

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 10 (1937)
Heft: I

Artikel: Zur Theorie der Neutron-Proton Wechselwirkung
Autor: Kemmer, N.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110730>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Theorie der Neutron-Proton Wechselwirkung

von N. Kemmer*).

(16. XII. 36.)

Inhaltsübersicht: Zur Beschreibung des aus einem Neutron und einem Proton bestehenden dynamischen Systems wird eine Wellengleichung angesetzt, der die Dirac'sche Gleichung des Einkörperproblems zugrundeliegt. Die mathematischen Eigenschaften der Gleichung werden untersucht. Der Ansatz ist nur dann relativistisch invariant, wenn die räumliche Abhängigkeit der Wechselwirkung die Form der δ -Funktion hat (Nahewirkung). Für Potentialfunktionen endlicher Ausdehnung geben die Rechnungen nur eine ungefähre Abschätzung der Relativitätskorrekturen, haben aber gegenüber den bisher gemachten¹⁾ analogen Abschätzungen den Vorzug, dass sie den Spin in relativistisch konsequenter Weise berücksichtigen. Es bleiben jedoch auch hier die relativistischen Korrekturen für Kraftreichweiten der üblich angenommenen Grössenordnung sehr klein. Sie verändern aber beim Übergang zur *Nahenkraft* das Ergebnis sehr erheblich; aus diesem Grunde können die unrelativistischen Rechnungen von THOMAS²⁾, der die Unverträglichkeit der Annahme einer Nahewirkung mit den experimentell bekannten Werten der Bindungsenergien leichter Kerne nachweist, nicht als entscheidend angesehen werden. Während es nicht unternommen wird, die Thomas'schen Rechnungen für H^3 relativistisch auszubauen, wird darauf hingewiesen, dass hier wie bei Thomas die Annahme der *normierbaren* δ -Funktion für die Wechselwirkung bereits mit einer endlichen Bindungsenergie des Deuterons unverträglich ist, so dass eine formal befriedigende Darstellung der N.-P.-Wechselwirkung als Nahewirkung ohnehin nicht möglich erscheint.

§ 1. Allgemeine Ansätze.

Wir betrachten ein Zweiteilchensystem, das aus einem Neutron (N) und einem Proton (P) besteht, deren Massen wir beide gleich M annehmen. Wie in der Diracgleichung wird dem Neutron der Impulsvektor p_i^N und der Matrixvektor α_i^N zugeordnet, wobei die α_i^N zusammen mit $\alpha_4^N = \beta^N$ den üblichen Vertauschungsrelationen

$$\alpha_\mu^N \alpha_\nu^N + \alpha_\nu^N \alpha_\mu^N = 2 \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 4)$$

genügen. Entsprechend werden die Grössen p_i^P , α_i^P und $\alpha_4^P = \beta^P$ für das Proton definiert. Ebenso gilt auch:

$$\alpha_\mu^P \alpha_\nu^P + \alpha_\nu^P \alpha_\mu^P = 2 \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 4).$$

*) Jetzt Beit Scientific Research Fellow, Imperial College of Science and Technology, London.

Alle N -Operatoren sind mit allen P -Operatoren vertauschbar, insbesondere gilt also:

$$\alpha_\mu^N \alpha_\nu^P - \alpha_\nu^P \alpha_\mu^N = 0.$$

Wenn wir für jedes der zwei Matrizensysteme von der üblichen vierreihigen Darstellung ausgehen, bekommen wir unmittelbar eine 16-reihige Darstellung des Gesamtsystems. Dementsprechend wird unsere Wellenfunktion ψ sechzehn Komponenten $\psi_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, \dots, 4$; $\beta = 1, \dots, 4$) besitzen, die sich wie die Produkte der Komponenten zweier Lösungen der Diracgleichung, $\psi_\alpha^{(1)} \psi_\beta^{(2)}$, transformieren werden.

Es soll nun dieses ψ der Wellengleichung

$$[-E + H] \psi(x^N, x^P) =$$

$$[-E + (\tilde{p}^N \tilde{\alpha}^N) + (\tilde{p}^P \tilde{\alpha}^P) + M(\beta^N + \beta^P) + \Omega] \psi(x^N, x^P) = 0 \quad (1)$$

genügen, wo Ω den Wechselwirkungsterm symbolisiert. (In unserer Bezeichnung haben E , p , M alle die Dimension einer Länge, sie unterscheiden sich um $\hbar \cdot c$, bzw. \hbar , bzw. $\hbar \cdot c^{-1}$ von den entsprechenden, in CGS-Einheiten gemessenen Grössen.) Bekanntlich muss sich nun

$$\int d\tilde{x}^N d\tilde{x}^P \{ \psi^* H \psi \}$$

wie die 44-Komponente eines Tensors transformieren. Abgesehen vom Term mit Ω ist dies für alle Glieder ohne weiteres gewährleistet; für die Wechselwirkung lässt jedoch diese Forderung nur die folgenden 5 Ansätze mit ihren Linearkombinationen offen³⁾:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= -\text{const. } \omega_i \cdot \delta(x^N - x^P). \\ \omega_1 &= \beta^N \beta^P \\ \omega_2 &= 1 - (\tilde{\alpha}^N \tilde{\alpha}^P) \\ \omega_3 &= \beta^N \beta^P [(\tilde{\sigma}^N \tilde{\sigma}^P) + (\tilde{\alpha}^N \tilde{\alpha}^P)] \\ \omega_4 &= (\tilde{\sigma}^N \tilde{\sigma}^P) - \Gamma^N \Gamma^P \\ \omega_5 &= \beta^N \beta^P \Gamma^N \Gamma^P \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dabei ist

$$\sigma_l = -i \alpha_i \alpha_k \quad (i, k, l \text{ zyklisch})$$

und

$$\Gamma = -i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3.$$

Es ist sehr wesentlich, dass für die Abstandsfunktion in der Wechselwirkung keine andere als die δ -Funktion genommen werden kann, ohne die relativistische Invarianz zu zerstören. Wohl bekannt ist, dass eine Wechselwirkung in relativistisch

invarianter Weise im allgemeinen nur mittels intermediärer Felder (Retardierung) beschrieben werden kann. Von STUECKELBERG⁴⁾ wurde aber darauf hingewiesen, dass auch noch die Möglichkeit jenes Nahwirkungsansatzes besteht*).

