

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 10 (1937)
Heft: II

Artikel: Über die Lichtstreuung an elektrischen Feldern nach der Theorie des Positrons
Autor: Kemmer, N.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110734>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Lichtstreuung an elektrischen Feldern nach der Theorie des Positrons¹⁾

von N. Kemmer*).

(25. I. 37.)

Wie zuerst DELBRÜCK²⁾ bemerkte, ist als Folge der „Löchertheorie“ des Positrons eine kohärente Streuung von Licht an statischen elektrischen Feldern zu erwarten, ein Effekt, der prinzipiell als Ablenkung harter γ -Strahlen im Coulombschen Feld von Atomkernen beobachtbar sein könnte.

Die Durchrechnung dieses Problems bietet erhebliche Schwierigkeiten; im Folgenden sollen die allgemeinen Ansätze dieser Rechnung wiedergegeben und anschliessend ein einfacher Sonderfall explizit berechnet werden: die Frequenz des Lichts soll hinreichend klein sein, d. h. der Ungleichung

$$\nu \ll \frac{mc^2}{h} \quad (1)$$

genügen und ausserdem soll für das streuende statische Feld die Einschränkung

$$|\text{grad } \mathcal{E}| \ll |\mathcal{E}| \cdot \frac{mc}{h} \quad (2)$$

gefordert werden, wobei \mathcal{E} die elektrische Feldstärke darstellt.

Ungleichung (2) ist für das Coulomb'sche Feld sicher nicht erfüllt. Daher ist auch der hier betrachtete Fall weniger von Interesse im Hinblick auf eine experimentelle Prüfung als vielmehr für die prinzipielle Begründung der Theorie. Es gelingt hier nämlich die gleiche Darstellung mittels einer Abänderung der Lagrange-Funktion des Vakuums, wie sie bereits von verschiedenen Autoren³⁾ an verwandten Effekten abgeleitet wurde. Gegenüber früheren Herleitungen dieser Darstellung bietet die vorliegende einerseits den Vorteil, dass die sehr weitgehend frei ist von allen spezielleren Subtraktionsvorschriften der Löchertheorie⁴⁾, und gibt andererseits auch wohl den bisher kürzesten und elementarsten Weg zur Bestimmung der niedrigsten Ordnung der nichtlinearen Zusätze (4. Potenz der Feldstärken in der Energiedichte).

*) Jetzt Beit Scientific Research Fellow, Imperial College of Science and Technology, London.

§ 1. Allgemeine Ansätze.

Wir betrachten die Bewegung von Elektronen in dem statischen Potentialfeld $V(\mathbf{r})$. Die unabhängigen stationären Lösungen der zugehörigen Diracgleichung bezeichnen wir mit

$$\Psi_A = \Phi_A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_A t} \quad (3)$$

Unter den E_A müssen selbstverständlich auch diejenigen mit $E_A < 0$ berücksichtigt werden. Wir nehmen an, dass von den Zuständen A eine Anzahl unter Berücksichtigung des Pauliprinzip durch je ein Elektron ausgefüllt ist.

Die einfallende Lichtquelle habe den Ausbreitungsvektor \mathbf{k} d. h. die Frequenz $\nu = ck$ (mit $k = |\mathbf{k}|$), und die Richtung des elektrischen Vektors sei durch den Einheitsvektor \mathbf{e} gekennzeichnet. Es ist also $(\mathbf{e}\mathbf{k}) = 0$.

Bei der gestreuten Welle nennen wir entsprechend den Wellenzahlvektor \mathbf{k}' , die Polarisationsrichtung \mathbf{e}' ; es gilt wieder $\nu' = ck'$ und $(\mathbf{e}'\mathbf{k}') = 0$.

