

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 9 (1936)  
**Heft:** VII

**Artikel:** Die Beleuchtung der Atmosphäre  
**Autor:** Gruner, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-110650>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Die Beleuchtung der Atmosphäre

von P. Gruner.

(5. IX. 36.)

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich versucht, eine Formel aufzustellen, die es ermöglicht, in einer gewissen Annäherung die Beleuchtung der Atmosphäre durch die Sonne zu berechnen, sofern die Sonne unterhalb des Horizontes des Beobachters steht. Seither sind verschiedene einfachere Formeln<sup>2)</sup> für beliebige Sonnenhöhe gegeben worden, die aber mit ebenen, statt mit gekrümmten atmosphärischen Schichten rechnen, also eine Annäherung bedeuten, die jedenfalls bei tiefem Sonnenstande nicht mehr zulässig ist. Im folgenden wird nun versucht, einen Zwischenweg einzuschlagen.

Es mögen die Sonnenstrahlen als (monochromatisches) unpolarisiertes Parallelstrahlenbündel mit einer Intensität  $J_0$ , unter einer Zenitdistanz  $Z = 90^\circ - \delta$ , die Atmosphäre treffen. Ein Beobachter  $B$  (bzw.  $B'$ ) blicke im Sonnenvertikal unter einer Zenitdistanz  $\xi = 90^\circ - \varepsilon$  nach dem Himmel (wobei die atmosphärische Refraktion nicht berücksichtigt wird); der Streuwinkel des Sonnenlichtes in die Blickrichtung sei  $\varphi = Z - \xi = \varepsilon - \delta$ . Folgende geometrische Beziehungen ergeben sich aus Fig. 1, wenn  $R$  der Erdradius,  $H$  (in km) die Grenzhöhe der Atmosphäre ist:

$$\left. \begin{aligned} BS_0 &= S = \sqrt{2RH + H^2 + R^2 \sin^2 \delta - |R \sin \delta|}; \\ BT &= L = \sqrt{2RH + H^2 + R^2 \sin^2 \varepsilon} - R \sin \varepsilon; \\ NC &= \varrho = R(1 - \cos \delta); \quad BC = \sigma = |R \sin \delta|; \\ BN &= b = 2R \sin \delta/2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Helv. Phys. Acta **5**, 145, 1932. In diese Arbeit hat sich ein Irrtum eingeschlichen: S. 150, Zeile 9 von unten ergibt das Integral:  $-n_0 \frac{L}{\lambda H} (e^{-\lambda h} - 1)$ , und dem entsprechend kommt in die Schlussformel S. 152 noch der Faktor  $e^{-K_0} \frac{L}{\lambda H}$  hinzu; entsprechend ist der Wert für  $A$  zu erweitern; numerische Berechnungen mit der korrigierten Formel werden demnächst veröffentlicht.

<sup>2)</sup> R. KNEPPEL, Gerl. Beitr. Geophys. **43**, 247, 1934; C. W. ALLEN, Gerl. Beitr. Geophys. **46**, 32, 1935.

Die Atmosphäre sei in konzentrischen, homogenen Schichten angeordnet, deren Dichte bzw. Molekülzahl  $n$  pro  $\text{cm}^3$  mit der Höhe abnimmt; es sei in der Höhe  $\eta$ :  $n = n_0 f(\eta)$ ;  $\int f(\eta) d\eta = F(\eta)$ , wobei  $f(0) = 1$ ,  $f(H) = F(H) = 0$ . Für die wirklichen Berechnungen wird  $f(\eta) = e^{-\beta\eta}$ ,  $F(\eta) = -1/\beta e^{-\beta\eta}$  vorausgesetzt, wobei jedenfalls  $\beta H \geq 10$  sein muss.

