Über den Zusammenhang zwischen Semivektoren und Spinoren und die Reduktion der Diracgleichungen für Semivektoren

von **V. Bargmann** in Zürich.

(4. XI. 33.)

Zusammenfassung. Im ersten Teil dieser Arbeit wird der Zussmmenhang zwischen den Semivektoren und den zweikomponentigen Spinoren allgemein untersucht. Die gewonnenen Beziehungen werden dann im zweiten Teil dazu verwandt, die *Dirac*gleichungen für Semivektoren in Spinorform umzuschreiben und auf eine Normalform zu transformieren.

Die Grundlagen der von A. Einstein und W. Mayer entwickelten Theorie der Semivektoren setzen wir als bekannt voraus[1]).

I. Mathematischer Teil.

§ 1. Die gegenüber speziellen Drehungen 1. und 2. Art invarianten Teilräume des R_4.

Es ist bequem, statt der Lorentztransformationen (d. h. der Koordinatentransformationen bei Änderungen des Bezugssystems) die zugehörigen Drehungen im R_4 zu untersuchen, also die linearen Vektorabbildungen, bei denen die Vektorbeträge ungeändert bleiben[2]). Dies hat noch den Vorteil, dass man nicht drei verschiedene Räume zu betrachten hat: den Raum der gewöhnlichen Vektoren, die Räume der Semivektoren 1. und 2. Art, sondern mit einem einzigen Raum auskommt, in welchem dann den Transformationen der Semivektoren 1. und 2. Art die „*speziellen Drehungen*" 1. bzw. 2. Art entsprechen.

Der metrische Fundamentaltensor sei gegeben durch

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1\,, \; g_{44} = +1\,; \quad g_{ik} = 0 \;\; (i \neq k)\,. \tag{1}$$

Um lästige Minuszeichen in den Formeln der Spinoranalyse zu vermeiden, wählen wir die Vorzeichen der g_{ik} anders als üblich.

---

[1]) A. Einstein und W. Mayer: I. Sitz.-Ber. d. Preuss. Akad. 1932, p. 522 II. Proc. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam **36** (1933), p. 497. III. ibid. p. 615. Im folgenden zitiert als I, II, III.

[2]) Vgl. I, p. 523.

Die Tatsache, dass es spezielle Semivektoren mit nur zwei unabhängigen Komponenten gibt[1]), bedeutet, dass gewisse zweidimensionale Teilräume des R_4 bei speziellen Drehungen in sich übergehen. Daher soll zunächst die Zerlegung des R_4 in solche invarianten Teilräume untersucht werden.

Bevor wir daran gehen, erinnern wir an folgendes: Im n-dimensionalen Vektorraum R_n seien zwei Unterräume $\underset{1}{M}$ und $\underset{2}{M}$ von k' bzw. k'' Dimensionen gegeben, derart dass sich jeder Vektor aus R_n in eindeutiger Weise in einen Vektor aus $\underset{1}{M}$ und in einen aus $\underset{2}{M}$ zerlegen lässt. Aus der Eindeutigkeitsforderung folgt $k' + k'' = n$. $\underset{1}{M}$ sei von den Vektoren $\underset{11}{e}^l, \underset{12}{e}^l, \ldots, \underset{1k'}{e}^l$ und $\underset{2}{M}$ von den Vektoren $\underset{21}{e}^l, \ldots, \underset{2k''}{e}^l$ aufgespannt. Jeder Vektor z^l kann in der Form

$$z^l = \sum_{\mu=1}^{k'} \zeta^{1\mu} \underset{1\mu}{e}^l + \sum_{\nu=1}^{k''} \zeta^{2\nu} \underset{2\nu}{e}^l = \underset{1}{z}^l + \underset{2}{z}^l \tag{2}$$

geschrieben werden. Die Teilvektoren, in die z^l zerlegt wird, sind also

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{z}^l &= \underset{1}{S}^l{}_m z^m = \sum_{\mu=1}^{k'} \zeta^{1\mu} \underset{1\mu}{e}^l \\ \underset{2}{z}^l &= \underset{2}{S}^l{}_m z^m = \sum_{\nu=1}^{k''} \zeta^{2\nu} \underset{2\nu}{e}^l \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Für die durch (3) definierten linearen Operatoren gilt

$$\underset{1}{S}^l{}_r \underset{1}{S}^r{}_m = \underset{1}{S}^l{}_m \tag{4}$$

und

$$\underset{2}{S}^l{}_m = \delta^l{}_m - \underset{1}{S}^l{}_m . \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt weiter

$$\underset{2}{S}^l{}_r \underset{2}{S}^r{}_m = \underset{2}{S}^l{}_m \tag{6}$$

$$\underset{1}{S}^l{}_r \underset{2}{S}^r{}_m = \underset{2}{S}^l{}_r \underset{1}{S}^r{}_m = 0 . \tag{7}$$

Demnach kann $\underset{\lambda}{M}$ $(\lambda = 1{,}2)$ charakterisiert werden als die Linearmannigfaltigkeit aller Vektoren $y^l = \underset{\lambda}{S}^l{}_m z^m$ (z^m beliebig) oder — was wegen (4) und (6) auf dasselbe hinausläuft — aller Vektoren y^l, für die $y^l = \underset{\lambda}{S}^l{}_m y^m$.

Umgekehrt gibt es zu jedem Operator $\underset{1}{S}^l{}_m$, der (4) erfüllt, zwei Linearmannigfaltigkeiten $\underset{1}{M}$ und $\underset{2}{M}$ von k' bzw. k'' Dimensionen, dadurch charakterisiert, dass $\underset{\lambda}{M}$ alle Vektoren y^l enthält,

[1]) Vgl. I, § 9.

für die $y^l = \underset{\lambda}{S}{}^l{}_m\, y^m$, oder alle Vektoren von der Form $y^l = \underset{\lambda}{S}{}^l{}_m\, z^m$ (z^m beliebig). Hierbei ist $\underset{2}{S}{}^l{}_m$ durch die Gleichung (5) zu definieren, so dass auch (6) und (7) erfüllt sind. Jedes z^l aus R_n kann in einen Bestandteil aus $\underset{1}{M}$ und einen aus $\underset{2}{M}$ zerlegt werden ($z^l = \underset{1}{S}{}^l{}_m\, z^m + \underset{2}{S}{}^l{}_m\, z^m$), und zwar in eindeutiger Weise; denn wegen (5) gibt es keinen von Null verschiedenen Vektor z^l, der sowohl in $\underset{1}{M}$ als in $\underset{2}{M}$ liegt. Folglich ist

$$k' + k'' = n\,. \tag{8}$$

Sind nun $\underset{1}{M}$ und $\underset{2}{M}$ gegenüber speziellen Drehungen 1. Art invariante Teilräume des R_4, so geht jeder Vektor y^l aus $\underset{\lambda}{M}$ bei einer solchen Drehung in einen Vektor $y'^l = b^l{}_m\, y^m$ über, der ebenfalls in $\underset{\lambda}{M}$ liegt und daher der Gleichung $y'^l = \underset{\lambda}{S}{}^l{}_m\, y'^m$ genügt. Ist etwa $y^l = \underset{\lambda}{S}{}^l{}_m\, z^m$, so wird

$$\underset{\lambda}{S}{}^l{}_m\, y'^m = \underset{\lambda}{S}{}^l{}_r\, b^r{}_t\, \underset{\lambda}{S}{}^t{}_m\, z^m = y'^l = b^l{}_t\, \underset{\lambda}{S}{}^t{}_m\, z^m.$$

