

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 10 (1937)
Heft: III

Artikel: Théorie de la diffraction de la lumière par des ultra-sons
Autor: Extermann, Richard C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110742>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Théorie de la diffraction de la lumière par des ultra-sons

par Richard C. Extermann.

(28. IV. 37.)

II.

Dans un article précédent¹⁾ nous avons résolu partiellement le problème de la propagation de la lumière dans un milieu perturbé par des ultra-sons. Nous nous proposons ici de reprendre ce problème par une méthode plus générale. Cette méthode est semblable à celle qu'ont employée EWALD et LAUE dans la théorie de la propagation des rayons X dans les cristaux²⁾.

§ 1. Equations fondamentales.

Dans un milieu dont la constante diélectrique \varkappa est fonction de l'endroit et du temps, l'élimination des grandeurs magnétiques dans les équations de MAXWELL conduit à l'équation d'ondes

$$\nabla \cdot \nabla \frac{\tilde{D}}{\varkappa} - \nabla \nabla \cdot \frac{\tilde{D}}{\varkappa} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{D}}{\partial t^2}; \quad \varkappa = \frac{\tilde{D}}{\tilde{E}} \quad (1)$$

où \tilde{D} est le déplacement et \tilde{E} le champ électriques.

Nous voulons écrire cette équation pour un milieu traversé par une onde ultra-sonore plane $A e^{i(\vec{b} \cdot \vec{r} - \nu t)}$ de vecteur d'onde \vec{b} et de fréquence $\nu/2\pi$. L'onde ultra-sonore rend la constante diélectrique \varkappa périodique, on peut développer \varkappa en série de FOURIER

$$\varkappa = \sum_n \varkappa_n e^{i n (\vec{b} \cdot \vec{r} - \nu t)}.$$

L'inverse de \varkappa qui figure dans l'équation (1) varie avec la même période dans l'espace et dans le temps, et le développement de FOURIER en est

$$\frac{1}{\varkappa} = \sum_n \psi_n e^{i n (\vec{b} \cdot \vec{r} - \nu t)}; \quad \psi_0 = \frac{1}{\varkappa_0} \quad (2)$$

¹⁾ R. EXTERMANN et G. WANNIER, Helv. Phys. Acta, **9**, 520, 1936.

²⁾ EWALD, Handbuch der Physik, vol. **23**, 2, 1933; LAUE, Ergeb. der Exakt. Naturwiss. 1931.

En portant dans l'équation d'ondes (1) la valeur (2) de $1/\varkappa$, on trouve l'équation que \tilde{D} doit satisfaire dans un milieu stratifié par une onde ultra-sonore plane. Nous allons chercher à résoudre cette équation en prenant pour \tilde{D} une somme d'ondes transversales planes

$$\tilde{D} = \sum_m \tilde{D}_m e^{i(\tilde{k}_m \cdot \tilde{r} - \omega_m t + \alpha_m)}. \quad (3)$$

L'indice m , dans ce développement, suppose la possibilité de numérotter les ondes planes de la somme; généralement il faudra prendre pour m le groupe de trois indices $m_1 m_2 m_3$ et la somme sera une somme triple.

En remplaçant (3) et (2) dans (1), le membre de gauche devient

$$-\sum_{m,n} \psi_n (\tilde{k}_m + n\tilde{b})^2 \left[\tilde{D}_m - \frac{\tilde{k}_m + n\tilde{b}}{|\tilde{k}_m + n\tilde{b}|} \frac{\tilde{k}_m + n\tilde{b}}{|\tilde{k}_m + n\tilde{b}|} \cdot \tilde{D}_m \right] e^{i[(\tilde{k}_m + n\tilde{b}) \cdot \tilde{r} - (\omega_m + n\nu) t + \alpha_m]}.$$

On posera

$$\tilde{D}_m - \frac{\tilde{k}_m + n\tilde{b}}{|\tilde{k}_m + n\tilde{b}|} \frac{\tilde{k}_m + n\tilde{b}}{|\tilde{k}_m + n\tilde{b}|} \cdot \tilde{D}_m = \tilde{D}_{m \perp m, n}.$$

$\tilde{D}_{m \perp m, n}$ est la composante de \tilde{D}_m perpendiculaire au vecteur $(\tilde{k}_m + n\tilde{b})$. L'équation (1) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_n \psi_n (\tilde{k}_m + n\tilde{b})^2 \tilde{D}_{m \perp m, n} e^{i[(\tilde{k}_m + n\tilde{b}) \cdot \tilde{r} - (\omega_m + n\nu) t + \alpha_m]} \\ = \sum_m \frac{\omega_m}{c^2} \tilde{D}_m e^{i[\tilde{k}_m \cdot \tilde{r} - \omega_m t + \alpha_m]}. \end{aligned} \quad (4)$$

Cette équation est une identité en \tilde{r} et en t pour les exponentielles qui y figurent; si donc un des membres contient un terme d'exposant $\tilde{k} \cdot \tilde{r} - \omega t + \alpha$, on doit trouver dans l'autre membre un terme qui a le même exposant $\tilde{k} \cdot \tilde{r} - \omega t + \alpha$. Dans l'équation (4), la somme du membre de gauche est une somme quadruple (sur $m_1 m_2 m_3$ et n), tandis qu'à droite la somme est triple seulement. Si on effectue la somme en n en commençant par $n = 0$, on voit que le membre de gauche contient déjà pour cette valeur tous les exposants qui apparaissent au membre de droite. Pour les autres valeurs de n , l'exposant

$$(\tilde{k}_{m_1 m_2 m_3} + n\tilde{b}) \cdot \tilde{r} - (\omega_{m_1 m_2 m_3} + n\nu) t + \alpha_{m_1 m_2 m_3}$$

doit être identique à un des exposants déjà rencontrés, par exemple

$$\tilde{k}_{p_1 p_2 p_3} \cdot \tilde{r} - \omega_{p_1 p_2 p_3} t + \alpha_{p_1 p_2 p_3}$$

puisque nous avons vu qu'il est impossible de trouver dans le membre de gauche un exposant qui ne figure pas au membre de droite. On aura donc séparément

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{m_1 m_2 m_3} + n \tilde{b} &= \tilde{k}_{p_1 p_2 p_3} \\ \omega_{m_1 m_2 m_3} + n \nu &= \omega_{p_1 p_2 p_3} \\ \alpha_{m_1 m_2 m_3} &= \alpha_{p_1 p_2 p_3}\end{aligned}$$

Tous les α étant égaux en vertu de la troisième égalité, nous poserons

$$\alpha_{m_1 m_2 m_3} = 0.$$

De la forme des deux premières égalités, on déduit qu'il suffit d'un seul indice pour numérotter les \tilde{k} et les ω . On pourra tous les obtenir à partir d'un vecteur d'onde \tilde{k}_0 et d'une fréquence ω_0 , et par suite les grandeurs \tilde{k}_m et ω_m qui figurent dans la solution (3) doivent nécessairement satisfaire aux équations

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \tilde{k}_m &= \tilde{k}_0 + m \tilde{b} \\ (b) \quad \omega_m &= \omega_0 + m \nu \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

L'équation d'ondes (4) s'écrit maintenant, en identifiant les termes de même exposant, sous la forme du système

$$\sum_m \psi_{s-m} k_s^2 \tilde{D}_{m \perp s} = \frac{\omega_s^2}{c^2} \tilde{D}_s$$

où le symbole $\tilde{D}_{m \perp s}$ désigne la composante de \tilde{D}_m perpendiculaire au vecteur \tilde{k}_s . Comme les ondes qui figurent au développement (3) sont transversales, $\tilde{D}_{s \perp s} = \tilde{D}_s$ et le système devient

$$\sum'_m \psi_{s-m} \tilde{D}_{m \perp s} = \frac{\frac{\omega_s^2}{c^2} - \psi_0 k_s^2}{k_s^2} \tilde{D}_s \quad (6)$$

la sommation Σ' s'étendant sur toutes les valeurs de m différentes de s .

L'équation (6) est une équation entre vecteurs, pour la commodité du calcul on a intérêt à l'écrire en composantes : on résoud \tilde{D}_m en D_m' dans le plan qui contient \tilde{k}_0 et \tilde{b} (donc tous les \tilde{k}_m), et D_m'' perpendiculaire à ce plan. En désignant par (s, m) l'angle compris entre \tilde{k}_s et \tilde{k}_m , on a

$$\begin{aligned}D_{m \perp s}' &= D_m' \cos (s, m) \\ D_{m \perp s}'' &= D_m''.\end{aligned}$$

Le système (6) se décompose en deux systèmes et si on pose

$$\begin{aligned}\psi'_{s-m} &= \psi_{s-m} \cos (s, m) \\ \psi''_{s-m} &= \psi_{s-m}\end{aligned}\quad (7)$$

on voit que les deux polarisations D' et D'' satisfont un système de la même forme

$$\sum'_m \psi_{s-m} D_m = \frac{\frac{\omega_s^2}{c^2} - \psi_0 k_s^2}{k_s^2} D_s \quad (8)$$

avec des coefficients ψ différents.

Nous avons ainsi remplacé l'équation différentielle (1) par les systèmes d'équations algébriques (5) et (8). Ce sont ces systèmes qu'il faut résoudre pour connaître la solution des équations de MAXWELL dans le milieu diffractant.

§ 2. Résolution des équations fondamentales.

La résolution des équations (8) pour les vecteurs D_m nous oblige à faire quelques simplifications.

Nous étudions la diffraction d'une onde lumineuse dont le vecteur d'onde dans le vide est $|\vec{k}| = \omega/c$; à cette onde correspondent, dans le milieu, des ondes diffractées dont la fréquence est donnée par les équations (5b). Pour la suite des calculs, nous admettrons que toutes les ondes diffractées ont la fréquence ω de l'onde extérieure; cela revient à poser $\nu = 0$ dans (5b). Cette simplification est légitime parce que la fréquence ν de l'onde ultrasonore est pratiquement toujours très petite par rapport à la fréquence ω de la lumière¹⁾.

Le second membre de (8) devient alors

$$\frac{k^2 - \psi_0 k_s^2}{k_s^2} D_s.$$

Comme l'amplitude de la variation de constante diélectrique provoquée par l'onde sonore est toujours petite, la grandeur k_s d'un vecteur d'onde dans le milieu perturbé est très voisine de la longueur

$$k\sqrt{\varkappa_0} = \frac{k}{\sqrt{\psi_0}}$$

¹⁾ On néglige ici ν devant ω pour le calcul des conditions géométriques et de l'intensité de la diffraction, les erreurs ainsi introduites sont trop petites pour pouvoir être observées; mais les mesures de fréquence très précises qu'on peut faire sur les ondes diffractées permettent une vérification expérimentale directe des équations (5b).

qu'il aurait dans le milieu non perturbé. Le numérateur est donc petit et on peut écrire au dénominateur

$$k_s^2 = \frac{k^2}{\psi_0} \left(1 - \frac{k^2 - \psi_0 k_s^2}{k^2} \right).$$

Dans les problèmes de diffraction que nous traiterons, la quantité $\frac{k^2 - \psi_0 k_s^2}{k^2}$ est négligeable par rapport à l'unité; avec cette seconde simplification les équations (8) deviennent si on tient compte de (5a)

$$-\frac{1}{\psi_0^2} \sum_m' \psi_{s-m} D_m + \frac{\frac{k^2}{\psi_0} - (\vec{k}_0 + s \vec{b})^2}{k^2} D_s = 0. \quad (9)$$

Pour toute valeur de \vec{k}_0 , ces équations définissent une suite de D_m , mais ces suites n'ont une signification physique que si elles convergent vers zéro pour $m \rightarrow \pm \infty$, ce qui n'est le cas que pour certaines valeurs propres \vec{k}_0^r . Nous allons chercher les valeurs $\vec{u} k_0^r$ parallèles à un vecteur unité \vec{u} . Le système (9) s'écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} \dots &+ \frac{\frac{k^2}{\psi_0} - (\vec{u} k_0 - \vec{b})^2}{k^2} D_{-1} - \frac{1}{\psi_0^2} \psi_{+1} D_0 - \frac{1}{\psi_0^2} \psi_{+2} D_1 + \dots = 0 \\ \dots &- \frac{1}{\psi_0^2} \psi_{-1} D_{-1} + \frac{\frac{k^2}{\psi_0} - (\vec{u} k_0)^2}{k^2} D_0 - \frac{1}{\psi_0^2} \psi_{+1} D_1 + \dots = 0 \\ \dots &- \frac{1}{\psi_0^2} \psi_{-2} D_{-1} - \frac{1}{\psi_0^2} \psi_{-1} D_0 + \frac{\frac{k^2}{\psi_0} - (\vec{u} k_0 + \vec{b})^2}{k^2} D_1 + \dots = 0 \end{aligned}$$

La condition de convergence des D_m est que le déterminant des coefficients de ces équations soit nul¹⁾:

$$\begin{vmatrix} \frac{\frac{k^2}{\psi_0} - (\vec{u} k_0 - \vec{b})^2}{k^2} & \psi_1 & \psi_2 & \dots \\ \psi_{-1} & \frac{\frac{k^2}{\psi_0} - (\vec{u} k_0)^2}{k^2} & \psi_1 & \dots \\ \psi_{-2} & \psi_{-1} & \frac{\frac{k^2}{\psi_0} - (\vec{u} k_0 + \vec{b})^2}{k^2} & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

¹⁾ La convergence vers zéro des suites D_m pour $m \rightarrow \pm \infty$ s'exprime sous la forme suivante: étant donné ε arbitrairement petit, il existe un nombre N_1

Cette équation a une infinité de racines, il y a donc dans toute direction \vec{u} une infinité de vecteurs $\vec{u} k_0^r$ qui font converger les D_m du système (9). On pourrait arriver ainsi à la solution générale de l'équation (1), mais au lieu de résoudre le problème des valeurs propres pour des \vec{k}_0 qui soient tous dans la même direction, nous allons le faire pour des \vec{k}_0 qui aient tous la même composante selon la direction \vec{b} des ultra-sons, car sous cette forme la solution sera plus commode lorsque nous aurons à introduire les conditions aux limites. Nous décomposons \vec{k}_0 en

$$\vec{k}_0 = \vec{b} \xi + \vec{n} \varrho \quad (11)$$

où \vec{n} est un vecteur unité perpendiculaire à \vec{b} dans le plan qui contient \vec{k}_0 et \vec{b} . Si on pose

$$\theta_{s-m} = -\frac{1}{\psi_0^2} \frac{k^2}{b^2} \psi_{s-m}; \quad c = \frac{\frac{k^2}{\psi_0} - \varrho^2}{b^2} \quad (12)$$

les équations (8) deviennent

$$\sum_m \theta_{s-m} D_m + [c - (\xi + s)^2] D_s = 0 \quad (13)$$

la condition de convergence (10) étant maintenant

$$\delta(\xi, \theta_n) = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & c - (\xi - 1)^2 & \theta_{+1} & \theta_{+2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \theta_{-1} & c - \xi^2 & \theta_{+1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \theta_{-2} & \theta_{-1} & c - (\xi + 1)^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

Cette équation a une infinité de racines $c(\xi, \theta_n)$, nous appelons c^s la racine qui tend vers la valeur $(\xi + s)^2$ lorsque les θ_n tendent vers zéro.