Nach dem üblichen Verfahren der Quantentheorie der Strahlung bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass pro Zeiteinheit ein Streuprozess in den Raumwinkel $d\Omega$ stattfindet aus

$$a(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}') = \frac{2\pi e^2}{\hbar} \cdot \frac{1}{\sqrt{k k'} L^3} \cdot \frac{e^{i(\nu' - \nu)t}}{\nu' - \nu} M_{\nu\nu'} \quad (4)$$

mit

$$M_{\nu\nu'} = M_{\nu\nu'}^+ + M_{\nu\nu'}^-$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\hbar c} M_{\nu\nu'}^+ &= \sum_{\substack{A \\ (\text{bes.})}} \sum_{\substack{S \\ (\text{unb.})}} \frac{\int \Phi_A^*(\mathbf{r}) (\alpha \mathbf{e}) e^{+i(\mathbf{k}\mathbf{r})} \Phi_S(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \cdot \int \Phi_S^*(\mathbf{r}') (\alpha \mathbf{e}') e^{-i(\mathbf{k}'\mathbf{r}')} \Phi_A(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{(E_A + \hbar\nu - E_S)} \\ \frac{1}{\hbar c} M_{\nu\nu'}^- &= \sum_{\substack{A \\ (\text{bes.})}} \sum_{\substack{S \\ (\text{unb.})}} \frac{\int \Phi_A^*(\mathbf{r}') (\alpha \mathbf{e}') e^{-i(\mathbf{k}'\mathbf{r}')} \Phi_S(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \cdot \int \Phi_S^*(\mathbf{r}) (\alpha \mathbf{e}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} \Phi_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{(E_A - E_S - \hbar\nu')} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Es ist über die besetzten Anfangszustände A zu summieren und ausserdem über Zwischenzustände S , für die nach dem Pauli-

prinzip nur anfänglich unbesetzte zugelassen werden dürfen. Wie gewohnt lassen wir nur Wellen mit dem Kubus der Kantenlänge L als Periodizitätsbereich zu und gehen erst im Endresultat zur Grenze $L \rightarrow \infty$ über.

Aus $a(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')$ berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung nach $d\Omega$ pro Zeiteinheit als:

$$\begin{aligned} W d\Omega &= \frac{1}{t} \sum_{\mathbf{k}' \text{ in } d\Omega} |a(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')|^2 \cong \frac{d\Omega}{t} \left(\frac{L}{2\pi c} \right)^3 \cdot \int \nu'^2 d\nu' |a(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')|^2 \\ &= d\Omega \cdot \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{c}{L^3} |M_{\nu\nu}|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

wobei für die Gültigkeit der letzten Beziehung die Forderung nicht allzu kurzer Zeiten notwendig ist ($t \gg 1/\nu$). Unter der nämlichen Voraussetzung gilt für die Frequenz der gestreuten Strahlung $\nu' \cong \nu$.

Zur weiteren Berechnung von $M_{\nu\nu}$ ist eine Annahme über das Potential $V(\mathbf{x})$ bzw. die zugehörigen Eigenfunktionen Φ_A notwendig. Wir werden verlangen, dass für die Φ_A die Born'sche Näherung zulässig ist. Dann ist

$$\Psi_A = e^{-\frac{i}{\hbar} E_A t} \cdot \left(\varphi_A + e \sum_B \frac{V_{AB}}{E_A - E_B} \varphi_B + e^2 \sum_{B,C} \frac{V_{AB} V_{BC}}{(E_A - E_B)(E_A - E_C)} \varphi_C + \dots \right) \quad (7)$$

zu setzen, wo

$$V_{AB} = \int \{\varphi_B^* V(\mathbf{x}) \varphi_A\} d\mathbf{x} \quad (8)$$

ist und die φ_A Lösungen der kräftefreien Diracgleichung, also ebene Spinorwellen darstellen.

In dieser Näherung ist eine sinnvolle Trennung der Zustände, die als besetzt anzusehen sind, von den unbesetzten ohne weiteres möglich. Wir betrachten die Zustände mit $E_A < 0$ anfänglich als besetzt, die mit $E_A > 0$ als unbesetzt, was dem löchertheoretischen Bild des Vakuums entspricht.