Es ist also

$$\underset{1}{S}{}^l{}_r\, b^r{}_t\, \underset{1}{S}{}^t{}_m = b^l{}_t\, \underset{1}{S}{}^t{}_m$$

und

$$\underset{2}{S}{}^l{}_r\, b^r{}_t\, \underset{2}{S}{}^t{}_m = b^l{}_t\, \underset{2}{S}{}^t{}_m\,.$$

Wegen (5) folgt hieraus

$$b^l{}_t\, \underset{1}{S}{}^t{}_m = \underset{1}{S}{}^l{}_t\, b^t{}_m\,. \tag{9}$$

$\underset{1}{S}{}^l{}_m$ ist mit allen $b^l{}_m$ vertauschbar, also ein numerisch invarianter Semi-Tensor 1. Art[1]), und hat daher die Form

$$\underset{1}{S}{}_{kl} = \alpha \cdot g_{kl} + v_{kl}\,, \tag{10}$$

wobei v_{kl} noch den Bedingungen

$$v_{kl} + v_{lk} = 0\,; \quad v_{kl} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g}\,\eta_{klmn}\, v^{mn}$$

genügt[2]). Allgemein gilt[3])

$$v_{km}\, v^m{}_l = \beta\, g_{kl} \quad (\beta = \tfrac{1}{4}\, v_{mn}\, v^{nm})\,.$$

Daher wird

$$\underset{1}{S}{}_{km}\, \underset{1}{S}{}^m{}_l = (\alpha^2 + \beta)\, g_{kl} + 2\,\alpha\, v_{kl}\,.$$

Da nun nach (4) $\underset{1}{S}{}_{km}\, \underset{1}{S}{}^m{}_l = \underset{1}{S}{}_{kl}$, ergibt sich durch Vergleich

---

[1]) Vgl. I, § 5.

[2]) Es ist $\sqrt{g} = +i$ gesetzt. η_{klmn} ist in allen Indices antisymmetrisch, und es ist $\eta_{1234} = 1$.

[3]) I, Gleichung (24); II, p. 498, Gleichung (3).

mit (10), wenn man den trivialen Fall $v_{kl} = 0$ beiseite lässt, $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{4}$. Wir finden also

$$\underset{1}{S}_{kl} = \tfrac{1}{2}\, g_{kl} + v_{kl}\,; \qquad v_{kl}\, v^{lk} = 1\,. \tag{11}$$

Nach (5) folgt für $\underset{2}{S}_{kl}$ aus (11) die Beziehung

$$\underset{2}{S}_{kl} = \underset{1}{S}_{lk}\,. \tag{12}$$

Die Gleichung (8) besagt im Fall des R_4: $k' + k'' = 4$. Da die Dimensionszahl k gleich dem Rang der zugehörigen Matrix S_{mn} ist und nach (12) $\underset{1}{S}_{mn}$ und $\underset{2}{S}_{mn}$ den gleichen Rang haben, folgt $k' = k'' = 2$.

Aus (7) und (12) ergibt sich

$$\underset{1}{S}_{mk}\, \underset{1}{S}^{m}{}_{l} = 0\,; \quad \underset{2}{S}_{mk}\, \underset{2}{S}^{m}{}_{l} = 0\,. \tag{13}$$

Folglich verschwindet das innere Produkt zweier Vektoren aus $\underset{1}{M}$ (bzw. $\underset{2}{M}$), insbesondere der Betrag eines jeden Vektors aus $\underset{1}{M}$ oder $\underset{2}{M}$. Sei nämlich $\psi_k = \underset{1}{S}_{kl}\, \psi^l$ und $\varphi^k = \underset{1}{S}^{k}{}_{m}\, \varphi^m$, so wird

$$\psi_k\, \varphi^k = \underset{1}{S}_{kl}\, \underset{1}{S}^{k}{}_{m}\, \psi^l\, \varphi^m = 0\,. \tag{14}$$

Die Zerlegung eines Vektors durch $\underset{1}{S}_{kl}$ und $\underset{2}{S}_{kl}$ entspricht genau der Zerlegung eines Semivektors in einen α- und einen β-Semivektor bei Einstein und Mayer (vgl. I, § 9); und zwar ist in der dortigen Bezeichnungsweise $\underset{1}{S}_{kl}\, \psi^l = \frac{1}{2}\,(\psi_k - i\, \psi_k^*)$ und $\underset{2}{S}_{kl}\, \psi^l = \frac{1}{2}\,(\psi_k + i\, \psi_k^*)$.

In analoger Weise zerlegt man R_4 in die gegenüber speziellen Drehungen 2. Art invarianten Teilräume $\underset{\lambda}{N}$ ($\lambda = 1{,}2$) durch $\underset{\lambda}{T}_{kl}$, numerisch invariante Tensoren 2. Art, die ebenfalls den Gleichungen (4) bis (7) genügen. Es wird

$$\underset{1}{T}_{kl} = \tfrac{1}{2}\, g_{kl} + u_{kl}\,, \tag{15}$$

wobei $u_{kl} = +\,\frac{1}{2}\sqrt{g}\;\eta_{klmn}\, u^{mn}$ und $u_{kl}\, u^{lk} = 1$, ferner ist

$$\underset{2}{T}_{kl} = \underset{1}{T}_{lk}\,. \tag{16}$$

Daraus folgt wie oben, dass das innere Produkt zweier Vektoren aus $\underset{\lambda}{N}$ verschwindet.

Da die invarianten Tensoren 1. und 2. Art stets mit einander vertauschbar sind, gilt für alle λ und μ

$$\underset{\lambda}{S}_{km}\, \underset{\mu}{T}^{m}{}_{l} = \underset{\mu}{T}_{km}\, \underset{\lambda}{S}^{m}{}_{l}\,. \tag{17}$$

Wäre einer von diesen vier Ausdrücken gleich Null, so liesse sich durch geeignete Numerierung der $\underset{\lambda}{S}$ und $\underset{\mu}{T}$ erreichen, dass z. B.

$$\underset{1}{S}_{km}\,\underset{1}{T}^m{}_l = 0\,. \tag{18}$$

Nach (12), (16), (17) und (5) würde hieraus folgen

$$0 = \underset{2}{S}_{km}\,\underset{2}{T}^m{}_l = (g_{km} - \underset{1}{S}_{km})\cdot(\delta^m{}_l - \underset{1}{T}^m{}_l)\,,$$

also wegen (18)

$$\underset{1}{T}_{kl} = g_{kl} - \underset{1}{S}_{kl} = \underset{2}{S}_{kl}\,.$$

Da aber $\underset{1}{T}_{kl}$ und $\underset{2}{S}_{kl}$ Tensoren verschiedener Art und auch nicht Vielfache von g_{kl} sind, ist stets $\underset{1}{T}_{kl} \neq \underset{2}{S}_{kl}$, so dass der Fall (18) nie vorkommt.

Wegen der Gültigkeit der Beziehungen (7) und (17) ist

$$\underset{\lambda}{S}^k{}_r\,\underset{\mu}{T}^r{}_m\,\underset{\lambda'}{S}^m{}_t\,\underset{\mu'}{T}^t{}_l = \begin{cases} \underset{\lambda}{S}^k{}_r\,\underset{\mu}{T}^r{}_l, & \text{wenn } \lambda = \lambda' \text{ und } \mu = \mu', \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Demnach definieren die Ausdrücke (17) vier Teilräume des R_4, charakterisiert durch

$$y^l = \underset{\lambda}{S}^l{}_r\,\underset{\mu}{T}^r{}_m\,z^m\ (z^m \text{ beliebig})\ \text{bzw.}\ y^l = \underset{\lambda}{S}^l{}_r\,\underset{\mu}{T}^r{}_m\,y^m.$$

Jeder Vektor z^l ist eindeutig in vier Bestandteile aus diesen Teilräumen zerlegbar:

$$z^l = \sum_{\lambda,\,\mu} \underset{\lambda}{S}^l{}_r\,\underset{\mu}{T}^r{}_m\,z^m\,;$$

denn es ist $\underset{1}{S}_{lm} + \underset{2}{S}_{lm} = \underset{1}{T}_{lm} + \underset{2}{T}_{lm} = g_{lm}$. Da keiner der Tensoren $\underset{\lambda}{S}^l{}_r\,\underset{\mu}{T}^r{}_m$ verschwindet, ist jeder der definierten Teilräume *eindimensional*, reduziert sich also auf die Vielfachen eines Vektors.