Si on résoud les équations (13) avec la valeur c^s , on obtient une suite convergente de D_m^s , qu'on peut tous exprimer au moyen de l'un d'eux

$$D_m^s = \alpha_m^s D_s; \quad \alpha_m^s = \alpha_m^s (c^s, \theta_n). \quad (15)$$

tel qu'on ait $|D_m| < \varepsilon$ pourvu que $m > N_1$, et de même un nombre N_2 tel que $|D_{-m}| < \varepsilon$ pourvu que $m > N_2$. Soit M le plus grand des nombres N_1 et N_2 , on a encore $|D_m| < \varepsilon$ pourvu que $|m| > M$.

On exprime d'abord une condition approximative de convergence pour la suite des D_m , en négligeant les D_m pour $|m| > M$; le système (9) devient alors un système d'équations linéaires homogènes, la condition de convergence s'exprime par le fait que le déterminant des coefficients doit être nul. Cette condition approximative devient la condition exacte si les grandeurs ε qu'on néglige sont nulles; c'est le cas lorsque $M \rightarrow \infty$, la convergence des suites (9) est donc assurée si le déterminant infini des coefficients s'annule, ce qu'exprime l'équation (10).

D'autre part les équations (12) associent à chaque racine $c^s(\xi, \theta_n)$ une valeur propre ϱ^s ; pour une valeur donnée de ξ , la composante ϱ doit donc prendre des valeurs propres pour que la suite des D_m converge. A chacune de ces valeurs ϱ^s correspond une solution indépendante des équations de MAXWELL pour une des polarisations, c'est une somme d'ondes de la forme (3)

$$\sum_m D_m^s e^{i(\tilde{k}_m^s \cdot \vec{r} - \omega_m t)} = D_s^s \sum_m \alpha_m^s e^{i(\tilde{k}_m^s \cdot \vec{r} - \omega_m t)} \quad (16)$$

dans laquelle les \tilde{k}_m^s sont donnés par les équations (10) et (5a): $\tilde{k}_m^s = \tilde{b}(\xi + m) + \tilde{n}\varrho^s$; et ω_m par les équations (5b).

La solution générale pour une des polarisations est une somme de ces solutions particulières, pour toutes les valeurs de s et de ξ . Chacune des solutions particulières est multipliée par un facteur arbitraire D_s^s et possède une constante de phase arbitraire. Les conditions aux limites (§ 4) déterminent le problème, mais avant de les introduire, il peut être utile de donner une interprétation géométrique de la double infinité des ondes \tilde{k}_m^s . Cette interprétation utilise les notions de réseau réciproque et de surface de dispersion.

§ 3. Réseau réciproque, surface de dispersion, sphère de propagation.

On représente géométriquement une onde plane par un vecteur d'onde qui est tracé dans la direction de propagation avec une longueur inversément proportionnelle à la longueur d'onde; ce sont ces vecteurs qui figurent dans les développements de FOURIER (2) et (3). L'onde ultra-sonore est représentée par les vecteurs $m\tilde{b}$, l'onde lumineuse par les vecteurs \tilde{k}_m . Les vecteurs $m\tilde{b}$ sont connus, mais on ne connaît pas a priori les vecteurs \tilde{k}_m , on sait seulement qu'ils doivent satisfaire aux équations fondamentales. Ces équations se prêtent à une interprétation géométrique, que nous donnerons successivement pour les équations (5) et (8).

Les équations (5a) s'interprètent dans le réseau réciproque. Si on considère l'onde ultra-sonore comme immobile, figée à un instant donné, elle présente une structure périodique dans une dimension, c'est un réseau unidimensionnel. Le réseau réciproque de l'onde ultrasonore est défini comme le réseau réciproque d'un cristal; il se réduit à une série de points équidistants sur une droite, la translation d'un point au suivant étant définie par le vecteur \tilde{b} . Les vecteurs du réseau réciproque sont les vecteurs $m\tilde{b}$ qui en réunissent les points.

Les équations (5a) expriment le fait que tout vecteur obtenu par addition d'un des vecteurs du réseau réciproque à un vecteur d'onde existant est un vecteur d'onde possible, l'interprétation géométrique en est donnée par la fig. 1.

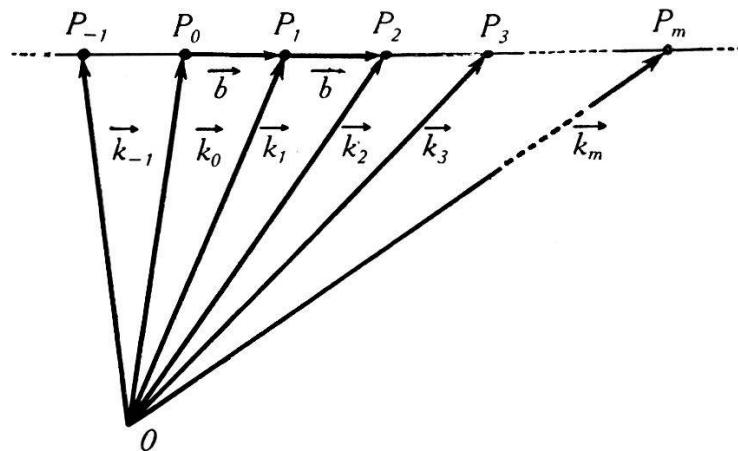


Fig. 1. Réseau réciproque statique.

On construit le réseau réciproque statique en portant bout à bout des vecteurs \vec{b} égaux. On peut numérotter les points du réseau réciproque à partir de l'un d'eux P_0 choisi arbitrairement comme origine, de telle façon que le vecteur $m\vec{b}$ relie P_0 à P_m . Si on trace un vecteur d'onde existant, \vec{k}_0 , avec l'extrémité en P_0 , tout vecteur qui a la même origine 0 et se termine sur un des points P_m du réseau est un des vecteurs \vec{k}_m associés à \vec{k}_0 . Tous ces vecteurs sont dans le plan qui contient \vec{k}_0 et \vec{b} .

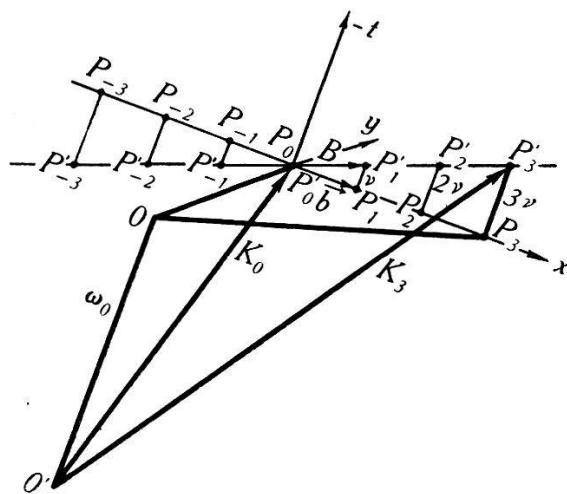


Fig. 2. Réseau réciproque cinétique.

On construit le réseau réciproque cinétique en portant bout à bout des quadrivecteurs B égaux; on peut aussi en construire les points P_m' en faisant subir aux points P_m du réseau statique une translation $m\nu$ selon $-t$. La représentation géométrique du réseau cinétique est particulièrement simple si on prend comme plan des $x y$ le plan qui contient \vec{k}_0 et \vec{b} , avec $0x$ dans la direction \vec{b} des ultrasons; alors $(K_m)_z = B_z = 0$ et les quadrivecteurs sont contenus dans l'espace à trois dimensions $(x, y, -t)$. Si K_0 est un quadrivecteur existant dont l'extrémité est en P_0' , tout quadrivecteur qui a la même origine $0'$ et se termine sur un des points P_m' du réseau cinétique est un des quadrivecteurs K_m associés à K_0 .

Si on veut interpréter ensemble les équations (5a) et (5b), il faut définir les vecteurs d'onde dans les quatre dimensions $x, y, z, -t$. Ces « quadrivecteurs » K_m et B ont les composantes

$$(K_m)_{x, y, z} = (k_m)_{x, y, z}; \quad (K_m)_{-t} = \omega_m \\ B_{x, y, z} = b_{x, y, z}; \quad B_{-t} = v.$$

Les équations (5) deviennent alors

$$K_m = K_0 + m B. \quad (5')$$

Nous appellerons par analogie les quadrivecteurs $m B$ quadrivecteurs du réseau réciproque cinétique.

Nous savons maintenant comment on peut construire les ondes associées à un vecteur \tilde{k}_0 donné. Pour trouver quels sont les vecteurs \tilde{k}_0 possibles dans le milieu, il faut résoudre les équations (8). Nous avons montré au § 2 que les \tilde{k}_0 possibles forment une suite discrète. Nous allons voir qu'on peut prévoir le même résultat au moyen d'une construction géométrique que nous appellerons la surface de dispersion.

Considérons, dans le cas où l'onde sonore d'intensité très faible produit une perturbation négligeable, toutes les directions dans lesquelles peut se propager une onde dont le vecteur \tilde{k}_m aboutit au point P_m du réseau réciproque. Le lieu des origines de ce vecteur est évidemment une sphère de rayon $k\sqrt{\varkappa_0}$ ayant P_m pour centre. Supposons cette sphère tracée autour de chaque point du réseau : l'ensemble des sphères qu'on obtient ainsi forme une surface représentant géométriquement la propagation des ondes possibles dans le milieu. C'est cette surface que nous appelons surface de dispersion du milieu pour la fréquence $\omega = kc$. La fig. 3 montre comment la surface de dispersion permet de construire les vecteurs \tilde{k}_0 possibles dans la direction \tilde{u} . Ils forment une suite discrète, ce que nous avions déjà reconnu algèbriquement au § 2.

On arrive à une interprétation géométrique de la double infinité d'ondes \tilde{k}_m^s possibles dans le milieu en construisant au moyen du réseau réciproque les ondes associées aux ondes \tilde{k}_0^s .

Il est commode d'appeler couche s l'ensemble des vecteurs dont l'origine commune est en 0^s et qui se terminent sur tous les points du réseau ; et ordre m l'ensemble des vecteurs issus de toutes les origines 0^s qui aboutissent au même point P_m du réseau. Nous avons vu que tous les vecteurs d'une couche sont dans un même plan, il en est de même de tous les vecteurs d'un ordre.

