

Zeitschrift:	Helvetica Physica Acta
Band:	9 (1936)
Heft:	V
Artikel:	Systematische Untersuchungen an durch Resonanz erregten Röhren mit Hilfe einer neuen Messmethode
Autor:	Hardung, Viktor
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-110631

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

**Systematische Untersuchungen an durch Resonanz erregten
Röhren mit Hilfe einer neuen Messmethode**
von Viktor Hardung.
(10. IV. 36.)

Inhaltsangabe: Aufgebaut auf dem Schalldüsenprinzip wird eine sehr empfindliche Methode angegeben, die gestattet, in einem beliebig grossen Frequenzbereich Resonanzen schwingender Hohlräume bis auf einige Promille genau zu messen.

Die Methode wird angewendet, um die Frequenzen von offenen und gedackten Pfeifen systematisch als Funktion von Länge, Querschnitt und Mündungsweite zu untersuchen.

Auf Grund einer von WEBSTER zuerst angegebenen allgemeinen theoretischen Methode wird versucht, eine Theorie beidseitig offener Pfeifen zu geben. Dieselbe besitzt methodisch einen gewissen Vorteil vor der Helmholtzschen Theorie, indem sie die Resonanzfrequenz direkt, d. h. nicht auf dem Umweg über die Endkorrektion zu bestimmen gestattet. Es ergibt sich daraus auch bei offenen Pfeifen die Möglichkeit einer $\lambda/4$ -Schwingung, sobald wenigstens ein Rohrende eine Verengung aufweist. Experimentell wurde dieselbe mit Sicherheit nur festgestellt, wenn eine der beiden Pfeifenmündungen fast ganz geschlossen war.

In bezug auf eine genauere Wiedergabe der Resonanzfrequenzen ist jedoch die Helmholtzsche Theorie in allen hier untersuchten Fällen weit überlegen.

Einleitung.

Die vorliegende Untersuchung entstand ursprünglich aus einer Zusammenarbeit mit einem Vertreter der Musikwissenschaft, Herrn Dr. M. BUKOFZER in Basel. Im Verlaufe seiner Untersuchungen¹⁾ entstand die Frage, wie sich bei einfachen gedackten Pfeifen der erste Oberton (Duodezime) zum Grundton verhält. Die Helmholtzsche Theorie gibt auf diese Frage eine eindeutige Antwort, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die betreffende Pfeife durch Resonanz erregt, mit einem Mündungsflansch versehen und dass überdies die Wellenlänge gross gegenüber den Querdimensionen der benutzten Pfeife ist. In den für die Musikwissenschaft in Betracht kommenden Fällen sind diese Voraussetzungen, ausser der letztgenannten nie erfüllt, denn in der Praxis geschieht ja die Erregung durch Anblasen und ein Mündungsflansch von der hier benutzten Art hätte keinen Sinn.

¹⁾ Zeitschr. f. Phys. 99, 643 (1936) Heft 9 und 10.

Es schien mir deshalb auch von Interesse, einmal eine Versuchsreihe unter den von der Theorie geforderten Bedingungen anzustellen. Merkwürdigerweise liegen bis jetzt noch wenig systematische Versuche in dieser Richtung vor¹⁾. Von der grossen Zahl der Bestimmungen des überstehenden Pfeifenendes beziehen sich alle auf praktische Fälle (Orgelpfeifen und andere Blasinstrumente). Aus der grossen Zahl dieser Arbeiten seien hier nur die Untersuchungen von BLAIKLEY²⁾ und von den neueren Arbeiten die von S. H. ANDERSON und F. C. OSTENSEN³⁾ genannt, die jedoch mit Rücksicht auf die Praxis ebenfalls ohne Mündungsflansch gemessen haben.

Die experimentelle Methode.

Im Gegensatz zu den älteren Bestimmungen der Mündungskorrektion von Pfeifen, die mit einer unveränderlichen Tonquelle, meist einer Stimmgabel gemacht sind, und bei denen die Pfeife in ihrer Länge kontinuierlich verändert wird, wurde hier das umgekehrte Verfahren gewählt. Die Pfeifen besassen feste Längen und der zur Erregung benutzte Ton wurde kontinuierlich verändert, bis Resonanz eintrat. Dass in bezug auf die Ermittlung der Grundfrequenzen beide Verfahren gleichwertig sind, ist selbstverständlich. Anders liegen indessen die Verhältnisse bei den Obertönen. Nach der Helmholtzschen Theorie hängt das überstehende Pfeifenende explizite nur von der Frequenz und den Rohr- und Mündungsquerschnitten ab. Würde man nach der älteren Methode das überstehende Ende als Funktion von Länge bzw. Wellenlänge und Querschnitt bestimmen, so könnte man dann nur mit Hilfe einer graphischen Methode ähnlich derjenigen, die zur Auswertung der Helmholtzschen Gleichungen angewandt wird, das Verhältnis von Oberton zum Grundton ermitteln. Dass hingegen ein direkteres Verfahren bequemer und sicherer zum Ziel führt, liegt auf der Hand.

Es wurden nun zuerst Versuche mit einfachen gedackten Pfeifen angestellt, deren Querschnitt kreisförmig und über die ganze Länge konstant war. Die Länge der aus Messingrohren hergestellten Pfeifen (Wandstärke 0,05 cm) variierte zwischen 24 cm und 4,5 cm. Ihre Durchmesser zwischen 0,6 und 1,8 cm. Zur Erregung der Resonanz wurde ein Schwebungstongenerator benutzt.

¹⁾ H. P. LEOPOLD, Über die Eigenschwingungen offener Pfeifen. Zeitschr. f. techn. Phys. **13**, 222, 1932.

²⁾ BLAIKLEY, Phil. Mag. **5** (7) 339, 1879.

³⁾ S. H. ANDERSON and F. C. OSTENSEN, Phys. Rev. **31**, 267, 1928.

In einen seiner Schwingkreise war ein Präzisionskondensator von SEIBT eingeschaltet, dessen fester und beweglicher Teil je aus einem Block gefräst und in Steinen gelagert sind. Auf einem grossen Teilkreis konnten dann die Zehntelgrade direkt abgelesen werden. Durch Zuschalten fester Kondensatoren wurden verschiedene Messbereiche eingestellt.

Die Erregung geschah bei den längeren Pfeifen, die am leichtesten ansprachen, mit Hilfe eines Telephons, das in genügender Entfernung (mindestens dem doppelten Mündungsdurchmesser) von der Mündung aufgestellt war. Zur Erregung der kürzeren Pfeifen diente ein grosser dynamischer Lautsprecher von VOIGT in Verbindung mit einem Hilfstongenerator und einem leistungsfähigen Verstärker, dessen Endstufe eine Marconi-Px 25 Röhre bildete¹⁾. Der Hilfsgenerator wurde verwendet, da der zur Verfügung stehende Stimmgabelsatz nicht ausreichte, um den Hauptgenerator über 1536 Hertz hinaus zu eichen. Die Messung geschieht dann auf folgende Weise: Mit dem Hilfsgenerator wird die zu messende Pfeife erregt. Darauf wird gleichzeitig der Hauptgenerator eine Oktav tiefer eingestellt bis die Schwebungen verschwinden, was natürlich nur möglich ist, wenn der Hauptgenerator den ersten Oberton in genügender Intensität enthält.

Die Eichung des Schwebungstongenerators geschah mit einem Stimmgabelsatz. Sie muss vor jeder Messung neu geschehen. Überdies muss der Generator einige Stunden vor der Messung in Betrieb gesetzt werden, um genügende Konstanz zu erhalten. Auch bei Anwendung dieser Vorsichtsmassregeln war eine mehrmalige Nachkontrolle der Eichung während der Messung nötig, wobei im allgemeinen zwei Messpunkte genügten, da sich die Eichkurven während nicht allzulanger Zeit immer parallel verschoben. Um eine sichere Interpolation zu ermöglichen, wurden die ursprünglich stark gekrümmten Eichkurven durch Benutzung von Logarithmenpapier gestreckt. Die Feststellung der Resonanz geschah nach einer meines Wissens bisher in dieser Form nicht verwandten Methode, die auf dem Schalldüsenprinzip aufgebaut ist. In den 0,3 cm dicken Boden der Pfeifen wurde in der Mitte ein feines Loch von 0,03 cm Durchmesser gebohrt. Da am Boden der Pfeife die grössten Druckschwankungen auftreten, so wird in der Überdruckperiode Luft in einem feinen Strahl aus der Düse ausgestossen, während bei der Unterdruckperiode die Luft von

¹⁾ Der dynamische Lautsprecher und das Material für den Endverstärker wurde mir in liebenswürdiger Weise von Herrn cand. phil. F. AUERBACHER zur Verfügung gestellt.

allen Seiten angesaugt wird, wie dies in Fig. 1 schematisch angedeutet ist. In einiger Entfernung hinter dem Loch entsteht demnach ein gleichgerichteter pulsierender Luftstrahl. Bringt man nun in denselben ein Thermoelement, das durch einen elektrischen Strom vorgeheizt wird (Thermokreuz), so entsteht bei der Erregung der Pfeife in einem angeschlossenen Galvanometer ein Ausschlag, der von der Abkühlung des Thermokreuzes herröhrt. Den anfangs durch den Thermostrom entstandenen Ausschlag kompensiert man am besten durch eine eingeschaltete Gleichspannung. (In der Abbildung 1 nicht gezeichnet.)