Im Sinne der Überlegungen von BLOCHNIZEW, MARGENAU und FEENBERG¹⁾ dürfte diese Gleichung aber auch bei nicht-singulärer Wechselwirkungsfunktion eine Abschätzung für die Grössenordnung der Relativitätskorrekturen geben, die bei den üblich angenommenen Kraftreichweiten auftreten. Jedenfalls ist es zunächst bequem, die δ -Funktion durch eine reguläre Funktion zu ersetzen, ohne Rücksicht auf mangelnde Invarianz. Wir schreiben allgemein

$$\Omega_i = -V(r) \omega_i, \quad (r = |x^N - x^P|)$$

können uns aber immerhin auf den Fall beschränken, dass V nur in einem kleinen Bereich $r \leq \varrho$ merklich von null verschieden ist. Speziell wird im folgenden das „Kastenpotential“

$$\begin{aligned} V(r) &= V & \text{für } r \leq \varrho \\ V(r) &= 0 & \text{für } r > \varrho \end{aligned} \quad (3)$$

benutzt werden. Um auf den relativistisch invarianten Grenzfall zu kommen, hat man $V = \text{const. } \varrho^{-3}$ zu setzen und den Grenzübergang zu $\varrho = 0$ zu vollziehen.

§ 2. Reduktion und Separation der Wellengleichung.

Wir betrachten den Operator

$$H = (\vec{p}^N \vec{\alpha}^N) + (\vec{p}^P \vec{\alpha}^P) + M(\beta^N + \beta^P) - \omega V(r).$$

Der Schwerpunktsimpuls $p^N + p^P$ ist mit H vertauschbar, also ein Integral; wir berücksichtigen von vornherein nur jenen Zustand, in dem er den Eigenwert null hat, rechnen also im Schwerpunktsystem. Wir können uns dann auf die Form

$$H = (\vec{\alpha} \vec{p}) + \beta M - \omega V(r) \quad (4)$$

*) Beim obigen Nahwirkungsansatz existiert freilich nicht mehr ein Unterschied zwischen gewöhnlichen Kräften und Heisenberg-Majorana'schen Austauschkräften, wie sie zur Erklärung der Massendefekte schwerer Kerne notwendig scheinen. Dies ist bereits ein Grund, diesen Ansatz abzulehnen; wir ziehen es jedoch vor, ohne Benutzung der Theorie der schweren Kerne zum gleichen Ergebnis zu gelangen.

beschränken, wobei

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x^N - x^P, \\ p_i &= \frac{1}{2} (p_i^N - p_i^P) = p_i^N = -p_i^P, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i^N - \alpha_i^P \\ \beta &= \beta^N + \beta^P \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

gesetzt wurde. Ein weiteres Integral ist dann der Drehimpuls

$$M_i = m_i + s_i$$

mit

$$m_i = x_k p_l - x_l p_k \quad (i, k, l \text{ zyklisch})$$

und

$$s_i = \hbar/2 \, i (\alpha_k^N \alpha_l^N + \alpha_k^P \alpha_l^P) \quad (i, k, l \text{ zyklisch}).$$

Wir bemerken, dass s_i auch als

$$s_i = \hbar/4 \, i (\alpha_k \alpha_l - \alpha_l \alpha_k)$$

geschrieben werden kann, und dass ausserdem, wegen

$$\alpha_i^N \alpha_i^P = 1 - \frac{1}{2} \alpha_i^2$$

und

$$\beta^N \beta^P = \frac{1}{2} \beta^2 - 1$$

auch alle ω_i als Funktionen der Matrizen α_i und β allein ausgedrückt werden können; im Folgenden wird uns daher ausschliesslich dieses System von nur vier 16-reihigen Matrizen zu beschäftigen haben. Es ist leicht zu sehen, dass es reduzibel ist.

Hierzu genügt es, eine von der Einheit verschiedene mit allen vier Matrices vertauschbare Matrix anzugeben*). Setzen wir

$$\begin{aligned} \gamma_i^N &= -i \beta^N \alpha_i^N & \gamma_i^P &= -i \beta^P \alpha_i^P \\ \gamma_4^N &= \beta^N & \gamma_4^P &= -\beta^P \end{aligned}$$

so ist eine solche durch

$$\chi = \Gamma^N \Gamma^P \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu^N \gamma_\mu^P + 1 \right)$$

gegeben, wie leicht nachzurechnen ist. Eine genauere Untersuchung ergibt für die 16 Eigenwerte dieser Matrix die Zahlen

$$\begin{aligned} &+ 1 \dots\dots 10\text{-mal} \\ &- 3 \dots\dots 5\text{-mal} \\ &+ 5 \dots\dots 1\text{-mal,} \end{aligned}$$

*) Herrn Dr. V. BARGMANN bin ich für den angeführten Reduzibilitätsbeweis sowie für anregende Diskussionen zu grossem Dank verpflichtet.

woraus gruppentheoretisch folgt, dass unsere 16-reihigen Matrizen in ein 10-, ein 5- und ein einreihiges Teilsystem zerfallen. Die Teilmatrizen erweisen sich als irreduzibel. Wegen $\text{Spur}(\alpha_i) = \text{Spur}(\beta) = 0$ entspricht bei der einreihigen Darstellung allen vier Matrizen die Null; für die anderen beiden Darstellungen wäre es leicht, die Matrizen anzuschreiben. Für das Folgende ist es jedoch zweckmässiger, diejenige Kombination der $\psi_{\alpha\beta}$, die zum Zerfallen führt, nur anzugeben, im übrigen aber bei Anwendung der α -Operatoren auf die Definition (5) sowie die übliche Darstellung

$$\alpha_i^{N,P} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i^{N,P} \\ \sigma_i^{N,P} & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta^{N,P} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

zurückzugreifen, und zwar natürlich so verstanden, dass α_μ^P auf den ersten, α_μ^N auf den zweiten Index von $\psi_{\alpha\beta}$ wirkt.

