & ; -2i \mathfrak{A} \text{ grad} - \mathfrak{H}_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

$$H^{(2)} = \frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{2mc^2} \mathfrak{A}^2. \quad (3)$$

Hiermit lautet die Wellengleichung:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + H^{(0)} + H^{(1)} + H^{(2)} \right\} \varphi(xt) = 0.$$

Die normierten Eigenfunktionen der Gleichung 0^{ter} Ordnung

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + H^{(0)} \right\} \varphi(xt) = 0$$

seien mit ψ_n bezeichnet; sie lassen sich als Produkt von Spinfunktion und räumlicher Wellenfunktion schreiben:

$$\psi_n = \chi u_n(xt) = \begin{Bmatrix} \chi_{\frac{1}{2}} \\ \chi_{-\frac{1}{2}} \end{Bmatrix} u_n(xt).$$

Mit dem üblichen Ansatz der Störungsrechnung

$$\varphi(xt) = \sum_n (a_n^{(0)} + a_n^{(1)}(t) + \dots) \psi_n(xt) \quad (4)$$

und der Abkürzung

$$\varphi^{(i)}(xt) = \sum_n a_n^{(i)} \psi_n \quad (5)$$

erhält man für die $\varphi^{(i)}$ die Folge von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(0)} \right) \varphi^{(0)} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(0)} \right) \varphi^{(1)} &= -H^{(1)} \varphi^{(0)} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(0)} \right) \varphi^{(2)} &= -[H^{(1)} \varphi^{(1)} + H^{(2)} \varphi^{(0)}] \\ &\dots \dots \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(0)} \right) \varphi^{(i)} &= -[H^{(1)} \varphi^{(i-1)} + H^{(2)} \varphi^{(i-2)}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Polarisation des Elektronenstrahls werde gemessen durch

$$\vec{\mathfrak{M}} = (\varphi^* \vec{\sigma} \varphi).$$

Ihre Entwicklung nach Potenzen von e lautet:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \sum_i \vec{\mathfrak{M}}^{(i)}$$

wobei

$$\vec{\mathfrak{M}}^{(0)} = \varphi^{(0)*} \vec{\sigma} \varphi^{(0)} \quad (7)$$

$$\vec{\mathfrak{M}}^{(1)} = \varphi^{(0)*} \vec{\sigma} \varphi^{(1)} + \varphi^{(1)*} \vec{\sigma} \varphi^{(0)} \quad (8)$$

$$\vec{\mathfrak{M}}^{(2)} = \varphi^{(0)*} \vec{\sigma} \varphi^{(2)} + \varphi^{(1)*} \vec{\sigma} \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)*} \vec{\sigma} \varphi^{(0)}. \quad (9)$$

Entsprechend erhält man für die Dichte

$$\varrho = \sum_i \varrho^{(i)}$$

wobei

$$\varrho^{(0)} = \varphi^{(0)*} \varphi^{(0)} \quad (10)$$

$$\varrho^{(1)} = \varphi^{(0)*} \varphi^{(1)} + \varphi^{(1)*} \varphi^{(0)} \quad (11)$$

$$\varrho^{(2)} = \varphi^{(0)*} \varphi^{(2)} + \varphi^{(1)*} \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)*} \varphi^{(0)}. \quad (12)$$

.....

§ 3. Störungsrechnung.

Aus (5) und (6) folgt:

$$\sum_n \frac{\partial a_n^{(i)}(t)}{\partial t} \psi_n(xt) = - [H^{(1)} \varphi^{(i-1)} + H^{(2)} \varphi^{(i-2)}] \quad (13)$$

und weiter, nach Multiplikation mit ψ_n^* und räumlicher und zeitlicher Integration:

$$a_n^{(i)}(t) = - \int_{t_1}^t dt' \int d\xi \psi_n^*(\xi t') [H^{(1)} \varphi^{(i-1)}(\xi t') + H^{(2)} \varphi^{(i-2)}(\xi t')] \quad (14)$$

wo als Anfangsbedingung

$$a_n^{(i)}(t_1) = 0 \quad (i \geq 1)$$

gesetzt ist.

Für $\varphi^{(i)}(xt)$ ergibt sich dann nach (5):

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(xt) &= \sum_n a_n^{(i)}(t) \psi_n(xt) \\ &= - \sum_n \psi_n(xt) \int_{t_1}^t dt' \int d\xi \psi_n^*(\xi t') [H^{(1)} \varphi^{(i-1)}(\xi t') + H^{(2)} \varphi^{(i-2)}(\xi t')] \\ &= - \int_{t_1}^t dt' \int d\xi U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') [H^{(1)} \varphi^{(i-1)}(\xi t') + H^{(2)} \varphi^{(i-2)}(\xi t')] \quad (15) \end{aligned}$$

wo $U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t')$ definiert ist durch

$$U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') \equiv \sum_n \psi_n(xt) \psi_n^*(\xi t') = \sum_n u_n(xt) u_n^*(\xi t') \quad (16)$$

(da $\chi^* \chi$ durch 1 ersetzt werden darf).