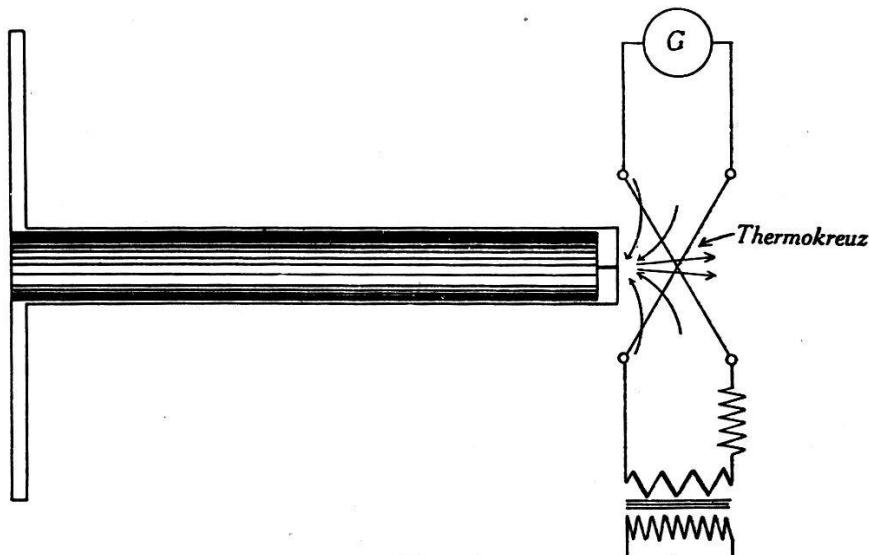


Fig. 1.

Versuchsanordnung zur Messung der Resonanzfrequenz.

Dass durch das Bohrloch im Boden der Pfeife keine nennenswerte Verstimmung eintritt, wurde durch Erregung der Pfeife mit einem aus einer Düse austretenden konstanten Luftstrom nachgewiesen. Dieser Nachweis geschah folgendermassen: Nachdem mit dem Tongenerator auf Schwebungslosigkeit eingestellt war, wurde mit dem Finger das Loch im Boden der Pfeife zugehalten. Bei den längeren Pfeifen traten dabei keine Schwebungen auf. Bei der kürzesten und engsten Pfeife trat eine kleine Verstimmung von 2—3 Hertz ein, die aber bei diesen hohen Tönen (1700 Hertz) innerhalb der Messfehler liegt.

Da die theoretischen Berechnungen nur für einen Flansch von unendlicher Ausdehnung Gültigkeit besitzen, wurde auch noch untersucht, ob eine Vergrösserung des Flanschdurchmessers von 7 auf 15 cm einen Einfluss auf die Frequenz hatte. Es ergab sich indessen auch bei den kürzesten Pfeifen kein messbarer Unterschied gegenüber den Werten mit einem Flanschdurchmesser von 7 cm.

Die Genauigkeit (Reproduzierbarkeit) der gemessenen Frequenzen schwankt zwischen einigen Promille in günstigen Fällen und etwa zwei Prozent in ungünstigen Fällen.

Die Temperaturschwankungen betragen im Maximum etwa 5° C. Bei der erreichten Genauigkeit genügt es, für die Schallgeschwindigkeit die Formel $C = 331 \sqrt{1 + 0,004 \cdot t}$, die den Einfluss der mittleren Zimmerluftfeuchtigkeit angenähert berücksichtigt, zu verwenden. Der Temperaturkoeffizient der Stimmgabeln, der von der Größenordnung von 0,0001 ist, braucht nicht berücksichtigt zu werden.

Zum Vergleich mit den experimentellen Resultaten sind auch die nach der Helmholtzschen Theorie berechneten Werte in die Tabellen aufgenommen. Aus derselben folgt für eine einfache gedackte Pfeife die Formel

$$\operatorname{tg} \cdot (k \cdot \delta) = \pi/4 \cdot R \cdot k \quad I^1)$$

R bedeutet dabei den Radius der Pfeife, δ die Endkorrektion und k wie allgemein üblich die Größe $2\pi/\lambda$. Die Berechnung geschieht nach einem graphischen Verfahren.

Neben der Helmholtzschen Theorie ist von amerikanischen Forschern²⁾ eine allgemeinere Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit veränderlichem Querschnitt entwickelt worden, die mit Erfolg von STEWART auf Trichterlautsprecher angewandt wurde.

Während die Helmholtzsche Theorie im wesentlichen nur die Endkorrektion einer Röhre zu berechnen gestattet, woraus man dann die Resonanzfrequenz ermitteln kann, sobald man eine Knotenstelle des Druckes oder der Bewegung in der Röhre kennt, gibt diese neuere Theorie direkt die Resonanzfrequenz, woraus man dann umgekehrt die Endkorrekturen berechnet. Für eine einfache gedackte Pfeife erhält man auf Grund dieser Theorie die Formel

$$\operatorname{tg} \cdot (k \cdot l) = \frac{C_0}{k \cdot S}$$

l bedeutet dabei die gemessene Länge der Pfeife, S ihren Querschnitt und C_0 die sogenannte akustische Leitfähigkeit der Mündung, die, wenn es sich um eine kreisrunde Öffnung handelt, in

¹⁾ H. HELMHOLTZ, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 80, S. 68.

²⁾ A. G. WEBSTER, Acoustical Impedance and the Theorie of Horns and of the Phonograph, Proc. Nat. Acad. of Sci. 5, 275, 1919.

erstere Annäherung zahlenmäßig gleich $2 \cdot R$ gesetzt werden kann. In Wirklichkeit stellt dieser Ausdruck eine *obere Grenze* dar. Diese Gleichung lässt sich umformen. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg} (k \cdot \delta) = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - k \delta \right)$$

und da $\delta = \lambda/4 - l$ ist, kann man auch schreiben

$$\operatorname{tg} (k \cdot \delta) = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - k \delta \right) = \operatorname{cotg} (k l) = \frac{1}{\operatorname{tg} (k \cdot l)}.$$

Setzt man dann noch $C_0 = 2 \cdot R$ und $S = R^2 \pi$, so erhält man

$$\frac{1}{\operatorname{tg} (k l)} = \operatorname{tg} (k \cdot \delta) = k \cdot R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Eine Formel, die bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ mit der Helmholtzformel übereinstimmt. Wollte man die beiden Formeln identisch machen, so müsste man $C_0 = 4 \cdot R$ wählen, was der oben erwähnten Begrenzung des Ausdrucks C_0 widerspricht. Eine wirkliche Übereinstimmung mit der Helmholtzschen Gleichung ergibt sich nur für den Fall, dass der Mündungsradius der Pfeife R_1 klein ist gegen den Radius R des Rohres. In diesem Fall ist nach HELMHOLTZ angenähert¹⁾

$$k \cdot \pi \cdot \frac{R}{2} = \operatorname{tg} (k \delta) \quad \text{II}^2)$$

Die mit den einfachen gedackten Pfeifen gewonnenen Resultate sind in den Tabellen 1 bis 5 zusammengestellt. Am Kopf der Tabellen sind jeweils die Innendurchmesser der Pfeifen eingetragen. Die 4 Zeilen der einzelnen Abschnitte geben die auf 19°C reduzierten Frequenzen, die daraus berechnete Viertelwellenlänge, die Endkorrektion und zuletzt das Verhältnis der Endkorrektion zum Durchmesser der Pfeife. Der Index 0 bezieht sich jeweils auf den Grundton, der Index 1 auf den ersten Oberton. Statt $\lambda/4$ in der zweiten Zeile steht dann entsprechend $3\lambda/4$. Der Buchstabe B vor einem Abschnitt bezeichnet die beobachteten Werte, die römischen Zahlen die nach Gleichung I bzw. II berechneten Werte.