§ 2. Beziehungen zur Spinoranalyse. Aufstellung der Grundgleichungen für $\sigma^l{}_{\lambda\mu}$.

Wir setzen nun im folgenden voraus, dass die Tensoren $\underset{\mu}{T}_{lm}$ und $\underset{\lambda}{S}_{lm}$ durch die Beziehungen

$$\underset{\lambda}{T}_{lm} = \overline{\underset{\lambda}{S}}_{lm} \tag{19}$$

verknüpft sind. Diese Festsetzung lässt sich für jede Wahl von $\underset{\lambda}{S}_{lm}$ treffen, die mit (11) und (12) verträglich ist; denn die konjugiert komplexen Grössen erfüllen dann (15) und (16).

Wegen (17) und (19) sind die Ausdrücke $\underset{\lambda}{S}{}^{l}{}_{r}\,\underset{\mu}{T}{}^{r}{}_{m}$ und $\underset{\mu}{S}{}^{l}{}_{r}\,\underset{\lambda}{T}{}^{r}{}_{m}$ zu einander konjugiert komplex. Infolgedessen kann man die Vektoren $\underset{\lambda\mu}{e^{l}}$, die durch die vier erwähnten Teilräume bestimmt werden und den Gleichungen

$$\underset{\lambda}{S}{}^{l}{}_{r}\,\underset{\mu}{T}{}^{r}{}_{m}\,\underset{\lambda'\mu'}{e^{m}} = \begin{cases} \underset{\lambda\mu}{e^{l}}, \text{ wenn } \lambda=\lambda' \text{ und } \mu=\mu' \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{20}$$

genügen, so wählen, dass

$$\underset{\lambda\mu}{e^{l}} = \underset{\mu\lambda}{\bar{e}^{l}}\,. \tag{21}$$

Durch (20) und (21) ist jeder Vektor $\underset{\lambda\mu}{e^{l}}$ nur bis auf einen reellen Faktor bestimmt, welche Faktoren wir noch in geeigneter Weise wählen werden.

Da $\underset{\lambda\mu}{e^{l}}$ sowohl in $\underset{\lambda}{M}$ als auch in $\underset{\mu}{N}$ liegt, folgt aus unseren früheren Überlegungen (Gleichung (14)), dass alle Vektoren $\underset{\lambda\mu}{e^{l}}$ den Betrag Null haben und dass es keine anderen von Null verschiedenen inneren Produkte geben kann als $\underset{11}{e^{l}}\,\underset{22}{e_{l}} = \alpha$ und $\underset{12}{e^{l}}\,\underset{21}{e_{l}} = \beta$ (α und β reell).

Jeder Vektor z^{l} kann, analog (2), als Linearaggregat der $\underset{\lambda\mu}{e^{l}}$ dargestellt werden, etwa

$$z^{l} = \zeta^{\lambda\mu}\,\underset{\lambda\mu}{e^{l}}\,. \tag{22}$$

(Über gleiche Indices ist zu summieren!)

Nun wird

$$z^{l} z_{l} = \zeta^{\lambda\mu}\,\zeta^{\varrho\tau}\,\underset{\lambda\mu}{e^{l}}\,\underset{\varrho\tau}{e_{l}}\,, \tag{23}$$

folglich

$$z^{l} z_{l} = 2\,(\alpha\,\zeta^{11}\,\zeta^{22} + \beta\,\zeta^{12}\,\zeta^{21})\,, \tag{24}$$

denn alle übrigen inneren Produkte verschwinden. α und β sind beide von Null verschieden, weil auf beiden Seiten von (24) eine nichtsinguläre quadratische Form stehen muss. Durch Multiplikation der Vektoren $\underset{\lambda\mu}{e^{l}}$ mit geeigneten reellen Faktoren lässt sich erreichen, dass $\alpha + \beta = 0$ und $\alpha^{2} = \beta^{2} = 1$ wird. Für reelle z^{l} wird nach (21) und (22) auch $\zeta^{\mu\lambda} = \bar{\zeta}^{\lambda\mu}$. Setzt man

$$\zeta^{12} = u^{1} + i\,u^{2},\ \zeta^{21} = u^{1} - i\,u^{2},\ \zeta^{11} = u^{4} + u^{3},\ \zeta^{22} = u^{4} - u^{3} \tag{25}$$

so sind die reellen Grössen u^{k} mit den z^{l} durch eine reelle Transformation verbunden. Aus (24) und (25) folgt

$$-(z^{1})^{2} - (z^{2})^{2} - (z^{3})^{2} + (z^{4})^{2} = 2\,\alpha\,(-(u^{1})^{2} - (u^{2})^{2} - (u^{3})^{2} + (u^{4})^{2});$$

daher ist $\alpha > 0$, also $\alpha = +1$, und wir erhalten

$$z^{l} z_{l} = 2\,(\zeta^{11}\,\zeta^{22} - \zeta^{12}\,\zeta^{21})\,. \tag{26}$$

Es zeigt sich nun, dass man zur Spinoranalyse gelangt, indem man

$$\underset{\lambda\mu}{e^l} = \sigma^l{}_{\dot\lambda\mu} \tag{27}$$

setzt, wenn unter $\sigma^l{}_{\dot\lambda\mu}$ die *Fundamentalgrössen der Spinoranalyse* verstanden werden. (Der Punkt über dem ersten Index deutet auf die Verschiedenheit der Transformationseigenschaften von λ und μ hin. Vgl. (51), (53), (55)).

Bevor wir dies nachweisen, schicken wir einiges über das Herauf- und Herunterziehen der griechischen Indices voraus. Wir verwenden dazu, wie üblich, die folgenden Grössen:

$$\varepsilon_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\dot\lambda\dot\mu} = \varepsilon^{\lambda\mu} = \varepsilon^{\dot\lambda\dot\mu}; \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1, \tag{28}$$

und zwar ist

$$\eta^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu}\,\eta_\mu; \qquad \eta_\mu = \eta^\lambda\,\varepsilon_{\lambda\mu}, \tag{29a}$$

so dass stets

$$\eta^\lambda\,\zeta_\lambda = -\eta_\lambda\,\zeta^\lambda. \tag{29b}$$

Für jeden Tensor $\alpha_{\lambda\mu}$ findet man nach (28) und (29)

$$\alpha_{\lambda\varrho}\,\alpha^{\mu\varrho} = -\alpha_\lambda{}^\varrho\,\alpha^\mu{}_\varrho = \alpha\,\delta_\lambda{}^\mu \tag{30}$$

mit $\alpha = \mathrm{Det}\,(\alpha_{\varrho\tau}) = \mathrm{Det}\,(\alpha_\varrho{}^\tau)$.

Insbesondere ist also

$$\mathrm{Det}\,(\alpha_{\varrho\tau}) = \tfrac{1}{2}\,\alpha_{\lambda\mu}\,\alpha^{\lambda\mu} = -\tfrac{1}{2}\,\alpha_\lambda{}^\mu\,\alpha^\lambda{}_\mu. \tag{30a}$$

(Die Gleichungen (29a) bis (30a) gelten in gleicher Weise für „punktierte" Indices.)