In der nachfolgenden Tabelle bedeuten die u_a die zum Zehnersystem (I) gehörenden Komponenten, die v_a die des Fünfersystems (II), schliesslich w die einzelne sechzehnte Komponente. Die angegebene Transformation der $\psi_{\alpha\beta}$ hat ausserdem die Eigenschaft, dass das Teilsystem der drei Matrizen s_i , die die infinitesimalen Drehungen des Spinraums beschreiben, noch weiter ausreduziert erscheint: bei Drehungen des Spinraums transformieren sich jeweils drei in der Tabelle nebeneinanderstehende Komponenten unter sich nach der irreduziblen Darstellung \mathfrak{D}_1 der Drehgruppe, während jede der einzeln stehenden Komponenten in sich übergeht (Darstellung \mathfrak{D}_0). Dies ist in der fünften Spalte der Tabelle hervorgehoben. In der folgenden Spalte steht der zur jeweiligen Komponentengruppe gehörende Eigenwert der Matrix $\frac{1}{2}\beta^2 - 1 = \omega_1$, die Diagonalform annimmt und den Spiegelungscharakter im Spinraum beschreibt. Schliesslich hat die obige Wahl der u, v, w noch die Eigenschaft, dass auch die anderen vier ω_i auf Diagonalform sind; ihre Eigenwerte werden in den folgenden Spalten angegeben. Die letzte Spalte bringt endlich die Abkürzungen, die wir für Produkte dieser Eigenwerte mit V benutzen, um in der folgenden Darstellung von den speziellen Unterschieden der verschiedenen ω_i unabhängig zu sein.

Wir suchen nun nach einer Lösung unserer Wellengleichung, die zur Drehimpulsquantenzahl j gehört. Ausserdem soll die Lösung entweder

a) den Spiegelungscharakter $(-1)^{j+1}$

oder

b) den Spiegelungscharakter $(-1)^j$

besitzen.

Tabelle.

				$\frac{1}{2}\beta^{2-1}$ $= \omega_1$	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	$V\omega_i$	
I	$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{11} + \psi_{33})$	$u_2 = \frac{1}{2}(\psi_{12} + \psi_{21} + \psi_{34} + \psi_{43})$	$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{22} + \psi_{44})$	\mathfrak{S}_1	1	0	2	0	1	a
		$u_4 = \frac{1}{2}(\psi_{14} - \psi_{41} - \psi_{23} + \psi_{32})$		\mathfrak{S}_0	-1	4	6	-4	-1	d
	$u_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{11} - \psi_{33})$	$u_6 = \frac{1}{2}(\psi_{12} + \psi_{21} - \psi_{34} - \psi_{43})$	$u_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{22} - \psi_{44})$	\mathfrak{S}_1	1	2	0	2	-1	b
	$u_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{13} - \psi_{31})$	$u_9 = \frac{1}{2}(\psi_{14} - \psi_{41} + \psi_{23} - \psi_{32})$	$u_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{21} - \psi_{42})$	\mathfrak{S}_1	-1	2	0	2	1	c
		$v_1 = \frac{1}{2}(\psi_{12} - \psi_{21} + \psi_{34} - \psi_{43})$		\mathfrak{S}_0	1	4	-6	-4	1	f
II	$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{13} + \psi_{31})$	$v_3 = \frac{1}{2}(\psi_{14} + \psi_{41} + \psi_{23} + \psi_{32})$	$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{24} + \psi_{42})$	\mathfrak{S}_1	-1	0	-2	0	-1	h
		$v_5 = \frac{1}{2}(\psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{34} + \psi_{43})$		\mathfrak{S}_0	1	-2	0	-2	-1	g
		$w = \frac{1}{2}(\psi_{14} + \psi_{41} - \psi_{23} - \psi_{32})$		\mathfrak{S}_0	-1	-2	0	-2	1	k

Da wir aus der Tabelle das Verhalten der einzelnen Komponenten bei Drehungen und Spiegelungen des Spinraums übersehen, lassen sich nach bekannten Formeln*) die zugehörigen Raumfunktionen sofort angeben, die auf eine Lösung mit den bekannten Eigenschaften führen. Wir führen hierzu die folgenden symbolischen Abkürzungen ein:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Y}_j^{(m)} &= \left(-\sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}} Y_j^{(m-1)}; \right. \\ &\quad \left. -m Y_j^{(m)}; +\sqrt{\frac{(j+m+1)(j-m)}{2}} Y_j^{(m+1)} \right) \\ \sqrt{2} j+1 \mathfrak{X}_j^{(m)} &= \left(+\sqrt{\frac{(j+m)(j+m+1)}{2}} Y_j^{(m-1)}; \right. \\ &\quad \left. -\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)} Y_j^{(m)}; +\sqrt{\frac{(j-m)(j-m+1)}{2}} Y_j^{(m+1)} \right) \\ \sqrt{2} j+1 \mathfrak{Z}_j^{(m)} &= \left(+\sqrt{\frac{(j-m)(j-m+1)}{2}} Y_j^{(m-1)}; \right. \\ &\quad \left. +\sqrt{(j+m)(j-m)} Y_j^{(m)}; +\sqrt{\frac{(j+m)(j+m+1)}{2}} Y_j^{(m+1)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Hierbei sind die $Y_j^{(m)}$ die normierten Kugelflächenfunktionen in gewohnter Bezeichnung. Es ergeben sich dann die folgenden Lösungsansätze: ($-j \leq m \leq +j$)

I a)

$$\left. \begin{aligned} (u_1; u_2; u_3) &= \mathfrak{X}_{j-1}^{(m)} \frac{A^1(r)}{r} + \mathfrak{Z}_{j+1}^{(m)} \frac{A^2(r)}{r} \\ u_4 &= Y_j^{(m)} \frac{D(r)}{r} \\ (u_5; u_6; u_7) &= \mathfrak{X}_{j-1}^{(m)} \frac{B^1(r)}{r} + \mathfrak{Z}_{j+1}^{(m)} \frac{B^2(r)}{r} \\ (u_8; u_9; u_{10}) &= \mathfrak{Y}_j^{(m)} \frac{C(r)}{r} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

*) Vgl. etwa: B. L. v. D. WAERDEN, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Leipzig, Springer, 1932, S. 70.