¹⁾ Die Bezeichnungen R und R_1 sind gegenüber denen bei HELMHOLTZ vertauscht.

²⁾ loc. cit.

Tabelle 1.

Durchmesser	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	
Rohrlänge 24 cm. Grundton.								
ν_0	352	349	351	348	347	345	343	
$\lambda_0/4$	24,35	24,57	24,40	24,60	24,70	23,85	25,00	
B $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,35	0,57	0,40	0,60	0,70	0,85	1,00	Mittel:
δ_0/d	0,58	0,71	0,40	0,50	0,50	0,53	0,55	0,54
ν_0	354	353	352	351	349	348	347	
$\lambda_0/4$	24,20	24,26	24,40	24,42	24,55	24,62	24,70	
I $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,20	0,26	0,40	0,42	0,55	0,62	0,70	Mittel:
δ_0/d	0,33	0,33	0,40	0,35	0,39	0,39	0,39	0,37
ν_0	351	348	346	344	342	339	338	
$\lambda_0/4$	24,40	24,64	24,80	24,95	25,05	25,28	25,40	
II $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,40	0,64	0,80	0,95	1,05	1,28	1,40	Mittel:
δ_0/d	0,67	0,80	0,80	0,71	0,75	0,80	0,78	0,76
Rohrlänge 24 cm. Oberton.								
ν_1	1052	1052	1044	1042	1042	1043	1039	
$3 \cdot \lambda_1/4$	24,40	24,40	24,60	24,70	24,70	24,60	24,85	
B $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,40	0,40	0,60	0,70	0,70	0,60	0,85	Mittel:
δ_1/d	0,67	0,50	0,60	0,58	0,50	0,38	0,47	0,54
ν_1	1063	1061	1056	1053	1050	1047	1043	
$3 \lambda_1/4$	24,20	24,24	24,37	24,42	24,46	24,57	24,65	
I $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,20	0,24	0,37	0,42	0,46	0,57	0,65	Mittel:
δ_1/d	0,33	0,30	0,37	0,35	0,33	0,36	0,36	0,34
ν_1	1052	1044	1038	1033	1026	1020	1016	
$3 \lambda_1/4$	24,40	24,60	24,80	24,90	25,05	25,20	25,30	
II $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,40	0,60	0,80	0,90	1,05	1,20	1,30	Mittel:
δ_1/d	0,67	0,75	0,80	0,75	0,75	0,75	0,72	0,74

Tabelle 2.

Durchmesser	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	
Rohrlänge 16 cm. Grundton.								
ν_0	521	519	517	512	506	509	508	
$\lambda_0/4$	16,43	16,50	16,58	16,73	16,60	16,83	16,86	
B $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,43	0,50	0,50	0,73	0,60	0,83	0,86	Mittel:
δ_0/d	0,72	0,63	0,58	0,61	0,43	0,52	0,51	0,57
ν_0	528	526	524	520	518	515	513	
$\lambda_0/4$	16,20	16,30	16,36	16,47	17,53	17,64	17,70	
I $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,20	0,30	0,36	0,47	1,53	1,64	1,70	Mittel:
δ_0/d	0,33	0,38	0,36	0,39	0,38	0,40	0,39	0,38
ν_0	520	516	510	506	501	497	494	
$\lambda_0/4$	16,50	16,62	16,82	16,95	17,12	17,26	17,35	
II $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,50	0,62	0,82	0,95	1,12	1,26	1,35	Mittel:
δ_0/d	0,83	0,78	0,82	0,79	0,80	0,79	0,75	0,79
Rohrlänge 16 cm. Oberton.								
ν_1	1571	1558	1561	1552	1548	1543	1556	
$3 \lambda_1/4$	16,36	16,50	16,46	16,57	16,60	16,66	16,50	
B $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,36	0,50	0,46	0,57	0,60	0,60	0,50	Mittel:
δ_1/d	0,60	0,63	0,46	0,48	0,43	0,41	0,28	0,47
ν_1	1587	1580	1572	1566	1557	1550	1540	
$3 \lambda_1/4$	16,20	16,27	16,34	16,40	16,50	16,57	16,70	
I $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,20	0,27	0,34	0,40	0,50	0,57	0,70	Mittel:
δ_1/d	0,33	0,34	0,34	0,33	0,32	0,32	0,29	0,34
ν_1	1561	1580	1572	1566	1557	1550	1540	
$3 \cdot \lambda_1/4$	16,45	16,37	16,67	16,92	17,06	17,20	17,31	
II $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,45	0,37	0,67	0,92	1,06	1,20	1,30	Mittel:
δ_1/d	0,75	0,59	0,76	0,77	0,76	0,75	0,73	0,73

Tabelle 3.

Durchmesser	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	
Rohrlänge 12 cm. Grundton.								
ν_0	697	694	658	683	681	676	674	
$\lambda_0/4$	12,30	12,35	12,50	12,54	12,59	12,64	12,71	
B $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,30	0,35	0,50	0,54	0,59	0,64	0,71	Mittel:
δ_0/d	0,50	0,44	0,50	0,45	0,42	0,40	0,40	0,45
ν_0	701	697	692	687	683	679	675	
$\lambda_0/4$	12,22	12,33	12,40	12,50	12,56	12,63	12,70	
I $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,22	0,33	0,40	0,50	0,56	0,63	0,70	Mittel:
δ_0/d	0,37	0,38	0,40	0,42	0,40	0,39	0,39	0,39
ν_0	687	679	670	662	654	648	639	
$\lambda_0/4$	12,51	12,62	12,80	12,95	13,11	13,22	13,41	
II $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,51	0,62	0,80	0,95	1,11	1,22	1,41	Mittel:
δ_0/d	0,83	0,78	0,80	0,79	0,79	0,76	0,78	0,79
Rohrlänge 12 cm. 1. Oberton.								
ν_1	2084	2065	2040	2030	2020	2004	1972	
$3 \cdot \lambda_1/4$	12,32	12,46	12,60	12,66	12,72	12,80	13,00	
B $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,32	0,46	0,60	0,66	0,72	0,80	1,00	Mittel:
δ_1/d	0,53	0,57	0,60	0,55	0,51	0,50	0,55	0,54
ν_1	2104	2092	2075	2065	2055	2040	2028	
$3 \lambda_1/4$	12,22	12,30	12,40	12,44	12,50	12,60	12,67	
I $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,22	0,30	0,40	0,44	0,50	0,60	0,67	Mittel:
δ_1/d	0,37	0,38	0,40	0,37	0,36	0,37	0,37	0,38
ν_1	2006	2040	2020	1995	1974	1956	1946	
$3 \lambda_1/4$	12,40	12,60	12,73	12,90	13,01	13,11	13,21	
II $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,40	0,60	0,73	0,90	1,01	1,11	1,21	Mittel:
δ_1/d	0,67	0,75	0,73	0,75	0,72	0,71	0,67	0,71

Tabelle 4.

Durchmesser	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	
Rohrlänge 8 cm. Grundton.								
v_0	1034	1027	1018	1017	1000	996	998	
$\lambda_0/4$	8,28	8,36	8,42	8,43	8,58	8,61	8,59	
B $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,28	0,36	0,42	0,43	0,58	0,61	0,59	Mittel:
δ_0/d	0,47	0,45	0,42	0,36	0,41	0,38	0,33	0,40
v_0	1040	1031	1020	1012	1003	993	985	
$\lambda_0/4$	8,23	8,32	8,40	8,47	8,55	8,65	8,71	
I $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,23	0,32	0,40	0,47	0,55	0,65	0,71	Mittel:
δ_0/d	0,38	0,40	0,40	0,39	0,39	0,41	0,40	0,40
v_0	1013	995	979	960	944	926	915	
$\lambda_0/4$	8,46	8,62	8,77	8,94	9,09	9,26	9,36	
II $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,46	0,62	0,77	0,94	1,09	1,26	1,36	Mittel:
δ_0/d	0,77	0,78	0,77	0,78	0,78	0,79	0,76	0,78
Rohrlänge 8 cm. Oberton.								
v_1	3111	3106	3027	3061	3060	3020	2955	
$3 \cdot \lambda_1/4$	8,28	8,27	8,38	8,41	8,42	8,53	8,68	
B $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,28	0,27	0,38	0,41	0,42	0,53	0,68	Mittel:
δ_1/d	0,47	0,34	0,38	0,34	0,30	0,33	0,38	0,36
v_1	3130	3100	3070	3040	3015	2992	2970	
$3 \cdot \lambda_1/4$	8,22	8,30	8,38	8,46	8,53	8,60	8,66	
I $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,22	0,30	0,38	0,46	0,53	0,60	0,66	Mittel:
δ_1/d	0,37	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,37	0,38
v_1	3040	2992	2942	2900	2860	2820	2790	
$3 \lambda_1/4$	8,45	8,59	8,73	8,86	8,98	9,11	9,21	
II $3 \lambda_1/4 - l = \delta_1$	0,45	0,59	0,73	0,86	0,98	1,11	1,21	Mittel:
δ_1/d	0,75	0,74	0,73	0,72	0,70	0,69	0,67	0,71

Tabelle 5.
Rohrlänge 4,5 cm. Grundton.

