Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 9 (1936)

Heft: III

Artikel: Über Frequenzänderungen des Lichts bei der Beugung an Ultraschallwellen

Autor: Levi, Fritz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110625

Über Frequenzänderungen des Lichts bei der Beugung an Ultraschallwellen

von **Fritz Levi.**

(25. II. 36.)

Zusammenfassung: Aus einer Verallgemeinerung der von RAMAN und NAGENDRA NATH gegebenen Theorie der Lichtbeugung an Ultraschallwellen werden die Frequenzänderungen abgeleitet, die das Licht bei der Beugung an fortschreitenden und stehenden Schallwellen erfährt. Die Ergebnisse werden mit den Experimenten von BÄR und ALI verglichen.

Die von DEBYE und SEARS[1]) sowie von LUCAS und BIQUARD[2]) entdeckte Beugung des Lichts an Ultraschallwellen ist in der letzten Zeit Gegenstand vieler theoretischer und experimenteller Untersuchungen gewesen. Bei der Beugung des Lichts an einem zeitlich veränderlichen Gitter, wie es die Ultraschallwellen darstellen, ist auf jeden Fall zu erwarten, dass das gebeugte Licht eine gegenüber dem einfallenden geänderte Frequenz aufweist.

§ 1. Die Verhältnisse bei der Beugung an fortschreitenden Schallwellen sind leicht zu übersehen. Es ergibt sich aus allen Theorien[3]) in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung, dass Licht mit merklicher Intensität nur in solche Richtungen gelangen kann, die mit der Einfallsrichtung einen Winkel ϑ einschliessen, so dass

$$\sin \vartheta = n \frac{\lambda}{\lambda^*} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

ist, wobei λ die Wellenlänge des Lichts, λ^* die Wellenlänge des Schalls bezeichnet. (Es braucht uns hier nicht zu beschäftigen, dass es nach einigen Theorien schwer verständlich erscheint, dass $|n| > 1$ werden kann.) Die ganze Beugungsfigur muss jedenfalls mit der Schallwelle fest gekoppelt sein, d. h. die ganze Beugungs-

---

1) P. DEBYE und F. W. SEARS, Proc. Nat. Sc. Washington **18**, 409, 1932.

2) R. LUCAS und P. BIQUARD, Journ. de Phys. et Rad. **3**, 464, 1932.

3) L. BRILLOUIN, Ann. de Phys. **17**, 88, 1921. P. DEBYE, Phys. Ztschr. **33**, 849, 1932. R. LUCAS und P. BIQUARD, l. c.

figur muss sich mit der Schallgeschwindigkeit c^* fortbewegen. Beobachtet werden die Beugungsspektren im Unendlichen. Von der ganzen Bewegung wird sich diejenige Komponente, die in der Richtung der Lichtfortpflanzung liegt als Dopplereffekt bemerkbar machen, während sich alle anderen Komponenten der Beobachtung entziehen. Diese Komponente nun, die zum Dopplereffekt des Lichts des n-ten Beugungsspektrums Veranlassung gibt, beträgt

$$c_n^* = c^* \sin \vartheta \quad \text{oder} \quad c_n^* = c^* n \frac{\lambda}{\lambda^*},$$

was, wenn wir die Frequenz des Lichts ν, die des Schalls ν^* nennen, zu $c_n^* = c n \nu^* / \nu$ wird. Die Frequenz des in die n-te Ordnung gebeugten Lichts beträgt also $\nu + n \nu^*$. Eine solche Frequenzänderung ist kürzlich von Ali[1]) direkt gemessen worden, nachdem ein indirekter Beweis schon von Debye, Sack und Coulon[2]) gegeben war.