I b)

$$\left. \begin{aligned} (u_1; u_2; u_3) &= \mathfrak{Y}_j^{(m)} \frac{A(r)}{r} \\ u_4 &= 0 \\ (u_5; u_6; u_7) &= \mathfrak{Y}_j^{(m)} \frac{B(r)}{r} \\ (u_8; u_9; u_{10}) &= \mathfrak{X}_{j-1}^{(m)} \frac{C^1(r)}{r} + \mathfrak{Z}_{j+1}^{(m)} \frac{C^2(r)}{r} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

II a)

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 0 \\ (v_2; v_3; v_4) &= \mathfrak{Y}_j^{(m)} \frac{H(r)}{r} \\ v_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

II b)

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= Y_j^{(m)} \frac{F(r)}{r} \\ (v_2; v_3; v_4) &= \mathfrak{X}_{j-1}^{(m)} \frac{H^1(r)}{r} + \mathfrak{Z}_{j+1}^{(m)} \frac{H^2(r)}{r} \\ v_5 &= Y_j^{(m)} \frac{G(r)}{r} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

III a)

$$w = Y_j^{(m)} \frac{K(r)}{r} \quad (11)$$

III b)

$$w = 0.$$

Durch Einsetzen in die Wellengleichung folgen dann als Differentialgleichungen für die verschiedenen Radialkomponenten:

I a)

$$\left. \begin{aligned} (E+d)D + \frac{2j}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) A^1 - \frac{2(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} + \frac{(j+1)}{r} \right) A^2 &= 0 \\ (E+a)j A^1 - 2Mj B^1 + \frac{2j}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) D &= 0 \\ (E+a)(j+1) A^2 - 2M(j+1) B^2 - \frac{2(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} - \frac{(j+1)}{r} \right) D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned}
(E+c) j(j+1) C - \frac{2j(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) B^1 \\
- \frac{2j(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} + \frac{(j+1)}{r} \right) B^2 &= 0 \\
(E+b) j B^1 - 2Mj A^1 - \frac{2j(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) C &= 0 \\
(E+b) (j+1) B^2 - 2M(j+1) A^2 - \frac{2j(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} - \frac{(j+1)}{r} \right) C &= 0
\end{aligned} \right\} (12)$$

I b)

$$\left. \begin{aligned}
(E+b) j(j+1) B - 2Mj(j+1) A - \frac{2j(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) C^1 \\
- \frac{2j(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} + \frac{(j+1)}{r} \right) C^2 &= 0 \\
(E+c) j C^1 - \frac{2j(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) B &= 0 \\
(E+c) (j+1) C^2 - \frac{2j(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} - \frac{(j+1)}{r} \right) B &= 0 \\
(E+a) j(j+1) A - 2Mj(j+1) B &= 0
\end{aligned} \right\} (13)$$

II a)

$$(E+h) H = 0$$

II b)

$$\left. \begin{aligned}
(E+f) F - 2MG + \frac{2j}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) H^1 \\
- \frac{2(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} + \frac{(j+1)}{r} \right) H^2 &= 0 \\
(E+h) j H^1 + \frac{2j}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) F &= 0 \\
(E+h) (j+1) H^2 - \frac{2(j+1)}{\sqrt{2j+1}} i \left(\frac{d}{dr} - \frac{(j+1)}{r} \right) F &= 0 \\
(E+g) G - 2MF &= 0
\end{aligned} \right\} (14)$$

III a)

$$(E+k) K = 0$$

[III b) —]

Die Bedeutung der „Potentialkonstanten“ $a, b, \dots k$ wurde in der Tabelle auf Seite 52 erklärt. Die Differentialgleichungen sind auch für den Fall $j = 0$ gültig; aus diesem Grunde ist das Kürzen durch j in einigen Gleichungen vermieden worden. Aus Symmetriegründen ist mehrfach auch ein analoger Faktor $(j+1)$ stehen gelassen worden.

Die beiden Fälle II a) und III a) geben zu trivialen Gleichungen Anlass, die, wie sich später ergeben wird, von geringem Interesse sind. Wir erhalten also im wesentlichen drei Systeme radialer Differentialgleichungen, deren Lösung wir im nächsten Paragraphen im Spezialfall des Kastenpotentials vornehmen wollen.

§ 3. Integration der radialen Differentialgleichungen im Falle des Kastenpotentials.

Während bisher die Grössen $a, b, \dots k$ auch noch irgendwelche Funktionen von r hätten sein dürfen, beschränken wir uns nun auf den durch Gleichung (3) gegebenen Fall. Für $r \leq \varrho$ gelten dann die Gleichungen (12) bis (14) mit konstanten $a, \dots k$, für $r \geq \varrho$ dieselben Gleichungen mit $a=b=\dots=k=0$. Mittels einfacher Rechnung bekommt man in diesem Fall die nachfolgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} & \text{I a)} \\ & \left[\begin{aligned} & (E+d) \{ (E+a) (E+b) - 4 M^2 \} \\ & + 4 (E+b) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) \end{aligned} \right] D = 0 \\ & \left[\begin{aligned} & (E+c) \{ (E+a) (E+b) - 4 M^2 \} \\ & + 4 (E+a) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) \end{aligned} \right] j(j+1) C = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \text{I b)} \\ & \left[\begin{aligned} & (E+c) \{ (E+a) (E+b) - 4 M^2 \} \\ & + 4 (E+a) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) \end{aligned} \right] j(j+1) B = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{II b)} \\ & \left[(E+h) \{ (E+f) (E+g) - 4 M^2 \} + 4 (E+g) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) \right] F = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

Ihre Lösungen lassen sich sofort angeben, es sind bekanntlich, bis auf den Faktor $r^{\frac{1}{2}}$, Zylinderfunktionen von halbzahligen Index; da aber alle weiteren Radialkomponenten durch Differentiation aus C und D , bzw. B , bzw. F erhalten werden können, ist hiermit die Integration bereits vollständig erreicht. Es müssen nur noch die Lösungen im Gebiet $r \leq \varrho$ an die des Gebiets $r \geq \varrho$ angeschlossen werden; man würde zunächst meinen, dass zu verlangen ist, dass alle Komponenten einer Eigenlösung sich an der Grenze des Potentialtopfs stetig verhalten; eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dass diese Forderung nicht erfüllbar ist. Die physikalisch richtige Stetigkeitsforderung kann man dadurch finden, dass man den Grenzübergang von einem stetig veränderlichen Potential zum Fall des „Kastens“ verfolgt. Es lautet z. B. die erste Gleichung aus (12) bei beliebigem Potentialverlauf nach geringer Umformung:

$$\frac{d}{dr} [j A^1 - (j+1) A^2] = \frac{i \sqrt{2j+1}}{2} (E + d(r)) D + \left(\frac{j^2}{r} A^1 + \frac{(j+1)^2}{r} A^2 \right)$$

Wir integrieren beide Seiten von einem Punkt r_1 mit $0 < r_1 < \varrho$ bis zu r_2 , mit $r_2 > \varrho$ und erhalten:

$$\begin{aligned} & [j A^1 - (j+1) A^2]_{r_1}^{r_2} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} dr \left[\frac{i \sqrt{2j+1}}{2} (E + d(r)) D + \left(\frac{j^2}{r} A^1 + \frac{(j+1)^2}{r} A^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Unter der einzigen Voraussetzung, dass die Eigenfunktionen beschränkt sind, ist das Integral rechts eine stetige Funktion der Grenzen; dies gilt auch noch, wenn $d(r)$ bei ϱ einen endlichen Sprung erleidet. Daraus folgt aber sofort die Stetigkeit von $j A^1 - (j+1) A^2$ an der Stelle ϱ .