Durchmesser	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	
ν_0	1815	1766	1734	1708	1684	1667	1648	
$\lambda_0/4$	4,72	4,85	4,94	5,02	5,08	5,14	5,20	
B $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,22	0,35	0,44	0,52	0,58	0,64	0,70	Mittel:
δ_0/d	0,37	0,44	0,44	0,43	0,41	0,43	0,39	0,42
ν_0	1810	1780	1752	1727	1700	1763	1646	
$\lambda_0/4$	4,74	4,82	4,89	4,96	5,04	5,12	5,21	
I $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,24	0,32	0,39	0,46	0,54	0,62	0,71	Mittel:
δ_0/d	0,40	0,40	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,39
ν_0	1762	1674	1630	1586	1543	1507	1470	
$\lambda_0/4$	4,87	5,17	5,26	5,41	5,56	5,69	5,83	
II $\lambda_0/4 - l = \delta_0$	0,37	0,67	0,76	0,91	1,06	1,19	1,33	Mittel:
δ_0/d	0,62	0,84	0,76	0,76	0,76	0,74	0,74	0,76

Zu den in den Tabellen mitgeteilten Zahlen ist folgendes zu bemerken. Von den berechneten Frequenzen stimmen die nach Formel I ermittelten am besten mit den beobachteten Werten

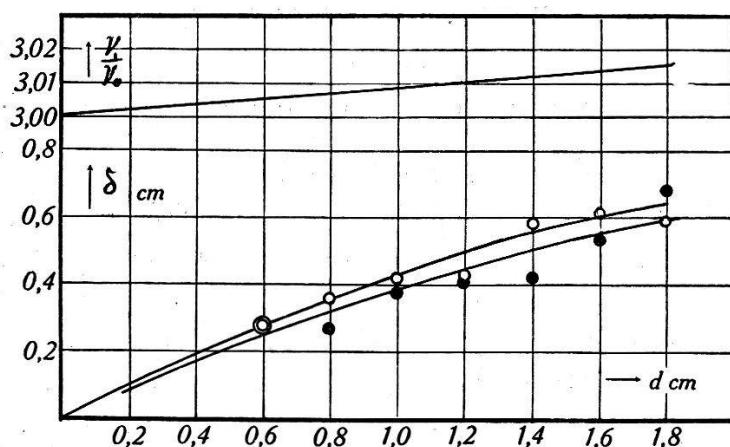


Fig. 2.

Endkorrektion δ und Verhältnis ν_1/ν_0 der 8 cm-Pfeifen.

überein. Das Verhältnis des ersten Obertones zum Grundton weicht besonders für die längeren Pfeifen sehr wenig von drei ab, was auch ohne weiteres verständlich ist, da ja dort die Endkorrektion relativ wenig ausmacht. Bei sehr hohen Frequenzen, d. h. kurzen Pfeifen, wird indessen das erwähnte Verhältnis grösser als

drei. Um dies deutlich zu machen, sind in Fig. 2 die gemessenen Endkorrekturen für die 8 cm Pfeife als Funktion des Durchmessers aufgetragen. Die mit leeren Kreisen gezeichneten Punkte sind aus dem Grundton berechnet, die mit gefüllten Kreisen aus dem ersten Oberton. Nach vorgenommenem graphischen Ausgleich sieht man leicht, dass die Kurve für die Oberschwingung tiefer liegt. Die obere Kurve gibt das daraus berechnete Verhältnis, Oberton zu Grundton wieder. Bedeutend grössere Abweichungen vom ganzzahligen Verhältnis drei, ergeben sich nach der Theorie (Gleichung I und II) für noch kürzere Pfeifen. Eine Nachprüfung auf experimentellem Wege ist jedoch nicht mehr

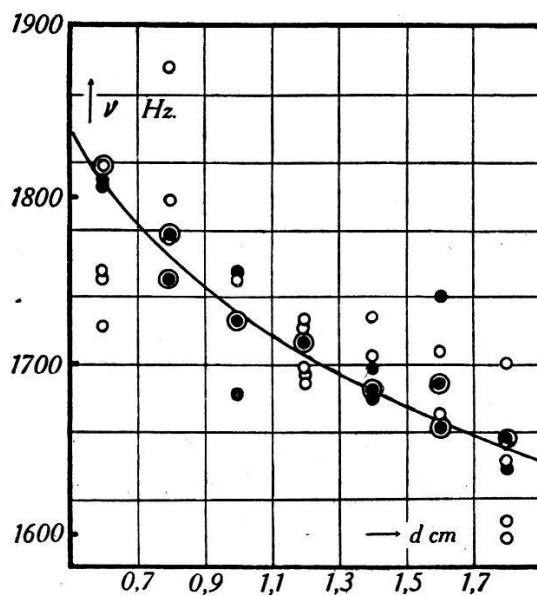


Fig. 3.
Gemessene Frequenzen der 4,5 cm-Pfeifen.

möglich. Schon die Messung der Grundfrequenz der 4,5 cm Röhre begegnete beträchtlichen experimentellen Schwierigkeiten. Die einzelnen Messungen streuten dort sehr stark. Die in der Tabelle 5 angegebenen Werte sind aus einer grossen Zahl von Messungen durch graphischen Ausgleich gewonnen worden. Die wirklichen Messpunkte sind in Fig. 3 eingetragen (Ordinatenmaßstab sehr stark vergrössert). Obertöne konnten bei der 4,5 cm Röhre nicht mehr angeregt werden. ANDERSON und OSTENSEN¹⁾ geben an, dass keine Schwingung erregt werden kann, deren Viertelwellenlänge kleiner als der Durchmesser ist. Bei den 2 weitesten 4,5 cm Röhren ist, wie man leicht nachrechnet, diese Bedingung für den ersten Oberton erfüllt. Es gelang jedoch auch nicht, den Oberton der engeren 4,5 cm Röhren zu erregen, was jedoch auf einen Mangel

¹⁾ loc. cit.

an Einstrahlungsenergie zurückgeführt werden kann. Die engeren Röhren erregten sich im allgemeinen nicht so stark wie die weiteren. Die Schallintensität, die zur Erregung der kurzen Pfeifen nötig war, konnte mit ungeschütztem Ohr kaum ertragen werden und näherte sich demnach der Schmerzgrenze (ca. 1000 Dyn/cm²). Wie aus den Tabellen leicht zu ersehen ist, werden die Bestimmungen der Endkorrektion umso genauer, je kürzer die Pfeifen sind, trotz der in diesen Fällen etwas verminderten Messgenauigkeit. Der Mittelwert $\delta/d = 0,42$ bei den 4,5 cm-Röhren stimmt gut mit dem Rayleighschen Wert 0,41 überein.

Vollständige Obertonreihe einer gedackten Pfeife.

Für die Zwecke dieser Untersuchung und für Messungen an beidseitig offenen Pfeifen wurde ein Resonanzrohr hergestellt, auf dessen offene Enden Flanschansätze aufgesteckt werden konnten. In die Öffnungen derselben konnten nach Belieben Verschlusstücke mit verschieden grossen kreisförmigen Öffnungen eingesetzt werden. Zur Messung sind seitlich am Rohr drei Schalldüsen angebracht und zwar eine in der Mitte und die beiden anderen in der Nähe der Mündungen. Zur Messung der Obertöne der offenen Rohre ist die mittlere Düse ungeeignet, da dann dort ein Druckknoten entsteht. An der Stelle der Düsen ist das Rohr durch übergelötete Ringe auf 3 mm verdickt. Die ganze Rohrlänge, aussen gemessen, betrug 38,8 cm, die Dicke der Verschlussplättchen 0,2 cm und der innere Rohrdurchmesser 2,20 cm. Setzt man an einem Ende einen Ring mit 2,20 cm Innendurchmesser ein und verschliesst das andere Ende ganz, so erhält man eine einfache gedackte Pfeife, deren Länge vom Boden bis zur Flanschebene 38,6 cm beträgt. (Länge des Rohres ohne Verschlussplatten 38,4 cm.) Die mit dieser letztgenannten Anordnung auf 19° C reduzierten gemessenen Frequenzen sind in Tabelle 6 eingetragen.