$U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t')$ lässt sich einfach berechnen: nach Definition ist $U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t')$ als Funktion von $\vec{x}; t$ eine Lösung der Gleichung

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + H^{(0)} \right\} \varphi^{(0)}(x, t) = 0$$

der kräftefreien Bewegung. Andererseits ist

$$U(\vec{x} - \vec{\xi}; +0) = \delta(\vec{x} - \vec{\xi})$$

nach der Vollständigkeitsrelation für die normierten räumlichen Eigenfunktionen $u_n(x, t)$ in (16). Durch diese beiden Eigenschaften ist aber die sogenannte „Grundlösung“ der kräftefreien Wellengleichung definiert¹⁾. Man erhält daher für $U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t')$:

$$U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') = e^{-\frac{3\pi}{4}i} \left(\frac{m}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} \frac{1}{(t - t')^{3/2}} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(\vec{x} - \vec{\xi})^2}{t - t'}} \quad (17)$$

und für $\varphi^{(i)}(x, t)$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(x, t) = & - \int_{t_1}^t dt' \int d\xi e^{-\frac{3\pi}{4}i} \left(\frac{m}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} \frac{1}{(t - t')^{3/2}} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(\vec{x} - \vec{\xi})^2}{t - t'}} \\ & [H^{(1)} \varphi^{(i-1)}(\xi, t') + H^{(2)} \varphi^{(i-2)}(\xi, t')]. \end{aligned} \quad (18)$$

§ 4. Ausführung der Integrationen.

Die Integration über den ξ -Raum erfordert eine besondere Voraussetzung über das Vektorpotential \mathfrak{A} und das Magnetfeld \mathfrak{H} . \mathfrak{A} und \mathfrak{H} sollen als Funktionen von ξ auf Strecken der Größenordnung $\sqrt{\frac{\hbar}{m}}(t - t_1)$ langsam veränderlich sein, was in praxi immer der Fall sein dürfte. Dann ändern sich \mathfrak{A} und \mathfrak{H} langsam verglichen mit der Grundlösung (16) und können durch die ersten Glieder ihrer Taylorentwicklungen nach $(\vec{\xi} - \vec{x})$ ersetzt werden:

$$\mathfrak{H}_i(\xi) = \mathfrak{H}_i(x) + \sum_k (\xi_k - x_k) \frac{\partial \mathfrak{H}_i}{\partial x_k} + \dots \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i(\xi) = & \mathfrak{A}_i(x) + \sum_k (\xi_k - x_k) \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial x_k} \\ & + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l (\xi_k - x_k) (\xi_l - x_l) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_i}{\partial x_k \partial x_l} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

¹⁾ W. PAULI, Handb. d. Phys., 2. A., Bd. 24, 103; Gl. (57) und (61).

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_i^2(\xi) &= \mathfrak{A}_i^{(2)}(x) + 2 \mathfrak{A}_i \sum_k (\xi_k - x_k) \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial x_k} \\
&+ \sum_k \sum_l (\xi_k - x_k) (\xi_l - x_l) \left[\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial x_l} + \mathfrak{A}_i \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_i}{\partial x_k \partial x_l} \right] \\
&+ \sum_k \sum_l \sum_m (\xi_k - x_k) (\xi_l - x_l) (\xi_m - x_m) \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_i}{\partial x_k \partial x_l} \\
&+ \frac{1}{4} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n (\xi_k - x_k) (\xi_l - x_l) (\xi_m - x_m) (\xi_n - x_n) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_i}{\partial x_m \partial x_n} + \dots
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\sum_k \mathfrak{A}_k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} &= \sum_k \mathfrak{A}_k(x) \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \sum_k \sum_l (\xi_k - x_k) \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \sum_m (\xi_k - x_k) (\xi_l - x_l) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_m}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_m} + \dots
\end{aligned} \tag{22}$$

Zu bemerken ist, dass für

$$\mathfrak{A}_k = \sum_m \sum_n a_{mn}^{(k)} x_m x_n \tag{23}$$

die in (19)–(22) mitgenommenen Glieder der Taylorreihen \mathfrak{A} und \mathfrak{H} ohne Vernachlässigung darstellen, so dass für Felder mit einem solchen Vektorpotential die folgende Rechnung ohne die eben gemachte Voraussetzung gilt.

Die Integrationen nach ξ in (18) lassen sich nun ohne weitere Annahmen über $\varphi^{(0)}$ ausführen. Sei nämlich f eine Lösung der kräftefreien Gleichung $(\partial/\partial t + H^{(0)})f = 0$ (grad f hat dann die gleiche Eigenschaft) so gilt auf Grund der Definition von U :¹⁾

$$\begin{aligned}
\int d\xi U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') f(\xi t') &= f(xt) \\
\int d\xi U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') \text{grad}_\xi f(\xi t') &= \text{grad} f(xt)
\end{aligned} \tag{24}$$