Analog können wir bei allen weiteren Gleichungen schliessen; es ergibt sich so die Forderung der Stetigkeit der folgenden Linearkombinationen radialer Eigenfunktionen:

I a)

$$\left. \begin{aligned} & D, \quad j A^1 - (j+1) A^2 \\ &= \frac{-2 i \sqrt{2j+1}}{(E+a)(E+b) - 4 M^2} \left[(E+b) \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) D - \frac{2 M j (j+1)}{r} C \right], \\ & j (j+1) C, \quad j (j+1) (B^1 + B^2) \\ &= \frac{+2 i j (j+1) \sqrt{2j+1}}{(E+a)(E+b) - 4 M^2} \left[(E+a) \frac{d}{dr} C - \frac{2 M}{r} D \right], \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

I b)

$$j(j+1)B, \quad j(j+1)(C^1+C^2) = \frac{+2ij(j+1)\sqrt{2j+1}}{E+c} \frac{d}{dr} B, \quad (19)$$

II b)

$$F, \quad jH^1 - (j+1)H^2 = \frac{-2i\sqrt{2j+1}}{E+h} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) F. \quad (20)$$

Weitere Stetigkeitsforderungen sind nicht mehr erfüllbar. Aus den obigen Bedingungen allein folgt bereits die Stetigkeit der Radialkomponente des Wahrscheinlichkeitsstroms, so dass auch physikalisch kein Grund bestehen kann, weitere Relationen zu erwarten.

Im Falle $E^2 > 4M^2$ hat die Eigenfunktion im Aussenraum oszillatorischen Typus; dann reicht eine passende Wahl ihrer Amplitude und Phase, wie gewohnt, hin, um zu jedem vorgegebenen Wert der Energie eine Eigenlösung zu konstruieren — wir gewinnen ein kontinuierliches Spektrum. Andererseits folgt aus den Stetigkeitsbedingungen für $E^2 < 4M^2$ (exponentieller Abfall im Aussenraum) eine Eigenwertbedingung für die Energie. Wir wollen auf diesen Fall etwas genauer eingehen.

Es sei also

$$\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{4M^2 - E^2}$$

reell. Ausserdem setzen wir zunächst voraus, dass auch die Grössen

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(E+d) \{ (E+a)(E+b) - 4M^2 \}}{(E+b)}}, \\ k_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(E+c) \{ (E+a)(E+b) - 4M^2 \}}{(E+a)}}, \\ k_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(E+h) \{ (E+f)(E+g) - 4M^2 \}}{(E+g)}} \end{aligned}$$

alle reell sind. Dann bekommen wir folgende Lösungen*):

I a)

Für $r \leq \varrho$:

$$D = \lambda_i \sqrt{k_1 r} J_{j+\frac{1}{2}}(k_1 r)$$

$$C = \mu_i \sqrt{k_2 r} J_{j+\frac{1}{2}}(k_2 r)$$

Für $r \geq \varrho$:

$$D = \lambda_a \sqrt{\kappa r} H_{j+\frac{1}{2}}^I(i \kappa r)$$

$$C = \mu_a \sqrt{\kappa r} H_{j+\frac{1}{2}}^I(i \kappa r).$$

*) Unsere Bezeichnung der Bessel- und Hankelfunktionen stimmt mit der bei E. JAHNKE und F. EMDE (Funktionentafeln) überein, ebenso die der weiter unten benutzten Grössen $S_n(2x)$.

Die Stetigkeitsbedingungen (18) liefern dann nach kurzer Rechnung:

Wenn $j = 0$:

$$\begin{aligned} k_1 \varrho \operatorname{ctg} k_1 \varrho &= \left(\frac{k_1 \varrho J_{-\frac{1}{2}}(k_1 \varrho)}{J_{+\frac{1}{2}}(k_1 \varrho)} \right) \\ &= 1 + \frac{E \{ (E+a)(E+b) - 4M^2 \}}{(E+b)(4M^2 - E^2)} (\kappa \varrho + 1). \end{aligned} \quad (21a)$$

Für $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{k_1 \varrho J_{j-\frac{1}{2}}(k_1 \varrho)}{(j+1) J_{j+\frac{1}{2}}(k_1 \varrho)} - 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{E \{ (E+a)(E+b) - 4M^2 \}}{(E+b)(4M^2 - E^2)} \cdot \frac{\kappa \varrho S_{j-\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho) + (j+1) S_{j+\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho)}{(j+1) S_{j+\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho)} \right] \\ &\cdot \left[\frac{k_2 \varrho J_{j-\frac{1}{2}}(k_2 \varrho)}{j J_{j+\frac{1}{2}}(k_2 \varrho)} - 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{E \{ (E+a)(E+b) - 4M^2 \}}{(E+a)(4M^2 - E^2)} \cdot \frac{\kappa \varrho S_{j-\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho) + j S_{j+\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho)}{j S_{j+\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho)} \right] \quad (21b) \\ &= \frac{4M^2}{(E+a)(E+b)} \left(1 + \frac{(E+a)(E+b) - 4M^2}{4M^2 - E^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Entsprechend im Fall

I b)

Für $r \leq \varrho$:

$$B = \mu_i \sqrt{k_2 r} J_{j+\frac{1}{2}}(k_2 r)$$

Für $r \geq \varrho$:

$$B = \mu_a \sqrt{\kappa r} H_{j+\frac{1}{2}}^I(i\kappa r).$$

Also

$$\frac{k_2 \varrho J_{j-\frac{1}{2}}(k_2 \varrho)}{j J_{j+\frac{1}{2}}(k_2 \varrho)} = 1 - \frac{E+c}{E} \frac{\kappa \varrho S_{j-\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho) + j S_{j+\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho)}{j S_{j+\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho)}, \quad (22)$$

wobei $j \geq 1$ ist (für $j = 0$ existiert keine Lösung). Schliesslich

II b)

Für $r \leq \varrho$:

$$F = \lambda_i \sqrt{k_3 r} J_{j+\frac{1}{2}}(k_3 r)$$

Für $r \geq \varrho$:

$$F = \lambda_a \sqrt{\kappa r} H_{j+\frac{1}{2}}^I(i\kappa r)$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{k_3 \varrho J_{j-\frac{1}{2}}(k_3 \varrho)}{(j+1) J_{j+\frac{1}{2}}(k_3 \varrho)} &= 1 - \frac{E+h}{E} \frac{\kappa \varrho S_{j-\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho) + (j+1) S_{j+\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho)}{(j+1) S_{j+\frac{1}{2}}(2\kappa \varrho)} \quad (23) \\ &\quad (j \geq 0). \end{aligned}$$

Ganz ähnliche Eigenwertbedingungen liessen sich auch für imaginäre k_i angeben, da jedoch alle etwaigen Lösungen dieser

Art physikalisch nicht von Interesse sind (vgl. dazu den folgenden Paragraphen), verzichten wir auf die Angabe jener Eigenwertbedingungen.