Nous n'avons tracé la surface de dispersion que dans le cas où les ultra-sons sont très peu intenses ($\theta_n \sim 0$). Pour étudier la déformation des sphères lorsque les θ_n prennent des valeurs plus grandes, il est nécessaire de chercher la solution du problème des valeurs propres (§ 2); le plus simple est de tracer la surface

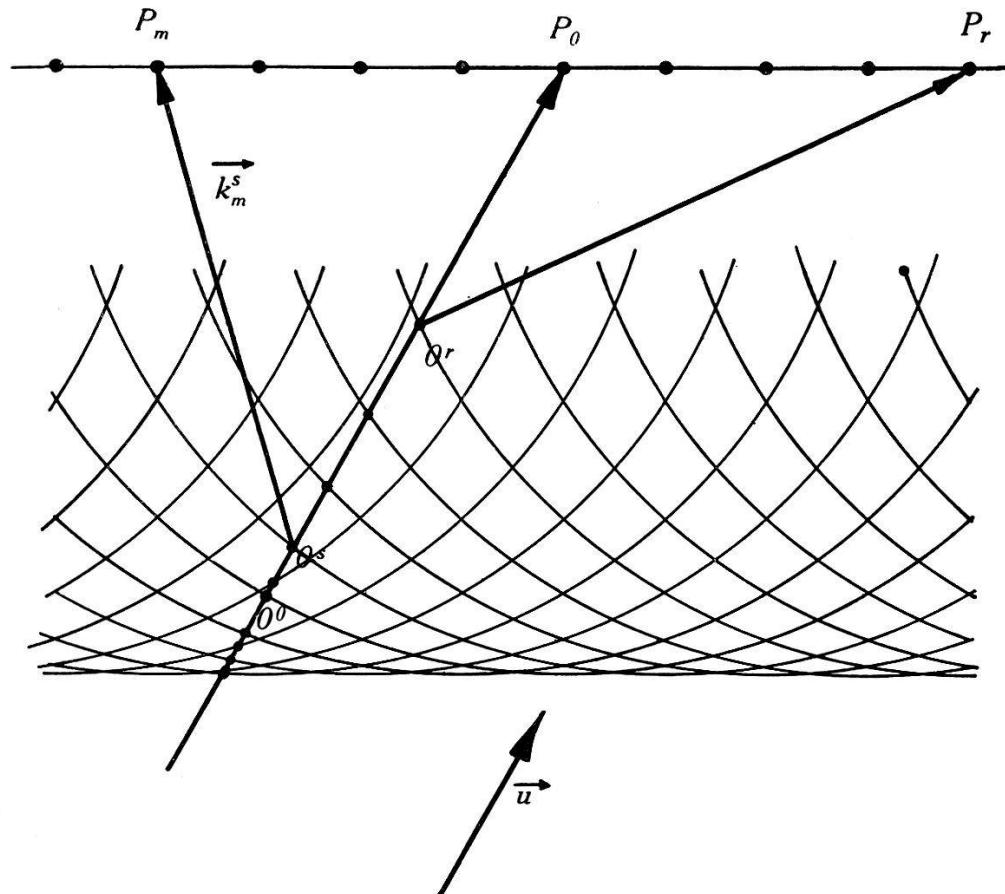


Fig. 3. Surface de dispersion d'un milieu faiblement perturbé.

Pour trouver les vecteurs \vec{k}_0 possibles dans la direction \vec{u} , on trace par P_0 une droite parallèle à \vec{u} , cette droite rencontre la surface de dispersion aux points $0^0, \dots 0^r, \dots$; 0^r étant le point d'intersection avec la sphère centrée en P_r . $\overrightarrow{0^0 P_0}$ est un vecteur d'onde possible que nous désignerons par \vec{k}_0^0 . Nous allons montrer que $\overrightarrow{0^r P_0}$ est aussi un vecteur possible. En effet $\overrightarrow{0^r P_r}$ est par construction un vecteur possible, nous savons donc qu'il est accompagné d'une série de vecteurs qui ont la même origine 0^r et se terminent sur chaque point du réseau réciproque. $\overrightarrow{0^r P_0}$ est un de ces vecteurs, c'est donc un vecteur possible, nous le désignerons par \vec{k}_0^r . Il y a donc une infinité d'ondes qui peuvent se propager dans toute direction \vec{u} .

Nous avons vu (fig. 1) qu'on peut construire géométriquement les ondes \vec{k}_m qui accompagnent une onde \vec{k}_0 qui se propage dans le milieu. Supposons que toutes les ondes \vec{k}_0^s possibles dans la direction \vec{u} existent à l'intérieur du milieu stratifié. Alors tout vecteur $\overrightarrow{0^s P_m}$ est le vecteur \vec{k}_m^s d'une des ondes adjointes aux \vec{k}_0^s . On vérifie facilement que la numérotation des ondes telle que nous la définissons ici est identique à celle que nous avons définie au § 2.

dans un système de coordonnées cylindriques $(\varrho, \varphi, b\xi)$ (fig. 4). On déduit de (12) que l'équation de la surface de dispersion est, dans ces coordonnées

$$\varrho^s = \sqrt{\frac{k^2}{\psi_0} - b^2 c^s}; \quad c^s = c^s(\xi, \theta_n). \quad (17)$$

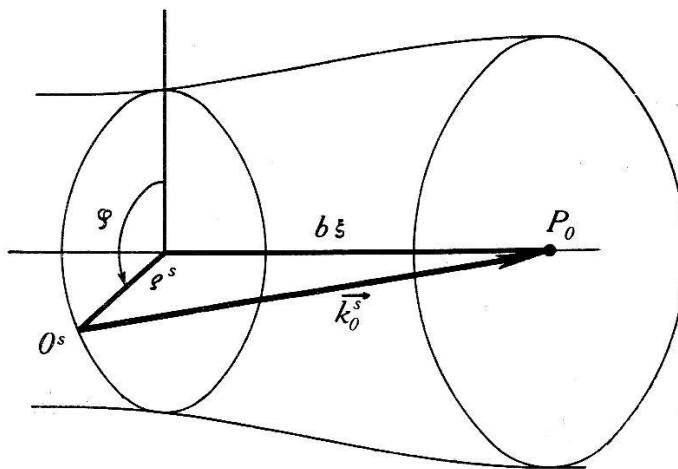


Fig. 4. Coordonnées cylindriques pour étudier la surface de dispersion.

Lorsque les θ_n prennent des valeurs non nulles, on peut définir la surface de dispersion comme lieu, lorsque \vec{u} varie, des origines O^s des vecteurs \vec{k}_0^s possibles dans la direction \vec{u} . Pour étudier la surface de dispersion, on décompose \vec{k}_0^s en $\vec{b}\xi + \vec{n}\varrho^s$; par raison de symétrie ϱ^s a la même valeur quelle que soit la direction \vec{n} perpendiculaire à \vec{b} , autrement dit la surface de dispersion est une surface de révolution autour de l'axe du réseau réciproque, et l'équation ne dépend pas de l'azimut φ .

D'après l'équation (15) la surface de dispersion a les mêmes propriétés de symétrie que l'ensemble des racines c^s du déterminant (14). On voit que celui-ci reprend la même forme si ξ augmente d'une unité ou change de signe: $\delta(\xi) = \delta(\xi + n)$, n entier; $\delta(\xi) = \delta(-\xi)$. Ces deux propriétés montrent que la surface de dispersion est périodique en ξ avec une période égale à l'unité, et qu'elle admet les plans $\xi = n/2$ comme plans de symétrie.

Il y a une difficulté dans l'emploi des équations (17), c'est que la numérotation des racines du déterminant telle que nous l'avons prévue n'est pas possible pour $\xi = n/2$. Celà provient du fait que dans la limite $\theta_n = 0$, les racines c_s sont deux à deux confondues (ou, dans la représentation géométrique, que le point O^s est commun à deux sphères). Cette dégénérescence disparaît pour $\theta_n \neq 0$, on peut en effet écrire (14), pour $\xi = n/2$, comme produit de deux déterminants dont les racines a^s et b^s ne se confondent que pour $\theta_n = 0$. Nous reverrons cette décomposition dans un cas particulier.

La difficulté signalée n'est pas gênante si on définit comme nappe de la surface de dispersion, non pas les éléments qui donnent une sphère à la limite $\theta_n \rightarrow 0$, mais ceux qui se réduisent, dans cette limite aux surfaces en festons comprises entre les cylindres

$$\varrho = \sqrt{\frac{k^2}{\psi_0} - \left(\frac{n}{2} + m\right)^2 b^2} \quad \text{et} \quad \varrho = \sqrt{\frac{k^2}{\psi_0} - \left(\frac{n}{2} + m + 1\right)^2 b^2}.$$

Ce sont ces nappes qui ont les propriétés de symétrie. On les trace en construisant la surface de dispersion au moyen des équations (17) pour $0 < \xi < \frac{1}{2}$; les propriétés de symétrie permettent de les construire ensuite pour toute valeur de ξ .

La surface de dispersion est une interprétation géométrique des valeurs propres des équations (8) ou (13), mais il est aussi possible de prévoir les propriétés de convergence des D_m au moyen

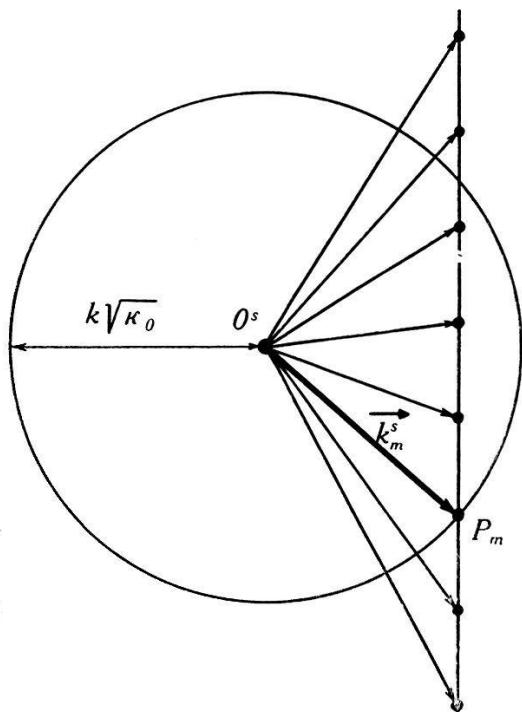


Fig. 5a.

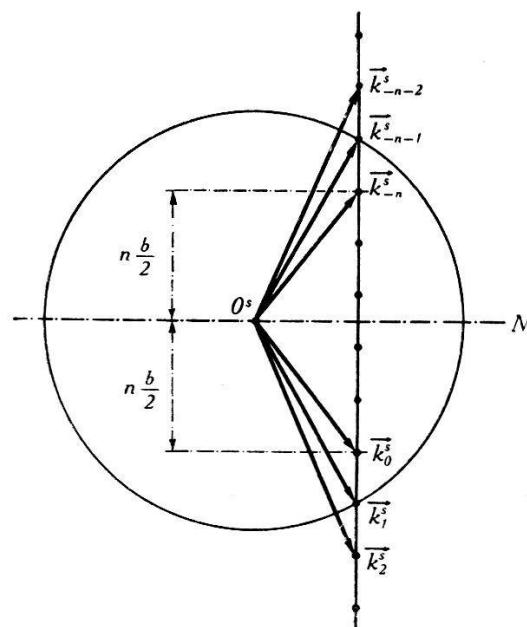


Fig. 5b.

Fig. 5a. Sphère de propagation.

Pour savoir, parmi les ondes de la couche s , lesquelles sont intenses, on en trace les vecteurs \vec{k}_m^s avec une origine commune O^s , ils se terminent sur les points du réseau réciproque, puis on trace avec O^s comme centre une sphère de rayon $k\sqrt{\kappa_0}$ (sphère de propagation). Si cette sphère touche un des points P_m du réseau réciproque ou en est très voisine, l'onde \vec{k}_m^s qui se propage dans la direction de ce point a une grande intensité par rapport aux autres ondes de la couche. L'inverse de la distance entre la sphère et un point P_m du réseau est une mesure de l'intensité de l'onde \vec{k}_m^s . La convergence des amplitudes de la suite D_m^s est assurée parce que cette distance augmente de plus en plus lorsque m croît indéfiniment.

Fig. 5b. Réflexion de BRAGG.

Dans le cas où la composante selon \vec{b} du vecteur \vec{k}_0^s est un multiple entier de $b/2$ ($\xi = n/2$), la construction de la sphère de propagation est symétrique de part et d'autre du plan N , normal au réseau réciproque, qui contient O^s . Ceci montre que l'amplitude des ondes de la couche s sera symétrique aussi: $D_m^s = D_{-n-m}^s$.

d'une construction analogue, nous le montrerons sur les équations (13). Dans la limite $\theta_n \rightarrow 0$ les c^s sont voisins de la valeur $(\xi + s)^2$ et tous les coefficients $[c^s - (\xi + r)^2]$ sont de l'ordre de l'unité, sauf le coefficient de D_s^s , $[c^s - (\xi + s)^2]$, qui est très petit. Les équations (13) sont donc satisfaites par une suite $D_m^s = 0$ pour $m \neq s$; $D_s^s \neq 0$.

La seule onde intense dans la couche s est donc celle dont le vecteur \tilde{k}_s^s a la longueur $k\sqrt{\varkappa_0}$ qu'il aurait dans le milieu immobile. Lorsque les θ_n prennent des valeurs plus grandes, la suite des D_m^s admet des valeurs non nulles même pour $m \neq s$, mais les ondes ont une amplitude d'autant plus grande que leur vecteur d'onde a une valeur plus proche de $k\sqrt{\varkappa_0}$. Cette remarque justifie la construction de la fig. 5a, construction qu'EWALD appelle sphère de propagation. Cette construction permet donc de prévoir qualitativement quelles seront les ondes intenses parmi celles d'une couche.

La construction de la sphère de propagation fait prévoir des phénomènes importants pour $\xi = n/2$, en effet elle montre qu'il y a dans chaque couche deux groupes d'ondes qui ont deux à deux les mêmes amplitudes (fig. 5b); ce fait correspond à la réflexion de Bragg des ondes lumineuses sur les ondes ultra-sonores.

Nous avons ainsi une représentation géométrique complète des ondes \tilde{k}_m^s : les surfaces de dispersion permettent de trouver les \tilde{k}_0^s répondant aux conditions aux limites, le réseau réciproque donne la direction et la grandeur des vecteurs d'onde \tilde{k}_m^s associés aux vecteurs ainsi trouvés, la sphère de propagation indique, dans chaque couche, les ordres intenses.