Das Integral vom Typus

$$\int d\xi U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') (\xi_1 - x_1)^{r_1} (\xi_2 - x_2)^{r_2} (\xi_3 - x_3)^{r_3} \frac{\partial^j}{\partial \xi_k^j} f(\xi t')$$

ist dann auswertbar mit Hilfe folgender Umformungen (die Differentiationen nach x lassen sich nach der Integration über den ξ -Raum ausführen):

$$\begin{aligned}
(\xi_m - x_m) U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') &= \frac{\hbar}{m} i (t - t') \frac{\partial U}{\partial x_m} \\
(\xi_m - x_m) (\xi_n - x_n) U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') &= -\left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 (t - t')^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_m \partial x_n} + \frac{\hbar}{m} i (t - t') \delta_{mn} U
\end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. W. PAULI, l. c., Gl. (58).

$$\begin{aligned}
& (\xi_m - x_m) (\xi_n - x_n) (\xi_p - x_p) U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') = \\
& = - \left(\frac{\hbar}{m} \right)^3 i (t - t')^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x_m \partial x_n \partial x_p} \\
& \quad - \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 (t - t')^2 \left[\delta_{mn} \frac{\partial U}{\partial x_p} + \delta_{np} \frac{\partial U}{\partial x_m} + \delta_{pm} \frac{\partial U}{\partial x_n} \right] \\
& (\xi_m - x_m) (\xi_n - x_n) (\xi_p - x_p) (\xi_q - x_q) U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') \\
& = \left(\frac{\hbar}{m} \right)^4 (t - t')^4 \frac{\partial^4 U}{\partial x_m \partial x_n \partial x_p \partial x_q} \\
& \quad + \left(\frac{\hbar}{m} \right)^3 i (t - t')^3 \left[\delta_{mn} \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial x_q} + \delta_{np} \frac{\partial^2 U}{\partial x_q \partial x_m} + \delta_{pq} \frac{\partial^2 U}{\partial x_m \partial x_n} \right. \\
& \quad \left. + \delta_{qm} \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_p} + \delta_{mp} \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_q} + \delta_{nq} \frac{\partial^2 U}{\partial x_m \partial x_p} \right] \\
& \quad + \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 (t - t')^2 [\delta_{mn} \delta_{pq} + \delta_{np} \delta_{mq} + \delta_{mp} \delta_{nq}] U. \quad (25)
\end{aligned}$$

In der ersten Näherung benötigt man nach (2) nur die Entwicklungen (19) und (22). Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
L(\vec{x}; t - t') &= -2i \left[\sum_k \mathfrak{A}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + (t - t') \frac{\hbar}{m} i \sum_k \sum_m \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} \right. \\
&\quad \left. - (t - t')^2 \frac{\hbar^2}{2m^2} \sum_k \sum_m \sum_n \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial x_m \partial x_n} \frac{\partial^3}{\partial x_k \partial x_m \partial x_n} \right] \\
S_i(\vec{x}; t - t') &= \mathfrak{S}_i + (t - t') \frac{\hbar}{m} i \sum_k \frac{\partial \mathfrak{S}_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (26)
\end{aligned}$$

ergibt sich nach (18):

$$\varphi^{(1)}(xt) = - \frac{e i}{2 m c} \int_{t_1}^t dt' \{ L(x; t - t') + \sum_k \sigma_k S_k(x; t - t') \} \varphi^0(xt). \quad (27)$$

In dem Term mit L äussert sich die Wirkung des Magnetfeldes auf die Ladung, in dem Term mit $\sum_k \sigma_k S_k$ die Wirkung auf den Spin des Elektrons.

Unter Benutzung von (27) erhält man für $\varphi^{(2)}(xt)$ [vgl. (18), (2) und (3)]:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(2)}(xt) &= - \left(\frac{e}{2 m c} \right)^2 \int_{t_1}^t dt' \int_{t_1}^{t'} dt'' \int d\xi U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') \\
&\quad \cdot \{ [-2i \mathfrak{A}(\xi) \text{grad}_\xi + \vec{\sigma} \mathfrak{S}(\xi)] [L(\xi; t' - t'') + \sum_k \sigma_k S_k(\xi; t' - t'')] \\
&\quad + e/\hbar c \mathfrak{A}^2(\xi) \} \varphi^0(\xi t'). \quad (28)
\end{aligned}$$

Bei der Integration nach ξ in (28) ist zu beachten, dass ξ auch in den in $L(\xi; t' - t'')$ und $S_k(\xi; t' - t'')$ stehenden \mathfrak{A} und \mathfrak{S} auftritt. Man muss daher diese Grössen dort ebenfalls durch ihre Taylorentwicklungen (19)–(22) ersetzen und kann dann die Integration mit Hilfe der Umformungen (24) und (25) ausführen. Der Operator grad_ξ von \mathfrak{A} grad_ξ wirkt auch auf $L(\xi; t' - t'')$ und $S_k(\xi; t' - t'')$, während die Differentiationen nach x aus (25) wegen

$$\begin{aligned} \int d\xi \frac{\partial^n U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t')}{\partial x_m^n} F(x) \varphi^0(\xi t') \\ = F(x) \frac{\partial^n}{\partial x_m^n} \int d\xi U(\vec{x} - \vec{\xi}; t - t') \varphi^0(\xi t') = F(x) \frac{\partial^n \varphi^0(xt)}{\partial x_m^n} \end{aligned} \quad (29)$$

schliesslich nur noch an $\varphi^{(0)}(xt)$ angreifen. In den höheren Näherungen verläuft die Rechnung entsprechend.