§ 2. Liegen so die Verhältnisse bei der Beugung des Lichts an fortschreitenden Schallwellen denkbar einfach, so sind sie bei der Beugung an stehenden Schallwellen wesentlich komplizierter. Als wesentliche Beobachtungstatsachen sind neben den Resultaten von Ali an stehenden Schallwellen die von Bär[3]) gefundenen Kohärenzverhältnisse des Lichts der verschiedenen Beugungsspektren untereinander zu erklären. Bei Versuchen an stehenden Schallwellen zeigte sich nämlich, dass das Licht aller Beugungsspektren mit gerader Ordnungszahl untereinander wenigstens teilweise kohärent ist, und ebenso das Licht aller ungradzahligen Beugungsspektren. Dagegen ist das Licht der geraden Ordnungen mit dem der ungeraden völlig inkohärent. Ein solches Verhalten ist verständlich, wenn man annimmt, dass das Licht in Ordnungen $|n| > 1$ nur durch mehrfache Beugungsprozesse gelangt, und die Frequenz des Lichts bei jeder Beugung um $+\nu^*$ oder $-\nu^*$ geändert wird. Um in ein Spektrum mit ungerader Ordnungszahl zu gelangen, muss das Licht eine ungerade Anzahl von Einzelprozessen durchgemacht haben. Dabei erhält es also eine Frequenz, die sich von ν um ein ungerades Vielfaches von ν^* unterscheidet. Für die gradzahligen Ordnungen gilt entsprechendes. Beachtet man, dass in die n-te Ordnung auch Licht gelangen kann, das mehr als n Einzelablenkungen hinter sich hat, so sieht

[1]) L. Ali, Helv. Phys. Acta, **9**, 36, 1936.

[2]) P. Debye, H. Sack und F. Coulon. C. R. **198**, 922, 1934.

[3]) R. Bär, Helv. Phys. Acta **8**, 591, 1935.

man leicht, dass das Licht aller geraden Ordnungen untereinander kohärente Anteile enthält, und ebenso das aller ungeraden Ordnungen untereinander. Die von BÄR gefundenen Kohärenzverhältnisse ergeben sich also so ohne weiteres. Einen anderen Wert als den einer ganz groben Faustregel wird man solchen Überlegungen nicht beilegen dürfen. Es ist jedenfalls nicht klar, wie sie so verschärft werden sollten, dass sie zu quantitativen Aussagen führen.

Es ist nun möglich, auch zu quantitativen Aussagen zu gelangen, wenn man eine kürzlich von RAMAN und NAGENDRA NATH[1]) gegebene Theorie der Lichtbeugung an Ultraschallwellen sinngemäss auf stehende Schallwellen überträgt. Wie alle bisher vorliegenden Theorien der Lichtbeugung an Ultraschallwellen ist auch die von RAMAN und NATH nur eine Näherung. (Auf die Art der Näherung werden wir in § 4 eingehen.) Das Problem ist vor allem nämlich darum schwierig exakt zu behandeln, weil es sich um einen typischen Volumeneffekt handelt. Die Ramansche Näherung stellt insofern einen grossen Fortschritt dar, als sie zum ersten Mal in einfacher Weise Werte für die Intensitäten der einzelnen Beugungsspektren liefert. Wie gut diese Intensitäten quantitativ mit den Beobachtungen übereinstimmen ist bisher nicht geprüft worden; dazu wäre neben der Messung der Lichtintensitäten eine Messung der Intensität der Schallwelle notwendig. Dagegen gibt die Ramansche Theorie ausgezeichnet die sehr charakteristischen qualitativen Veränderungen in den Intensitätsverhältnissen der Beugungsspektren wieder, wie sie bei der Veränderung der Lichtwellenlänge, der Schallintensität oder der Dicke der vom Schall durchsetzten Schicht von BÄR[2]) beobachtet wurden.

Die Theorie von RAMAN und NAGENDRA NATH ist nicht für eine eigentliche Schallwelle abgeleitet, sondern für ein zeitlich unveränderliches Gebilde. Bis auf die Frequenzänderungen des Lichts, die man, wie wir sahen, leicht nachträglich anbringen kann, werden also die Verhältnisse bei der Beugung an fortschreitenden Schallwellen dargestellt. Die Flächen gleicher Phase der Schallwelle seien parallel zu YZ-Ebene; der Brechungsindex in dem von Schallwellen durchsetzten Gebiet also $\mu(x) = \mu_0 + \mu \sin 2\pi\, x/\lambda^*$. Das Licht falle in der Z-Richtung ein. In dieser Richtung habe das Gebiet die Dicke L. In der von RAMAN ge-

[1]) C. V. RAMAN und N. S. NAGENDRA NATH, Proc. Ind. Acad. Sci. (A) **2**, 406, 1935.

[2]) R. BÄR, Helv. Phys. Acta **6**, 570, 1933.

rechneten Näherung ist dann die Amplitude des Lichts des n-ten Beugungsspektrums gegeben als $J_n(\mu L/\lambda)$ und seine Intensität also durch $J_n^2(\mu L/\lambda)$ eine wesentliche, d. h. von $\mu L/\lambda$ abhängige Phase tritt nicht auf; wobei $J_n(x)$ die n-te Besselfunktion darstellt, die Intensität des einfallenden Lichts gleich 1 gesetzt.