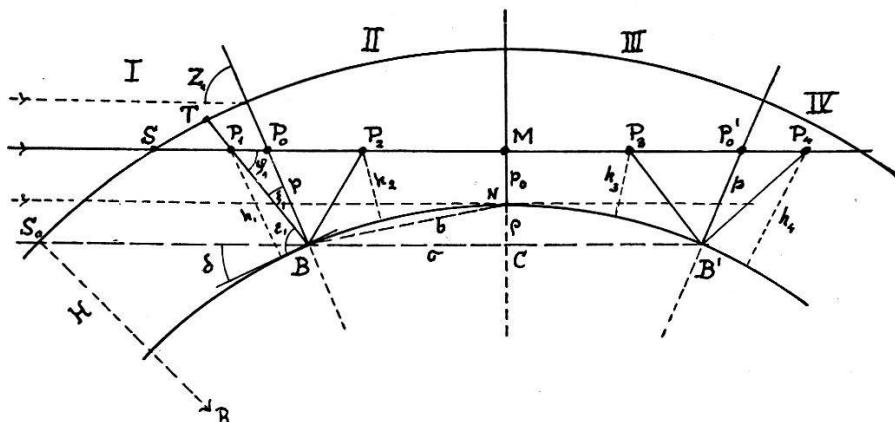


Fig. 1.

Sei  $\Gamma(\varphi)$  der Zerstreuungskoeffizient eines Moleküls,  $K = K_0 f(\eta)$  der Auslösungskoeffizient (pro 1 km) in der Höhe  $\eta$ , so erscheint die anvisierte Himmelszone, bei blosser Berücksichtigung der primären Diffusion und Extinktion, mit der Beleuchtungsintensität

$$J = J_0 \Gamma \int_{L_u}^L n e^{-K_0 \int_B^P f(\eta) dl} e^{-K_0 \int_P^S f(\eta) ds} dl \quad (2)$$

worin  $L_u$  die untere Grenze des noch beleuchteten Sehstrahles angibt (s. Fig. 2).

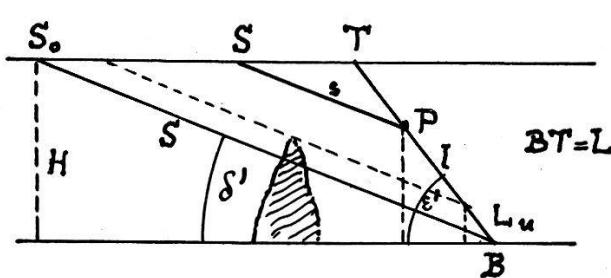


Fig. 2.

Die grösste Annäherung zur Berechnung von  $J$  erhält man, wenn die atmosphärischen Schichten als eben angenommen werden. Es ist dann zweckmässig, die Grössen  $BS_0 = S$  und  $BT = L$  für gegebene  $\epsilon$  und  $\delta$  nach den obigen Formeln (1) richtig zu berechnen, diese Werte (s. Fig. 2) von  $B$  aus bis zur Grenzebene

in der Höhe  $H$  heraufzuklappen und dann mit den veränderten Winkeln  $\varepsilon'$  und  $\delta'$  zu rechnen, wobei

$$\sin \varepsilon' = \frac{H}{L} \quad \text{und} \quad \sin \delta' = \frac{H}{S} \quad (3)$$

wird. Die Exponenten im Ausdruck (2) für  $J$  werden dann:

$$K_0 \int_B^P f(\eta) d\eta = \frac{K_0}{\sin \varepsilon'} \{F(h) - F(0)\} \quad (4)$$

$$K_0 \int_P^S f(\eta) ds = -\frac{K_0}{\sin \delta'} \{F(h)\}, \quad \text{da} \quad F(H) = 0. \quad (5)$$

Daraus ergibt sich, unter Benützung des Ausdrucks

$$D = \frac{\sin \delta'}{\sin \varepsilon' - \sin \delta'} = \frac{L}{S - L} \quad (6)$$

$$J = J_0 \frac{\Gamma n_0}{K_0} D e^{K_0 \frac{L}{H} F(0)} \left\{ 1 - e^{K_0 \frac{L}{HD} (H_u)} \right\}, \quad (7)$$

worin  $H_u = L_u \sin \varepsilon'$ . Spezialisiert für

$$F(\eta) = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta \eta}, \quad \text{wobei} \quad K_0 F(H_u) = -\frac{K_u}{\beta},$$

folgt:

$$J = J_0 \frac{\Gamma n_0}{K_0} D e^{-\frac{K_0}{H\beta} L} \left\{ 1 - e^{-\frac{K_u}{H\beta} (S-L)} \right\}. \quad (8)$$

Diese Berechnung, die den Ausdrücken von C. W. ALLEN (l. c.) entspricht, wird für flache Winkel  $\varepsilon$  und  $\delta$  ungenau, für negative  $\delta$  ist sie unbrauchbar. Um sie doch verwenden zu können, muss die Krümmung der Schichten in irgend einer Form berücksichtigt werden. Wir zerlegen die von der Sonne beleuchtete Atmosphäre (im Sonnenvertikal) in 4 einzelne Gebiete, von denen jedes für sich aus ebenen Schichten besteht, so dass jedes Gebiet gegen das nächste geknickt ist (s. Fig. 1 und 3).