Tabelle 6.
Obertonreihe einer gedackten Pfeife.

Frequenz	216	646	1079	1523
Verhältnis zum Grundton	1,00	2,99	5,00	7,05

Messungen an offenen Pfeifen mit veränderlichen Mündungsquerschnitten.

Eine systematische Untersuchung von beidseitig offenen Pfeifen mit verschiedenen Mündungsquerschnitten schien mir deshalb von gewissem theoretischen Interesse, weil man dort die Resonanzen nach der Helmholtzschen Theorie streng nur rechnen

kann, wenn man eine Annahme über die Lage des Schwingungsknotens macht. Dass sich derselbe bei einer symmetrischen Anordnung in der Mitte der Röhre befindet, ist selbstverständlich. Die Annahme dürfte aber kaum mehr gerechtfertigt sein, wenn die beiden Rohrmündungen verschiedene akustische Impedanzen besitzen. Es wurde deshalb eine Untersuchung solcher Fälle vorgenommen.

Bei der ersten Messreihe blieb die eine Rohrmündung ganz offen, wie an dem oben beschriebenen Versuch, während die entgegengesetzte Mündung stufenweise verengert wurde. Die gemessenen Frequenzen sind in den Tabellen 7—8 zusammengestellt.

Tabelle 7.

Offene Pfeife. Länge 38,8 cm $d_2 = \text{konst.} = 2,20 \text{ cm}$ d_1 variabel.

Durchmesser	Gemessene Resonanzfrequenzen		
0,00	216	324	651
0,20		347	673
0,50		366	731
0,81		381	780
1,19		402	804
1,46		410	820
1,70		415	831
2,20		424	843

Tabelle 8.

Offene Pfeife. Länge 38,8 cm $d_2 = \text{konst.} = 1,19 \text{ cm}$ d_1 variabel.

Durchmesser	Gemessene Resonanzfrequenzen		
0,00	209	280	621
0,50		332	700
0,80		352	747
0,99		374	754
1,19		387	784
1,46		387	782
1,70		388	790
2,20		402	804

d_1 bzw. d_2 bedeuten die Durchmesser der beiden Mündungen.

In den Fig. 4 und 5 sind die Werte der Tabellen 7 und 8 graphisch dargestellt. Interessant ist hier jeweils der Anfang der Kurven. Ausser den den Kurven angehörigen Punkten v_b und v_c

die einer $\lambda/2$ -Schwingung entsprechen, misst man hier noch den Punkt ν_a , welcher der $\lambda/4$ -Schwingung (gedackte Pfeife) entspricht. Eigentlich sollte man überhaupt nur die Frequenzen ν_a und ν_c er-

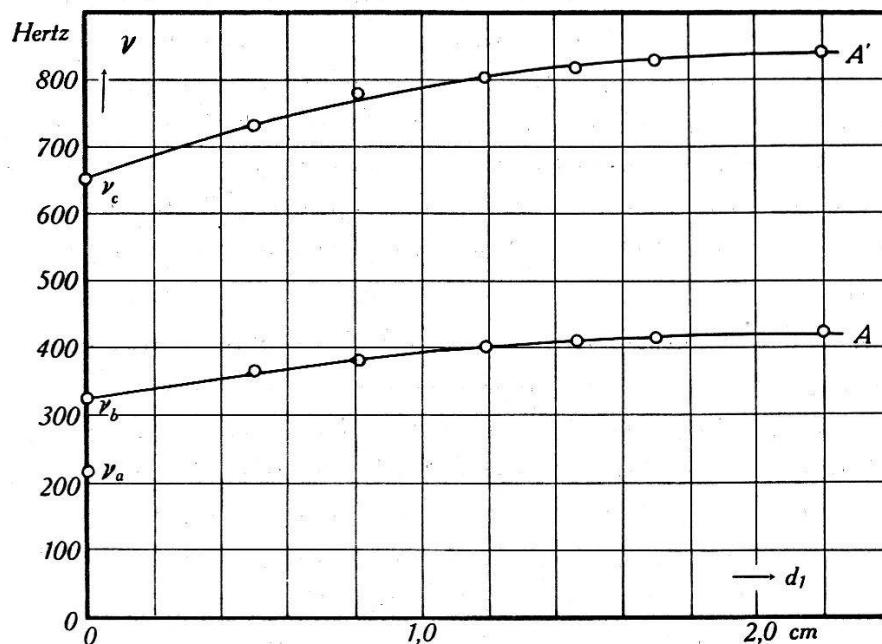


Fig. 4.

Offene Röhre. $d_2 = \text{konst.} = 1,19 \text{ cm}$, d_1 variabel.

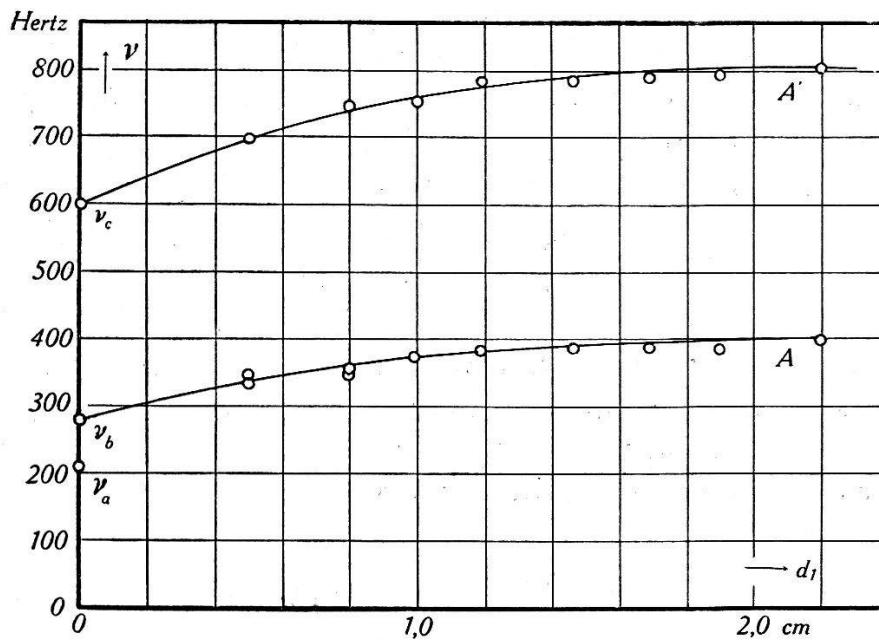


Fig. 5.

Offene Röhre. $d_2 = \text{konst.} = 2,20 \text{ cm}$, d_1 variabel.

halten, wobei ν_c sowohl als Oberton der ν_a -Schwingung $\nu_c \approx 3\nu_a$, als auch als Oberton der ν_b -Schwingung $\nu_c \approx 2\nu_b$ gedeutet werden kann. Dichtet man das eine Ende der Röhre sorgfältig mit Picein ab, so sinkt die Intensität der Schwingung ν_b etwa auf $1/10$ des

ursprünglichen Wertes. Sie verschwindet nur deshalb nicht ganz, weil das zur Messung dienende Loch nicht mitverstopft werden konnte. Man sieht daraus, dass schon eine sehr kleine Öffnung die $\lambda/2$ -Schwingung entstehen lässt, wobei sie in diesem Fall zusammen mit der $\lambda/4$ -Schwingung existenzfähig ist. Man könnte daraus die Vermutung ableiten, dass dies auch bei grösseren Öffnungen an dem einen Pfeifen-Ende der Fall sein wird, sofern nur eine genügende Asymmetrie in den akustischen Impedanzen der beiden Rohrenden besteht. Wie später im theoretischen Teil der Arbeit gezeigt wird, ist diese Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen.