Nach (26) ist

$$z^l z_l = \zeta_{\dot\lambda\mu}\,\zeta^{\dot\lambda\mu} = \varepsilon_{\dot\varrho\dot\lambda}\,\varepsilon_{\tau\mu}\,\zeta^{\dot\lambda\mu}\,\zeta^{\dot\varrho\tau}.$$

Der Vergleich mit (23) ergibt daher wegen (27)

$$\sigma^l{}_{\dot\lambda\mu}\,\sigma_{l\,\dot\varrho\tau} = \varepsilon_{\dot\varrho\dot\lambda}\,\varepsilon_{\tau\mu}$$

oder

$$\sigma^l{}_{\dot\lambda\mu}\,\sigma_l{}^{\dot\varrho\tau} = \delta_{\dot\lambda}{}^{\dot\varrho}\,\delta_\mu{}^\tau. \tag{31}$$

Aus (31) folgt

$$\sigma^l{}_{\dot\lambda\mu}\,\sigma_m{}^{\dot\lambda\mu} = \delta^l{}_m. \tag{32}$$

Neben einer Gleichung $A^l{}_r\,B_l{}^s = \delta_r{}^s$ gilt nämlich stets auch $A^l{}_r\,B_m{}^r = \delta^l{}_m$. Nur ist in (31) und (32) r durch das Indexpaar $(\lambda\mu)$ zu ersetzen.

Setzt man, mit beliebigen w_k, $\eta_{\dot\lambda\mu} = w_l\, \sigma^l{}_{\dot\lambda\mu}$, so ist nach (32)

$$\eta_{\dot\lambda\mu}\, \eta^{\dot\lambda\mu} = w_l\, \sigma^l{}_{\dot\lambda\mu}\, w^m\, \sigma_m{}^{\dot\lambda\mu} = w_l\, w^l$$

oder in Matrizenform

$$\mathrm{Det}\ (w_l\, \sigma^l) = \tfrac{1}{2}\, w_l\, w^l. \tag{33}$$

Diese Gleichung bildet meist die Grundlage der Spinoranalyse[1]).

Da nach (21) und (27)

$$\sigma^l{}_{\dot\mu\lambda} = \overline{\sigma^l{}_{\dot\lambda\mu}}, \tag{34}$$

folgt aus (33) und (1), dass $\sigma^4{}_{\dot\lambda\mu}$ eine *definite* Hermitesche Form bestimmt. Wir können deshalb noch festsetzen, dass diese Form *positiv definit* ist, was auf die äquivalenten Bedingungen

$$\sigma^4{}_{11} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma^4{}_{22} > 0 \tag{35}$$

führt. ((35) kann nötigenfalls durch Multiplikation aller $\sigma^l{}_{\dot\lambda\mu}$ mit (—1) erreicht werden, wodurch keine der bisher abgeleiteten Beziehungen geändert wird.)

Mit Hilfe von (32) ergeben sich noch die Gleichungen[2])

$$\left.\begin{aligned} \sigma^l{}_{\dot\varrho\lambda}\, \sigma^{m\,\dot\varrho\mu} + \sigma^m{}_{\dot\varrho\lambda}\, \sigma^{l\,\dot\varrho\mu} &= g^{lm}\, \delta_\lambda{}^\mu \\ \sigma^l{}_{\dot\lambda\varrho}\, \sigma^{m\,\dot\mu\varrho} + \sigma^m{}_{\dot\lambda\varrho}\, \sigma^{l\,\dot\mu\varrho} &= g^{lm}\, \delta_{\dot\lambda}{}^{\dot\mu} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

§ 3. Die Drehungen im R_4 und die zugeordneten Transformationen der $\zeta^{\dot\lambda\mu}$.

Aus der Beziehung

$$z^l = \zeta^{\dot\lambda\mu}\, \sigma^l{}_{\dot\lambda\mu} \tag{37}$$

(vgl. (22)) folgt durch Anwendung von (32)

$$\zeta^{\dot\lambda\mu} = z^l\, \sigma_l{}^{\dot\lambda\mu}. \tag{37a}$$

Wird der Vektor z^l einer Drehung 1. Art unterworfen, die ihn in $z'^l = b^l{}_m\, z^m$ überführt, so transformieren sich die durch (37) und (37a) zugeordneten Grössen $\zeta_{\dot\lambda\mu}$ gemäss der Beziehung

$$\zeta'^{\dot\lambda\mu}\, \sigma^l{}_{\dot\lambda\mu} = \zeta^{\dot\varrho\tau}\, \sigma'^l{}_{\dot\varrho\tau}, \tag{38}$$

wenn $b^l{}_m\, \sigma^m{}_{\dot\lambda\mu} = \sigma'^l{}_{\dot\lambda\mu}$ gesetzt wird. Da nun bei jeder solchen Drehung der Bildvektor eines Vektors aus $\underset{\lambda}{M}$ wieder in $\underset{\lambda}{M}$ liegt,

---

[1]) Eine ausführliche Darstellung findet sich bei L. Infeld und B. L. van der Waerden, Sitz.-Ber. d. Preuss. Akad. 1933, p. 380.

[2]) Infeld-v. d. Waerden, loc. cit. p. 386.

ist $\sigma'^{l}_{\dot\lambda\,\mu}$ ein Linearaggregat von $\sigma^{l}_{\dot\lambda\,1}$ und $\sigma^{l}_{\dot\lambda\,2}$, das wir etwa schreiben können

$$\sigma'^{l}_{\dot\lambda\,\mu} = \sigma^{l}_{\dot\lambda\,\nu}\,\beta^{(\lambda)\,\nu}{}_{\mu} \quad \text{(Über } \lambda \text{ nicht summieren!)}$$

Daraus folgt

$$\zeta'^{\dot\lambda\,\mu} = \beta^{(\lambda)\,\mu}{}_{\nu}\,\zeta^{\dot\lambda\,\nu}. \tag{38a}$$

Eine genauere Überlegung zeigt, dass darüber hinaus $\beta^{(1)\,\nu}{}_{\mu} = \beta^{(2)\,\nu}{}_{\mu} = \beta^{\nu}{}_{\mu}$, so dass

$$b^{l}{}_{m}\,\sigma^{m}{}_{\dot\lambda\,\mu} = \sigma^{l}{}_{\dot\lambda\,\nu}\,\beta^{\nu}{}_{\mu} \tag{39}$$

und

$$\zeta'^{\dot\lambda\,\mu} = \beta^{\mu}{}_{\nu}\,\zeta^{\dot\lambda\,\nu}. \tag{39a}$$

Dies ergibt sich folgendermassen: Die Definition der *speziellen Abbildungen* 1. und 2. Art durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} b_{kl} &= b\cdot g_{kl} + u_{kl}; \qquad u_{kl} = +\tfrac{1}{2}\sqrt{g}\,\eta_{klmn}\,u^{mn} \\ c_{kl} &= c\cdot g_{kl} + v_{kl}; \qquad v_{kl} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g}\,\eta_{klmn}\,v^{mn} \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

bleibt bei beliebigen linearen Transformationen bestehen, wobei nur der Tensor g_{ik} sich gemäss der Transformation ändert. (Eine solche Abbildung führt den Betrag eines Vektors, $z^l z_l$, über in $\Phi\,.\,z^l z_l$, mit $\Phi = \frac{1}{4}\,b_{kl}\,b^{kl}$ bzw. $\frac{1}{4}\,c_{kl}\,c^{kl}$, sie ist also nur dann eine Drehung, wenn $\Phi = 1$[1]). Doch bleiben, wie man sich leicht überlegt, alle bisherigen Überlegungen auch für diese umfassendere Gruppe von Abbildungen richtig.) Setzt man $(\zeta^{\dot 1 1}, \zeta^{\dot 1 2}, \zeta^{\dot 2 1}, \zeta^{\dot 2 2}) = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4)$, so ist nach (26) die metrische Fundamentalform gegeben durch $2\,(\zeta^1\,\zeta^4 - \zeta^2\,\zeta^3)$.[2]) Führt man die entsprechenden

[1]) Vgl. II, p. 498, Gleichung (3).