Führen wir die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} H_{SA} &= \int \{\varphi_A^*(\alpha \mathbf{e}) \varphi_S\} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r} \\ \tilde{H}_{AS} &= \int \{\varphi_S^*(\alpha \mathbf{e}') \varphi_A\} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') } d\mathbf{r}' \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ein, so lautet Gleichung (5) folgendermassen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\hbar c} M_{\nu\nu}^- = & \sum_{\substack{A \\ (E_A < 0)}} \sum_{\substack{S \\ (E_S > 0)}} \frac{1}{(E_A - E_S - \hbar \nu)} \left[\tilde{H}_{AS} H_{SA} \right. \\
 & + e \sum_K \left(\frac{\tilde{H}_{AS} H_{SK} V_{KA}}{(E_A - E_K)} + \frac{V_{AK} \tilde{H}_{KS} H_{SA}}{(E_A - E_K)} + \frac{\tilde{H}_{AS} V_{SK} H_{KA}}{(E_S - E_K)} + \frac{\tilde{H}_{AK} V_{KS} H_{SA}}{(E_S - E_K)} \right) \\
 & + e^2 \sum_K \sum_L \left(\frac{\tilde{H}_{AS} H_{SK} V_{KL} V_{LA}}{(E_A - E_K)(E_A - E_L)} + \frac{V_{AK} \tilde{H}_{KS} H_{SL} V_{LA}}{(E_A - E_K)(E_A - E_L)} + \frac{V_{AK} V_{KL} \tilde{H}_{LS} H_{SA}}{(E_A - E_K)(E_A - E_L)} \right. \\
 & + \frac{\tilde{H}_{AS} V_{SK} V_{KL} H_{LA}}{(E_S - E_K)(E_S - E_L)} + \frac{\tilde{H}_{AK} V_{KS} V_{SL} H_{LA}}{(E_S - E_K)(E_S - E_L)} + \frac{\tilde{H}_{AK} V_{KL} V_{LS} H_{SA}}{(E_S - E_K)(E_S - E_L)} \\
 & + \frac{\tilde{H}_{AS} V_{SK} H_{KL} V_{LA}}{(E_S - E_K)(E_A - E_L)} + \frac{\tilde{H}_{AK} V_{KS} H_{SL} V_{LA}}{(E_S - E_K)(E_A - E_L)} \\
 & \left. + \frac{V_{AK} \tilde{H}_{KS} V_{SL} H_{LA}}{(E_A - E_K)(E_S - E_L)} + \frac{V_{AK} \tilde{H}_{KL} V_{LS} H_{SA}}{(E_A - E_K)(E_S - E_L)} \right) \Big]. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Eine ganz entsprechende Darstellung gilt für $M_{\nu\nu}^+$. Da nun die φ_A ebene Wellen darstellen, sind die Integrationen in (9) sofort ausführbar und liefern die Aussage der Impulserhaltung. Daraus folgt unmittelbar, dass das Glied nullter Ordnung in e nur für $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ von null verschieden ist, und daher für den hier betrachteten Effekt der Streuung belanglos ist*). Man erkennt auch leicht mit Hilfe der expliziten Darstellung der Matrixelemente, dass sich alle in e linearen Glieder bei den Summationen über A, S, K gegenseitig kompensieren.

Zur Streuung geben erst die Glieder zweiter Ordnung in e Anlass. Zu deren weiterer Ausrechnung ist eine getrennte Ausführung der Summationen über positive und negative Werte von E_K und E_L nötig. Man gewinnt dabei nach einigen Zusammenfassungen eine Form für $M_{\nu\nu}^\pm$, in der keine Nenner vom Typus $(|E_A| - |E_B|)$ mehr vorkommen, sondern nur solche der Art $(|E_A| + |E_B|)$ oder $(|E_A| + |E_B| \pm \hbar \nu)$, was für die Konvergenz des Resultates von grösster Wichtigkeit ist.

(Dieses lässt sich übrigens durch eine Zwischenbetrachtung leicht verständlich machen. Hätte man von vornherein, anstatt von (5) auszugehen und darin (7) einzusetzen, die Störungen

*) Das Glied hat freilich die Gestalt $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot C$, wo C ein divergentes Integral ist; es steht in engem Zusammenhang mit der von BRINKMAN⁵⁾ diskutierten Dispersion des Vakuums. In der konsequenten Subtraktionstheorie wird dieses Glied natürlich kompensiert.