Betrachtet man nun die stehende Schallwelle, so ist der Brechungsindex darstellbar als

$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu \sin 2\pi \frac{x}{\lambda^*} \cdot \cos 2\pi \nu^* t.$$

In jedem Zeitpunkt t gilt die Ramansche Theorie. Die Amplitude des Lichts des n-ten Beugungsspektrums ist also zeitlich variabel und in jedem Moment dargestellt durch

$$J_n\left(\frac{\mu L}{\lambda} \cos 2\pi \nu^* t\right)$$

seine Intensität entsprechend durch

$$J_n^2\left(\frac{\mu L}{\lambda} \cos 2\pi \nu^* t\right)$$

Zur Abkürzung führen wir ein:

$$\frac{\mu L}{\lambda} = v, \quad 2\pi \nu^* = \varphi$$

$J_n(v \cos \varphi t)$ ist dann eine gerade Funktion von t, da $\cos \varphi t$ eine gerade Funktion ist, $J_n(v \cos \varphi t)$ ist also als Fourierreihe darstellbar in der Form

$$J_n(v \cos \varphi t) = \tfrac{1}{2} A_0^n + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \cos k \varphi t.$$

Die Lichterregung im n-ten Beugungsspektrum ist folglich darstellbar als

$$J_n(v \cos \varphi t) \sin 2\pi \nu t = \sin 2\pi \nu t \,.\, \left\{\tfrac{1}{2} A_0^n + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \cos k \varphi t\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^n \sin 2\pi(\nu + k\nu^*)t; \quad A_{-k}^n = A_k^n.$$

Das Licht des n-ten Beugungsspektrums besteht demnach aus mehreren Komponenten, die k-te Komponente hat die Frequenz $\nu + k\nu^*$ und seine Intensität ist gleich A_k^n.

Nun ist $J_n(x)$ eine gerade oder ungerade Funktion von x je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die Potenzreihenentwicklung von $J_n(x)$ enthält also nur gerade oder nur ungerade Potenzen von x. Setzen wir $x = v \cos \varphi t$, so ist $J_n(v \cos \varphi t)$ in eine Reihe von nur geraden oder nur ungeraden Potenzen von $\cos \varphi t$ entwickelbar. Alle geraden Potenzen von $\cos \varphi t$ sind nun nach elementaren Formeln darstellbar als $\Sigma c_n \cos n\varphi t$, wobei nur die c_n von Null verschieden sind, die einen geraden Index tragen. Entsprechendes gilt für ungerade Potenzen von $\cos \varphi t$. Die Reihe nach Potenzen von $\cos \varphi t$ ist durch Einsetzung und Umordnung in die Fourierreihe zu verwandeln. Es zeigt sich also, dass nur diejenigen A_k^n von Null verschieden sind, für die k und n beide gerade oder beide ungerade sind. So ergeben sich also auf einfache Weise die tatsächlich beobachteten Kohärenzverhältnisse. Zur zahlenmässigen Berechnung dagegen eignet sich die angegebene Art des Vorgehens nicht. Schneller führt die Identität

$$J_{\frac{n+k}{2}}(x)\, J_{\frac{n-k}{2}}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_n(2x \cos \varphi) \cos k\varphi \, d\varphi \, ^{1)}$$

zum Ziel. Wegen der schon oben benutzten Symmetrieverhältnisse ergeben nämlich, wenn k und n beide gerade oder beide ungerade sind

$$\int_0^{2\pi} J_n(2x \cos \varphi) \cos k\varphi \, d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} J_n(2x \cos \varphi) \cos k\varphi \, d\varphi$$

in allen anderen Fällen aber

$$\int_0^{2\pi} J_n(2x \cos \varphi) \cos k\varphi \, d\varphi = 0$$

die A_k^n sind also gegeben durch

$$A_k^n = \begin{cases} 2 J_{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{v}{2}\right) J_{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{v}{2}\right); & k \equiv n \mod 2 \\ \qquad 0 \qquad ; & k \equiv n+1 \mod 2. \end{cases}$$

[1]) Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig 1904, Seite 63.