Il faut maintenant introduire les conditions aux limites de façon à déterminer quels \tilde{k}_0 on doit choisir et quels rapports d'amplitude existent entre les différentes couches.

§ 4. Conditions aux limites.

Pour introduire les conditions aux limites, il est commode de définir un système d'axes rectangulaires x, y, z ; $0x$ étant dans la direction \tilde{b} . Nous considérerons, dans un milieu infini de constante diélectrique \varkappa_0 , une région stratifiée par l'onde ultra-sonore, comprise entre les deux plans $y = 0$ et $y = d$; ces limites sont pratiquement celles d'une cuve à faces parallèles de très grande surface, d'épaisseur d , traversée par une onde ultra-sonore plane qui se déplace parallèlement aux faces (fig. 6). Une onde lumineuse plane $D^e e^{i(\tilde{k}^e \cdot \tilde{r} - \omega t)}$ entre dans la région stratifiée par la face d'incidence $y = 0$, elle s'y diffracte et on observe au-delà du plan d'émergence ($y > d$) des ondes planes diffractées $D_m e^{i(\tilde{k}_m \cdot \tilde{r} - \omega_m t)}$, dont l'intensité est J_m .

Lorsqu'une onde passe d'un milieu dans un autre, la composante des vecteurs d'onde dans le plan de séparation est continue, il faut donc qu'il existe dans la région stratifiée des ondes dont

le vecteur \vec{k} a la même composante que le vecteur de l'onde extérieure dans le plan d'entrée $y = 0$: nous définirons comme ordre zéro l'ordre formé par toutes les ondes intérieures possibles qui ont cette propriété. Soient $k_x^e k_y^e k_z^e$ les composantes du vecteur de l'onde incidente, $b\xi, \eta, \zeta$ celles d'un des vecteurs de l'ordre zéro. Le choix de ξ et de ζ est fixé par la condition de continuité de la composante de \vec{k} dans le plan $y = 0$, $b\xi = k_x^e, \zeta = k_z^e$ (fig. 6), c'est donc la composante η qui prendra des valeurs propres η^s . Tous les vecteurs de l'ordre zéro ont la même composante $b\xi$ dans

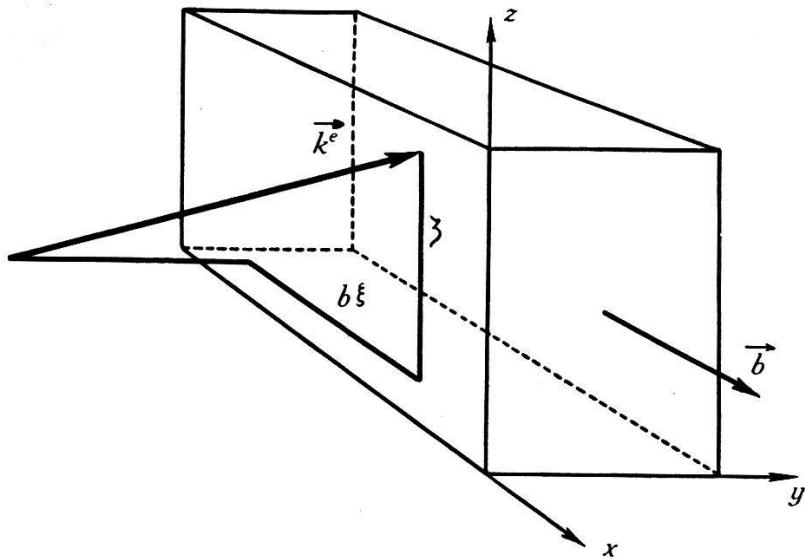


Fig. 6. Limites du milieu stratifié.

la direction \vec{b} , ils ont donc une composante ϱ^s normale à b (§ 2), et on peut calculer η^s au moyen des équations (12) en posant $(\varrho^s)^2 = (\eta^s)^2 + \zeta^2$. On trouve

$$\eta^s = \sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} = \sqrt{\left(\frac{k^2}{\psi_0} - \zeta^2\right) - c^s b^2}. \quad (18)$$

Chacun des vecteurs \vec{k}_0^s de l'ordre zéro est accompagné de vecteurs \vec{k}_m^s formant une couche s .

La condition de continuité des composantes tangentielles des vecteurs d'onde doit être satisfaite aussi sur la face de sortie $y = d$. Il doit donc exister à l'extérieur ($x > d$) des ondes dont le vecteur \vec{k} a les mêmes composantes $b(\xi + m), \zeta$, selon $0x$ et $0z$ que les ondes intérieures \vec{k}_m^s . Cette condition montre qu'à chaque ordre m correspond une seule onde plane diffractée dont le vecteur est \vec{k}_m . Le nom d'ordre donné aux ondes intérieures dont les vecteurs se terminent sur le même point du réseau réciproque se trouve ainsi justifié: les ondes de l'ordre m se réunissent à la sortie

pour donner une onde diffractée d'ordre m au sens habituel. Cette onde a la fréquence ω_m définie par les équations (5 b), la direction

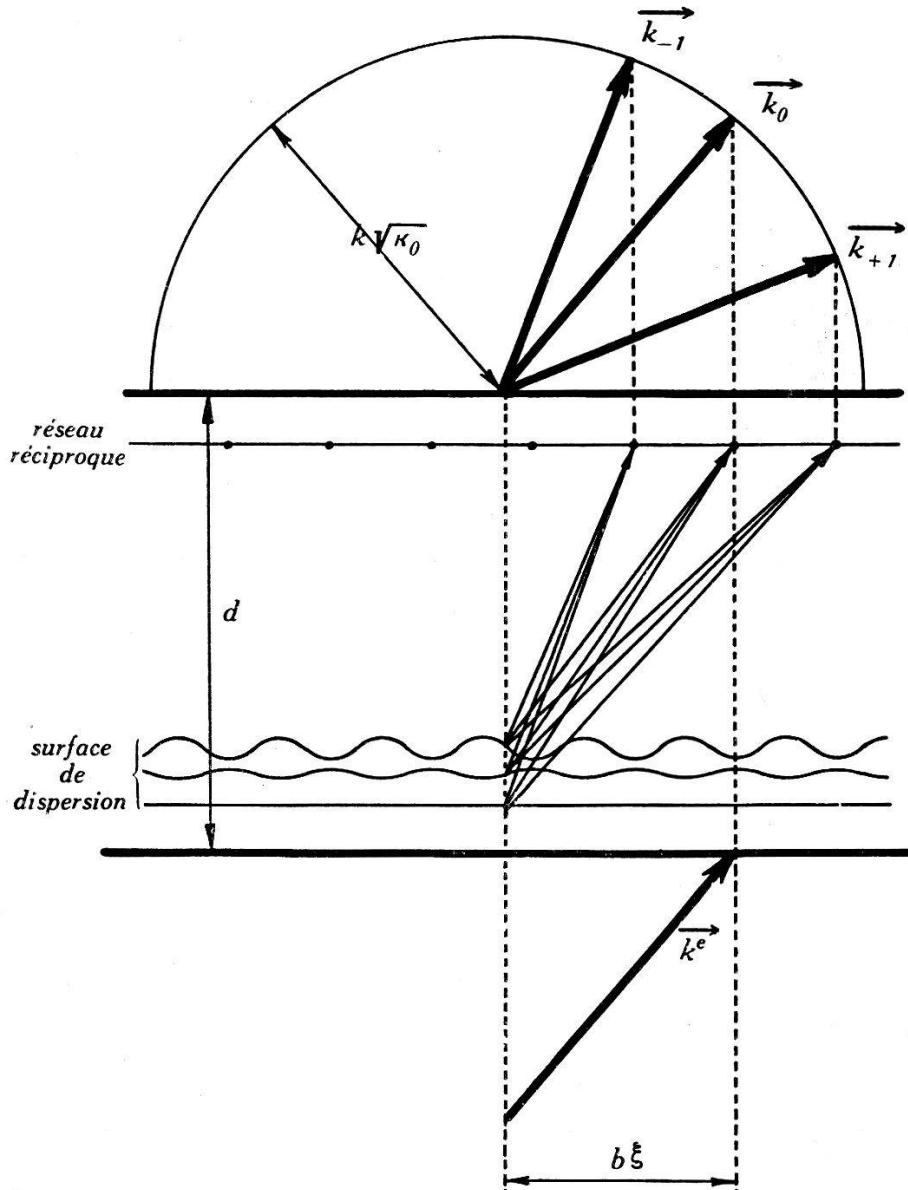


Fig. 7. Conditions aux limites pour les vecteurs \vec{k} .

On cherche à l'entrée, au moyen de la surface de dispersion tous les vecteurs d'onde possibles à l'intérieur avec la même composante tangentielle $b\xi$ dans la face d'entrée que le vecteur \vec{k}^e de l'onde incidente.

A la sortie on fait correspondre à chaque ordre intérieur m une onde diffractée d'ordre m dont le vecteur $|\vec{k}_m| = k\sqrt{\kappa_0}$ a la même composante tangentielle dans le plan de sortie que les vecteurs \vec{k}_m^s de l'ordre m .

La figure représente ces conditions dans le cas où le plan d'incidence contient le réseau réciproque; la théorie donnée dans le texte n'est pas soumise à cette restriction.

en est donnée par la construction de la fig. 7, on trouve évidemment les mêmes directions que pour les ondes diffractées par un réseau de constante $\Lambda = 2\pi/b$.

Les conditions aux limites devraient s'écrire pour les vecteurs électriques et magnétiques, elles associent à chaque onde diffractée une onde réfléchie. Comme nous avons supposé que les fluctuations de la constante diélectrique sont très petites quand on traverse les plans limites $y = 0$ et $y = d$, nous négligerons la réflexion, et pour la même raison nous admettrons que \vec{E} est parallèle à \vec{D} . Les conditions à l'entrée s'écrivent alors

$$\sum_s \alpha_m^s D_s^s = \begin{cases} D^e & (m = 0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases} \quad (19)$$

Ces équations déterminent l'amplitude D_s^s de chaque couche.

Nous avons vu au moyen de la construction de la sphère de propagation que l'amplitude maximum dans la couche s est voisine de D_s^s . Si donc N est assez grand, on pourra négliger l'ordre zéro de la couche N , D_0^N , devant D_0^0 , et de même D_0^{-M} devant D_0^0 . Le système (19) se décompose en

$$\begin{aligned} \sum_{s=-M-1}^{N-1} \alpha_0^s D_s^s &= D^e & \sum_s \alpha_m^s D_s^s &= 0 \quad (m \neq 0) \\ \sum_{s=-M}^{-\infty} \alpha_0^s D_s^s + \sum_{s=N}^{\infty} \alpha_0^s D_s^s &= 0 \end{aligned}$$

Ce système est satisfait par une suite de D_s^s différents de zéro seulement pour $-M < s < N$. Cette remarque montre que la convergence des D_m^s dans les couches entraîne, en vertu de la forme des conditions aux limites, la convergence des amplitudes maxima D_s^s de chaque couche.

La solution des équations de MAXWELL dans le milieu stratifié est une somme de solutions de la forme (16) pour toutes les valeurs de s , elle s'écrit ici

$$\begin{aligned} &\sum_s D_s^s \sum_m \alpha_m^s e^{i(b\xi x + \eta^s y + \zeta z - \omega_m t)} \\ &= e^{i(b\xi x + \zeta z)} \sum_m e^{-i\omega_m t} \sum_s \alpha_m^s D_s^s e^{i\eta^s y}. \end{aligned}$$

Les conditions à la sortie expriment que l'amplitude D_m de l'onde extérieure d'ordre m est égale à la somme des amplitudes des ondes intérieures du même ordre m sur le plan $y = d$. Cette condition s'écrit

$$D_m = e^{i(b\xi x + \zeta z - \omega_m t)} \sum_s \alpha_m^s D_s^s e^{i\eta^s d}.$$

L'intensité diffractée dans l'ordre m est proportionnelle au carré de D_m

$$J_m = |D_m|^2 = \left| \sum_s \alpha_m^s D_s^s e^{i \eta^s d} \right|^2.$$

On peut transformer l'exposant en tenant compte de (18)

$$J_m = \left| \sum_s \alpha_m^s D_s^s e^{i \sqrt{\left(\frac{k^2}{\psi_0} - \zeta^2\right) - c^s b^2 d}} \right|^2.$$

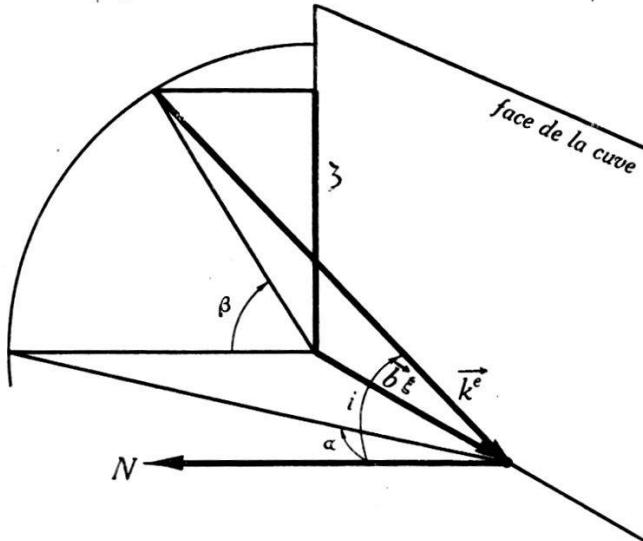


Fig. 8. Angle d'incidence.