durch Lichtfeld und statisches Feld symmetrisch behandelt, so hätte sich für $a(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')$ leicht die Darstellung

$$a(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}') = \frac{1}{h} \cdot \frac{e^{i(\nu' - \nu)t}}{(\nu' - \nu)} \sum_{i,k,l,m} \cdot \frac{U_{ik} U_{kl} U_{lm} U_{mi}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)(E_i - E_m)}$$

ergeben, wobei die U_{ik} bis auf konstante Faktoren entweder mit einem H_{AB} aus (9) oder einem V_{AB} aus (8) zu identifizieren sind. Die E_i, E_k bedeuten hier jedoch Energien des gesamten Viel-elektronensystems *mit* Strahlung. Nun ist im Anfangszustand kein Elektron mit positiver Energie vorhanden, während alle Zustände negativer Energie besetzt sind. Als Zwischenzustände kommen aber jedenfalls nur solche vor, in denen an einer Stelle A im negativen Spektrum eine Lücke liegt, an einer Stelle B des positiven ein Elektron. Der Ausdruck $E_i - E_k$, wo E_i der *Anfangszustand* ist, enthält dann offenbar immer Summen $-|E_A| - |E_B|$, niemals Differenzen $|E_A| - |E_B|$.

Wir geben für $M_{\nu\nu}^\pm$ nun denjenigen Ausdruck an, der sich nach Berücksichtigung des Impulssatzes und Ausführung der Spinsummation ergibt. Von der Summation über A verbleibt dann noch eine Integration über \mathbf{p} , und wir bekommen eine Darstellung der Form

$$\frac{1}{hc} M_{\nu\nu}^\pm = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{(hc)^2} \sum_{\mathbf{g}_1} V(\mathbf{g}_1) V(\mathbf{g}_2) \cdot \int d\mathbf{p} F^\pm(\mathbf{p}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{e}'). \quad (11)$$

Die $\sum_{\mathbf{g}_1}$ ist über alle Fourierkomponenten des Feldes

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{g}} V(\mathbf{g}) e^{i(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x})}$$

zu erstrecken, und es gilt $\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$.

Hierbei ist

$$\begin{aligned} F^\pm(\mathbf{p}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{e}') &= \frac{1}{4} [f^\pm(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{g}_2, \mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2, \mathbf{p} - \mathbf{g}_1) \\ &\quad + f^\pm(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{g}_1, \mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2, \mathbf{p} - \mathbf{g}_2) \\ &\quad + f^\pm(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{g}_2, \mathbf{p} - \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2, \mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{g}_1) \\ &\quad + f^\pm(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{g}_1, \mathbf{p} - \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2, \mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{g}_2)] \end{aligned} \quad (12)$$

und bei Einführung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{hc} \cdot |E_i| = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + \kappa^2}; \quad \kappa = \frac{mc}{h} \\ D_i^\pm &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{(\alpha \mathbf{p}_i) + \beta \kappa}{W_i} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} f^- (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_0) \\
&= \text{Spur} \left[\frac{D_1^- (\alpha e) D_2^+ D_3^+ D_4^+ (\alpha e')}{(W_2 + W_1 + \nu) (W_3 + W_1 + \nu) (W_4 + W_1 + \nu)} \right. \\
&\quad - \frac{(W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + \nu) D_1^- (\alpha e) D_2^- D_3^+ D_4^+ (\alpha e')}{(W_3 + W_1 + \nu) (W_4 + W_1 + \nu) (W_2 + W_3) (W_2 + W_4)} \\
&\quad - \frac{(W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + \nu) D_1^- (\alpha e) D_2^+ D_3^+ D_4^- (\alpha e')}{(W_3 + W_1 + \nu) (W_2 + W_1 + \nu) (W_4 + W_3) (W_4 + W_2)} \\
&\quad - \frac{(W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + \nu) D_1^- (\alpha e) D_2^+ D_3^- D_4^+ (\alpha e')}{(W_2 + W_1 + \nu) (W_4 + W_1 + \nu) (W_3 + W_2) (W_3 + W_4)} \\
&\quad + \frac{D_1^+ (\alpha e) D_2^+ D_3^+ D_4^- (\alpha e')}{(W_4 + W_1 + \nu) (W_2 + W_4) (W_3 + W_4)} \\
&\quad + \frac{D_1^+ (\alpha e) D_2^+ D_3^- D_4^+ (\alpha e')}{(W_3 + W_1 + \nu) (W_2 + W_3) (W_4 + W_3)} \\
&\quad + \frac{D_1^+ (\alpha e) D_2^- D_3^+ D_4^+ (\alpha e')}{(W_2 + W_1 + \nu) (W_3 + W_2) (W_4 + W_2)} \\
&\quad - \frac{\frac{1}{2} (W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + 2\nu) D_0^- D_1^- (\alpha e) D_2^+ D_3^+ (\alpha e')}{(W_0 + W_3 + \nu) (W_1 + W_3 + \nu) (W_0 + W_2 + \nu) (W_1 + W_2 + \nu)} \\
&\quad + \frac{D_0^+ D_1^+ (\alpha e) D_2^+ D_3^- (\alpha e')}{(W_3 + W_1 + \nu) (W_3 + W_0 + \nu) (W_2 + W_3)} \\
&\quad + \frac{D_0^+ D_1^+ (\alpha e) D_2^- D_3^+ (\alpha e')}{(W_0 + W_2 + \nu) (W_2 + W_1 + \nu) (W_2 + W_3)} \\
&\quad - \frac{\frac{1}{2} (W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + 2\nu) D_0^+ D_1^- (\alpha e) D_2^+ D_3^- (\alpha e')}{(W_0 + W_3 + \nu) (W_1 + W_2 + \nu) (W_0 + W_1) (W_2 + W_3)} \\
&\quad \left. - \frac{D_0^+ D_1^- (\alpha e) D_2^- D_3^+ (\alpha e')}{(W_1 + W_3 + \nu) (W_0 + W_1) (W_2 + W_3)} \right]. \tag{14}
\end{aligned}$$