Rein qualitativ kann man sich die Entstehung einer $\lambda/4$ -Schwingung auf folgende Weise vorstellen. Man denkt sich zu diesem Zwecke die einseitig verengte Röhre als Teil eines Kanals, dessen Querschnitt sich an einer Stelle 1 unstetig von ∞ auf den Rohrquerschnitt S_0 (gleichzeitig Querschnitt der weiteren Mündung) verengt. An einer Stelle 2, die dem entgegengesetzten Rohrende entspricht, tritt noch einmal eine plötzliche Verengung auf den Mündungsquerschnitt S_1 ein. Nach einer kurzen Strecke (= Dicke der Verschlussplatte) an der Stelle 3 springt dann der Durchmesser wieder auf den Wert ∞ . Denkt man sich eine einfallende Schallwelle in der angedeuteten Richtung laufen, so werden an den Stellen 1, 2, 3 Reflexionen und Phasensprünge auftreten. Die einfallende Welle habe etwa im Innern zwischen 1 und 2 die ursprüngliche Amplitude A_0 . Dann entsteht durch Reflexion an der Stelle 2 eine Welle mit der Amplitude

$$A_1 = -\frac{M-1}{M+1} \quad \text{wo} \quad M = \frac{S_0}{S_1} \text{ } ^1)$$

und zwar erfolgt die Reflexion mit entgegengesetzter Phase, wenn $M > 1$, was in unserem Fall auch zutrifft. Der durchgelassene Anteil mit der Amplitude A_2 besitzt indessen immer dieselbe Phase wie A_0 und wird durch die Formel

$$A_2 = \frac{2}{M+1}$$

wiedergegeben. Dieser Anteil wird indessen an der Stelle 3 wegen der Vergrösserung des Querschnitts auf ∞ wieder mit derselben Phase zurückreflektiert $M < 1$ bzw. = 0 und zwar vollständig.

¹⁾ G. W. STEWART and R. B. LINDSAY, Acoustics, New York D. van Nostrand Co., 1930, p. 74. Deutsche Übersetzung: Gust. Schmidt, Berlin, Verl. Carl Heymann, 1934.

Verfolgt man das Spiel in diesem Sinne weiter, so wird nach vielem Hin und Her wieder praktisch eine Welle mit der Amplitude A_2 im Raume zwischen 1 und 2 von 2 nach 1 zu laufen und mit einem Teil der ihr gleichphasigen Welle A_1 eine stehende Welle erzeugen, deren Bewegungsbäuche an den beiden Enden liegen. Die Welle A_1 indessen wird sich mit einem Teil der Welle A_0 zu einer stehenden Schwingung zusammensetzen, deren Bewegungsknoten an der Stelle 2 liegt. An der Stelle 1 können jedoch nur Bewegungsbäuche entstehen, d. h. nur Reflexionen mit gleicher Phase.

Auf experimentellem Wege konnten jedoch bei grösseren Rohröffnungen $\lambda/4$ -Schwingungen nicht mit Sicherheit festgestellt werden, wenigstens nicht mit der Resonanzmethode, jedoch wurde an einer ähnlich gebauten Röhre aus Glas eine Schwingung beobachtet, die sich auf diese Weise erklären lässt. Das betreffende Rohr war 33,2 cm lang und an beiden Enden mit Messingplättchen zugekittet, die mit einer Öffnung von 0,82 cm Durchmesser versehen waren. Die Röhre wurde mit einem Luftstrom an einem der Enden angeblasen, wodurch eine gewisse Asymmetrie zustande kommt. Die beobachteten Frequenzen betrugen 428 Hz. und 670 Hz. Hielt man eine der Öffnungen zu, so wurden die Frequenzen 226 Hz. und 691 Hz. gemessen. Rechnet man die Resonanzen nach der elementaren Theorie, so erhält man die sicher zu hohen Werte 515 Hz., 1030 Hz., 2060 Hz. im ersten Fall, und die Werte 257 Hz., 771 Hz., 1285 Hz. im letzten Fall. Die an der beidseitig offenen Röhre gemessene Frequenz 670 scheint demnach einer $3\lambda/4$ -Schwingung zu entsprechen, d. h. der sicher zu hoch gerechneten Frequenz 771. Die $\lambda/4$ -Schwingung selber trat nicht auf.

Tabelle 10.

1. Fall d_1 variabel $d_2 = \text{konst.} = 2,20$ cm.						
Durchmesser	2,20	1,46	0,80	0,50	0,20	0,00
Gemessene Frequenzen . .	424	413	380	366	347	0
Berechnete Frequenzen . .	430	421	416	389	334	0
2. Fall d_1 variabel $d_2 = \text{konst.} = 1,19$ cm.						
Durchmesser	2,20	1,90	1,69	1,46	1,19	1,00
Gemessene Frequenzen	402	388	388	387	387	374
Berechnete Frequenzen	404	402	394	389	386	382
						359
						332
						336

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass die Frequenzen der beidseitig offenen Röhren recht befriedigend gerechnet werden können,

wenn man ähnlich wie bei der Helmholtzschen Theorie für die gedackte Pfeife¹⁾ folgende Näherungsformel verwendet.

$$L = l + \delta_1 + \delta_2 = \frac{\lambda}{2} = l + \frac{\pi}{2} \left(\frac{R^2}{R_1} + \frac{R^2}{R_2} - \frac{R_1 + R_2}{2} \right).$$

In Tabelle 10 sind für die Grundschwingungen für einige d -Werte die so berechneten Frequenzen den experimentellen Daten gegenübergestellt.

Theoretischer Teil.

Der Grund, warum an Stelle der Helmholtzschen Pfeifentheorie noch eine andere Theorie versucht wurde, lag neben dem Interesse an einer Ableitung, die von andern Gesichtspunkten ausgeht, an den im vorhergehenden Teil der Arbeit vermuteten Resonanzfrequenzen beidseitig offener Pfeifen, die eher dem Schwingungstypus einer einseitig offenen Röhre entsprechen.

Die folgende Ableitung lehnt sich an eine recht allgemeine für Röhren beliebig veränderlichen Querschnitts geltende Theorie an, die von A. G. WEBSTER stammt²⁾. Eine für den vorliegenden Zweck besonders geeignete Darstellung derselben befindet sich in dem Lehrbuch der Akustik von G. W. STEWART und R. B. LINDSAY³⁾ und eine Anwendung auf konische Röhren auch im Handbuchartikel von C. V. RAMAN, Musikinstrumente und ihre Klänge⁴⁾. Die im folgenden benutzte Bezeichnungsweise schliesst sich an die letztgenannten Autoren an.

Die Achse der Röhre, deren Resonanzfrequenz bestimmt werden soll, sei die x -Achse eines Koordinatensystems. Der mit x veränderliche Querschnitt des Rohres sei S . Der durch die Schwingung im Rohr erzeugte *Überdruck* über den an den ungestörten Stellen des Raumes herrschenden Normaldruck sei p . Dann gilt in bezug auf die x -Koordinate die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial (\ln S)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0 \quad (1)$$

k bedeutet dabei, wie allgemein üblich, die Grösse $2\pi/\lambda$. p enthält natürlich auch einen von der Zeit abhängigen Faktor, der aus der Differentialgleichung herausfällt. Eine ähnlich gebaute Gleichung

¹⁾ loc. cit.

²⁾ loc. cit.

³⁾ loc. cit.

⁴⁾ GEIGER-SCHEEL, Handbuch d. Phys., Bd. VIII, Kap. 8, Ziff. 48, S. 402.

gilt auch für die Teilchenverschiebung ξ , die wir jedoch nicht benötigen, da ξ aus p direkt abgeleitet werden kann.

Multipliziert man die Grösse ξ mit dem an der betreffenden Stelle vorhandenen Querschnitt, so erhält man die sogenannte Volumverschiebung $X = S \cdot \xi$. Zwecks Einführung von Randbedingungen versehen wir die oben eingeführten Variablen mit den Indices 1 und 2, je nachdem es sich um die Werte am Rohrende 1 oder 2 handelt. Es kann dann gezeigt werden, dass zwischen den betreffenden Grössen an den beiden Rohrenden die linearen Beziehungen

$$p_2 = a \cdot p_1 + b X_1 \quad (2)$$

$$X_2 = f \cdot p_1 + g X_1 \quad (3)$$

gelten. Die Grössen a, b, f, g sind dann auf Grund der Differentialgleichung (1) bestimmte Funktionen, die von der geometrischen Gestalt der Röhre, den X -Koordinaten der Rohrenden und von den dort herrschenden Querschnitten abhängen. Wir führen nun die akustischen Impedanzen

$$Z_1 = \frac{p_1}{\dot{X}_1} \quad Z_2 = \frac{p_2}{\dot{X}_2} \quad (4)$$

ein. Z_1 kann nun durch Z_2 ausgedrückt werden und umgekehrt. Da die Grössen X von der Form konst. $e^{i\omega t}$ sind, so wird

$$Z_1 = \frac{p_1}{\dot{X}_1} = \frac{p_1}{i\omega X_1} = \frac{1}{i\omega} \left[\frac{g \cdot \frac{p_2}{X_2} - b}{-f \cdot \frac{p_2}{X_2} + a} \right] \quad (5)$$