§ 5. Berechnung von $\vec{\mathfrak{M}}$ und ϱ .

Mit Hilfe von (27) und (28) soll zunächst die *Polarisation* des Elektronenstrahls berechnet werden, und zwar nur für den Fall, dass der *einfallende Strahl unpolarisiert ist*; die als Polarisator verwendete Stern-Gerlach-Apparatur wird eine räumlich variierende Magnetisierung erzeugen, die sich aus (7) bis (9) durch Mittelung über die Spinrichtungen der einfallenden Elektronen berechnen lässt.

Das Wellenpaket, das zur Zeit $t = t_1$ in das Magnetfeld eintritt, werde durch

$$\varphi^{(0)}(xt) = \begin{pmatrix} \chi_{+\frac{1}{2}} \\ \chi_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} f(xt) \quad (30)$$

dargestellt, mit

$$\chi_{+\frac{1}{2}} = e^{i\Phi} \cos \frac{1}{2} \Theta \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = -\sin \frac{1}{2} \Theta. \quad (31)$$

Die Mitteilung über die Spinrichtungen des einfallenden Elektrons werde durch Überstreichung angedeutet:

$$\overline{F} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi d\Theta \cdot \sin \Theta \cdot F.$$

Dann gilt bekanntlich

$$\chi_i^* \chi_k = \frac{1}{2} \delta_{ik} \quad (32)$$

und wegen

$$\overline{\chi^* \sigma_k \chi} = 0 \quad (33)$$

ist natürlich

$$\overline{\vec{\mathfrak{M}}^{(0)}} = 0.$$

In erster Näherung ergibt sich mit (27) und (8)

$$\overline{\mathfrak{M}}_k^{(1)} = \frac{e}{2mc} \frac{\hbar}{2m} (t - t_1)^2 \sum_l \frac{\partial \mathfrak{S}_k}{\partial x_l} \frac{\partial \varrho^0}{\partial x_l}. \quad (34)$$

In der zweiten Näherung erhält man nach (27), (28) und (9):

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}}_k^{(2)} = & - \left(\frac{e}{2mc} \right)^2 f^*(xt) \int_{t_1}^t dt' \int_{t_1}^{t'} dt'' \left\{ S_k(x; t-t') L(x; t'-t'') \right. \\ & + L(x; t-t') S_k(x; t'-t'') + i [S_l(x; t-t') S_m(x; t'-t'') \\ & \quad - S_m(x; t-t') S_l(x; t'-t'')] \\ & - 2i \left[\mathfrak{S}_k \left((t-t') \frac{\hbar}{m} i \sum_n \sum_q \frac{\partial \mathfrak{A}_q}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_q} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - [\tfrac{1}{2}(t-t')^2 + (t-t')(t'-t'')] \frac{\hbar^2}{m^2} \sum_n \sum_p \sum_q \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_q}{\partial x_n \partial x_p} \frac{\partial^3}{\partial x_n \partial x_p \partial x_q} \right) \right. \\ & + \sum_p \frac{\partial \mathfrak{S}_k}{\partial x_p} \left(\mathfrak{A}_p + (t-t') \frac{\hbar}{m} i \sum_q \left[\mathfrak{A}_q \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} + 2 \frac{\partial \mathfrak{A}_q}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial x_q} + \frac{\partial \mathfrak{A}_p}{\partial x_q} \frac{\partial}{\partial x_q} \right] \right. \\ & \quad \left. - [2(t-t')^2 + (t-t')(t'-t'')] \frac{\hbar^2}{m^2} \sum_n \sum_q \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_q}{\partial x_n \partial x_p} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_q} \right. \\ & \quad \left. - (t-t')^2 \frac{\hbar^2}{m^2} \sum_q \sum_n \left[2 \frac{\partial \mathfrak{A}_q}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_p} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_p}{\partial x_q \partial x_n} \right] \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_q} \right. \\ & \quad \left. \left. - [(t-t')^3 + (t-t')^2(t'-t'')] \frac{\hbar^3}{m^3} i \sum_n \sum_q \sum_r \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_q}{\partial x_n \partial x_r} \frac{\partial^4}{\partial x_n \partial x_p \partial x_q \partial x_r} \right) \right] \\ & - (t-t') \frac{\hbar}{2m} i \sum_p \left(\mathfrak{S}_l \frac{\partial \mathfrak{S}_m}{\partial x_p} - \mathfrak{S}_m \frac{\partial \mathfrak{S}_l}{\partial x_p} \right) \frac{\partial}{\partial x_p} \Big\} f(xt) \\ & + \left(\frac{e}{2mc} \right)^2 \int_{t_1}^t dt' \int_{t_1}^{t'} dt'' \{ (L^*(x, t-t') f^*(xt)) (S_k(x; t'-t'') f(xt)) \\ & \quad + i (S_l^*(x; t-t') f^*(xt)) (S_m(x; t'-t'') f(xt)) \} \end{aligned} \quad (35)$$

(k, l, m folgen aufeinander wie 1, 2, 3) + konjugiert komplex.