On décompose l'angle d'incidence i en deux angles α et β . α est le complément de l'angle compris entre le vecteur \vec{k}^e ($|\vec{k}^e| = k\sqrt{\psi_0}$) de l'onde incidente et l'axe \vec{b} du réseau réciproque; β est l'angle dièdre entre le plan qui conteint \vec{b} et \vec{k}^e et le plan qui contient \vec{b} et la normale \vec{N} à la face d'entrée. On a les relations suivantes

$$b\xi = k^e \sin \alpha; \quad \zeta = k^e \cos \alpha \sin \beta$$

et si α est de l'ordre b/k ou plus petit

$$b\xi = k^e \alpha; \quad \zeta = k^e \sin \beta.$$

Si on introduit les deux angles α et β qui caractérisent la direction du vecteur \vec{k}^e de l'onde incidente (fig. 8), cette équation devient

$$J_m = \left| \sum_s \alpha_m^s D_s^s e^{i \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) - c^s b^2 d}} \right|^2. \quad (20)$$

Lorsque l'angle α est petit ($\alpha^2 \ll 1$), on peut écrire $\cos \alpha = 1$, et développer la racine en série. On trouve ainsi

$$J_m = \left| \sum_s \alpha_m^s D_s^s e^{i L(\beta, d) c^s} \right|^2 \quad (21)$$

avec

$$L(\beta, d) = \frac{1}{2} \frac{b^2 d}{\frac{k}{\sqrt{\psi_0}} \cos \beta} \quad (22)$$

Ce développement est valable pourvu que $\cos \beta \gg b/k$.

Nous avons ainsi l'expression cherchée de l'intensité diffractée dans l'ordre m en fonction des données expérimentales. Cette expression dépend, par l'intermédiaire des grandeurs $L(\beta, d)$, $c^s(\xi, \theta_n)$ et $\alpha_m^s(c^s, \theta_n)$, des paramètres β et ξ qui caractérisent la direction de l'onde incidente, des θ_n qui sont déterminés par l'intensité et la forme de l'onde ultra-sonore, de l'épaisseur d du faisceau ultra-sonore traversé. Les D_s^s sont proportionnels à l'amplitude D^e de l'onde incidente.

III.

§ 5. Réseau sinusoïdal.

La théorie développée dans la deuxième partie de ce travail est générale, elle permet de calculer les phénomènes de diffraction dans tous les cas particuliers. Nous allons l'appliquer maintenant au cas que nous avons déjà étudié partiellement dans la première partie¹⁾, où le réseau est sinusoïdal, et où donc la constante diélectrique a la forme

$$\varkappa = \varkappa_0 + 2 \varkappa_1 \cos(bx - vt). \quad (23)$$

Dans les conditions expérimentales habituelles les ondes ultra-sonores produisent bien une perturbation de cette forme. Comme \varkappa_1 est très petit, l'inverse de \varkappa s'écrit

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{\varkappa_0} - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_0^2} \cos(bx - vt).$$

On trouve en identifiant cette expression avec le développement (3) de la deuxième partie

$$\frac{1}{\varkappa_0} = \psi_0; \quad \psi_{+1} = \psi_{-1} = \psi_1 = -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0^2},$$

les autres ψ sont nuls.

Les deux polarisations D' et D'' satisfont aux mêmes équations, en effet les définitions (7) de ψ' et ψ'' deviennent ici

$$\psi_1'' = \psi_1; \quad \psi_1' = \psi_1 \cos \chi$$

où χ est l'angle compris entre deux vecteurs d'onde successifs dans la même couche. Cet angle est de l'ordre b/k , et en posant $\cos \chi = 1$, on fait une erreur de l'ordre b^2/k^2 , pratiquement négligeable. (Dans les conditions expérimentales habituelles ($b \sim 10^2$, $k \sim 10^5$), le

¹⁾ R. EXTERMANN et G. WANNIER, Loc. cit.

rapport b^2/k^2 est de l'ordre 10^{-6}). Les paramètres θ_m définis par les équations (12) deviennent

$$\theta_{-1} = \theta_{+1} = \theta = -\frac{k^2}{b^2} \frac{\psi_1}{\psi_0^2} = \varkappa_1 \frac{k^2}{b^2} \quad (24)$$

et les équations (13) se réduisent à

$$\theta (D_{m-1}^s + D_{m+1}^s) + [c^s - (\xi + m)^2] D_m^s = 0. \quad (25)$$

Ces équations de récurrence permettent de calculer les D_m^s lorsqu'on connaît l'un d'entre eux

$$D_m^s = \alpha_m^s D_s^s; \text{ avec } \alpha_m^s = \alpha_m^s (c^s, \theta).$$

Les valeurs propres c^s qui font converger les suites α_m^s sont les racines de l'équation

$$\delta(\xi, \theta) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \theta & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & c - (\xi - 1)^2 & \theta & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \theta & c - \xi^2 & \theta & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \theta & c - (\xi + 1)^2 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \theta & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

La forme des conditions aux limites reste la même que dans la deuxième partie (équations (19) et (21)), elles s'écrivent

$$\sum_s \alpha_m^s D_s^s = \begin{cases} D^e (m=0) \\ 0 \quad (m \neq 0) \end{cases} \quad (19)$$

pour l'entrée dans le milieu; D^e est l'amplitude de l'onde plane incidente. A la sortie, on observe des ondes planes diffractées, l'intensité de l'onde du m -ième ordre est

$$J_m = \left| \sum_s \alpha_m^s D_s^s e^{i L(\zeta, d) c^s} \right|^2 \quad (21)$$

avec

$$L(\zeta, d) = \frac{1}{2} \frac{b^2 d}{\sqrt{k^2 \varkappa_0 - \zeta^2}}.$$

Pour calculer J_m , il faut connaître les c^s , puisque les α_m^s et les D_s^s sont fonctions des c^s et de θ . Le problème se réduit donc à la recherche des racines c^s du déterminant. Nous examinerons d'abord le cas où il est possible d'exprimer analytiquement les racines c^s , en puissances de θ ; si on peut le faire, tous les termes de la somme dans l'expression (21) de J_m ont une forme analytique en puissances de θ .

§ 6. Cas analytique.

On appelle $c^s(\xi, \theta)$ la racine du déterminant (4) qui tend vers $c^s(\xi, 0) = (\xi + s)^2$ lorsque θ tend vers zéro. On peut développer cette racine en puissances de θ , on trouve

$$\begin{aligned} c^s(\xi, \theta) &= (\xi + s)^2 + \frac{2}{4(\xi + s)^2 - 1} \theta^2 + \frac{20(\xi + s)^2 + 7}{2[4(\xi + s)^2 - 1]^3 [(\xi + s)^2 - 1]} \theta^4 \\ &+ \frac{4[144(\xi + s)^6 + 88(\xi + s)^4 - 203(\xi + s)^2 - 29]}{[4(\xi + s)^2 - 1]^5 [(\xi + s)^2 - 1]^2 [4(\xi + s)^2 - 9]} \theta^6 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Les premiers termes de ce développement montrent qu'il n'est pas valable pour $(\xi + s) = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$; en général il n'est valable que pour $\xi \neq n/2$. On retrouve ici l'impossibilité déjà signalée de numérotter de la même manière les racines des déterminants symétriques ($\xi = n/2$) et sans symétrie ($\xi \neq n/2$).

Le développement (27) converge pour de petites valeurs de θ , on pourrait donc faire l'étude analytique de la diffraction dans ce cas, mais les phénomènes de diffraction ne sont pas intéressants lorsque θ , c'est-à-dire l'intensité de l'onde ultra-sonore, a une petite valeur. La convergence de (27) a cependant lieu même pour de grandes valeurs de θ , pourvu que $(\xi + s) > \theta$; on pourrait donc étudier analytiquement la diffraction pour des incidences très obliques ($\xi \gg \theta$), nous avons vu en effet que la forme des conditions aux limites réduit le nombre des couches, donc aussi des racines à considérer. Si donc ξ est assez grand, les amplitudes de toutes les couches dont il faut tenir compte se déduisent de (25) avec des racines c^s pour lesquelles le développement (27) est valable. Mais le cas de l'incidence très oblique pour le réseau sinusoïdal n'est pas intéressant non plus, parce que le phénomène de diffraction tend à disparaître lorsque l'angle d'incidence augmente: on s'en rend compte en remarquant que lorsque ξ augmente, la racine c^s tend vers la valeur $(\xi + s)^2$, or pour cette valeur le phénomène de diffraction ne se produit plus, en effet dans chaque couche s la seule amplitude non nulle est D_s^s , et les conditions à l'entrée (19) donnent $D^e = D_0^0 = D_m^m$. Il n'y a donc qu'une onde dans le milieu stratifié, et qu'une onde à la sortie.

Nous nous servirons du cas analytique pour montrer pourquoi, dans le réseau sinusoïdal, on ne trouve pas d'énergie réfléchie sur les plans de l'onde ultra-sonore lorsque l'angle d'incidence est un angle de BRAGG d'ordre élevé, bien que la construction de la sphère de propagation fasse prévoir une réflexion intense. La condition pour que l'angle d'incidence soit un angle de BRAGG est $\xi = n/2$, il faut donc étudier les racines du déterminant (26) dans le cas où il prend une forme symétrique, et où le développement (27) n'est plus valable. On peut alors écrire le déterminant (26) comme produit de deux déterminants

$$\delta(n/2, \theta) = \delta_a(n/2, \theta) \cdot \delta_b(n/2, \theta). \quad (28)$$

Les déterminants δ_a et δ_b ont la forme

$$\delta_a = \begin{vmatrix} a & 2\theta & 0 & 0 & \dots \\ \theta & a-1 & \theta & 0 & \dots \\ 0 & \theta & a-4 & \theta & \dots \\ 0 & 0 & \theta & a-9 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}; \quad \delta_b = \begin{vmatrix} a-1 & \theta & 0 & 0 & \dots \\ \theta & a-4 & \theta & 0 & \dots \\ 0 & \theta & a-9 & \theta & \dots \\ 0 & 0 & \theta & a-16 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

pour n pair, et

$$\delta_a = \begin{vmatrix} a - (\frac{1}{2})^2 + \theta & \theta & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta & a - (\frac{3}{2})^2 & \theta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \theta & a - (\frac{5}{2})^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \theta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}; \quad \delta_b = \begin{vmatrix} a - (\frac{1}{2})^2 - \theta & \theta & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta & a - (\frac{3}{2})^2 & \theta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \theta & a - (\frac{5}{2})^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \theta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

pour n impair.

L'équation $\delta_a = 0$ exprime la convergence de suites D_m^s « symétriques » ($D_{+m} = D_{-n-m}$), tandis que $\delta_b = 0$ est la condition de convergence de suites « antisymétriques » ($D_{+m} = -D_{-n-m}$). Nous désignerons par a^s les racines du déterminant δ_a et par b^s celles du déterminant δ_b ; et nous considérerons l'ensemble des racines a^s et b^s ($-n/2 \leq s < \infty$) au lieu des racines c^s ($-\infty < s < +\infty$), ainsi les deux racines $c^s(\xi = n/2, \theta)$ et $c^{-n-s}(\xi = n/2, \theta)$ qui étaient confondues à la limite $\theta = 0$ et pour lesquelles le développement (27) n'était pas valable sont remplacées par les deux racines a^s et b^s , qu'on peut développer en puissances de θ . D'après la forme des déterminants δ_a et δ_b , on peut dire que les racines les plus petites (voisines de 1; 4; 9... pour n pair) sont distinctes, tandis que les suivantes se rapprochent de plus en plus l'une de l'autre, et de fait on trouve que les $(n/2 + s)$ premiers termes du développement

$$(n/2 + s)^2 + \frac{2}{4(n/2 + s)^2 - 1} \theta^2 + \frac{20(n/2 + s)^2 + 7}{2[4(n/2 + s)^2 - 1]^3[(n/2 + s)^2 - 1]} \theta^4 \\ + \frac{[4144(n/2 + s)^6 + 88(n/2 + s)^4 - 203(n/2 + s)^2 - 29]}{[4(n/2 + s) - 1]^5[(n/2 + s)^2 - 1]^2[4(n/2 + s)^2 - 9]} \theta^6 + \dots \quad (29)$$

sont communs aux développements de a^s et de b^s . Les racines a^s et b^s sont donc confondues pourvu que $(n/2 + s)$ soit assez grand, la valeur commune est la limite de celles que donne le développement (27) pour c^s et c^{-n-s} lorsque ξ tend vers $n/2$.