[2]) Betrachtet man die ζ^i als projektive Koordination im dreidimensionalen Raum (wie z. B. H. Weyl in der 1. Auflage seines Buchs „Gruppentheorie und Quantenmechanik“ p. 111), so ist $\zeta^1\,\zeta^4 - \zeta^2\,\zeta^3 = 0$ die Gleichung eines Hyperboloids mit zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden. Einer Drehung entspricht dann eine projektive Abbildung, bei der das Hyperboloid in sich übergeht. Insbesondere entspricht einer Drehung 1. (bzw. 2.) Art eine solche Abbildung, bei der nur die Geraden der ersten (bzw. zweiten) Schar unter sich transformiert werden, während die der anderen Schar fest bleiben. Die allgemeinste Abbildung, die das Hyperboloid in sich überführt und aus der Identität stetig erzeugt werden kann, lässt sich stets als Produkt zweier spezieller darstellen. In dieser geometrischen Interpretation wird die Vertauschbarkeit der Drehungen 1. und 2. Art deutlich. Vgl. hierzu auch die Arbeit von J. A. Schouten (Zs. f. Phys. **84**, p. 92, 1933), mit der unsere Darstellung manche Berührungspunkte hat.

g_{ik} in (40) ein, so bestätigt man (39) und für Abbildungen 2. Art ganz analog[1])

$$c^l{}_m \sigma^m{}_{\dot\lambda\mu} = \sigma^l{}_{\dot\tau\mu} \gamma^{\dot\tau}{}_{\dot\lambda} \tag{41}$$

$$\zeta'^{\dot\lambda\mu} = \gamma^{\dot\lambda}{}_{\dot\tau} \zeta^{\dot\tau\mu}. \tag{41a}$$

Die Gleichungen (39) und (41) können auch von rechts nach links gelesen werden, d. h. zu jedem $\beta^\mu{}_\nu$ gehört ein $b^k{}_l$, zu jedem $\gamma^{\dot\mu}{}_{\dot\nu}$ ein $c^k{}_l$. Für die zusammengesetzte Abbildung $a^k{}_l = b^k{}_r c^r{}_l$ ergibt sich

$$a^l{}_m \sigma^m{}_{\dot\lambda\mu} = \gamma^{\dot\varrho}{}_{\dot\lambda} \sigma^l{}_{\dot\varrho\tau} \beta^\tau{}_\mu \tag{42}$$

$$\zeta'^{\dot\lambda\mu} = \gamma^{\dot\lambda}{}_{\dot\varrho} \zeta^{\dot\varrho\tau} \beta^\mu{}_\tau. \tag{42a}$$

In (42) kommt die Vertauschbarkeit der Abbildungen 1. und 2. Art klar zum Ausdruck.

Mit Hilfe von (31) und (32) ergeben sich aus (39) und (41) die folgenden Beziehungen zwischen $b^k{}_l$ und $\beta^\mu{}_\nu$ bzw. $c^k{}_l$ und $\gamma^{\dot\mu}{}_{\dot\nu}$:

$$\beta^\mu{}_\nu = \tfrac{1}{2} b^l{}_m \sigma_l{}^{\dot\varrho\mu} \sigma^m{}_{\dot\varrho\nu}; \qquad b^l{}_m = \beta^\mu{}_\nu \sigma^l{}_{\dot\varrho\mu} \sigma_m{}^{\dot\varrho\nu} \tag{43a}$$

$$\gamma^{\dot\mu}{}_{\dot\nu} = \tfrac{1}{2} c^l{}_m \sigma_l{}^{\dot\mu\tau} \sigma^m{}_{\dot\nu\tau}; \qquad c^l{}_m = \gamma^{\dot\mu}{}_{\dot\nu} \sigma^l{}_{\dot\mu\tau} \sigma_m{}^{\dot\nu\tau}. \tag{43b}$$

Aus (43) ergibt sich wegen (29)

$$\tfrac{1}{4} b^{kl} b_{kl} = \mathrm{Det}\,(\beta^\mu{}_\nu); \qquad \tfrac{1}{4} c^{kl} c_{kl} = \mathrm{Det}\,(\gamma^{\dot\mu}{}_{\dot\nu}). \tag{44}$$

Den Drehungen entsprechen also Transformationen der $\zeta^{\dot\lambda\mu}$ von der Determinante 1[2]), was auch aus (26) unmittelbar hervorgeht.

Weiter erkennt man, dass wegen (34) die Relationen

$$c^k{}_l = \bar b^k{}_l \quad \text{und} \quad \gamma^{\dot\mu}{}_{\dot\nu} = \bar\beta^{\dot\mu}{}_{\dot\nu} \tag{45}$$

einander äquivalent sind.

$\underset{1}{S}{}^l{}_m$ hat die Symmetrie eines $c^l{}_m$-Tensors (nach 11)). Da $\underset{1}{S}{}^l{}_m \sigma^m{}_{\dot 1\mu} = \sigma^l{}_{\dot 1\mu}$ und $\underset{1}{S}{}^l{}_m \sigma^m{}_{\dot 2\mu} = 0$ (vgl. (20) und (5)), ist das einzige nicht verschwindende Element des nach (41) und (43b) zugeordneten γ gegeben durch $\gamma^{\dot 1}{}_{\dot 1} = 1$. Folglich findet man für $\underset{1}{S}{}^l{}_m$ und entsprechend für $\underset{2}{S}{}^l{}_m$:

$$\underset{1}{S}{}^l{}_m = \sigma^l{}_{\dot 1\tau} \sigma_m{}^{\dot 1\tau}; \qquad \underset{2}{S}{}^l{}_m = \sigma^l{}_{\dot 2\tau} \sigma_m{}^{\dot 2\tau}. \tag{46}$$

---

[1]) Der genaue Sachverhalt ist der: Wegen der Zweideutigkeit der in (40) auftretenden Wurzel kann aus der Rechnung nur geschlossen werden, dass die Transformationen der einen Art auf (39), die der anderen Art auf (41) führen. Die genaue Zuordnung vermittelt (38a).

[2]) Vgl. Anmerkung 1, p. 65.

Da der in (43) angegebene Ausdruck bei jeder Wahl von $\beta^{\mu}{}_{\nu}$ auf einen $b^{k}{}_{l}$-Tensor führt, kann man daraus schliessen, dass das Gebilde

$$\sigma_{l\dot{\varrho}\mu}\,\sigma_{m}{}^{\dot{\varrho}\nu} \tag{47}$$

in den Indices l und m die Symmetrie eines b_{kl}-Tensors,

$$\sigma_{l\dot{\mu}\varrho}\,\sigma_{m}{}^{\dot{\nu}\varrho} \tag{48}$$

diejenige eines c_{kl}-Tensors hat (vgl. (40)).

Wie hier ohne Beweis angegeben sei, kann allein aus den Beziehungen (31) bis (34) geschlossen werden, dass der Ausdruck (47) inbezug auf die Indices l und m ein b- oder ein c-Tensor ist. Es lässt sich zeigen, dass stets

$$\frac{1}{4!}\,\eta_{klmn}\,\sigma^{k}{}_{\dot{\lambda}\varrho}\,\sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\,\sigma^{m}{}_{\dot{\nu}\mu}\,\sigma^{n\dot{\nu}\varrho} = \pm\frac{1}{2i} \tag{49}$$

oder, was wegen (28) und (29) dasselbe besagt,

$$\mathrm{Det}\,(\underset{11}{e^{k}},\ \underset{21}{e^{l}},\ \underset{12}{e^{m}},\ \underset{22}{e^{n}}) = \pm i. \tag{49a}$$

Steht in (49) das Pluszeichen, so haben (47) und (48) die verlangten Symmetrieeigenschaften. Andernfalls tauschen b_{kl} und c_{kl} ihre Rollen.