Die Integrale nach t' und t'' erstrecken sich im zweiten Integral beide von t_1 bis t , da dieser Anteil von $\varphi^{(1)*} \sigma_k \varphi^{(1)}$ herührt; überall sonst geht t'' von t_1 bis t' , und t' von t_1 bis t , da die übrigen Summanden von $\varphi^{(0)*} \sigma_k \varphi^{(2)} + \varphi^{(2)*} \sigma_k \varphi^{(0)}$ geliefert werden.

Zu beachten ist, dass die Differentialoperatoren in $L(x; t-t')$ und $S(x; t-t')$ nur auf $f(xt)$ wirken, nicht aber auf die nach ihnen stehenden Feldstärken und Vektorpotentiale (vgl. (29)).

Soll andererseits die Stern-Gerlach-Apparatur als Analysator eines anfänglich bereits polarisierten Elektronenstrahls verwendet werden, so muss angegeben werden, wie die räumliche Dichteverteilung im Strahl von der Spinorientierung des einfallenden Elektrons abhängt. Die Darwin'schen Winkel Φ, Θ (31) seien also jetzt vorgegeben; \mathfrak{S} sei der Einheitsvektor in der Richtung des anfänglichen Spinmomentes¹⁾:

$$\mathfrak{S} = -(\sin \Theta \cos \Phi; \sin \Theta \sin \Phi; \cos \Theta). \quad (36)$$

Die durch das inhomogene Magnetfeld in erster Näherung bewirkte Dichteänderung ist dann

$$\begin{aligned} \varrho^{(1)} = & -\frac{e}{mc} \left\{ (t-t_1) \sum_k \mathfrak{A}_k \frac{\partial \varrho^0}{\partial x_k} \right. \\ & + (t-t_1)^2 \frac{\hbar}{2m} i \sum_k \sum_m \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial x_m} \left(f^* \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} - f \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_k \partial x_m} \right) \\ & - (t-t_1)^3 \frac{\hbar^2}{6m^2} \sum_k \sum_m \sum_n \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial x_m \partial x_n} \left(f^* \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_m \partial x_n} + f \frac{\partial^3 f^*}{\partial x_k \partial x_m \partial x_n} \right) \Big\} \\ & + \frac{e\hbar}{2mc} \frac{\hbar}{2m} (t-t_1)^2 \sum_k \frac{\partial (\mathfrak{S} \mathfrak{H})}{\partial x_k} \frac{\partial \varrho^0}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (37)$$

Die zweite Näherung liefert bereits einen sehr komplizierten Ausdruck.

§ 6. Bemerkungen zur Störungsrechnung.

a) *Adiabatische Einschaltung.*

In allen Rechnungen wurde bisher vorausgesetzt, dass das Feld zur Zeit $t = t_1$ plötzlich eingeschaltet werde, bzw. dass das betrachtete Teilchen zur Zeit $t = t_1$ plötzlich in das Feld gelange. Es soll nun gezeigt werden, dass die Formeln in der verwendeten Näherung nicht wesentlich geändert werden, wenn man die Einschaltung adiabatisch vornimmt.

Der Einschaltung kann man dadurch Rechnung tragen, dass man setzt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}(x) && \text{für } t \geq t_1 \\ \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}(x) \frac{t-t_0}{t_1-t_0} && \text{für } t_1 \geq t \geq t_0 \\ \mathfrak{A} &= 0 && \text{für } t_0 \geq t. \end{aligned}$$

¹⁾ Genau gesagt ist \mathfrak{S} die Richtung des mechanischen, $-\mathfrak{S}$ diejenige des magnetischen Spinmomentes.

(Durch die Zeitabhängigkeit des Vektorpotentials ist den bei der Einschaltung auftretenden elektrischen Feldern Rechnung getragen.)

Geht man mit diesem Ansatz für das Vektorpotential in die Formeln für $\varphi^{(1)}$, $\overline{\mathfrak{M}}_k^{(1)}$ und $\varrho^{(1)}$ ein, so sieht man, dass man zweierlei Terme erhält: zu denjenigen, welche vom Vektorpotential für $t \geq t_1$ herkommen und die in den obigen Formeln angeschrieben wurden, treten genau gleich gebaute Terme hinzu, die von der Einschaltung herrühren; in diesen steht nur überall

$$\frac{(t_1 - t_0)^n}{n + 1} \quad \text{statt} \quad \frac{(t - t_1)^n}{n}.$$

Erst in $\varphi^{(2)}$ und $\overline{\mathfrak{M}}_k^{(2)}$ treten infolge der Integrale $\int_{t_1}^t dt' \int_{t_1}^{t'} dt''$ neue Terme auf. Aber auch sie werden sich zu den alten wie

$$\frac{1}{n + 1} (t_1 - t_0)^n : \frac{1}{n} (t - t_1)^n$$

verhalten, also klein bleiben, sofern die Einschaltungsdauer klein ist gegenüber der Zeit, welche die Elektronen im Feld verbringen.