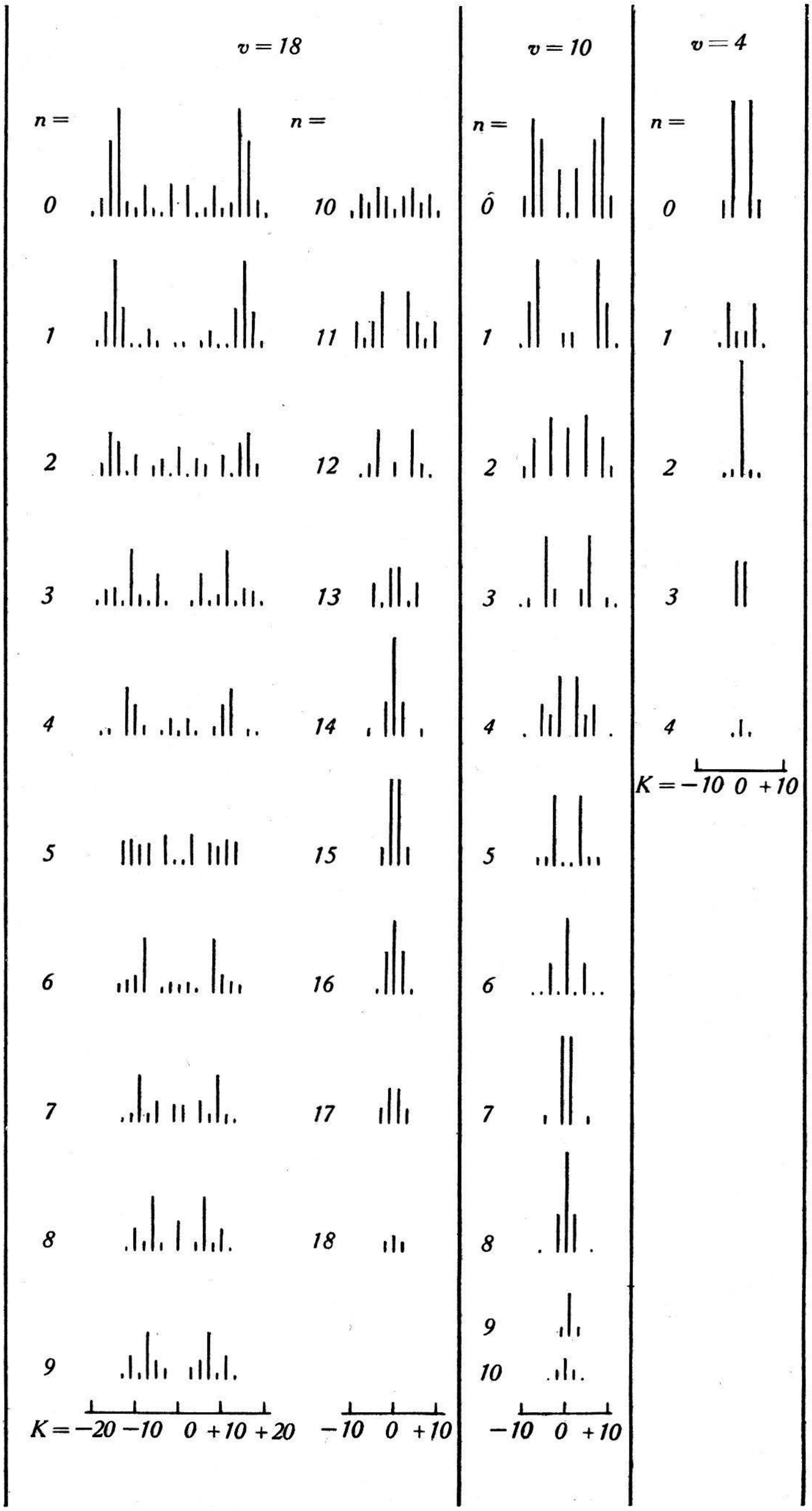
v = 18
n =
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
n =
10
11
12
13
14
15
16
17
18
K = −20 −10 0 +10 +20
−10 0 +10
v = 10
n =
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
−10 0 +10
v = 4
n =
0
1
2
3
4
K = −10 0 +10

Fig. 1.