und da $p_2/X_2 = i\omega Z_2$, so erhält man schliesslich

$$Z_1 = \frac{i\omega g Z_2 - b}{i\omega a + \omega^2 f \cdot Z_2} \quad (6)$$

$$Z_2 = \frac{i\omega a Z_1 + b}{i\omega g - \omega^2 f \cdot Z_1} \quad (7)$$

Wir gehen nun direkt zum Resonanzproblem über. Die Gleichungen (6) und (7) sagen uns, dass, wenn die akustische Impedanz an einem Ende gegeben ist, daraus auch die entsprechende Impedanz am andern Ende berechnet werden kann. Denken wir uns nun eine Schallwelle, die von rechts nach links einfällt, und nehmen vorläufig an, das Rohr existiere noch nicht, sondern nur der Mündungsflansch mit seiner entsprechenden Öffnung. In der Öffnung herrscht dann der von der einfallenden Welle allein her-

röhrende Schalldruck p_3 , der dort den Volumstrom p_3/Z_0 in der Richtung von rechts nach links hervorruft. Z_0 stellt hier die Impedanz einer kreisrunden Öffnung *schlechtweg* dar und wird durch den Ausdruck

$$Z_0 = \frac{\rho_0 \omega k}{2\pi} + \frac{i \rho_0 \omega}{C_0} \quad (8)$$

dargestellt. C_0 bedeutet dabei die akustische Leitfähigkeit. Sie ist im Falle einer kreisrunden Öffnung in einer unendlich dünnen Wandung einfach gleich dem Durchmesser derselben. ρ_0 ist die Dichte des Gases. p_3 hat die Form $\text{const. } e^{i(\omega + kx)}$.

Wenn nun die Pfeife vorhanden ist, so entsteht durch Reflexion im Innern derselben an derselben Stelle der Mündung eine Druckkomponente p_2 . Der gesamte Volumstrom von innen nach aussen beträgt dann

$$\dot{X}_2 = \frac{p_2}{Z_0} - \frac{p_3}{Z_0} = \frac{p_2 - p_3}{Z_0}. \quad (9)$$

Am linken Ende des Rohres wird dann ein Überdruck p_1 entstehen, der gemäss den Beziehungen (2) und (3) von p_2 und \dot{X}_2 am andern Ende abhängt. Das Verhältnis p_1/p_3 bestimmt dann die Verstärkung des Resonators oder besser gesagt p_1/p_3 wird bei Resonanz ein Maximum werden. Da $p_2/\dot{X}_2 = Z_2$ kann man Gl. (9) auch in der Form schreiben:

$$\dot{X}_2 = \frac{Z_2 \dot{X}_2 - p_3}{Z_0}$$

und nach \dot{X}_2 aufgelöst

$$\dot{X}_2 = \frac{p_3}{Z_2 - Z_0}. \quad (10)$$

Nach Gleichung (3) wird

$$\dot{X}_2 = i \omega f p_1 + \frac{g \cdot p_1}{Z_1} \quad \text{wo} \quad Z_1 = \frac{p_1}{\dot{X}_1} \quad i \omega p_1 = \dot{p}_1$$

Auflösung nach p_1 gibt

$$p_1 = \frac{\dot{X}_2}{i \omega f + \frac{g}{Z_1}} = \frac{Z_1 p_3}{(Z_2 - Z_0) \cdot (i \omega f \cdot Z_1 + g)} \quad (11)$$

Eliminiert man noch Z_2 mit Hilfe der Gleichung (7), so erhält man die für manche Zwecke bequemere Gleichung

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{i \omega Z_1}{i \omega a Z_1 + b - Z_0 (i \omega g - \omega^2 f \cdot Z_1)}. \quad (12)$$

Die Grössen a, b, f, g können nun angegeben werden, wenn eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (1) bekannt ist. Da diese Gleichung 2 willkürliche Konstante enthält, kann ihre Lösung in bekannter Weise in der Form

$$p = A \cdot u + B \cdot v \quad (13)$$

geschrieben werden. Berücksichtigt man noch, dass p mit ξ durch die Gleichung

$$\xi = \frac{1}{k^2 c^2 \varrho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

zusammenhangt, so erhält man schliesslich für die Grössen a, b, f, g folgende Determinantendarstellung¹⁾:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_1' & v_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_1' & v_1' \end{vmatrix}} & b &= \frac{\beta}{S_1} \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_1' & v_1' \end{vmatrix}} \\ f &= -\frac{S_2}{\beta} \frac{\begin{vmatrix} u_1' & v_1' \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_1' & v_1' \end{vmatrix}} & g &= \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_1' & v_1' \end{vmatrix}} \end{aligned} \quad (14)$$

worin zur Abkürzung

$$\varrho_0 k c^2 = \beta \quad u' = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad v' = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

gesetzt ist. Da die betrachteten Röhren im wesentlichen zylindrisch sind, verschwindet das mittlere Glied der Differentialgleichung (1) für alle x , die nicht zu nahe an den Endpunkten x_1 und x_2 der Röhre liegen. Man kann deshalb als erste Näherung die bekannte Lösung der vereinfachten Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 \cdot p = 0 \quad (15)$$

ansetzen, die bekanntlich durch die Funktion

$$p = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx \quad (16)$$

dargestellt wird. Die Grössen a, b, f, g werden dann, wenn man $X_1 = 0$ und $X_2 = l$ setzt

$$\begin{aligned} a &= \cos k \cdot l & g &= \frac{S_2}{S_1} \cdot \cos k l \\ b &= \frac{\beta}{S_1} \sin k l & f &= -\frac{S_2}{\beta} \sin k l \end{aligned} \quad (17)$$

¹⁾ G. W. STEWART und R. B. LINDSAY, loc. cit. Appendix III.

wie man leicht nachrechnet. Durch Verwendung dieser Ausdrücke in Gleichung (12) und durch 0-Setzen des Nenners erhält man dann schliesslich die Resonanzbedingung

$$\operatorname{tg} \cdot k \cdot l = - \frac{k \cdot l}{l} \cdot \frac{\frac{1}{C_{02}} \frac{S_2}{S_1} - \frac{1}{C_{01}}}{\frac{1}{S_1} + \frac{S_2 k^2}{C_{01} C_{02}}} \quad (18)$$

Wegen der Kleinheit von k kann man das mit k^2 multiplizierte Glied im Nenner vernachlässigen und erhält so die übersichtlichere Formel:

$$\frac{\operatorname{tg} k \cdot l}{k \cdot l} = - \frac{1}{l} \left(\frac{S_2}{C_{02}} - \frac{S_1}{C_{01}} \right). \quad (19)$$

Die Grössen C_{01} und C_{02} kommen in die Gleichung hinein, wenn man für Z_0 und Z_1 die Ausdrücke

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{f_0 \omega k}{2 \pi} + \frac{i f_0 \omega}{C_{02}} \\ Z_1 &= \frac{f_0 \omega k}{2 \pi} + \frac{i f_0 \omega}{C_{01}} \end{aligned} \quad (20)$$

verwendet. Jeweils unter Vernachlässigung des reellen mit der kleinen Grösse k multiplizierten Terms. C_{01} und C_{02} bedeuten, wie schon früher angedeutet, die akustischen Leitfähigkeiten der beiden Mündungen, die in roher Annäherung gleich dem Durchmesser derselben gesetzt werden können. Berücksichtigt man die endliche Dicke δ der Verschlusstücke C , Fig. 4, so kann man die Formel

$$C_0 = \frac{\pi (d/2)^2}{\delta + K \cdot d}$$

benutzen, was bei der Berechnung der in Fig. 8 dargestellten numerischen Werte geschehen ist (Kurven 2, 3, 2', 3'). Die Konstante K wird am besten experimentell bestimmt.

Die graphische Lösung der Gleichung (19) ergibt die der Resonanz entsprechenden $k \cdot l$ -Werte.

Es gibt aber auch, und darin liegt vielleicht der Wert dieser Theorie, eine zweite Lösung des Resonanzproblems. Das sieht man am besten aus der Gleichung (11). Der Nenner besteht dort aus zwei Faktoren, setzt man den ersten Faktor $Z_2 - Z_0 = 0$, so

erhält man die soeben gefundene Lösung. Setzt man aber den zweiten Faktor gleich 0, so erhält man die Resonanzbedingung

$$k \cdot l \cdot \operatorname{tg} (k \cdot l) = - \frac{l \cdot C_{01}}{S_1} \quad (21)$$

die mehr dem Schwingungstypus einer einseitig offenen Pfeife entspricht ($k \cdot l$ -Werte in der Nähe von $\pi/2$), aber nicht etwa mit der Gleichung für die gedackte Pfeife identisch ist. Letztere erhält man, wenn man $Z_1 = \infty$ setzt, und lautet:

$$k \cdot l \cdot \operatorname{tg} kl = + \frac{l \cdot C_{02}}{S_2} \quad (22)$$

Diskussion der theoretischen Formeln. Vergleich mit dem Experiment.