Entsprechendes wird gelten, wenn das Feld \mathfrak{H} zeitlich konstant ist und die Elektronen aus einem feldfreien Raum auf einer kurzen Strecke in das Stern-Gerlach-Feld hineinlaufen.

b) Eichinvarianz.

Es könnte scheinen, als ob das Auftreten von \mathfrak{A} neben \mathfrak{H} in den Formeln für $\overline{\mathfrak{M}}_k^{(2)}$ und $\varrho^{(1)}$ ein Verstoss gegen die Forderung der Eichinvarianz wäre. Dies ist jedoch nicht der Fall, da dauernd, auch während der Einschaltung, das skalare Potential $\Phi = 0$ gesetzt wurde. Dann lautet nämlich die einzige erlaubte Eichtransformation

$$\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A} + \text{grad } S, \quad \text{wobei} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \Delta S = 0.$$

Fordert man für $t \leq t_0$ (bzw. $t \leq t_1$) ausser $\mathfrak{H} = 0$ auch $\mathfrak{A} = 0$, so dass der Operator $\frac{1}{m} \frac{\hbar}{i} \text{grad}$, auf φ^0 angewendet, die Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen ergibt, so ist damit grad S festgelegt, und das Vektorpotential \mathfrak{A} ist durch das Magnetfeld \mathfrak{H} eindeutig bestimmt.

§ 7. Spezielles Magnetfeld.

Im folgenden soll dasjenige Magnetfeld zugrunde gelegt werden, welches C. G. DARWIN¹⁾ benutzt hat, um den Stern-Gerlach-Versuch für Atomstrahlen zu diskutieren:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= A x_2 x_3 & \mathfrak{A}_2 &= \mathfrak{A}_3 = 0 \\ \mathfrak{H}_1 &= 0 & \mathfrak{H}_2 &= A x_2 & \mathfrak{H}_3 &= -A x_3 \end{aligned} \quad (38)$$

Längs der x_1 -Achse ist dieses Magnetfeld Null³⁾.

Weiter sei angenommen, dass

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}(x t)}{\partial x_2} = 0 \quad (39)$$

ist. Dies gilt z. B. für eine Welle, die durch Beugung einer ebenen Welle an einem zur x_2 -Achse parallelen Spalt entsteht.

Nach (26) wird dann:

$$\begin{aligned} L(x; t-t') &= -2 i A \left[x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\hbar}{m} (t-t') \left(x_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\hbar^2}{m^2} (t-t')^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right) \right] \\ S_1(x; t-t') &= 0 \\ S_2(x; t-t') &= A \left[x_2 + \frac{i \hbar}{m} (t-t') \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \\ S_3(x; t-t') &= -A \left[x_3 + \frac{i \hbar}{m} (t-t') \frac{\partial}{\partial x_3} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Weiter ergibt sich nach (27), (28) und (39):

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \varphi_1^{(1)}(x t) \\ \varphi_2^{(2)}(x t) \end{aligned} \right\} &= \left\{ -\frac{e A}{m c} \left[(t-t_1) x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + (t-t_1)^2 \frac{\hbar}{2 m} i x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{e A}{2 m c} i \left[(t-t_1) x_2 \sigma_2 - \left((t-t_1) x_3 + (t-t_1)^2 \frac{\hbar}{2 m} i \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \sigma_3 \right] \right\} \varphi^{(0)}(x_1 x_3 t) \end{aligned} \quad (41)$$

¹⁾ C. G. DARWIN, „Free Motion in Wave Mechanics“, Proc. Roy. Soc. A **117**, S. 258.

²⁾ Für dieses Feld stellen gerade die Terme der Taylorreihen für \mathfrak{A} ; \mathfrak{H} , \mathfrak{A}^2 die S. 7 (19) bis (22) mitgenommen wurden, die betreffenden Grössen exakt dar, so dass hier durch das Abbrechen der Reihen kein Fehler entsteht.

³⁾ In der nächsten Umgebung dieser Achse wird daher die störende Wirkung der Lorentzkraft am kleinsten sein.

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_1^{(2)}(x, t)}{\varphi_2^{(2)}(x, t)} = & - \left(\frac{eA}{2mc} \right)^2 \left\{ (t-t_1) \frac{2m}{\hbar} i x_2^2 x_3^2 + (t-t_1)^2 \frac{1}{2} \left(x_2^2 + x_3^2 - 2x_2^2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right. \\
& + (t-t_1)^3 \frac{\hbar}{3m} i \left[3 + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - 2x_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2x_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \\
& + (t-t_1)^4 \frac{\hbar^2}{2m^2} \left[\frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_2^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \\
& + (t-t_1)^5 \frac{\hbar^3}{m^3} \frac{4}{15} \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + (t-t_1)^3 \frac{\hbar}{6m} x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_1 \\
& + \left[(t-t_1)^3 \frac{\hbar}{m} \frac{5}{6} x_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + (t-t_1)^4 \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{5}{12} i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \right] \sigma_2 \\
& + \left[(t-t_1)^2 2 i x_2 x_3^2 + (t-t_1)^3 \frac{1}{3} \left(-\frac{\hbar}{m} 2x_2 - \frac{\hbar}{m} 4x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right. \\
& \left. \left. - (t-t_1)^4 \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1}{2} i x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_3 \right\} \varphi^{(0)}(x_1, x_3, t). \quad (42)
\end{aligned}$$