Für die Exponenten im Ausdruck (2) ist die Formel (4) nach wie vor unverändert zu verwenden, aber in (3) ist:

$$\text{Exp} = K_0 \int_P^S f(\eta) ds = \frac{K_0}{\sin \delta''} \{F(S) - F(P)\}$$

passend zu zerlegen in die verschiedenen Integrationsstrecken:  $S \rightarrow P_1 \rightarrow P_0$ ;  $P_0 \rightarrow P_2 \rightarrow M$ ;  $M \rightarrow P_3 \rightarrow P_0'$ ;  $P_0' \rightarrow P_4$ , wobei jedesmal ein anderes, passendes  $\sin \delta'$ , mit richtigem Vorzeichen, zu finden ist.

Zum bisherigen  $\sin \delta' = H/S$  in den Gebieten I und IV kommt für die Gebiete II und III hinzu

$$\sin \delta_0 = \frac{\varrho}{b}. \quad (3a)$$

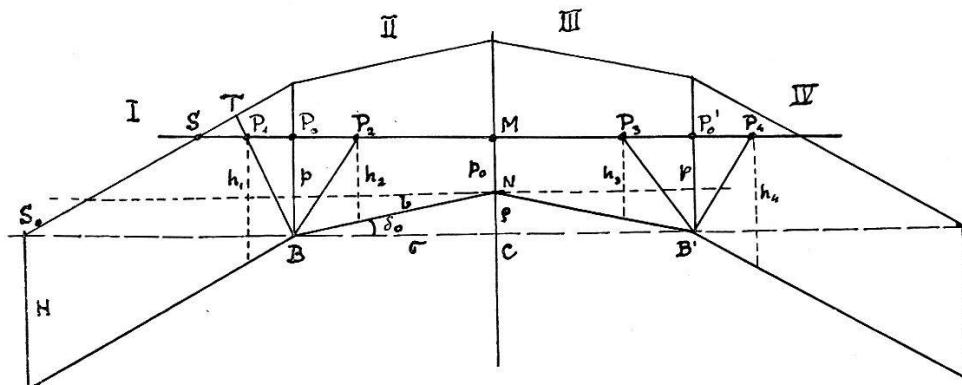


Fig. 3.

So findet man für diesen Exponenten (5) für einen im Gebiet I anvisierten Punkt  $P_1$ :

$$\text{Exp}_1 = - \frac{K_0}{\sin \delta'} F(h_1),$$

ebenso im Gebiet II für  $P_2$ :

$$\text{Exp}_2 = - \frac{K_0}{\sin \delta_0} F(h_2).$$

Für die Punkte  $P_3$  und  $P_4$  im Gebiet III und IV nehme man zunächst die ganze Strecke  $S \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow P_0'$  und füge dann hinzu: für  $P_3$  die negativ gezählte Strecke  $P_0'P_3$ , für  $P_4$  die positiv gezählte Strecke  $P_0'P_4$ .

Von  $P_0$  bis  $P_0'$  folgt

$$2 \int_M^{P_0'} f(\eta) ds = \frac{2}{\sin \delta_0} \{F(p) - F(p_0)\} = 2 BG(p, p_0)$$

gesetzt. Daraus ergibt sich für  $P_3$  in III:

$$\text{Exp}_3 = - K_0 \left\{ \frac{1}{\sin \delta'} F(p) + 2 BG + \frac{1}{\sin \delta_0} (F(p) - F(h_3)) \right\}$$

und für  $P_4$  in IV:

$$\text{Exp}_4 = -K_0 \left\{ \frac{2}{\sin \delta'} F(p) + 2 BG - \frac{1}{\sin \delta'} F(h_4) \right\}$$