Betrachten wir zuerst das Verhalten der Gleichung (19). Die nach ihr berechneten Frequenzen sind in Fig. 6, Kurve 2 aufgetragen. Um eine auch nur angenäherte Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zu erreichen, wurde für die Konstante K der Wert 6,03 angenommen, was mit dem theoretischen Wert

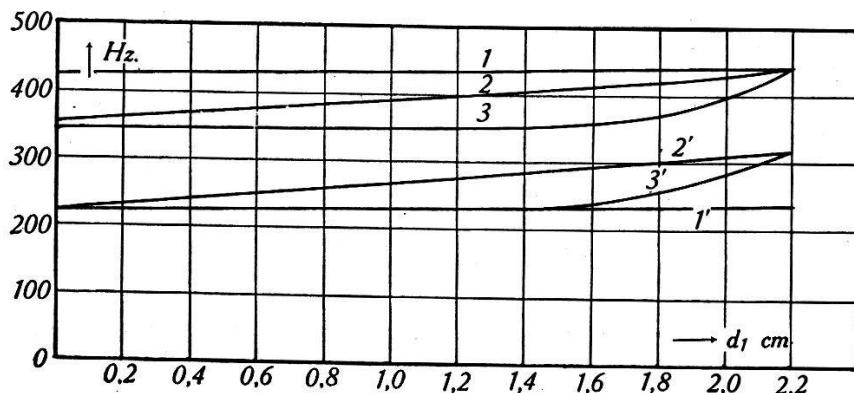


Fig. 6.
Theoretische Kurven für offene Pfeifen.

von K , der zwischen den Grenzen 0,786 und 0,848 liegt¹⁾ in starkem Widerspruch steht.

Durch Vergleich von (22) mit der Helmholtzschen Formel ergibt sich, wie schon im experimentellen Teil gezeigt wurde, für C_0 der Wert $2d$, während unter Vernachlässigung von δ aus dem obigen Wert $K = 6,03$ für $C_0 = 0,1305 \cdot d$ folgen würde. Verwendet man die schon im experimentellen Teil erwähnte obere Grenze $C_0 = d^1$, so erhält man die Kurve 1, Fig. 6, die kaum mehr

¹⁾ STEWART und LINDSAY, S. 54.

liefert wie die elementare Theorie. Man sieht, dass sich diese Kurven mit abnehmendem d nicht etwa dem Wert nähern, der der $\lambda/4$ -Schwingung entspricht, sondern einem bedeutend höheren Frequenzwert. Einen im Prinzip ähnlichen Verlauf zeigt auch die entsprechende experimentelle Kurve A in Fig. 5. Der bei ca. 280 Hertz liegende wirklich gemessene Punkt rührte nur von der geringen Undichtigkeit des lose eingesetzten Rohrdeckels her. In Wirklichkeit muss die Kurve in der Nähe von $d = 0$ ebenfalls steil auf den Wert von 220 Hertz absinken, da eine an einem Ende vollständig geschlossene Röhre keine $\lambda/2$ Schwingung entstehen lassen kann, was der Versuch mit einem gut abgedichteten Deckel ja bestätigte. Auch die auf Grund der Helmholtzschen Theorie im experimentellen Teil angegebene Näherungsformel, die den Verlauf der gemessenen Werte recht gut wiedergibt, zeigt dieses plötzliche Absinken sogar bis auf den Wert 0.

Es muss hier allerdings noch auf einen Mangel der Formel (19) hingewiesen werden. Die rechte Seite ist nämlich in bezug auf die Grössen S und C_0 an den beiden Rohrenden nicht symmetrisch, was physikalisch bedeuten würde, dass jeweils eine andere Frequenz entstehen müsste, wenn das Rohr von der einen oder der andern Seite erregt würde. Der Versuch ergab aber immer in den Fällen, wo er überhaupt möglich war, für beide Erregungsarten dasselbe Resultat.

Die nach Gleichung (21) unter denselben Annahmen berechneten Werte finden sich in den Kurven 1' und 2'. Auffällig ist hier, dass der Querschnitt der Röhre und der Öffnung 2 nicht in der Formel vorkommt. Geht man zur Grenze $S_1 = 0$ bzw. $d_1 = 0$ über, so erhält man $k \cdot l \cdot \operatorname{tg} kl = -\infty$, was einem $k \cdot l$ -Wert von $\pi/2$ entspricht, d. h. einer *genauen* $\lambda/4$ -Schwingung *ohne* Endkorrektion.

Es scheint demnach so, als ob in der Anwendung der Theorie auf Röhren mit zwei Öffnungen eine prinzipielle Schwierigkeit eintritt, deren tiefere Ursache noch nicht aufgedeckt ist. Die Formel (22), die sich von vorneherein auf eine nur einseitig offene Röhre bezieht, stimmt bis auf einen Zahlenfaktor auf der rechten Seite mit der bewährten Formel von HELMHOLTZ überein, wie schon im ersten Teil der Arbeit gezeigt wurde.

Man könnte etwa einwenden, dass der Ansatz (16) für die Funktion p der Tatsache der unstetigen Querschnittsänderung an den Rohrenden nicht gerecht wird. Die Gleichung (19) liefert indessen auch für den Fall $S_1 = S_2$ die Gleichung $\frac{\operatorname{tg} kl}{k \cdot l} = 0$, die einem $k \cdot l$ -Wert von π entspricht, d. h. einer *genauen* $\lambda/2$ -Schwin-

gung ohne Endkorrektion, was ebenfalls mit der Erfahrung in Widerspruch steht, trotzdem in diesem Falle der Ansatz (16) streng richtig ist.

Es wurde übrigens noch versucht, den Ansatz (16) durch eine weitere Näherung zu ersetzen, indem eine den Verhältnissen angepasste aber stetige Querschnittsform für die Röhre gewählt wurde. Die Funktion S hätte in diesem Falle etwa die Gestalt

$$S = S_0 - (S_0 - S_1) \cdot e^{-bx} - (S_0 - S_2) \cdot e^{-b(l-x)}. \quad (23)$$

Der Koeffizient $\frac{\partial(\ln S)}{\partial x}$ in der Differentialgleichung (1) wird, wie man leicht nachrechnet, nahe an den Rohrenden, aber noch ausserhalb des Rohres, an zwei Stellen x_0 und x_l über alle Grenzen wachsen. Durch den Ansatz

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k(A \cdot \cos kx - B \cdot \sin kx) [1 - e^{-b(x-x_0)}]^2 [1 - e^{-b(x_l-x)}]^2 \quad (24)$$

ist dann eine Funktion hergestellt bzw. deren Differentialquotient, der an den erwähnten Unendlichkeitsstellen von $\frac{\partial(\ln S)}{\partial x}$ so stark verschwindet, dass das Produkt

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\ln S)}{\partial x}$$

dort 0 wird. Die Funktion (24) erfüllt zwar im allgemeinen die Differentialgleichung besser, genügt aber offenbar an den Rohrenden den ihr gestellten Bedingungen schlechter als der einfache durch Differentiation von (16) erhältene Ausdruck. Führt man nämlich die Rechnung mit dieser Funktion durch, indem man $\partial p/\partial x$ integriert, so erhält man für p bis auf vernachlässigbare Grössen wieder die Funktion (16). Bei Verwendung dieser Funktionen p und $\partial p/\partial x$ in den Determinanten 14, erhält man an Stelle der Gleichungen (19), (21) die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} kl}{k \cdot l} &= -\frac{1}{l} \left(\frac{G \cdot S_2}{C_{02}} - \frac{F \cdot S_1}{C_{01}} \right) \\ kl \cdot \operatorname{tg}(kl) &= -\frac{l \cdot C_{01}}{F \cdot S_1} \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$F = \left(\frac{S_1}{S_0} \right)^2 \quad G = \left(\frac{S_2}{S_0} \right)^2$$

S_1 bzw. S_2 bedeuten, wie immer die Querschnitte der Mündungen, S_0 den Querschnitt des zylindrischen Teiles der Röhre.

Dass diese Gleichungen keinen Fortschritt gegenüber den alten Gleichungen darstellen, geht wohl ohne weiteres aus den aus ihnen berechneten Kurven 3 und 3' in Fig. 6 hervor.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.
Abteilung für angewandte Physik.