Für die Polarisation des anfänglich unpolarisierten Strahls erhält man in der ersten Näherung nach (34):

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{M}}_1^{(1)} &= \overline{\mathfrak{M}}_2^{(1)} = 0 \\
\overline{\mathfrak{M}}_3^{(1)} &= - \frac{eA}{2mc} \frac{\hbar}{2m} (t-t_1)^2 \frac{\partial \varrho^{(0)}}{\partial x_3}. \quad (42)
\end{aligned}$$

Eine relativ starke Polarisation in der x_3 -Richtung ist hiernach in solchen Raumgebieten zu erwarten, wo $\partial \varrho^{(0)} / \partial x_3$ gross ist, also etwa im Bereich der „Schattengrenze“ des durch einen Spalt ausgeblendeten Strahls. Es muss aber untersucht werden, ob nicht die höheren Näherungen Beiträge der gleichen oder höherer Grössenordnung liefern. Zu diesem Zwecke sei noch $\overline{\mathfrak{M}}^{(2)}$ angegeben; es ergibt sich nach (35):

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{M}}_1^{(2)} &= - \left(\frac{eA}{2mc} \right)^2 \frac{\hbar}{2m} \frac{(t-t_1)^3}{3} x_2 \frac{\partial \varrho^0}{\partial x_3} \\
\overline{\mathfrak{M}}_2^{(2)} &= - \left(\frac{eA}{2mc} \right)^2 \frac{\hbar}{2m} \left\{ (t-t_1)^2 \frac{4m}{\hbar} x_2^2 x_3 i \left(f^* \frac{\partial f}{\partial x_1} - f \frac{\partial f^*}{\partial x_1} \right) \right. \\
&\quad - (t-t_1)^3 \frac{1}{3} x_2^2 \left[\frac{\partial^2 \varrho^0}{\partial x_1 \partial x_3} - \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f^*}{\partial x_3} \right) \right] \\
&\quad \left. + (t-t_1)^4 \frac{\hbar}{m} \frac{10}{3} \left[f^* \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - f \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_1 \partial x_3} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{M}}_3^{(2)} = & - \left(\frac{eA}{2mc} \right)^2 \frac{\hbar}{2m} x_2 \left\{ (t-t_1)^2 \frac{m}{\hbar} i x_3^2 \left(f^* \frac{\partial f}{\partial x_1} - f \frac{\partial f^*}{\partial x_1} \right) \right. \\
& + (t-t_1)^3 \frac{1}{3} \left[- \frac{\partial \varrho^0}{\partial x_3} - \frac{3}{2} x_3 \frac{\partial^2 \varrho^0}{\partial x_1 \partial x_3} + x_3 \left(f^* \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + f \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \right] \\
& + (t-t_1)^4 \frac{\hbar}{2m} i \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(f^* \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - f \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \left(f^* \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2} - f \frac{\partial^3 f^*}{\partial x_1 \partial x_3^2} \right) \right] \right\}. \quad (44)
\end{aligned}$$

$\overline{\mathfrak{M}}_3^{(2)}$ verschwindet also in der Ebene $x_2 = 0$ (d. h. in der Ebene, welche die Achse des magnetischen Feldes $-\mathfrak{H} = 0$ — enthält und auf der Spaltkante senkrecht steht). Geht man aber aus dieser Ebene heraus um Abstände x_2 , die mit der Wellenlänge λ der einfallenden Elektronen vergleichbar sind, so darf $\overline{\mathfrak{M}}_3^{(2)}$ im allgemeinen nicht gegen $\overline{\mathfrak{M}}_3^{(1)}$ vernachlässigt werden, sofern $\overline{\mathfrak{M}}_3^{(1)}$ selbst nicht allzu klein gegen 1 ist. Dies liegt an dem Auftreten der Ableitungen $\partial f / \partial x_1$ in $\overline{\mathfrak{M}}_3^{(2)}$, die von der Grössenordnung f/λ sind (wenn der einfallende Strahl nicht senkrecht zur x_1 -Achse ist). Die Formeln der ersten Näherung können daher nur in unmittelbarer Nähe der $x_1 x_3$ -Ebene gültig sein, und zwar ist diese Gültigkeitszone, wegen der Kleinheit der experimentell herstellbaren Elektronenwellenlängen, so schmal, dass ein experimenteller Nachweis der hier berechneten Polarisierung kaum möglich sein dürfte.