§ 4. *Koordinaten- und Spinortransformationen. Übergang zu neuen $\sigma^{k}{}_{\dot{\lambda}\mu}$.*

Während bisher nur von Vektorabbildungen die Rede war, sollen jetzt die Koordinatentransformationen besprochen werden. Diese sind den Vektorabbildungen eindeutig zugeordnet (vgl. § 1), und wir können daher die in den vorangehenden Paragraphen abgeleiteten Beziehungen hier verwenden, nur mit dem Unterschied, dass Invarianz gegenüber Vektorabbildungen jetzt Invarianz gegenüber den entsprechenden Koordinatentransformationen zu bedeuten hat und dass Semivektoren 1. und 2. Art von einander und von den Weltvektoren getrennt zu behandeln sind.

$u^{\bar{l}}$ sei ein Semivektor 1. Art, $v^{\bar{\bar{l}}}$ ein Semivektor 2. Art[1]). Nach den Ausführungen in § 1 sind dann Gleichungen der Gestalt

$$u^{\bar{l}} = \underset{\lambda}{S}{}^{l}{}_{m}\,u^{\bar{m}} \quad \text{bzw.} \quad v^{\bar{\bar{l}}} = \underset{\mu}{T}{}^{l}{}_{m}\,v^{\bar{\bar{m}}}$$

---

[1]) Wir deuten Semivektoren 1. bzw. 2. Art nach Einstein-Mayer durch ein- bzw. zweimaliges Überstreichen ihrer Indices an, lassen aber die Striche fort, falls dies nicht zu Missverständnissen führt.

gegenüber Koordinatentransformationen invariant, sobald man $\underset{\lambda}{S}{}^{l}{}_{m}$ und $\underset{\mu}{T}{}^{l}{}_{m}$ als numerisch invariante Semi-Tensoren 1. bzw. 2. Art auffasst. Die Eigenschaft, zu $\underset{\lambda}{M}$ bzw. $\underset{\mu}{N}$ zu gehören oder, in der Ausdrucksweise von Einstein und Mayer, ein α- oder β-Semivektor zu sein, ist also vom gewählten Bezugssystem unabhängig.

Darüber hinaus setzen wir fest, dass auch die $\sigma^{l}{}_{\dot\lambda\mu}$ sich bei Koordinatentransformationen nicht ändern, obwohl sie durch $\underset{\lambda}{S}{}^{l}{}_{m}$ nicht eindeutig bestimmt werden. (Nur das Umgekehrte ist nach (46) der Fall.) Dies besagt, dass in jedem Bezugssystem die $\underset{\lambda\mu}{e^{l}}$ in der gleichen Weise mit den jeweiligen Grundvektoren $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ usw. zusammenhängen.

Ordnet man dem Semivektor u^{l} gemäss (37a) die Grösse

$$\xi^{\dot\lambda\mu} = u^{l}\, \sigma_{l}^{\dot\lambda\mu} \tag{50}$$

zu, so geht bei einer Lorentztransform $u'^{k} = b^{k}{}_{l}\, u^{l}$, da $\sigma^{l}{}_{\dot\lambda\mu}$ ungeändert bleiben, $\xi^{\dot\lambda\mu}$ nach (39) und (43) über in

$$\xi'^{\dot\lambda\mu} = \beta^{\mu}{}_{\nu}\, \xi^{\dot\lambda\nu}. \tag{51}$$

Da nur der zweite Index variiert, kann man auch sagen, dass durch (50) dem Semivektor *zwei zweikomponentige Spinoren* zugeordnet werden, die beide dem gleichen Transformationsgesetz genügen. Wir schreiben daher $\xi^{\dot\lambda\mu} = \overset{\dot\lambda}{\xi}{}^{\mu}$ oder später in Matrizenform $\overset{\dot\lambda}{\xi}$, um zum Ausdruck zu bringen, dass λ nicht variiert. (Die Aussage, dass u^{l} in $\underset{1}{M}$ liegt, lässt sich jetzt so aussprechen, dass $\overset{2}{\xi} = 0$.)

Ebenso erleidet die Grösse

$$\eta^{\dot\lambda\mu} = v^{l}\, \sigma_{l}^{\dot\lambda\mu}, \tag{52}$$

die dem Semivektor 2. Art $v^{\bar l}$ zugeordnet ist, eine Transformation

$$\eta'^{\dot\lambda\mu} = \gamma^{\dot\lambda}{}_{\dot\nu}\, \eta^{\dot\nu\mu}, \tag{53}$$

wenn v^{l} in $v'^{l} = c^{l}{}_{m}\, v^{m}$ übergeht. Hierbei bleibt der zweite Index ungeändert. Wir setzen, anders als für $\xi^{\dot\lambda\mu}$, $\eta_{\dot\lambda}{}^{\mu} = \overset{\mu}{\eta}{}_{\dot\lambda}$[1]). Aus (53) folgt noch

$$\eta'_{\dot\lambda}{}^{\mu} = -\gamma_{\dot\lambda}{}^{\dot\nu}\, \eta_{\dot\nu}{}^{\mu}. \tag{53a}$$

---

[1]) Der Index λ ist heruntergezogen, damit der Ausdruck $\overset{\mu}{\eta}_{\lambda}\, \overset{\bar\nu}{\xi}{}^{\lambda}$ gebildet werden kann.

Endlich bleibt noch zu untersuchen, wie verschiedene Systeme $\sigma^l_{\dot\lambda\mu}$ miteinander zusammenhängen. Neben $\sigma^l_{\dot\lambda\mu}$ genüge also auch $\underset{\sim}{\sigma}^l_{\dot\lambda\mu}$ den Beziehungen (31) bis (35) und erfülle (49) mit dem Pluszeichen. Da die vier $\sigma^l_{\dot\lambda\mu}$ ($l = 1, \ldots, 4$) unabhängig sind, kann $\underset{\sim}{\sigma}^l_{\dot\lambda\mu}$ in der Form

$$\underset{\sim}{\sigma}^l_{\dot\lambda\mu} = a^l_m\, \sigma^m_{\dot\lambda\mu} \tag{54}$$

geschrieben werden. Da nun, nach (31), alle inneren Produkte der $\underset{\sim}{\sigma}$ mit den entsprechenden inneren Produkten der σ übereinstimmen, sind a^k_l die Koeffizienten einer Lorentztransformation, die überdies wegen (34) reell ist. Weiter ist nach (49) ihre Determinante gleich $+1$, und die Zeitrichtung bleibt wegen (35) durch sie ungeändert. Infolgedessen ist a^k_l das Produkt zweier Transformationen 1. und 2. Art, $a^k_l = b^k_m\, \bar b^m_l$, so dass nach (42) bis (45)

$$\underset{\sim}{\sigma}^l_{\dot\lambda\mu} = \bar\omega^{\dot\varrho}_{\dot\lambda}\, \sigma^l_{\dot\varrho\tau}\, \omega^\tau_\mu \tag{55}$$

$$\text{mit } \omega^\mu_\nu = \tfrac{1}{2}\, b^l_m\, \sigma_l^{\dot\varrho\mu}\, \sigma^m_{\dot\varrho\nu}\,; \quad \text{Det }(\omega^\mu_\nu) = 1\,.$$