Nous envisageons l'incidence sous un angle de BRAGG d'ordre n assez élevé pour que les couches qui interviennent soient caractérisées par des racines a^s et b^s pour lesquelles le développement (29) soit valable. Dans ce cas les couches symétriques et antisymétriques de même indice ont au signe près les mêmes amplitudes, et la table des amplitudes devient

	ordre $-n-1$	ordre $-n$	ordre $-n+1$	ordre -1	ordre 0	ordre $+1$
couche -1	D_{-n-1}^{-1}	D_{-n}^{-1}	D_{-n+1}^{-1}	D_{-1}^{-1}	D_0^{-1}	D_{+1}^{-1}
	$a - \text{sym.} \dots - D_{-n-1}^{-1}$	$-D_{-n}^{-1}$	$-D_{-n+1}^{-1}$	$\dots D_{-1}^{-1}$	D_0^{-1}	D_{+1}^{-1}
couche 0	D_{-n-1}^0	D_{-n}^0	D_{-n+1}^0	D_{-1}^0	D_0^0	D_{+1}^0
	$a - \text{sym.} \dots - D_{-n-1}^0$	$-D_{-n}^0$	$-D_{-n+1}^0$	$\dots D_{-1}^0$	D_0^0	D_{+1}^0
couche $+1$	D_{-n-1}^{+1}	D_{-n}^{+1}	D_{-n+1}^{+1}	D_{-1}^{+1}	D_0^{+1}	D_{+1}^{+1}
	$a - \text{sym.} \dots - D_{-n-1}^{+1}$	$-D_{-n}^{+1}$	$-D_{-n+1}^{+1}$	$\dots D_{-1}^{+1}$	D_0^{+1}	D_{+1}^{+1}

Les conditions à l'entrée donnent

$$2 \sum_s D_0^s = D^e; \quad 2 \sum_s D_m^s = 0 \quad (m \neq 0)$$

et les équations (21) montrent que l'intensité diffractée dans l'ordre $-n$ (réflexion de BRAGG) et les ordres voisins est nulle quelle que soit l'épaisseur du milieu dif-

fractant traversé. Ce résultat n'est pas en contradiction avec la construction de la sphère de propagation, dans chaque couche l'amplitude de l'ordre $-n-m$ est aussi grande que celle de l'ordre m , mais l'amplitude des deux couches s est en phase dans l'ordre $+m$, en opposition dans l'ordre $-n-m$.

Ce raisonnement est valable pourvu que n soit assez grand; pour de petites valeurs de n , les premières racines interviennent, qui sont deux à deux voisines, mais non égales, l'intensité diffractée dans l'angle de BRAGG ne sera plus identiquement nulle. Il est naturellement possible de développer ces racines en puissances de θ mais les développements qu'on obtient convergent très mal, en sorte qu'on est limité à de petites valeurs de θ .

Ainsi la méthode analytique ne se prête pas au calcul de la diffraction pour de petites valeurs de ξ , dès que les ultra-sons ont une intensité notable ($\theta \sim 1$). Il faut donc recourir à des méthodes numériques pour calculer dans ce cas les racines c^s qui permettent la construction de la surface de dispersion.

§ 7. Surface de dispersion pour $\theta = 1$.

Nous avons vu que le problème de la diffraction se ramenait entièrement au calcul des c^s ; et qu'il n'était pas possible d'en donner un développement analytique lorsque les ultra-sons ont une intensité notable ($\theta \sim 1$). Il faut donc recourir au calcul numérique. Nous l'avons fait pour une valeur $\theta = 1$, c'est un cas typique correspondant à des conditions expérimentales facilement réalisables.

A cause de la symétrie du déterminant, il suffit d'en calculer les racines pour $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$. Pour $\xi = 0$ et $\xi = \frac{1}{2}$, les racines sont les a^s et b^s définis au § 6, pour $0 < \xi < \frac{1}{2}$, ce sont les c^s . Nous avons calculé les a^s et les b^s au moyen de la méthode indiquée par INCE et perfectionnée par WANNIER¹⁾ pour le calcul des nombres caractéristiques de l'équation de MATHIEU; pour le calcul des c^s , nous avons généralisé quelque peu cette méthode. Le problème consiste à trouver des nombres c^s qui fassent converger les suites D_m^s définies par les formules de récurrence (3):

$$\begin{aligned} \theta D_{s-2} + [c^s - (\xi + s - 1)^2] D_{s-1} + \theta D_s &= 0 \\ (\dagger) \quad \theta D_{s-1} + [c^s - (\xi + s)^2] D_s + \theta D_{s+1} &= 0 \\ \theta D_s + [c^s - (\xi + s + 1)^2] D_{s+1} + \theta D_{s+2} &= 0 \end{aligned}$$

Nous cherchons en particulier un nombre c^s voisin de $(\xi + s)^2$. Pour cela nous écrivons l'équation (\dagger) sous la forme

$$c^s = (\xi + s)^2 - \theta \left(\frac{D_{s-1}}{D_s} + \frac{D_{s+1}}{D_s} \right) = (\xi + s)^2 - \varepsilon_{s-1} - \delta_{s+1} \quad (30)$$

¹⁾ G. H. WANNIER, Beitrag zur numerischen Berechnung der Mathieuschen Funktionen, à paraître aux Commentarii Mathematici Helvetici.

où

$$\varepsilon_{s-1} = \theta \frac{D_{s-1}}{D_s} ; \quad \delta_{s+1} = \theta \frac{D_{s+1}}{D_s} .$$

Il est maintenant possible de calculer ε_{s-1} et δ_{s+1} au moyen des équations de récurrence sans faire usage de l'équation (†), on trouve

$$\varepsilon_{s-1} = \frac{\theta^2}{(\xi+r-1)^2 - c^s} - \frac{\theta^2}{(\xi+r-2)^2 - c^s} \dots ;$$

$$\delta_{s+1} = \frac{\theta^2}{(\xi+r+1)^2 - c^s} - \frac{\theta^2}{(\xi+r+2)^2 - c^s} \dots$$

La condition de convergence de la suite des D_m (§ 2) nous permet ici de négliger les δ_m pour $m > N_1$ et les ε_m pour $m < -N_2$. Il en résulte que les deux fractions continues ont pratiquement un nombre fini de termes.

Pour calculer les nombres c^s , on en prend une valeur approchée c_0^s (calculée par exemple au moyen du développement (27)), qu'on porte dans le membre de droite de (11). Si cette valeur est la valeur exacte c^s , on la retrouve au membre de gauche. En général on trouve une valeur c'^s différente de c_0^s , on peut en déduire une valeur de première approximation

$$c_1^s = c_0^s \quad (31)$$

$$+ \frac{c'^s - c_0^s}{1 + \frac{\varepsilon_{s-1}^2}{\theta^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{s-2}^2}{\theta^2} \left(1 + \dots \left(1 + \frac{\varepsilon_{-N_2}^2}{\theta^2} \right) \right) \right) + \frac{\delta_{s+1}^2}{\theta^2} \left(1 + \frac{\delta_{s+2}^2}{\theta^2} \left(1 + \dots \left(1 + \frac{\delta_{N_1}^2}{\theta^2} \right) \right) \right)}$$

On peut prendre cette valeur c_1^s pour itérer l'opération et obtenir des valeurs c_2^s, c_3^s, \dots . Ces valeurs convergent très rapidement vers une limite qui est la valeur c^s cherchée.

Les racines calculées par cette méthode sont données par la table I.

Table I.

	$\xi=0$	$\xi=\frac{1}{8}$	$\xi=\frac{1}{4}$	$\xi=\frac{3}{8}$	$\xi=\frac{1}{2}$				
a^0	-1,0701	c^0	-1,0694	c^0	-1,0675	c^0	-1,0656	a^0	-1,0648
b^1	+0,6867	c^{-1}	+0,6684	c^{-1}	+0,6285	c^{-1}	+0,5931	b^0	+0,5795
a^1	1,7073	c^{+1}	1,7654	c^{+1}	1,9236	c^{+1}	2,1456	a^1	2,3154
b^2	4,1130	c^{-2}	3,6756	c^{-2}	3,2546	c^{-2}	2,8851	b^1	2,6677
a^2	4,1625	c^{+2}	4,6361	c^{+2}	5,1685	c^{+2}	5,7347	a^2	6,3325
b^3	9,0574	c^{-3}	8,3284	c^{-3}	7,6314	c^{-3}	6,9666	b^2	6,3359
a^3	9,0575	c^{+3}	9,8184	c^{+3}	10,6111	c^{+3}	11,4356	a^3	12,2918

Pour représenter graphiquement ces résultats, on tracera les courbes $c^s = c^s(\xi)$; la fig. 9 ainsi obtenue est une section de la surface de dispersion par un plan qui contient l'axe du réseau réciproque.

Pour montrer que $c^s = c^s(\xi)$ est l'équation d'une telle section, il suffit de montrer qu'elle est équivalente à l'équation (17)

$$\varrho^s(\xi) = \sqrt{k^2 \varkappa_0 - b^2 c^s}.$$

On peut développer la racine

$$\varrho^s(\xi) = k \sqrt{\varkappa_0} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{k^2 \varkappa_0} c^s(\xi) \right]$$

parce que $b^2/k^2 \ll 1$. Si on effectue un changement de variable en posant $\mu^s = k \sqrt{\varkappa_0} - \varrho^s$, cette équation devient

$$\mu^s(\xi) = \frac{1}{2} \frac{b^2}{k \sqrt{\varkappa_0}} c^s(\xi)$$

c^s et μ^s sont donc proportionnels l'un à l'autre, et $c^s = c^s(\xi)$ est, à un facteur constant près, l'équation d'une section de la surface de dispersion.

Dans la fig. 9 la trace des sphères auxquelles se réduit la surface de dispersion pour $\theta = 0$ est indiquée par les traits pointillés. On voit que la déformation est surtout sensible pour les petites valeurs de c^s ; ce sont les racines pour lesquelles les développements (27) ou (29) ne sont pas valables.

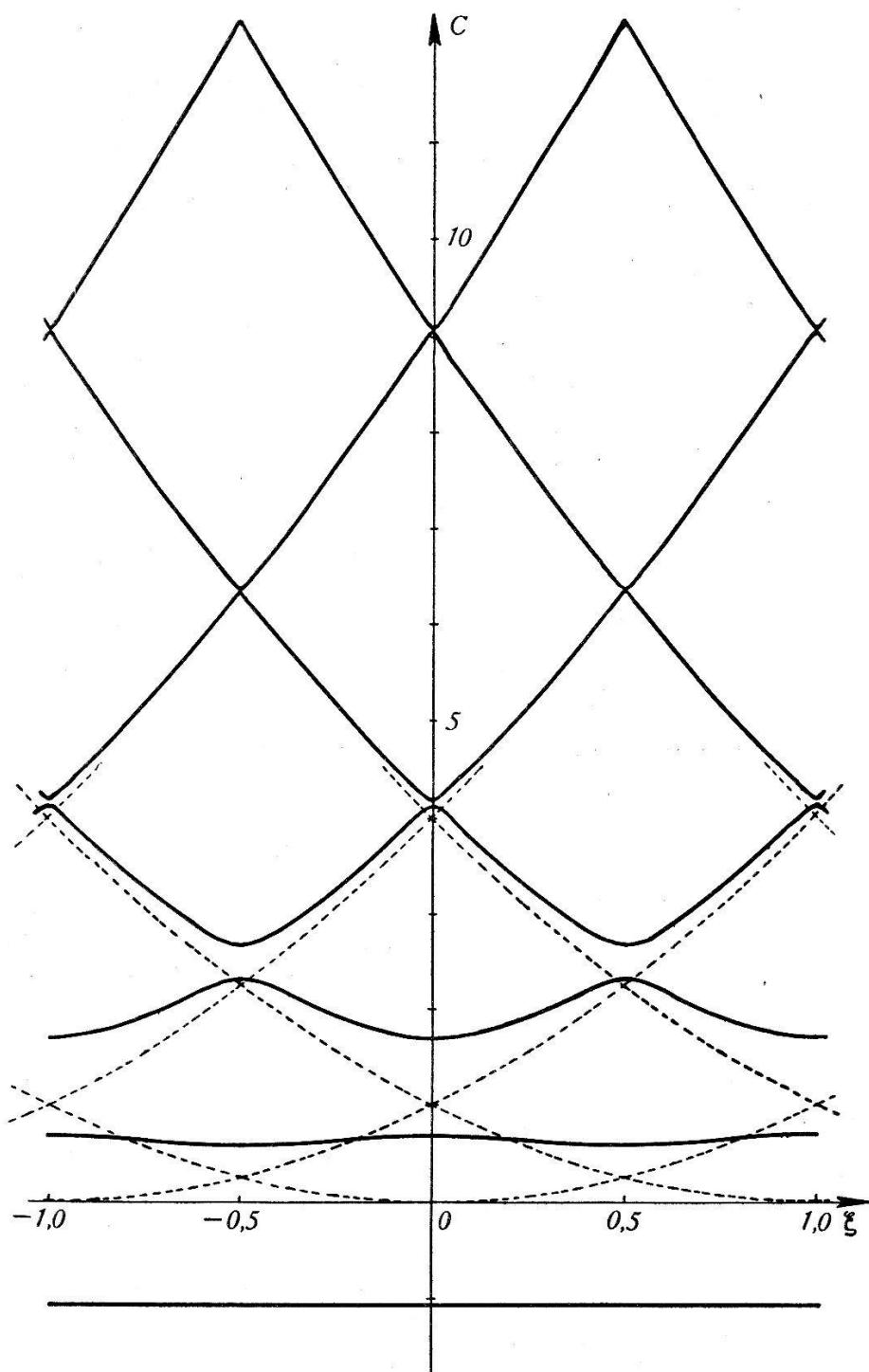
Les valeurs c^s que nous avons obtenues permettent de résoudre tous les problèmes pour $\theta = 1$, nous nous en sommes servi pour calculer la diffraction d'une onde entrant dans le milieu stratifié à une incidence presque normale.

Diffraction pour de petits angles d'incidence. Résultats numériques.