Für f^\pm ergibt sich eine ganz analoge Darstellung. Der Übergang von f^\pm zu F^\pm bedeutet eine Symmetrisierung und hat zur Folge, dass

$$F^\pm (\mathfrak{p}, 0, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{k}, e, e') \equiv F^\pm (\mathfrak{p}, \mathfrak{g}_1, 0, \mathfrak{k}, e, e') \equiv 0 \tag{15}$$

identisch erfüllt ist, wie leicht nachzuprüfen ist. Dieses ist damit gleichbedeutend, dass nicht die Fourierkomponenten des Potentials, sondern erst die der Feldstärke $gV(g)$, einen von null verschie-

denen Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsamplitude liefern, wie ja auch physikalisch zu fordern ist (Eichinvarianz). Ferner ist leicht zu erkennen, dass das Integral über \mathbf{p} konvergiert, und zwar gibt bereits jedes Einzelglied in (14) einen endlichen Beitrag, mit Ausnahme des ersten und des achten, die erst miteinander zusammengefasst werden müssen.

Um die Konvergenz von (11) zu erreichen, sind offenbar keinerlei Subtraktionskunstgriffe notwendig gewesen, was eine bemerkenswerte Auszeichnung gegenüber anderen ähnlichen Effekten darstellt. Dementsprechend besitzen auch die von HEISENBERG (l. c.) angegebenen zusätzlichen Subtraktionsglieder keine Matrixelemente, die den hier betrachteten Übergängen entsprechen, falls in jenen nur die Zeitkomponente x_0 des „Ausserdiagonalabstandes“ von vornherein nullgesetzt wird.

Zur weiteren Berechnung von (14) benutzen wir die Relationen:

$$4. \text{ Spur } [D_1^\pm(\alpha e) D_2^\pm D_3^\pm D_4^\pm(\alpha e')] \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
&= (ee') \left[\left(1 - \frac{W_{12}^2}{(\pm W_1)(\pm W_2)} \right) \left(1 + \frac{W_{34}^2}{(\pm W_3)(\pm W_4)} \right) \right. \\
&\quad - \left(1 + \frac{W_{13}^2}{(\pm W_1)(\pm W_3)} \right) \left(1 - \frac{W_{24}^2}{(\pm W_2)(\pm W_4)} \right) \\
&\quad + \left. \left(1 - \frac{W_{14}^2}{(\pm W_1)(\pm W_4)} \right) \left(1 + \frac{W_{23}^2}{(\pm W_2)(\pm W_3)} \right) \right] \\
&\quad + \left(1 - \frac{W_{12}^2}{(\pm W_1)(\pm W_2)} \right) \frac{([ee'], [p_3 p_4])}{(\pm W_3)(\pm W_4)} \\
&\quad + \left(1 + \frac{W_{13}^2}{(\pm W_1)(\pm W_3)} \right) \frac{([ee'], [p_2 p_4])}{(\pm W_2)(\pm W_4)} \\
&\quad + \left(1 - \frac{W_{14}^2}{(\pm W_1)(\pm W_4)} \right) \frac{([ee'], [p_2 p_3])}{(\pm W_2)(\pm W_3)} \\
&\quad + \left(1 + \frac{W_{34}^2}{(\pm W_3)(\pm W_4)} \right) \frac{(ep_1)(e'p_2) + (ep_2)(e'p_1)}{(\pm W_1)(\pm W_2)} \\
&\quad + \left(1 - \frac{W_{24}^2}{(\pm W_2)(\pm W_4)} \right) \frac{(ep_1)(e'p_3) + (ep_3)(e'p_1)}{(\pm W_1)(\pm W_3)} \\
&\quad + \left(1 + \frac{W_{23}^2}{(\pm W_2)(\pm W_3)} \right) \frac{(ep_1)(e'p_4) + (ep_4)(e'p_1)}{(\pm W_1) \pm W_4}
\end{aligned}$$

4. Spur $[D_0^\pm D_1^\pm (\alpha e) D_2^\pm D_3^\pm (\alpha e')]$

$$\begin{aligned}
&= (e e') \left[\left(1 + \frac{W_{01}^2}{(\pm W_0)(\pm W_1)} \right) \left(1 + \frac{W_{23}^2}{(\pm W_2)(\pm W_3)} \right) \right. \\
&\quad + \left(1 - \frac{W_{12}^2}{(\pm W_1)(\pm W_2)} \right) \left(1 - \frac{W_{03}^2}{(\pm W_0)(\pm W_3)} \right) \\
&\quad - \left(1 + \frac{W_{02}^2}{(\pm W_0)(\pm W_2)} \right) \left(1 + \frac{W_{13}^2}{(\pm W_1)(\pm W_3)} \right) \Big] \\
&\quad + \left(1 + \frac{W_{01}^2}{(\pm W_0)(\pm W_1)} \right) \frac{([e e'], [p_2 p_3])}{(\pm W_2)(\pm W_3)} \\
&\quad - \left(1 + \frac{W_{23}^2}{(\pm W_2)(\pm W_3)} \right) \frac{([e e'], [p_0 p_1])}{(\pm W_0)(\pm W_1)} \\
&\quad + \left(1 - \frac{W_{12}^2}{(\pm W_1)(\pm W_2)} \right) \frac{(ep_0)(e'p_3) + (ep_3)(e'p_0)}{(\pm W_0)(\pm W_3)} \\
&\quad + \left(1 - \frac{W_{03}^2}{(\pm W_0)(\pm W_3)} \right) \frac{(ep_1)(e'p_2) + (ep_2)(e'p_1)}{(\pm W_1)(\pm W_2)} \\
&\quad + \left(1 + \frac{W_{02}^2}{(\pm W_0)(\pm W_2)} \right) \frac{(ep_1)(e'p_3) + (ep_3)(e'p_1)}{(\pm W_1)(\pm W_3)} \\
&\quad + \left(1 + \frac{W_{13}^2}{(\pm W_1)(\pm W_3)} \right) \frac{(ep_0)(e'p_2) + (ep_2)(e'p_0)}{(\pm W_0)(\pm W_2)} \quad (16)
\end{aligned}$$

Hierin ist $W_{ik}^2 = (p_i p_k) + \kappa^2$ gesetzt worden, und die doppelten Vorzeichen sind so zu verstehen, dass jeweils das am D_i links stehende dem rechts vor dem W_i mit gleichem Index i anzubringenden zugeordnet ist.

An dieser Stelle ist ein Weiterrechnen nur mit geeigneten Näherungsansätzen möglich.

§ 2. Der Fall $k \ll \kappa$ und $|g| \ll \kappa$.

Diese Ungleichungen sind mit den Annahmen (1) und (2) identisch; sie bedingen, dass man eine Taylorentwicklung von F nach \mathfrak{k} und g ansetzen darf.