§ 4. Diskussion der Lösungen.

Es ist von vornherein zu erwarten, dass eine auf der Diracgleichung beruhende Theorie Zustände negativer Energie liefert. Im Fall verschwindender Wechselwirkung wird unser Zweiteilchensystem (im Schwerpunktsystem) offenbar folgende möglichen Energiewerte besitzen:

$$\alpha) \quad E = \sqrt{p^{N^2} + M^2} + \sqrt{p^{P^2} + M^2} = 2 \sqrt{p^2 + M^2}.$$

$$\beta) \quad E = \pm (\sqrt{p^{N^2} + M^2} - \sqrt{p^{P^2} + M^2}) = 0$$

$$\gamma) \quad E = -\sqrt{p^{N^2} + M^2} - \sqrt{p^{P^2} + M^2} = -2 \sqrt{p^2 + M^2}.$$

Die Lösungen der Gruppen $\beta)$ und $\gamma)$ können natürlich nur mit den Ideen der Löchertheorie interpretiert werden, sind aber für unsere Betrachtungen sinngemäss auszuschliessen. Genauer gesagt, beschränken wir uns im Fall beliebig grosser Wechselwirkung auf diejenigen Zustände, die bei adiabatischer Ausschaltung der Wechselwirkung in die Zustände der Gruppe $\alpha)$ übergehen. Damit sind unter anderen auch alle Lösungen der trivialen Gleichungssysteme II a) und III a) von der Betrachtung ausgeschlossen, da sie offensichtlich alle in Zustände der Gruppe $\beta)$ ($E = 0$) übergehen.

Ist die Wechselwirkung hinreichend schwach, so sind die zulässigen Energieterme der Gruppe $\alpha)$ mit denen der unrelativistischen Theorie identisch. In diesem Grenzfall ($V \ll M$) ist offenbar

$$k_1 = k_2 = \sqrt{M \left(E' + \frac{a+b}{2} \right)} \quad (E' = E - 2M)$$

und

$$k_3 = \sqrt{M \left(E' + \frac{f+g}{2} \right)},$$

so dass in der Gruppe I) die Grösse $\frac{1}{2}(a+b)$, in der Gruppe II) dagegen $\frac{1}{2}(f+g)$ mit dem unrelativistischen Potential V_u übereinstimmt. Es existieren hier bekanntlich gebundene Lösungen nur für positives V_u , d. h. reelle k_i . Die k_i bleiben nun auch für beliebig grosse Wechselwirkung dann und nur dann reell, wenn alle im betr. Lösungssystem vorkommenden Potentialkonstanten a, b, \dots positiv sind. In diesem Falle lässt sich die adiabatische Verschiebung irgendeines Eigenwertes vom unrelativistischen Fall zu beliebig hohen Potentialwerten verfolgen. Man erkennt aber aus

der Tabelle auf Seite 52, dass lauter positive Potentialkonstanten nur in besonderen Fällen auftreten, insbesondere für keine Linear-kombination der ω_i in den Systemen I) und II) zugleich, so dass im allgemeinen ein im Unrelativistischen vorkommender Energieterm bei hohen Potentialwerten gar nicht mehr existiert. Der physikalische Grund hierfür ist leicht einzusehen: in unserer Wellengleichung ist, wie in der Diracgleichung, der Spin nicht diagonal, die Potentialmöglichkeiten sind aber derart, dass mit einer Anziehung für gewisse Spinkomponenten eine Abstossung anderer verbunden ist. In dem Gebiet, in dem keine der Spinkomponenten mehr klein ist, verglichen mit einer anderen, bleibt daher die Stabilität des Eigenwertes nur unter ganz besonderen Umständen erhalten.

Es ist hierbei übrigens nicht gesagt, dass Lösungen für andere als lauter positive Potentialkonstanten überhaupt unmöglich sind. Man kann aber leicht verifizieren, dass alle weiteren Lösungen — und hierzu gehören alle etwaigen Lösungen mit imaginären k_i — beim adiabatischen Ausschalten der Wechselwirkung in Zustände der Gruppe β) (oder γ)) übergehen müssen. (Für die Zustände der Gruppe γ) ist die Forderung lauter *negativer* Potentialkonstanten charakteristisch.)

Setzen wir nun den experimentellen Wert der Bindungsenergie des Deuterons in irgendeine der Gleichungen (21) bis (23) ein, so ergibt sich jeweils eine Beziehung zwischen ϱ und V , das als Faktor in $a, b \dots$ auftritt. In der so erhaltenen Gleichung können wir insbesondere auch den Grenzübergang $\varrho \rightarrow 0, V \rightarrow \infty$ vollziehen. Man erkennt, dass bei diesem Vorgehen sich in größter Näherung folgende Relationen ergeben:

I a) $j = 0$:

$$k_1 \varrho \operatorname{ctg} k_1 \varrho = + \infty$$

Also

$$k_1 \varrho = n \pi, \quad n \geq 1$$

und insbesondere, wenn die eingesetzte Energie die des *tiefsten* Zustandes der Gruppe sein soll:

$$k_1 \varrho = \pi$$

Entsprechend liefert die Stetigkeitsbedingung für $j \geq 1$: entweder

$$\frac{k_1 \varrho J_{j-\frac{1}{2}}(k_1 \varrho)}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_1 \varrho)} = \infty$$

oder

$$\frac{k_2 \varrho J_{j-\frac{1}{2}}(k_2 \varrho)}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_2 \varrho)} = \infty,$$

d. h. falls wieder endliche Bindungsenergie für den tiefsten Zustand vorausgesetzt wird:

$$k_1 \varrho = x^{(j+\frac{1}{2})}$$

oder

$$k_2 \varrho = x^{(j+\frac{1}{2})}$$

$x^{(j+\frac{1}{2})}$ ist die erste positive Nullstelle der Besselfunktion $J_{j+\frac{1}{2}}(x)$. Für $j=1$ ist $x^{(\frac{3}{2})} = 4,49\dots$ Ganz analog wird in den anderen Gruppen:

I b)

$$\frac{k_2 \varrho J_{j-\frac{1}{2}}(k_2 \varrho)}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_2 \varrho)} = -\infty$$

also

$$k_2 \varrho = x^{(j+\frac{1}{2})}.$$

II b)

$$\frac{k_3 \varrho J_{j-\frac{1}{2}}(k_3 \varrho)}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_3 \varrho)} = -\infty$$

also

$$k_3 \varrho = x^{(j+\frac{1}{2})}, \quad [x^{(\frac{1}{2})} = \pi].$$

Übereinstimmend ergibt sich also in allen Fällen, dass, falls in der Grenze $\varrho = 0$ ein Zustand endlicher Bindung existieren soll,

$$V \sim k \sim \frac{\text{const}}{\varrho} \quad (25)$$

gelten muss.

(Eine Sonderbetrachtung erfordern allerdings die Fälle, in denen eine der Potentialkonstanten verschwindet. Dann ist offenbar auch $V^{\frac{1}{2}} \sim k$ möglich; andererseits ergeben sich auch dann Beziehungen der Form $k \varrho = \text{const}$, so dass in diesem Fall $V = \frac{\text{const}}{\varrho^2}$ zu fordern ist, was mit dem Ergebnis der unrelativistischen Theorie übereinstimmt.)

Jedenfalls lässt sich aber in keinem Falle die endliche Bindungsenergie des Deuterons mit einem Grenzübergang der Form

$$V = \frac{\text{const}}{\varrho^3} \quad (26)$$

vereinbaren, wie er für die normierbare δ -Funktion charakteristisch

ist. Die Gültigkeit dieser Beziehung ist nämlich damit äquivalent, dass in der Grenze die Wechselwirkungsenergie durch

$$C \cdot \int \left\{ \psi^* (x^N, x^P) \omega_i \psi (x^N, x^P) \right\}_{\substack{x^N=x \\ x^P=x}} dx$$

gegeben ist, wo C eine endliche Konstante ist. Dies wäre im Sinne von STUECKELBERG⁴⁾ ein befriedigender Ansatz im Rahmen einer allgemeinen Theorie. Bei Gültigkeit einer Beziehung wie (25) lässt sich hingegen das Resultat des Grenzüberganges gar nicht unabhängig von der Grenzbetrachtung formulieren und dürfte formal kaum befriedigend sein.

Andererseits zeigt jedoch die Überlegung, dass es sicher nicht erlaubt ist, beim Übergang zu unendlich kurzer Kraftreichweite unrelativistisch zu rechnen. Denn bekanntlich³⁾ ergibt die unrelativistische Theorie statt (25) die Forderung

$$V = \frac{\text{const}}{\varrho^2}. \quad (27)$$

Daher können die Überlegungen von THOMAS²⁾, der unter Annahme von (27) den Nachweis führt, dass die Bindungsenergie von H^3 unendlich wird, einer Kritik nicht standhalten und müssten in einer relativistischen Theorie wiederholt werden. Wir glauben jedoch auf Grund der formalen Überlegungen des vorhergehenden Absatzes, dass das Ergebnis (25) der Theorie des Deuterons bereits zeigt, dass die Erwägung der Möglichkeit von Nahekräften nicht sehr sinnvoll sein dürfte.

Lässt man trotzdem den Grenzübergang mit (25) zu, so kann man, wie auf S. 61 schon erwähnt, höchstens in einem der beiden Systeme I) oder II) einen gebundenen Zustand in der Grenze erwarten. Im Falle des Systems II) ist dann eindeutig der Zustand mit $j = 0$ und $k_3 \varrho = \pi$ der tiefste und in der Grenze einzige. (Für die Existenz anderer Zustände wäre nämlich $k_3 \varrho = \text{const} > \pi$ erforderlich.) Hingegen gibt es, falls stabile Zustände in der Gruppe I) existieren, noch verschiedene Möglichkeiten, je nachdem

$$1. \quad \sqrt{a d} \cdot 4,49 \dots > \sqrt{b c} \pi$$

oder

$$2. \quad \sqrt{a d} \cdot 4,49 < \sqrt{b c} \pi$$

gilt. Im ersten Fall wird offenbar der tiefste Zustand gegeben durch

$$k_1 \varrho = \pi$$

und gehört zum Eigenwert $j = 0$, im anderen Fall aber ist der durch

$$k_2 \varrho = 4,49 \dots$$

charakterisierte, zu I a) $j = 1$ gehörende der stabile. Andere Zustände treten sicher nicht in Konkurrenz, und nur im Falle $\sqrt{a d} 4,49 = \sqrt{b c} \cdot \pi$ bleiben beide in der Grenze gebunden.

Auf Grund des vorher Gesagten möchten wir aber diesen Ergebnissen keine grosse Bedeutung zusprechen.

§ 5. Beziehungen zur unrelativistischen Theorie, Relativitätskorrekturen.

Wir möchten zum Schlusse unsere Gleichung für endliche Potentialfunktionen betrachten. Sie kann hierbei nur die Aufgabe erfüllen, die relativistischen Korrekturen approximativ zu liefern. Überlegungen solcher Art wurden mehrfach an Hand der Schrödinger-Gordon'schen Wellengleichung angestellt¹⁾. Insbesondere ist der Ansatz von FEENBERG dem unseren ganz analog. Eine Berücksichtigung der Spinabhängigkeit der Kräfte konnte dort natürlich nicht erfolgen.

Es ist zweckmässig, hier die Näherung der Pauli'schen Spintheorie zu betrachten. Das Wesentliche hierzu können wir wieder aus der Tabelle auf Seite 52 ablesen. In der Pauli'schen Näherung wird unsere Wellenfunktion die vier grossen Komponenten ψ_{33} , ψ_{34} , ψ_{43} , ψ_{44} besitzen, daraus folgt nach der Tabelle, dass im System I)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_5), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2 + u_6), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(u_3 + u_7)$$

gross sind, im System II) nur

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_5).$$

Das System I) gibt also im unrelativistischen Grenzfall die Triplettzustände, das System II) die Singlettzustände. Ferner sind im System I a) die grossen Komponenten mit den Kugelfunktionen Y_{j-1} und Y_{j+1} multipliziert, im System I b) mit Y_j . Es besteht also die folgende Zuordnung:

$$\begin{array}{lll} \text{I a)} & s = 1 & j = l \pm 1 \\ \text{I b)} & s = 1 & j = l \\ \text{II b)} & s = 0 & (j = l). \end{array} \quad (28)$$

Den Grundzustand des Deuterons muss uns daher das System I a) liefern; das zugehörige „Potential“ ist $\frac{1}{2}(a+b)$. Der für die

Streuung wichtige Singlettzustand (System II b)) hat hingegen das Potential $\frac{1}{2}(f+g)$.