Nous avons déjà donné les résultats du calcul pour l'incidence normale¹⁾; nous avons complété ces résultats au moyen de la théorie exposée dans les paragraphes précédents, en calculant les intensités J_m lorsque l'angle d'incidence α varie dans un petit domaine autour de la valeur $\alpha = 0$. Cette généralisation permet en particulier de montrer dans quelle mesure les phénomènes observés peuvent s'interpréter par la notion de « réflexion de Bragg ».

Nous avons vu que le problème intérieur était complètement déterminé par la valeur de ξ , c'est donc l'angle α seul qui intervient dans les conditions à l'entrée; l'angle β ne figure que dans l'expression (22) de L ; si β varie seul, la figure de diffraction qu'on observe pour une valeur β' avec une épaisseur L_0 est la

¹⁾ R. EXTERMANN et G. WANNIER, loc. cit.

Fig. 9. Surface de dispersion pour $\theta=1$.

Nous avons tracé les courbes $c^s = c^s(\xi)$ (avec une échelle quadrupple sur l'axe des ξ). La figure ainsi obtenue est une image déformée d'une coupe de la surface de dispersion $\mu^s = \mu^s(b\xi)$ par un plan qui contient le réseau réciproque; la déformation étant une contraction latérale (selon 0ξ) dans le rapport

$$\frac{k\sqrt{\varkappa_0}}{2b} : 1.$$

Les courbes en pointillé sont les traces des sphères auxquelles se réduit la surface de dispersion pour $\theta=0$. On voit que ce ne sont que les nappes les plus éloignées du réseau réciproque qui sont sensiblement déformées.

même que celle qu'on observerait pour une valeur $\beta = 0$ avec une épaisseur $L' = \frac{L_0}{\cos \beta'}$. Il suffit donc de calculer les J_m pour différentes valeurs de L en fonction de α (ou de ξ) seul: on détermine d'abord les $\alpha_m^s (c^s, 1)$ au moyen des équations (25), puis les D_s^s comme solutions du système (19), et on peut alors écrire la table des $D_m^s = \alpha_m^s D_s^s$; nous avons effectué graphiquement le calcul des J_m selon les équations (21).

Nous donnons la table des D_m^s pour neuf valeurs différentes de l'angle d'incidence (Table II); la Table III contient l'intensité des ordres centraux de diffraction pour différentes valeurs de l'angle d'incidence et de l'épaisseur L . On passe des résultats pour l'angle $+\alpha$ aux résultats pour l'angle $-\alpha$ en intervertissant les ordres $+m$ et $-m$.

Table II.

Table des D_m^s pour $\theta=1$ et pour différentes valeurs de ξ .

$$\zeta = 0.$$

	- 3	- 2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3
a^0	+ 0,007	+ 0,068	+ 0,335	+ 0,627	+ 0,335	+ 0,068	+ 0,007
b^1	—	—	—	—	—	—	—
a^1	- 0,020	- 0,143	- 0,307	+ 0,360	- 0,307	- 0,143	- 0,020
b^2	—	—	—	—	—	—	—
a^2	+ 0,016	+ 0,075	- 0,028	+ 0,013	- 0,028	+ 0,075	+ 0,016
b^3	—	—	—	—	—	—	—
a^3	- 0,003	+ 0,001	—	—	—	+ 0,001	- 0,003

$$\xi = \frac{1}{8} \pi$$

$\xi = \frac{1}{4}$.

	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
c^0	+ 0,012	+ 0,105	+ 0,419	+ 0,579	+ 0,235	+ 0,039	+ 0,003
c^{-1}	- 0,016	- 0,111	- 0,253	+ 0,127	+ 0,181	+ 0,042	+ 0,004
c^{+1}	- 0,021	- 0,118	- 0,113	+ 0,271	- 0,392	- 0,130	- 0,015
c^{-2}	+ 0,029	+ 0,123	- 0,053	+ 0,019	- 0,008	- 0,005	- 0,001
c^{+2}	—	—	- 0,001	+ 0,003	- 0,016	+ 0,054	+ 0,010
c^{-3}	- 0,004	+ 0,001	—	—	—	—	—
c^{+3}	—	—	—	—	—	—	- 0,002

 $\xi = \frac{3}{8}$.

	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
c^0	+ 0,016	+ 0,124	+ 0,445	+ 0,523	+ 0,187	+ 0,028	+ 0,002
c^{-1}	- 0,027	- 0,170	- 0,320	+ 0,234	+ 0,214	+ 0,043	+ 0,004
c^{+1}	- 0,028	- 0,132	- 0,037	+ 0,196	- 0,357	- 0,105	- 0,011
c^{-2}	+ 0,045	+ 0,176	- 0,088	+ 0,044	- 0,032	- 0,012	- 0,001
c^{+2}	—	—	—	+ 0,002	- 0,013	+ 0,046	+ 0,008
c^{-3}	- 0,005	+ 0,001	—	—	—	—	—
c^{+3}	—	—	—	—	—	—	- 0,002

 $\xi = \frac{1}{2}$.

	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
a^0	+ 0,020	+ 0,143	+ 0,454	+ 0,454	+ 0,143	+ 0,020	+ 0,001
b^0	- 0,041	- 0,229	- 0,341	+ 0,341	+ 0,229	+ 0,041	+ 0,004
a^1	- 0,036	- 0,139	+ 0,045	+ 0,045	- 0,139	- 0,036	- 0,004
b^1	+ 0,064	+ 0,223	- 0,158	+ 0,158	- 0,223	- 0,064	- 0,007
a^2	+ 0,016	- 0,004	+ 0,001	+ 0,001	- 0,004	+ 0,016	+ 0,003
b^2	- 0,023	+ 0,006	- 0,001	+ 0,001	- 0,006	+ 0,023	+ 0,004
a^3	—	—	—	—	—	—	—

 $\xi = \frac{5}{8}$.

	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
c^{-1}	+ 0,002	+ 0,024	+ 0,159	+ 0,445	+ 0,379	+ 0,106	+ 0,013
c^0	- 0,006	- 0,059	- 0,292	- 0,320	+ 0,437	+ 0,231	+ 0,037
c^{-2}	+ 0,002	+ 0,020	+ 0,067	- 0,037	+ 0,007	+ 0,025	+ 0,005
c^{+1}	+ 0,003	+ 0,024	+ 0,064	- 0,088	+ 0,177	- 0,353	- 0,090
c^{-3}	- 0,002	- 0,009	+ 0,002	—	—	—	—
c^{+2}	—	—	—	—	+ 0,001	- 0,008	+ 0,034
c^{-4}	+ 0,001	—	—	—	—	—	—

$\xi = \frac{3}{4}$.

	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
c^{-1}	+ 0,003	+ 0,028	+ 0,171	+ 0,420	+ 0,304	+ 0,076	+ 0,009
c^0	- 0,009	- 0,083	- 0,360	- 0,254	+ 0,504	+ 0,220	+ 0,032
c^{-2}	+ 0,006	+ 0,054	+ 0,163	- 0,113	+ 0,047	+ 0,049	+ 0,009
c^{+1}	+ 0,002	+ 0,014	+ 0,023	- 0,053	+ 0,145	- 0,338	- 0,080
c^{-3}	- 0,002	- 0,013	+ 0,004	- 0,001	—	—	—
c^{+2}	—	—	—	—	+ 0,001	- 0,007	+ 0,031
c^{-4}	—	—	—	—	—	—	—

 $\xi = \frac{7}{8}$.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2
c^{-1}	+ 0,003	+ 0,032	+ 0,177	+ 0,381	+ 0,237	+ 0,053	+ 0,006
c^0	- 0,012	- 0,114	- 0,425	- 0,140	+ 0,517	+ 0,190	+ 0,025
c^{-2}	+ 0,011	+ 0,088	+ 0,232	- 0,204	+ 0,125	+ 0,079	+ 0,012
c^{+1}	+ 0,002	+ 0,014	+ 0,009	- 0,036	+ 0,121	- 0,317	- 0,070
c^{-3}	- 0,004	- 0,020	+ 0,006	- 0,001	—	—	—
c^{+2}	—	—	—	—	+ 0,001	- 0,006	+ 0,027
c^{-4}	—	—	—	—	—	—	—

 $\xi = 1$.

	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
a^{-1}	+ 0,004	+ 0,036	+ 0,179	+ 0,335	+ 0,179	+ 0,036	+ 0,004
b^0	- 0,017	- 0,143	- 0,455	—	+ 0,455	+ 0,143	+ 0,017
a^0	+ 0,017	+ 0,122	+ 0,262	- 0,307	+ 0,262	+ 0,122	+ 0,017
b^{+1}	+ 0,029	+ 0,140	- 0,045	—	+ 0,045	- 0,140	- 0,029
a^{+1}	- 0,033	- 0,155	+ 0,058	- 0,028	+ 0,058	- 0,155	- 0,033
b^{+2}	- 0,012	+ 0,002	—	—	—	- 0,002	+ 0,012
a^{+2}	+ 0,012	- 0,003	—	—	—	- 0,003	+ 0,012

Conclusions.

Nous avons donné dans cet article une théorie tout à fait générale du problème de la diffraction de la lumière par un milieu périodique dans une dimension et nous l'avons entièrement résolu pour un réseau sinusoïdal, avec une seule condition restrictive: $b^2/k^2 \ll 1$. Nous avons calculé quelques cas typiques montrant nettement que les caractéristiques de la solution dépendent principalement des deux paramètres θ et L . Le paramètre θ est une mesure de l'intensité de l'onde ultra-sonore, il caractérise le phénomène à l'intérieur du milieu stratifié. La valeur numérique de θ est approximativement égale au nombre d'ordres d'intensité notable qui apparaissent dans la figure de diffraction pour l'incidence normale

Table III.

Intensité J_m des ordres centraux pour $\theta=1$ et pour différentes valeurs de ξ et de L .

	$\xi = 0.1)$				$\xi = \frac{1}{8}.$				$\xi = \frac{1}{4}.$			
	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1
$L=0,2$	—	0,038	0,923	0,038	—	0,038	0,922	0,038	—	0,038	0,921	0,038
0,4	0,005	0,135	0,720	0,135	0,005	0,135	0,719	0,134	0,005	0,137	0,719	0,133
0,6	0,020	0,248	0,464	0,248	0,022	0,250	0,462	0,244	0,022	0,251	0,466	0,241
0,8	0,045	0,335	0,238	0,335	0,049	0,339	0,238	0,329	0,054	0,342	0,242	0,323
1,0	0,070	0,377	0,102	0,377	0,081	0,383	0,103	0,370	0,093	0,387	0,107	0,361
1,2	0,081	0,375	0,087	0,375	0,102	0,383	0,084	0,364	0,125	0,389	0,083	0,353
1,4	0,070	0,332	0,196	0,332	0,098	0,352	0,181	0,315	0,133	0,373	0,157	0,302
1,6	0,045	0,260	0,389	0,260	0,071	0,305	0,360	0,231	0,110	0,359	0,289	0,223
1,8	0,022	0,163	0,631	0,163	0,036	0,243	0,569	0,133	0,065	0,356	0,423	0,147
2,0	0,007	0,067	0,853	0,067	0,016	0,174	0,752	0,058	0,022	0,355	0,506	0,110
2,2	0,003	0,006	0,981	0,006	0,004	0,109	0,841	0,042	0,002	0,341	0,511	0,136

	$\xi = \frac{3}{8}.$				$\xi = \frac{1}{2}.$ ²⁾				$\xi = \frac{5}{8}.$			
	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1
$L=0,2$	—	0,038	0,921	0,038	—	0,038	0,923	0,038	—	0,038	0,924	0,038
0,4	0,006	0,136	0,720	0,133	0,006	0,137	0,722	0,130	0,006	0,136	0,727	0,128
0,6	0,023	0,253	0,469	0,238	0,024	0,254	0,474	0,232	0,024	0,253	0,484	0,228
0,8	0,058	0,345	0,248	0,317	0,061	0,346	0,258	0,306	0,063	0,345	0,272	0,295
1,0	0,104	0,389	0,113	0,352	0,113	0,390	0,124	0,337	0,122	0,389	0,139	0,320
1,2	0,148	0,394	0,080	0,340	0,170	0,395	0,080	0,323	0,191	0,394	0,087	0,302
1,4	0,171	0,388	0,126	0,290	0,213	0,392	0,097	0,275	0,255	0,388	0,080	0,255
1,6	0,159	0,405	0,199	0,223	0,224	0,420	0,121	0,220	0,297	0,405	0,072	0,206
1,8	0,115	0,457	0,246	0,172	0,197	0,497	0,109	0,184	0,305	0,457	0,044	0,173
2,0	0,058	0,531	0,237	0,163	0,140	0,600	0,061	0,179	0,277	0,531	0,013	0,155
2,2	0,014	0,588	0,182	0,197	0,079	0,693	0,014	0,191	0,225	0,588	0,025	0,137