Am Beispiel einer einfachen (wenn auch experimentell kaum realisierbaren) Wellenfunktion $\varphi^0(x_1 x_3 t)$ sei dies noch näher ausgeführt. Es sei:

$$\begin{aligned}
f(x_1 x_3 t) &= \frac{b}{b'} e^{i k_1 x_1 - \frac{i \hbar}{2m} k_1^2 t - \frac{(x_3 - x_3^0)^2}{2 b'^2}} \\
b'^2 &= b^2 + \frac{i \hbar (t - t_1)}{m} \quad (b \text{ reell}) \\
\bar{b}^2 &= \frac{|b'^2|^2}{b^2} = b^2 + \left(\frac{\hbar (t - t_1)}{m b} \right)^2 \\
k_1 &= \frac{m v_1}{\hbar} = \frac{2 \pi}{\lambda}. \quad (45)
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet x_1 die Einfallsrichtung des Strahls und b die Breite des Strahls in der x_3 -Richtung zur Zeit $t = t_1$.

Man erhält aus (43) und (45):

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{M}}_1^{(1)} &= \overline{\mathfrak{M}}_2^{(2)} = 0 \\ \frac{\overline{\mathfrak{M}}_3^{(1)}}{\varrho^0} &= \frac{e A}{2 m c} \frac{\hbar}{m} (t-t_1)^2 \frac{(x_3-x_3^0)}{\bar{b}^2}\end{aligned}\quad (46)$$

und wenn x_1 die im Feld zurückgelegte Strecke bedeutet $x_1 = \hbar k_1/m (t-t_1)$, folgt aus (44) und (45):

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\mathfrak{M}}_1^{(2)}}{\varrho^0} &= \left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_3^{(1)}}{\varrho^0} \right)^2 \frac{x_2}{3 \lambda X_1} \cdot \frac{\bar{b}^2}{x_3 - x_3^0} \\ \frac{\overline{\mathfrak{M}}_2^{(2)}}{\varrho^0} &= \left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_3^{(1)}}{\varrho^0} \right)^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\bar{b}^2}{x_3 - x_3^0} \left\{ -\frac{5}{6} + \frac{1}{3} \frac{x_3^2}{b^2} + 4 \frac{x_2^2 x_3}{\lambda^2 X_1^2} \cdot \frac{\bar{b}^2}{(x_3 - x_3^0)} \right\} \\ \frac{\overline{\mathfrak{M}}_3^{(2)}}{\varrho^0} &= \left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_3^{(1)}}{\varrho^0} \right)^2 \frac{x_2}{\lambda} \frac{\bar{b}^2}{(x_3 - x_3^0)^2} \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} x_3 \frac{x_3 - x_3^0}{b^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{b^2 + \frac{1}{2} \bar{b}^2}{b^2} \cdot \frac{(x_3 - x_3^0)^2}{\bar{b}^2} + \frac{x_3^2 \bar{b}^2}{\lambda^2 X_1^2} \right\}.\end{aligned}\quad (47)$$

Nun ist zu verlangen: $\overline{\mathfrak{M}}_3^{(1)}/\varrho^0$ darf im Strahlbereich $x_3 - x_3^0 \gtrsim \bar{b}$ nicht allzu klein sein (vielleicht 1/10), damit überhaupt in erster Näherung eine merkliche Polarisierung auftritt; andererseits soll $\overline{\mathfrak{M}}_k^{(2)}/\varrho^0$ sehr klein sein, damit die Terme erster Ordnung eine gute Näherung darstellen. Das ist nur in solchen Gebieten der Fall, wo die Größen

$$\frac{\overline{\mathfrak{M}}_k^{(2)}}{\varrho^0} \left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_3^{(1)}}{\varrho^0} \right)^{-2}$$

höchstens von der Größenordnung 1 werden. Für $k=3$ trifft dies, wie oben angegeben wurde, nur zu, wenn x_2 höchstens von der Größenordnung λ ist, es sei denn, dass x_3 geeignet gewählt wird, und zwar wiederum innerhalb eines Intervalls von der Größenordnung λ .

$$\frac{\overline{\mathfrak{M}}_2^{(2)}}{\varrho^0}$$

lässt sich nur durch Wahl von x_3 genügend klein machen.

Auch bei anderer Wahl des Wellenpaketes $\varphi^{(0)}$ (z. B. axiale Symmetrie: Kreisblende) sind die Verhältnisse nicht günstiger.

Bei der Diskussion der Stern-Gerlach-Anordnung als Analysator eines polarisierten Elektronenstrahls (vgl. § 5) müsste man analog verlangen, dass $\varrho^{(1)}$ (37) nicht zu klein und dass $\varrho^{(2)} \ll \varrho^{(1)}$ ist, was wiederum nur in Zonen der Breite λ zutrifft.

Obgleich also die Störungsrechnung bestätigt, dass die Stern-Gerlach-Anordnung *im Prinzip* zum Nachweis des Elektronenspins dienen könnte, erweist sie sich doch als unzureichend für die Diskussion wirklich ausführbarer Experimente.

Ich möchte nicht versäumen, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. WENTZEL, für die Anregung zu dieser Arbeit und für den während ihrer Ausführung immerfort so liebenswürdig erteilten Rat herzlichst zu danken. — Auch Herrn Dr. V. WEISSKOPF bin ich für seine Ratschläge bei Beginn der Arbeit zu grossem Dank verpflichtet.

Physikalisches Institut (theoretische Abteilung)
der Universität Zürich.