Für die weitere Rechnung muss  $F(\eta) = -1/\beta e^{-\beta \eta}$  eingeführt werden. Ferner ist zu beachten, dass  $\varrho = p - p_0$  sehr klein angenommen werden kann; dann ergibt die Reihenentwicklung für  $BG$  den Wert  $b \cdot e^{-\beta p}$  und es wird:

$$\text{Exp}_1 = + \frac{K_0}{\beta \sin \delta'} e^{-\beta h_1}$$

$$\text{Exp}_2 = + \frac{K_0}{\beta \sin \delta_0} e^{-\beta h_2}$$

$$\text{Exp}_3 = + \frac{K_0}{\beta} \left\{ \left( \frac{1}{\sin \delta'} + \frac{1}{\sin \delta_0} + 2b\beta \right) e^{-\beta p} - \frac{1}{\sin \delta_0} e^{-\beta h_3} \right\}$$

$$\text{Exp}_4 = + \frac{K_0}{\beta} \left\{ 2 \left( \frac{1}{\sin \delta'} + b\beta \right) e^{-\beta p} - \frac{1}{\sin \delta'} e^{-\beta h_4} \right\}$$

Die grosse Schwierigkeit liegt nun in der nicht ganz einfachen Abhängigkeit der Grösse  $p$  von  $h$ ! Soll der Ausdruck (3) ohne weiteres integriert werden, so muss man  $p = h \pm$  Konstante einführen. Das bedeutet natürlich eine sehr grobe Annäherung, ist aber der einzige gangbare Weg. So setzen wir in  $\text{Exp}_3$ :  $p = h_3 + \varrho$ , in  $\text{Exp}_4$   $p = h_4 - \varrho$  (es könnte  $\varrho$  noch mit einem willkürlichen Bruchfaktor, der eine Funktion von  $\varepsilon$  sein könnte, versehen werden, aber es bestehen dann keine Anhaltspunkte, um denselben festzulegen).

Dann lässt sich allgemein setzen:

$$\text{Exp} = \frac{K_0}{\beta \sin \delta''} e^{-\beta h},$$

wobei für die Gebiete I bzw. II:  $\delta'' = \delta'$  bzw.  $\delta_0$  wird, und für die Gebiete III und IV zu setzen ist:

$$\frac{1}{\sin \delta''} = \frac{1}{\sin \delta_3} = \left( \frac{1}{\sin \delta'} + \frac{1}{\sin \delta_0} + 2b\beta \right) e^{-\beta \varrho} - \frac{1}{\sin \delta_0}$$

$$\frac{1}{\sin \delta''} = \frac{1}{\sin \delta_4} = 2 \left( \frac{1}{\sin \delta'} + b\beta \right) e^{+\beta \varrho} - \frac{1}{\sin \delta'}.$$

In der auch jetzt gültigen Schlussformel (8) für  $J$  ist dann der Ausdruck (6) für jedes Gebiet besonders zu berechnen:

$$D = \frac{\sin \delta''}{\sin \varepsilon' - \sin \delta''} = \frac{L}{S - L};$$

für  $L$  ist nach wie vor die Formel (1) zu verwenden, aber  $S$  wird in jedem Gebiet anders:

$$S_I = S \text{ (s. Formel (1))}$$

$$S_{II} = H \frac{b}{\varrho} \text{ *)}$$

$$S_{III} = H \left\{ \left( \frac{S_I}{H} + \frac{b}{\varrho} + 2b\beta \right) e^{-\beta\varrho} - \frac{b}{\varrho} \right\}$$

$$S_{IV} = H \left\{ 2 \left( \frac{S_I}{H} + b\beta \right) e^{+\beta\varrho} - \frac{S_I}{H} \right\}.$$

Ist auch hier  $\beta\varrho$  als hinreichend klein anzunehmen, so wird  $S_{III} = S_{IV} = S_I + 2b\beta H$ . Ist dies nicht zulässig, so ist schon in der Reihentwicklung für  $BG$  ein genauerer Wert

$$= \frac{b}{\beta\varrho} e^{-\beta p} (1 - e^{\beta\varrho})$$

einzuführen, doch scheint dies gegenüber den andern, größeren Annäherungen keine Rolle zu spielen.

Numerische Berechnungen werden später mitgeteilt werden.

Bern, Physikalisches Institut  
(theoret. Abteilung) der Universität.

---

\*) *Anmerkung bei der Korrektur:* Um einen stetigen Übergang von  $S_I$  nach  $S_{II}$  zu erhalten, muss der Ausdruck  $S_{II}$  noch in gleicher Weise wie  $S_{III}$  erweitert werden.