	$\xi = \frac{3}{4}.$				$\xi = \frac{7}{8}.$				$\xi = 1.$ ³⁾			
	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1
$L=0,2$	—	0,038	0,924	0,037	—	0,038	0,924	0,038	—	0,038	0,924	0,038
0,4	0,006	0,137	0,728	0,127	0,006	0,135	0,730	0,126	0,006	0,135	0,733	0,123
0,6	0,026	0,251	0,491	0,221	0,025	0,250	0,500	0,214	0,026	0,248	0,508	0,207
0,8	0,065	0,342	0,288	0,284	0,067	0,339	0,307	0,271	0,067	0,335	0,326	0,255
1,0	0,128	0,387	0,159	0,303	0,132	0,383	0,183	0,282	0,133	0,377	0,213	0,258
1,2	0,206	0,389	0,101	0,279	0,217	0,383	0,124	0,253	0,220	0,375	0,157	0,220
1,4	0,290	0,373	0,080	0,232	0,315	0,352	0,099	0,202	0,323	0,332	0,136	0,164
1,6	0,367	0,359	0,063	0,185	0,417	0,305	0,121	0,150	0,433	0,260	0,136	0,109
1,8	0,421	0,356	0,049	0,144	0,511	0,243	0,096	0,105	0,543	0,163	0,159	0,065
2,0	0,443	0,355	0,060	0,112	0,580	0,174	0,135	0,069	0,634	0,067	0,192	0,036
2,2	0,428	0,341	0,123	0,080	0,610	0,109	0,199	0,043	0,685	0,006	0,213	0,028

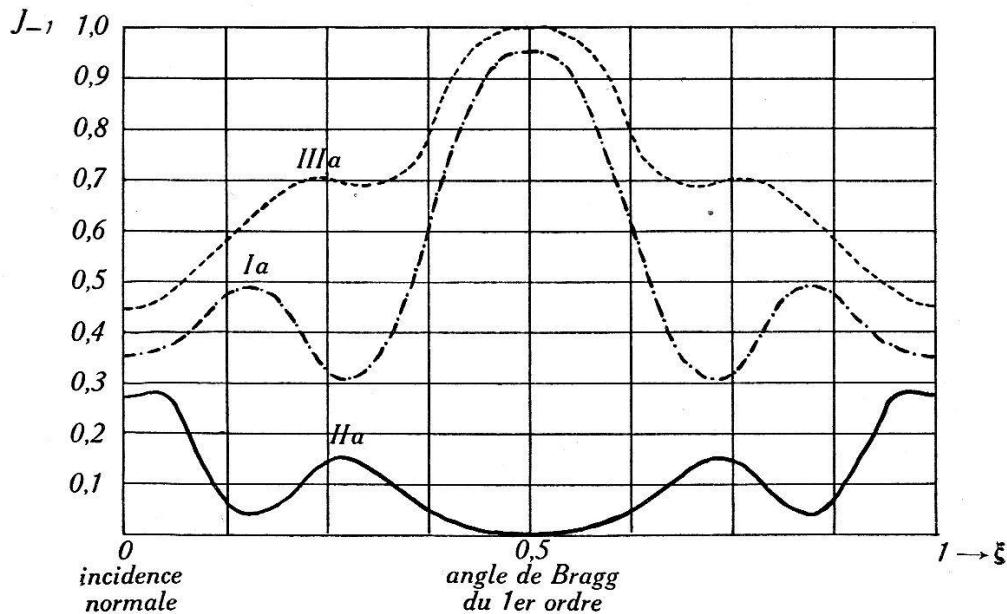
¹⁾ Incidence normale.²⁾ Angle de BRAGG du 1^{er} ordre.³⁾ Angle de BRAGG du 2^o ordre.

(voir par exemple les figures de diffraction de la première partie, loc. cit. p. 526). Ce fait peut s'expliquer par la construction de la sphère de propagation (fig. 5a). Si pour chaque couche on trace la sphère de propagation de rayon $k \sqrt{z_0}$, seules les ondes dont les vecteurs se terminent sur un point du réseau réciproque placé près de la sphère donnent une intensité qui n'est pas négligeable. Mais la distance à laquelle ces points peuvent se trouver de la sphère pour donner encore une intensité non négligeable est proportionnelle à la valeur de θ , ce qui fait que, lorsque θ augmente, le nombre des points du réseau réciproque prenant part au phénomène augmente. On voit immédiatement que, lorsque l'angle d'incidence α varie dans de petites limites, le nombre d'ordres reste inchangé; par contre, en comparant le nombre d'ordres qui apparaissent pour l'incidence normale et pour une incidence très différente, mais pour la même valeur de θ , on voit sans peine que la figure de diffraction pour le grand angle d'incidence contiendra moins d'ordres. En effet la sphère de propagation coupe maintenant la ligne du réseau réciproque sous un angle relativement grand, et la distance des points du réseau à la sphère a augmenté, ce qui fait que certains points, qui dans l'incidence normale pouvaient prendre part au phénomène, en sont maintenant exclus parce qu'ils se sont trop éloignés de la sphère de propagation. Le fait qu'on peut traiter analytiquement le cas de l'incidence très oblique (§ 6) est d'ailleurs un indice que la figure de diffraction ne contient que peu d'ordres.

Le paramètre θ détermine complètement la forme de la surface de dispersion. Il est donc possible d'utiliser celle-ci avec d'autres limites que celles que nous avons introduites. On pourrait s'en servir en particulier pour calculer les phénomènes qui se produisent lorsqu'une onde entre dans le milieu stratifié par une face parallèle aux plans de l'onde ultra-sonore. Cette diffraction serait l'analogue du procédé de BRAGG dans la technique des rayons X, tandis que celle que nous avons étudiée (à laquelle se rapportent les limites que nous avons choisies) correspond au procédé de LAUE.

Le second paramètre caractéristique, L , a une signification moins générale que θ , il n'est défini que lorsque la forme du milieu diffractant est celle que nous avons choisie. C'est une fonction directe de l'épaisseur d du faisceau ultra-sonore traversé par la lumière, et cette épaisseur joue un rôle très important dans le calcul de l'intensité diffractée dans les différents ordres. En effet, chaque ordre dans le milieu est formé par un grand nombre d'ondes planes qui ont toutes environ la même longueur d'onde et dont

a) Intensité de l'ordre -1



b) Intensité de l'ordre -2

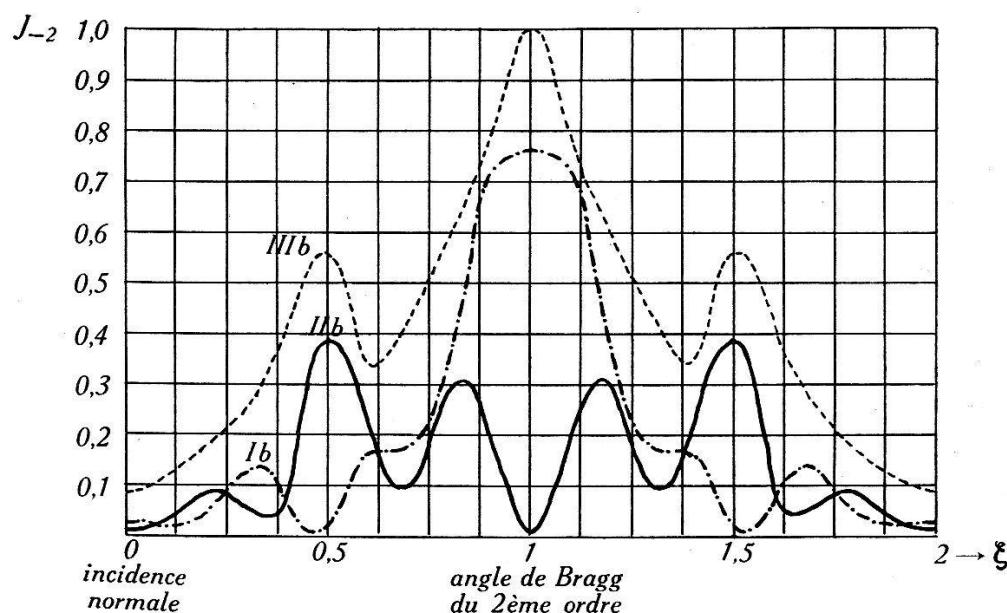


Fig. 10. Intensité de la lumière diffractée dans les ordres -1 et -2, en fonction de ξ .

Ces graphiques représentent la variation de l'intensité de l'onde diffractée dans les ordres -1 et -2 lorsque l'angle d'incidence varie, le paramètre L étant tenu constant. L'intensité de l'onde incidente est prise comme unité. Les figures sont symétriques autour de l'angle de BRAGG, mais l'intensité de l'ordre réfléchi peut être maximum ou minimum pour cet angle, suivant la valeur de L . Pour certaines valeurs particulières de L , on peut avoir une réflexion presque complète (courbe Ia, $L=5,9$, courbe Ib, $L=9$), pour d'autres valeurs de L l'intensité réfléchie est nulle (courbe IIa, $L=15,2$, courbe IIb, $L=24,9$). Les courbes IIIa et IIIb représentent le carré de la somme des modules des amplitudes des ondes de l'ordre: c'est la plus grande intensité qui puisse apparaître lorsqu'on fait varier L . On voit que la réflexion complète n'est possible que pour l'angle de BRAGG.

l'interférence produit une sorte de phénomène de « battements »; l'intensité de ce phénomène sur la face de sortie détermine l'intensité observée de l'ordre, et elle dépend elle-même de l'épaisseur traversée d . L'intensité de la raie centrale est égale à l'intensité J^e de l'onde incidente, lorsque l'épaisseur est nulle, et il existe d'autres valeurs de l'épaisseur pour lesquelles le phénomène de battements redonne à cet ordre zéro presque toute l'intensité J^e . L'intensité des ordres latéraux est nulle sur la face d'entrée, elle varie ensuite pour chaque ordre entre la valeur zéro et un maximum qui est le carré de la somme des modules des intensités de cet ordre. Lorsque l'angle d'incidence est un angle de BRAGG, ce maximum pour l'ordre « réfléchi » est précisément égal à l'intensité de l'onde incidente (à cause de la symétrie ou de l'antisymétrie des D_m^s dans ce cas). Pour certaines valeurs de l'épaisseur d , la réflexion de BRAGG est donc complète, pour d'autres toutefois elle peut être nulle (fig. 10). Le phénomène se complique encore de par l'existence des ondes « diffractées » à côté des ondes incidente et réfléchie. Cette décomposition du phénomène en « réflexion » et « diffraction » est commode pour montrer la cause de l'asymétrie des images observées, mais elle est artificielle et ne permet d'ailleurs pas un calcul quantitatif. La répartition de l'énergie dans les différents ordres est donc fonction de L , mais le nombre des ordres qui peuvent apparaître est déterminé uniquement par θ . On peut encore remarquer que la signification de L est très simple: c'est une mesure du nombre de longueurs d'onde ultra-sonores que traverse le rayon lumineux du premier ordre pour l'incidence normale.

Toute la théorie que nous avons exposée ne s'applique pas seulement à la diffraction de la lumière par des ultra-sons, elle permet de résoudre tous les problèmes de la propagation d'une onde électro-magnétique dans un milieu à structure périodique sinusoïdale, quelle que soit la grandeur de la perturbation de la constante diélectrique, pourvu toutefois que $b^2/k^2 \ll 1$. Nous reviendrons plus loin sur les conséquences de cette condition restrictive.

La théorie telle que nous l'avons élaborée permet aussi de prévoir les caractéristiques générales de la diffraction par un réseau quelconque. Nous nous sommes borné en effet à l'étude d'un réseau sinusoïdal, parce que ce cas est particulièrement simple, mais nous allons voir qu'on peut tirer de notre théorie générale quelques conséquences qualitatives qui s'appliquent à un réseau dans lequel la périodicité n'est plus simple (réseau en « dents de scie » p. ex.). Le paramètre unique θ qui nous avait suffi doit

être remplacé par l'ensemble des θ_n , qui fait intervenir les amplitudes des harmoniques, et alors le nombre d'ordres qui apparaissent dépend essentiellement de ce nouveau groupe de paramètres. En particulier ce nombre peut être grand même pour des ultra-sons peu intenses. La distribution de l'intensité dans les ordres dépend elle aussi de tous ces paramètres et on peut voir par exemple que la réflexion de BRAGG se produira de façon marquée pour les angles χ tels que $\sin \chi = nb/k$ si le coefficient ψ_n dans le développement de FOURIER de l'inverse de la constante diélectrique est grand (si l'amplitude de l'harmonique n est grande). Il serait donc théoriquement possible d'analyser la distribution de la matière dans le réseau diffractant par l'étude de l'intensité de la lumière diffractée, c'est là une méthode qui est fort employée aujourd'hui pour l'investigation des structures cristallines au moyen des rayons X. Cependant, comme ici le nombre d'ordres diffractés qui apparaissent simultanément est très grand, et qu'en plus l'influence de l'épaisseur du faisceau ultra-sonore traversé n'est pas simple, une telle analyse semble devoir rencontrer des difficultés insurmontables. On pourrait toutefois imaginer des cas très particuliers dans lesquels cette méthode serait applicable.

La condition restrictive $b^2/k^2 \ll 1$ nous a permis de montrer que les deux polarisations donnent des résultats semblables lorsque tout le phénomène est compris dans un domaine angulaire assez petit pour que le cosinus des angles qui peuvent intervenir soit assimilable à l'unité. Les effets de polarisation sont alors trop petits pour être observables.

Je tiens en terminant à remercier Monsieur le Professeur J. WEIGLE pour l'intérêt constant qu'il a porté à mes recherches, après m'en avoir proposé le sujet et suggéré la méthode.

Ma vive gratitude va à Monsieur G. WANNIER, Docteur ès sciences, en collaboration avec lequel j'ai publié la première partie de ce travail et qui a continué de me faire bénéficier de conseils précieux.

Institut de Physique de l'Université de Genève.