Ebenso ist

$$\underset{\sim}{\sigma}_l^{\dot\lambda\mu} = \bar\omega_{\dot\varrho}^{\dot\lambda}\, \sigma_l^{\dot\varrho\tau}\, \omega_\tau^\mu\,.$$

Da nach (30)

$$\omega^\mu_\varrho\, \omega_\lambda^\varrho = -\,\delta^\mu_\lambda\,, \tag{56}$$

kann man direkt die Relationen (31) bis (34) für $\underset{\sim}{\sigma}^l_{\lambda\mu}$ verifizieren. Deshalb gehört zu jedem $\underset{\sim}{\sigma}$ von der Form (55) nach (46) ein $\underset{\sim}{\underset{1}{S}}{}^l_m$. Nach (46) und (54) ist $\underset{\sim}{\underset{1}{S}}{}^k_l = a^k_m\, a_l^n\, \underset{1}{S}{}^m_n$ oder, da $\underset{1}{S}{}^l_m$ mit jeder b-Transformation vertauschbar ist,

$$\underset{\sim}{\underset{1}{S}}{}^k_l = b^k_m\, \bar b_l^n\, \underset{1}{S}{}^m_n\,.$$

Nach (37) und (55) ist

$$\underset{\sim}{\zeta}^{\dot\lambda\mu} = \bar\omega_{\dot\varrho}^{\dot\lambda}\, \omega_\tau^\mu\, \zeta^{\dot\varrho\tau}\,,$$

und für die den b- und c-Transformationen zugeordneten Spinortransformationen ergibt sich nach (43) und (56)

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{\beta}^\mu_\nu &= -\,\omega_\lambda^\mu\, \beta^\lambda_\tau\, \omega^\tau_\nu = (\omega^{-1})^\mu_\lambda\, \beta^\lambda_\tau\, \omega^\tau_\nu \\ \underset{\sim}{\gamma}^{\dot\mu}_{\dot\nu} &= -\,\bar\omega_{\dot\lambda}^{\dot\mu}\, \gamma^{\dot\lambda}_{\dot\tau}\, \bar\omega^{\dot\tau}_{\dot\nu} = (\bar\omega^{-1})^{\dot\mu}_{\dot\lambda}\, \gamma^{\dot\lambda}_{\dot\tau}\, \bar\omega^{\dot\tau}_{\dot\nu} \end{aligned}\right\}$$

Alle Systeme $\sigma^l_{\dot\lambda\mu}$, die (31) bis (35) und (49) erfüllen, können nach (55) durch eine geeignete Transformation ω^μ_ν aus einem speziellen System abgeleitet werden, als welches wir z. B. das folgende wählen können:

$$\sigma_{1\dot{\lambda}\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_{2\dot{\lambda}\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_{3\dot{\lambda}\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_{4\dot{\lambda}\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

das bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ mit den PAULIschen Spin-Matrizen übereinstimmt. Dieser Wahl entspricht die Definition der α- und β-Semivektoren bei EINSTEIN-MAYER[1]).

§ 5. *Entwicklung der Theorie der Semivektoren auf Grund der Spinoranalyse.*

In diesem Paragraphen soll der umgekehrte Weg eingeschlagen werden. Wir wollen kurz zeigen, wie die Theorie der Semivektoren auf Grund der Spinoranalyse entwickelt werden kann.

Gegeben sind vier Hermitesche Matrizen σ^k, die (33), also auch (32) erfüllen. Daraus schliesst man, dass sie auch den Gleichungen (31) und (36) genügen. Der Zusammenhang mit den reellen Lorentztransformationen ergibt sich folgendermassen: Aus den vier unabhängigen Matrizen σ^k lässt sich jede zweireihige Matrix in eindeutiger Weise linear aufbauen. Bildet man nun, mit einer beliebigen Matrix β von der Determinante 1,

$$\sigma'^k = \beta^\dagger \sigma^k \beta, \text{ }^{2)} \tag{58}$$

so ist $\sigma'^k = a^k{}_l \sigma^l$, wobei $a^k{}_l$ reell, weil σ'^k und σ^k Hermitesche Matrizen sind. Wir führen die vier Variablen w_k ein und setzen $w'_l = a^k{}_l w_k$. Daher ist Det $(w_k \sigma'^k) =$ Det $(w'_k \sigma^k) = \frac{1}{2} w'_k w'^k$. Andrerseits ist nach (58), wegen Det $\beta = 1$, Det $(w_k \sigma'^k) =$ Det $(w_k \sigma^k) = \frac{1}{2} w_k w^k$. Infolgedessen sind $a^k{}_l$ die Koeffizienten einer Lorentztransformation.

H. CASIMIR machte nun die Bemerkung[3]), dass man genau so die Multiplikation von σ^k mit β oder $\beta^\dagger$ allein behandeln kann

---

[1]) I, p. 545. Die Definition in III, p. 616 entsteht hieraus durch die zyklische Vertauschung $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$.

[2]) $\beta^\dagger$ ist die zu β Hermitesch adjungierte, d. h. transponierte und konjugiert-komplex genommene Matrix.

[3]) Dieser Bemerkung, die mir von Herrn Prof. PAULI mitgeteilt wurde, verdanke ich weit mehr Anregungen, als aus der jetzigen Darstellung hervorgeht. Aus Gründen der Systematik sind nämlich die Überlegungen in einer anderen Reihenfolge wiedergegeben, als ich sie ursprünglich angestellt hatte.

und dabei in einfacher Weise zu den speziellen Lorentztransformationen 1. und 2. Art gelangt. Setzt man nämlich

$$\sigma'^{k} = \sigma^{k} \beta\,, \quad (\mathrm{Det}\,\beta = 1) \tag{59a}$$

so ist

$$\sigma'^{k} = b^{k}{}_{l}\, \sigma^{l}\,, \tag{59b}$$

und wieder folgt, für $w_l' = b^{k}{}_{l}\, w_k$, $w_k'\, w'^{k} = w_k\, w^k$. Daher ist $b^{k}{}_{l}$ eine Lorentztransformation. Ebenso schliesst man für

$$\sigma''^{k} = \gamma\, \sigma^{k} = c^{k}{}_{l}\, \sigma^{l}\,. \tag{60}$$

Ist insbesondere $\gamma = \beta^{\dagger}$, so wird $c^{k}{}_{l} = \bar{b}^{k}{}_{l}$, weil wegen der Hermitizität der σ^k $(\sigma^k \beta)^{\dagger} = \beta^{\dagger} \sigma^k = \bar{b}^{k}{}_{l}\, \sigma^{l}$.

Bekanntlich kann man jeder reellen Lorentztransformation, die sich stetig aus der identischen Transformation gewinnen lässt, gemäss (58), bis aufs Vorzeichen eindeutig, eine Matrix β zuordnen. Aus (59) und (60) folgt, wegen $(\gamma \cdot \sigma^k) \cdot \beta = \gamma \cdot (\sigma^k \cdot \beta)$, dass alle b-Transformationen mit allen c-Transformationen vertauschbar sind.

Um einzusehen, dass es sich um die Lorentztransformationen 1. und 2. Art handelt, bedenke man, dass sich die Gleichungen $\sigma^k \beta = b^{k}{}_{l}\, \sigma^l$ in der Form (43) nach den $b^{k}{}_{l}$ auflösen lassen, die daher die richtige Symmetrie haben, wenn noch vorausgesetzt wird, dass in (49) das Pluszeichen steht. Das gleiche gilt für $c^{k}{}_{l}$[1]).