Die Intensität des Lichts des n-ten Beugungsspektrums, soweit es die Frequenz $\nu + k\nu^*$ hat ist also gegeben durch

$$J^2_{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{v}{2}\right)\, J^2_{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{v}{2}\right).$$ [1]

Fig. 1 zeigt die Ergebnisse für die Fälle $v = 18$, $v = 10$, $v = 4$. Man erkennt, dass in allen Fällen das Licht der Spektren niederer Ordnung reich ist an Licht mit verhältnismässig grossen Frequenzveränderungen, während das Licht der höchsten Ordnungen, die noch mit merklicher Gesamtintensität vorhanden sind, hauptsächlich Licht mit nur wenig veränderter Frequenz enthalten. Dieses qualitative Ergebnis ist sicherlich nicht auf den Gültigkeitsbereich der Ramanschen Näherung beschränkt. Die Überlegung, dass sich die Komponentenzerlegung der Beugungsspektren, die an stehenden Schallwellen entstanden sind, auf dem hier benutzten Weg aus den Intensitäten der Beugungsspektren, die an fortschreitenden Schallwellen bei veränderlicher Schallintensität entstehen, gewinnen lässt, ist von der speziellen Näherung der Ramanschen Theorie unabhängig. Die Intensitäten werden in einer exakten Theorie nicht mehr als $J_n^2(v)$ darstellbar sein. Richtig aber bleibt nach Ausweis der Erfahrung jedenfalls, dass die Intensität der Beugungsspektren niederer Ordnung mehrere Maxima und Minima durchläuft, wenn man v von Null zu einem Höchstwerte anwachsen lässt. Die Beugungsspektren hoher Ordnung dagegen werden beim selben Vorgang erst von einem gewissen Wert von v an merklich von Null verschiedene Intensität besitzen und dann monoton zu einem Höchstwerte anwachsen. Setzt man nun wieder beim Übergang zu stehenden Schallwellen $v = \cos \varphi t$, und zerlegt die zu den Intensitäten gehörigen Amplituden[2]) nach Fourier, so ist anschaulich klar, dass die Spektren niederer Ordnung durch Reihen dargestellt werden, bei denen die höheren Glieder wesentlich grössere Koeffizienten erhalten als bei den Spektren hoher Ordnung.

Die Gesamtintensität des Lichts der n-ten Ordnung ist (wieder

[1]) Herr Prof. Bär gewährte uns Einblick in einen von den Herren Prof. Raman und Nagendra Nath freundlichst übersandten Korrekturabzug einer neuen Arbeit, in der die Autoren die gleiche Verallgemeinerung ihrer Theorie durchführen, und auch zum gleichen Resultat gelangen. (Erscheint l. c.)

[2]) An dieser Stelle entsteht eine Unbestimmtheit. Die Lichterregung wird im allgemeinen von der Form $f(v) \sin(2\pi\nu t + d)$ sein, wobei d eine von v abhängige, wesentliche Phase ist, die wir in einer halbempirischen Theorie nicht bestimmen können.

in der Raman-Nathschen Näherung) nicht wie bei fortschreitenden Schallwellen durch $J_n^2(v)$ gegeben, sondern durch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J^2_{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{v}{2}\right) J^2_{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{v}{2}\right)$$

Fig. 2 zeigt für die gleichen Fälle, die der Fig. 1 zu Grunde liegen, die Gesamtintensität der einzelnen Beugungsspektren für die Beugung an fortschreitenden und an stehenden Schallwellen. Die charakteristischen Intensitätsverteilungen der an fortschreitenden Schallwellen entstandenen Beugungsbilder machen also bei der Beugung an stehenden Schallwellen einem ziemlich gleichmässigen Abfall der Intensität mit wachsender Ordnungszahl des Spektrums Platz. Nach der gleichen Überlegung wie oben wird auch dieses qualitative Resultat über den Geltungsbereich der Raman-Nathschen Theorie hinaus bestehen bleiben.