Die Charakterisierung der verschiedenen möglichen Potentialansätze durch die bisher benutzten Grössen a, b, \dots ist freilich in diesem Zusammenhang unvorteilhaft.

Eine bessere Übersicht gewinnt man, wenn man die Komponenten der Wellenfunktion in vier Gruppen aufteilt im Sinne der Pauli'schen Zerspaltung in grosse und kleine Komponenten.

Wir schreiben also die Komponenten in folgender Reihenfolge:

1. $\alpha = 3,4 \quad \beta = 3,4$
2. $\alpha = 1,2 \quad \beta = 3,4$
3. $\alpha = 3,4 \quad \beta = 1,2$
4. $\alpha = 1,2 \quad \beta = 1,2,$

wo α den ersten, β den zweiten Index von $\psi_{\alpha\beta}$ bedeutet. Die fünf Wechselwirkungsansätze lassen sich dann sehr übersichtlich in der Gestalt von Übermatrizen schreiben, die als Elemente ausser der Einheitsmatrix nur die Pauli'schen Spinoperatoren des Protons und Neutrons enthalten. Es ist nämlich bei dieser Anordnung:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \begin{pmatrix} I & & & \\ -I & & & \\ & -I & & \\ & & I & \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} I & & & -(\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) \\ & I & -(\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & \\ & -(\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & I & \\ -(\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & & & I \end{pmatrix}, \\ \omega_3 &= \begin{pmatrix} (\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & & & (\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) \\ & -(\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & -(\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & \\ & -(\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & -(\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & \\ (\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & & & (\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) \end{pmatrix}, \\ \omega_4 &= \begin{pmatrix} (\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & & & -I \\ & (\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & -I & \\ & -I & (\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) & \\ -I & & & (\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P) \end{pmatrix}, \quad \omega_5 = \begin{pmatrix} & & I \\ & -I & \\ -I & & \\ I & & \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Ansätze ω_1 und ω_2 entsprechen also dem spinunabhängigen Potential der unrelativistischen Näherung, während ω_3 und ω_4 dort den Spinoperator $(\vec{\sigma}^N \vec{\sigma}^P)$ mit den Eigenwerten $+1$ für den Triplett-, -3 für den Singlettzustand enthält.

ω_5 gibt im unrelativistischen Grenzfall kein Wechselwirkungspotential. Das gleiche Ergebnis hätten wir natürlich durch Ein-

setzen der Werte von $\frac{1}{2}(a+b)$ bzw. $\frac{1}{2}(f+g)$ aus der Tabelle (S. 52) gewinnen können.

Unter Benutzung der Darstellung (29) lassen sich natürlich auch leicht höhere Näherungen der Pauli'schen Spintheorie bequem bestimmen.

Eine weitere mögliche Ergänzung des Bisherigen besteht darin, dass man den Majorana'schen Operator des Koordinatenaustausches einführt. In den Paragraphen, in denen uns im wesentlichen der Grenzfall der δ -Funktion interessierte, wäre seine Mitnahme sinnlos gewesen, und eine Ergänzung in dieser Richtung ist jetzt noch leicht möglich. Wie stets im Zweikörperproblem besteht der Einfluss des Majoranaoperators lediglich darin, dass in den Wechselwirkungstermen die Änderung

$$Y_n \longrightarrow (-1)^n Y_n$$

vorgenommen werden muss.

Daher müssen hier folgende Ersetzungen in den radialen Differentialgleichungen (12), (13), (14) vorgenommen werden:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I a)} & d \longrightarrow (-1)^j d \quad a \longrightarrow (-1)^{j+1} a \\ & c \longrightarrow (-1)^j c \quad b \longrightarrow (-1)^{j+1} b \\ \text{I b)} & b \longrightarrow (-1)^j b \quad c \longrightarrow (-1)^{j+1} c \\ & a \longrightarrow (-1)^j a \\ \text{II b)} & f \longrightarrow (-1)^j f \quad h \longrightarrow (-1)^{j+1} h \\ & g \longrightarrow (-1)^j g \end{array} \right\} \quad (30)$$

mit entsprechenden Änderungen in allen nachfolgenden Gleichungen. Auch hierauf wollen wir nicht ausführlicher eingehen.

Im Prinzip ermöglichen unsere Gleichungen also für irgendeine beliebige Wahl des Potentialansatzes die Änderungen gegenüber einer unrelativistischen Theorie abzuschätzen. Wir möchten jedoch hier im Hinblick auf die vielen Möglichkeiten darauf verzichten, zahlenmässige Angaben zu machen. Grössenordnungsmässig bleiben die Abschätzungen von MARGENAU (l. c.) sicherlich auch hier bestehen, und zwar einschliesslich des verkleinernden Faktors 4, auf den FEENBERG (l. c.) hingewiesen hat. Bei Gleichsetzung aller Potentialkonstanten genügen nämlich, wie leicht zu sehen ist, unsere ψ -Funktionen identisch denselben Wellengleichungen zweiter Ordnung wie die Feenberg'schen, und es ist klar, dass die bei uns tatsächlich auftretende Verschiedenheit der Potentialkonstanten in grössenordnungsmässiger Hinsicht nichts

ändern wird und auch hier erst bei Benutzung einer Kraftreichweite $< 10^{-13}$ cm die Relativitätskorrekturen von Bedeutung wären.

Herrn Prof. Dr. W. PAULI möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für zahlreiche fördernde Ratschläge und Diskussionen bestens danken.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.

Literatur.

- 1) D. BLOCHNIZEW, Sow. Phys. **8**, 270, 1935; H. MARGENAU, Phys. Rev. **50**, 342, 1936; E. FEENBERG, Phys. Rev. **50**, 674, 1936.
 - 2) L. H. THOMAS, Phys. Rev. **47**, 903, 1935.
 - 3) H. BETHE und R. F. BACHER, Rev. Mod. Phys., 1. IV. **36**, S. 191.
 - 4) E. C. G. STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **9**, 389, 1936.
-