Es wurde bereits mit Gleichung (15) bewiesen, dass eine Entwicklung von F für kleine g_1 und g_2 mit dem zu g_1 und g_2 proportionalen Term beginnt. Eine ganz entsprechende Eichinvarianz-

überlegung für das Lichtfeld lässt erwarten, dass F , oder wenigstens das \mathbf{p} -Integral darüber, in \mathbf{k} und \mathbf{k}' mit der Ordnung $\text{const. } k \cdot k'$ beginnt. Es gelang jedoch nicht, dieses auf einfache Weise einzusehen, und eine rechnerische Prüfung wurde nur insoweit unternommen, als $k = 0$ gesetzt und gleichzeitig eine Entwicklung in \mathbf{g} bis zur zweiten Ordnung durchgeführt wurde.

Tatsächlich wurde nach Ausführung der \mathbf{p} -Integration das Verschwinden der Amplitude bestätigt, in den zu g^2 proportionalen Gliedern jedoch bereits mit einiger rechnerischer Mühe. Das Verschwinden der in \mathbf{k} linearen Beiträge wurde nicht geprüft.

Die in \mathbf{k} und \mathbf{g} quadratischen Glieder wurden nur für den Fall $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ (Vorwärtsstreuung) berechnet, es ergab sich

$$(g = |\mathbf{g}|; W = + \sqrt{p^2 + \kappa^2}).$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}, \mathbf{g}, -\mathbf{g}, \mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{e}') = & -\frac{6}{W^7} (\mathbf{e} \mathbf{e}') k^2 g^2 + \frac{7}{W^9} (\mathbf{e} \mathbf{e}') g^2 (\mathbf{p} \mathbf{k})^2 \\ & + \frac{67}{4 W^9} (\mathbf{e} \mathbf{e}') k^2 (\mathbf{g} \mathbf{p})^2 + \frac{27}{4 W^{11}} (\mathbf{e} \mathbf{e}') (\mathbf{g} \mathbf{p}) (\mathbf{p} \mathbf{k})^2 \\ & + \frac{16}{W^9} (\mathbf{e} \mathbf{e}') (\mathbf{k} \mathbf{g}) (\mathbf{g} \mathbf{p}) (\mathbf{p} \mathbf{k}) + \frac{33}{4 W^9} (\mathbf{e} \mathbf{p}) (\mathbf{e}' \mathbf{p}) k^2 g^2 \\ & - \frac{129}{4 W^{11}} (\mathbf{e} \mathbf{p}) (\mathbf{e}' \mathbf{p}) g^2 (\mathbf{p} \mathbf{k})^2 - \frac{45}{4 W^{11}} (\mathbf{e} \mathbf{p}) (\mathbf{e}' \mathbf{p}') k^2 (\mathbf{g} \mathbf{p})^2 \\ & - \frac{891}{8 W^{13}} (\mathbf{e} \mathbf{p}) (\mathbf{e}' \mathbf{p}') (\mathbf{p} \mathbf{k})^2 (\mathbf{g} \mathbf{p})^2 + \frac{30}{W^{11}} (\mathbf{e} \mathbf{p}) (\mathbf{e}' \mathbf{p}') (\mathbf{k} \mathbf{g}) (\mathbf{g} \mathbf{p}) (\mathbf{p} \mathbf{k}) \\ & - \frac{19}{4 W^9} [(\mathbf{e} \mathbf{p}) (\mathbf{e}' \mathbf{g}) + (\mathbf{e} \mathbf{g}) (\mathbf{e}' \mathbf{p})] k^2 (\mathbf{g} \mathbf{p}) \\ & + \frac{423}{4 W^{11}} [(\mathbf{e} \mathbf{p}) (\mathbf{e}' \mathbf{g}) + (\mathbf{e} \mathbf{g}) (\mathbf{e}' \mathbf{p})] (\mathbf{p} \mathbf{g}) (\mathbf{p} \mathbf{k})^2 \\ & + \frac{9}{4 W^7} (\mathbf{e} \mathbf{g}) (\mathbf{e}' \mathbf{g}) k^2 - \frac{63}{4 W^9} (\mathbf{e} \mathbf{g}) (\mathbf{e}' \mathbf{g}) (\mathbf{p} \mathbf{k})^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Die Integration über den \mathbf{p} -Raum ist ohne Schwierigkeiten in Polarkoordinaten ausführbar. Der radiale Anteil führt auf Integrale der Form:

$$\int_0^\infty \frac{p^m}{\sqrt{p^2 + \kappa^2}^{m+5}} dp = \frac{2}{(m+1)(m+3)} \frac{1}{\kappa^4}.$$