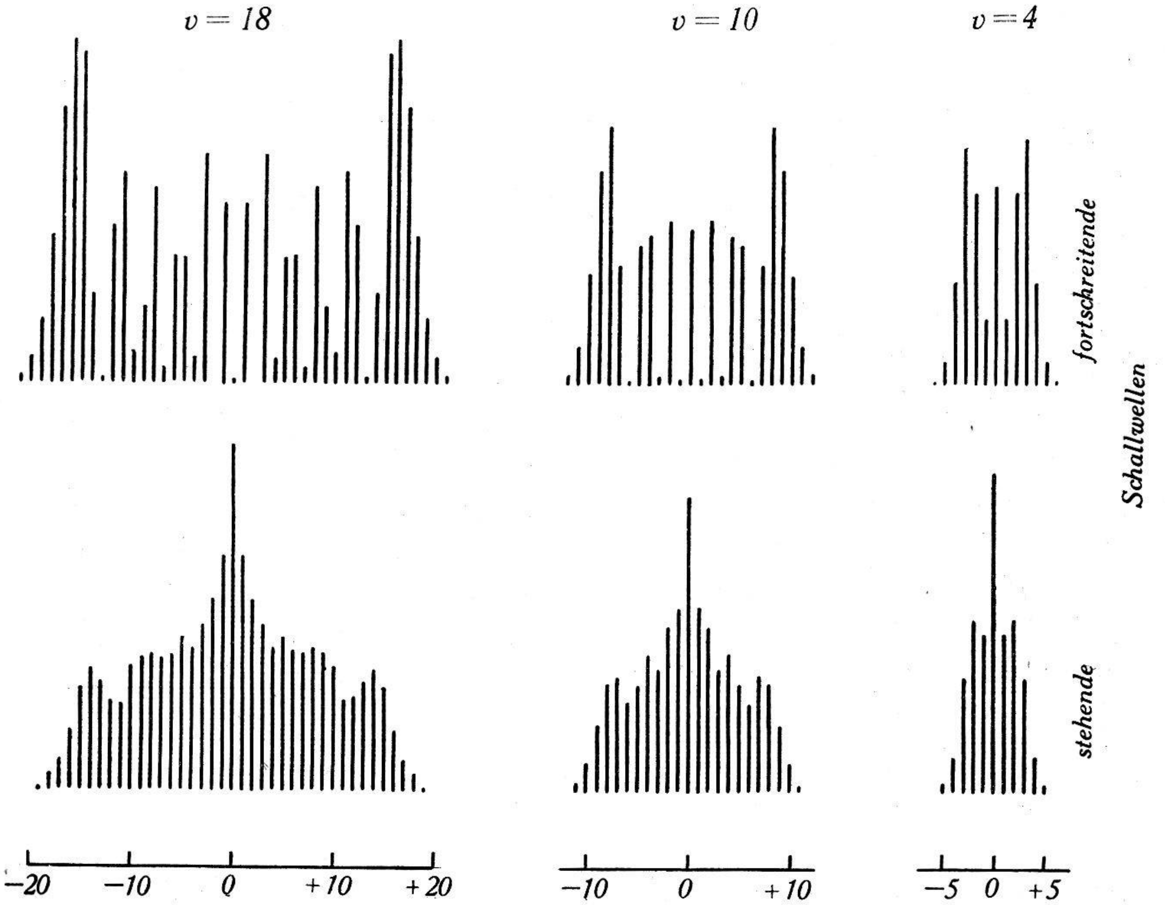

Fig. 2.

§ 4. Ein Vergleich unserer Ergebnisse mit der Erfahrung, im Besonderen mit den Versuchen von Ali, ist nicht ohne weiteres möglich. Und zwar aus folgenden Gründen: 1. Bei Ali ist die Intensität der Schallwellen nicht gemessen worden. μ und damit unsere Variable v ist also nicht bekannt. 2. Unsere Überlegungen beziehen sich auf den Grenzfall reiner stehender Schallwellen, während Ali — worauf er selber hinweist — mit einer Mischung von stehenden und fortschreitenden Wellen gearbeitet hat. Hinzu kommt, dass die Schallintensitäten bei den Alischen Versuchen sicherlich zu gross waren, als dass die Ramansche Theorie noch quantitativ ausreichend sein könnte. Die Ramansche Näherung ist nämlich die folgende: Die eintretende ebene Lichtwelle wird durch die Schallwelle in der Weise deformiert, dass auch unmittelbar nach dem Austritt aus den Schallwellen die Amplitude des Lichts noch überall die gleiche ist, dass aber die Flächen gleicher Phase nicht mehr Ebenen, sondern Flächen der Form

$$\frac{L\mu}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda^*} = \text{const.}$$

sind. Das heisst also, strahlenoptisch gesprochen, dass das Licht die Schallwellen überall gradlinig durchsetzt hat, jedoch mit der dem wechselnden Brechungsindex entsprechenden Geschwindigkeit. Diese Näherung ist selbstverständlich, wie Raman und Nath betonen, nur für kleine Werte von $L\mu/\lambda$ zulässig. Bär[1]) konnte inzwischen auch direkt experimentell zeigen, dass bei einigermassen beträchtlichen Werten von $L\mu/\lambda$ die Amplitude und damit die Intensität der Lichtwellen beim Austritt aus den Schallwellen nicht mehr räumlich konstant ist. Da aber auch in diesen Fällen die Verteilung der Intensität auf die einzelnen Ordnungen der von Raman berechneten qualitativ sehr ähnlich bleibt, so ist anzunehmen, dass auch unsere allgemeinen Ergebnisse nicht wesentlich falsch sein können. Der genaue Wert von v ist ja ohnehin unbekannt und eine quantitative Prüfung schon darum unmöglich. Wir haben oben die Werte für $v = 18$ vor allem darum mitgeteilt, weil Ali bei seinen Versuchen etwa 20 Ordnungen messen konnte und also mit einem Wert von v in der Grössenordnung 18 gearbeitet haben müsste, falls man die Ramansche Näherung noch gelten lassen könnte.

Ali hat nun bei seinen „stehenden Wellen" zwei Resultate erhalten. 1. Das Licht der nullten Ordnung ist bei der Beugung an stehenden und an fortschreitenden Wellen innerhalb der Messgenauigkeit mit dem einfallenden Licht identisch. 2. Das Licht der Beugungsspektren hoher Ordnung ist bei beiden Fällen deutlich voneinander verschieden. Das Licht der hohen Ordnungen, an stehenden Wellen gebeugt, ist dem gleicher Ordnung an fort-

[1]) R. Bär, erscheint demnächst an gleicher Stelle.

schreitenden Wellen gebeugt ähnlicher als dem einfallenden Licht. Nach unseren Ergebnissen wäre dagegen für rein stehende Wellen zu erwarten, dass das Licht der nullten Ordnung sehr stark vom einfallenden Licht verschieden ist, und dass umgekehrt das Licht hoher Ordnungen dem einfallenden Licht ähnliche Qualität hat. Von einem Widerspruch kann wohl solange nicht gesprochen werden, als die sehr verwickelten Verhältnisse bei den Mischungen von stehenden und fortschreitenden Schallwellen nicht übersehen werden können. Eine solche Übersicht könnte wie folgt erreicht werden: Zwischen den beiden Grenzfällen der reinen fortschreitenden und der reinen stehenden Wellen kann man den stetigen Übergang dadurch herstellen, dass man einer in der X-Richtung fortschreitenden Schallwelle der Intensität 1 eine in der X-Richtung fortschreitende der Intensität a überlagert, und jetzt a stetig von 0 bis 1 wachsen lässt. Eine solche zusammengesetzte Welle ist immer in der Form

$$f(t) \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} - g(t)\right)$$

darstellbar, wobei

$$f(t) = \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos 4\pi \nu^* t}$$

und

$$g(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-a}{1+a} \operatorname{tg} 2\pi\nu^* t\right)$$

ist. Das ist eine Sinuswelle, die mit der variablen Geschwindigkeit

$$\frac{\lambda^*}{2\pi} \dot{g}(t) = \lambda^* \nu^* \frac{1-a^2}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos 4\pi\nu^* t}}$$

in der X-Richtung fortschreitet, und deren Amplitude in jedem Augenblick gleich

$$f(t) = \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos 4\pi\nu^* t}$$

ist. Die sinngemässe Anwendung unserer Gedankengänge würde nun darin bestehen,

$$J_n(vf) \sin 2\pi \left(\nu + \nu^* \frac{n(1-a^2)}{f}\right) t$$

in der Form

$$\sum_r a_r^n e^{2\pi i(\nu + n\nu^*)t}$$

zu entwickeln. Diese Aufgabe ist aber wohl nur numerisch durchführbar. Da die wirklich vorliegenden Werte von v und a im einzelnen Fall nur sehr schwer feststellbar sind, erscheint es daher aussichtsreicher, experimentell die beiden Grenzfälle möglichst sauber herzustellen. Fortschreitende Wellen sind schon von Ali mit anscheinend ausreichender Genauigkeit realisiert worden: seine Messungen an fortschreitenden Wellen stimmen völlig mit der Erwartung überein. Eine Fortsetzung der Versuche, bei denen vor allem auch stehende Wellen möglichst rein verwirklicht werden sollen, ist im hiesigen Institut im Gang.

Herr Prof. Dr. R. Bär trug in häufigen Besprechungen viel zur Abklärung der vorstehenden Ausführungen bei. Für seine vielen Anregungen sei ihm auch an dieser Stelle herzlich gedankt.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.