Es wird sodann:

$$M_{\nu\nu} = \frac{e^2}{180 \pi^2 (\hbar c)^2} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^4 \sum_{\mathfrak{g}} V(\mathfrak{g}) V(-\mathfrak{g}) \cdot [-3(e\mathfrak{g})(e'\mathfrak{g})k^2 + 7(ee')k^2g^2 - 7(ee')(\mathfrak{k}\mathfrak{g})^2]. \quad (18)$$

Die Berechnung dieser Amplitude ist nun andererseits mit Hilfe der von EULER und KOCKEL (l. c.) angegebenen Lagrange-Funktion möglich, und es ergibt sich für $M_{\nu\nu}$:

$$M_{\nu\nu} = -\frac{2e^2}{(\hbar c)^2} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^4 \sum_{\mathfrak{g}} V(\mathfrak{g}) V(-\mathfrak{g}) [(4\alpha - \beta)(e\mathfrak{g})(e'\mathfrak{g})k^2 + \beta(ee')k^2g^2 - \beta(ee')(\mathfrak{k}\mathfrak{g})^2]. \quad (19)$$

Durch Vergleich der Ausdrücke (18) und (19) folgt in voller Übereinstimmung mit den von EULER und KOCKEL gefundenen Werten:

$$\alpha = -\frac{1}{360 \pi^2}; \quad \beta = -\frac{7}{360 \pi^2}. \quad (20)$$

Es darf also wohl mit Sicherheit angenommen werden, dass die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) + \frac{1}{360 \pi^2} \frac{e^4 \hbar}{m^4 c^7} [(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 7(\mathfrak{E}\mathfrak{B})^2]$$

ganz allgemein die Vakuum-Effekte dieser Näherung richtig wiedergibt, und insbesondere auch die richtige Erweiterung unserer Ergebnisse für $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{k}'$ liefert.

Für irgendwelche weiteren Ausrechnungen wäre man zu spezielleren Annahmen über das Potential $V(\mathfrak{x})$ genötigt. Dimensionsmässig ergibt sich offenbar für die nach (6) auszurechnende Wahrscheinlichkeit

$$W = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{S}{\hbar \nu} |M_{\nu\nu}|^2 \sim \frac{S}{\hbar \nu} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{\hbar \nu}{mc^2} \right)^4 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \quad (22)$$

wo E die gesamte Energie des statischen Feldes bedeutet, S die einfallende Photonenstromdichte. Der „Wirkungsquerschnitt“ für unseren Prozess ist daher:

$$q \sim \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{\hbar \nu}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2. \quad (23)$$

Diese Arbeit wurde 1935/36 im Institut meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. G. WENTZEL, ausgeführt, wo ich dank einer Zuwendung der Jubiläumsstiftung für die Universität Zürich verbleiben konnte. Es ist mir eine angenehme Pflicht, hierfür meinen Dank auszusprechen. Auch bin ich Herrn Dr. V. WEISSKOPF für Hilfe und enge Zusammenarbeit zu grossem Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

Literatur.

- 1) Vgl. vorläufige Mitteilung: N. KEMMER und V. WEISSKOPF, Nature, 137, 659, 1936.
 - 2) M. DELBRÜCK, Zeitschr. f. Phys. **84**, 144, 1933.
 - 3) H. EULER und B. KOCKEL, Naturwiss. **23**, 246, 1935; H. EULER, Ann. d. Phys. **26**, 398, 1936; W. HEISENBERG und H. EULER, Zeitschr. f. Phys. **98**, 714, 1936; V. WEISSKOPF, Math.-Phys. Mittlgn., Kgl. Dän. Ges. d. Wiss. **14**, Nr. 6, 1936.
 - 4) P. A. M. DIRAC, Proc. Camb. Phil. Soc. **30**, 150, 1934; W. HEISENBERG, Zeitschr. f. Phys. **90**, 209, 1934.
 - 5) H. C. BRINKMAN, Physica **1**, 925, 1934.
-