Da wir neben der Gültigkeit von (33) nur noch die Hermitizität der σ^k vorausgesetzt haben, sieht man leicht, dass mit σ^k auch

$$\underset{\sim}{\sigma}^{k} = \omega^{\dagger}\, \sigma^{k}\, \omega \quad (\mathrm{Det}\,\omega = 1)$$

zum Aufbau der Spinoranalyse dienen können (vgl. (55)). Alles andere ergibt sich wie in den vorhergehenden Paragraphen und braucht daher nicht weiter verfolgt zu werden.

§ 6. Aufbau des Tensors $E^{r}{}_{st}$ aus den Grössen $\sigma^{l}{}_{\lambda\dot{\mu}}$.

Der Tensor $E^{r}{}_{s\bar{t}}$ ist eindeutig bestimmt durch die folgenden Forderungen:[2])

1. Er hängt linear von vier Konstanten ab.
2. Er ist *numerisch invariant*.

[1]) Man kann sich auch auf den folgenden Satz stützen, den man durch Betrachtung der infinitesimalen Lorentztransformationen gewinnt: Es gibt nur eine Zerlegung jeder reellen Lorentztransformation D in ein Produkt zweier komplexer Lorentztransformationen $B\,C$ — nämlich in die speziellen Lorentztransformationen 1. und 2. Art — unter der Voraussetzung, dass B und C zu D isomorph sind und in der Umgebung der identischen Transformation eindeutig und stetig von D abhängen.

[2]) I, § 6.

Es gilt also

$$a^r_{\ k}\, b_s^{\ l}\, c_t^{\ m}\, E^k_{\ lm} = E^r_{\ st} \tag{61}$$

mit

$$a^k_{\ l} = b^k_{\ m}\, c^m_{\ l}. \tag{61a}$$

(61) ist äquivalent mit den Forderungen

$$b^r_{\ l}\, b_s^{\ m}\, E^l_{\ mt} = E^r_{\ st}$$

bzw.

$$b^r_{\ l}\, E^l_{\ st} = E^r_{\ lt}\, b^l_{\ s} \tag{62a}$$

und

$$c^r_{\ l}\, E^l_{\ st} = E^r_{\ sl}\, c^l_{\ t}. \tag{62b}$$

Denn aus (61) folgt (62), wenn man $a^k_{\ l} = b^k_{\ l}$ oder $a^k_{\ l} = c^k_{\ l}$ setzt. Ebenso folgt wegen (61a) aus (62a) und (62b) wieder die Beziehung (61).

Da in der Spinoranalyse die $\sigma^l_{\ \dot\lambda\mu}$ die einzigen gemischten invarianten Grössen dritter Stufe sind, liegt der Versuch nahe, $E^r_{\ st}$ aus den σ^k aufzubauen. Die gesuchte Beziehung muss invariant sein gegenüber Transformationen der Art (55). Daher wird man nach den punktierten und nach den nicht punktierten griechischen Indices verjüngen und infolgedessen eine gerade Zahl von σ-Matrizen heranziehen. Für die drei Indices von E brauchen wir deshalb mindestens vier σ-Matrizen. Dadurch ist zugleich Platz für 4 Konstanten e_l, um in der Form $e_l\, \sigma^{l\dot\lambda\mu} \ldots$ den einen überschüssigen Index zu „binden".

Unter den verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten muss nun mit Hilfe von (62) eine Auswahl getroffen werden. Nach (39) und (41) greifen die den $b^k_{\ l}$ zugeordneten Transformationen β nur den zweiten, dagegen die den $c^k_{\ l}$ zugeordneten Transformationen γ nur den ersten Index von σ an. Man wird deshalb vermuten, dass man ein Gebilde von den geforderten Invarianzeigenschaften erhält, wenn nach den zweiten Indices von σ^r und σ_s und nach den ersten von σ^r und σ_t verjüngt wird. Wir setzen also an:

$$E^r_{\ st} = e_l\, \sigma^{l\dot\lambda\mu}\, \sigma^{r\dot\varrho\tau}\, \sigma_{s\dot\lambda\tau}\, \sigma_{t\dot\varrho\mu}. \tag{63}$$

Die Forderungen (62) besagen nun:

$$b^r_{\ l}\, \sigma^{l\dot\varrho\tau}\, \sigma_{s\dot\lambda\tau} = \sigma^{r\dot\varrho\tau}\, \sigma_{l\dot\lambda\tau}\, b^l_{\ s} \tag{64a}$$

$$c^r_{\ l}\, \sigma^{l\dot\varrho\tau}\, \sigma_{t\dot\varrho\mu} = \sigma^{r\dot\varrho\tau}\, \sigma_{l\dot\varrho\mu}\, c^l_{\ t}. \tag{64b}$$

Da der zu $b^k_{\ l}$ komplex-konjugierte Tensor ein $c^k_{\ l}$-Tensor ist, folgt, wegen (34), (64b) aus (64a) durch Übergang zum Konjugiert-Komplexen. Es bleibt also nur noch (64a) nachzuweisen.

Aus (39) findet man, mit Hilfe von (29),

$$b^l_{\ m}\, \sigma^{m\dot\lambda\mu} = -\sigma^{l\dot\lambda\nu}\, \beta_\nu^{\ \mu}, \tag{65}$$

ferner

$$(b^{-1})_l^{\ m}\, \sigma_{m\dot\lambda\mu} = \sigma_{l\dot\lambda\nu}\, (\beta^{-1})^\nu_{\ \mu}.$$

Da nun $(b^{-1})_l^{\ m} = b^m_{\ l}$ und nach (30), weil Det $\beta = 1$, $(\beta^{-1})^\mu_{\ \nu} = -\beta_\nu^{\ \mu}$, ist also

$$b^m_{\ l}\, \sigma_{m\dot\lambda\mu} = -\sigma_{l\dot\lambda\nu}\, \beta_\mu^{\ \nu}. \tag{66}$$

Aus (65) und (66) folgt aber (64a).

Der Zusammenhang der e_k mit den von Einstein und Mayer eingeführten Konstanten a_k ergibt sich daraus, dass einerseits $E_{1s1} = g_{11}\, a_s$ und man andrerseits nach (63), unter Benutzung von (32) und (36), $E_{1s1} = \frac{1}{2}\, g_{11}\, e_s$ findet. Es ist daher

$$E^r_{\ st} = 2\, a_l\, \sigma^{l\dot\lambda\mu}\, \sigma^{r\dot\varrho\tau}\, \sigma_{s\dot\lambda\tau}\, \sigma_{t\dot\varrho\mu}. \tag{67}$$

Wegen (34) folgt hieraus

$$E^r_{\ st}\,(\bar a_l) = \overline{E^r_{\ ts}\,(a_l)}. \tag{68}$$

Weiter findet man nach (64)

$$c_s^{\ l}\, b_t^{\ m}\, E^r_{\ lm}\,(a_k) = E^r_{\ st}\,(a'_k) \tag{69}$$ [1]

mit

$$a'_k = c_k^{\ m}\, b_m^{\ l}\, a_l.$$

Endlich ergibt sich durch Anwendung von (36) die Beziehung[2])

$$E^{kr}_{\ \ s}\, E^{hps} + E^{hr}_{\ \ s}\, E^{kps} = 2\, g^{kh}\, g^{rp}\, a_t\, a^t.$$

II. Anwendung auf die Diracgleichungen für Semivektoren.

§ 7. *Die Diracgleichungen in Spinorform.*

A. Einstein und W. Mayer haben die *Dirac*gleichungen für Semivektoren durch Variation einer Lagrange-Funktion abgeleitet[3]), die sich auf Grund sehr allgemeiner Forderungen, bis auf den Faktor i, in der Gestalt ergibt:

$$L = E^r_{\ st}\,(\psi^s/_r\, \bar\psi^t - \psi^s\, \bar\psi^t/_r) + E^{*r}_{\ \ st}\,(\bar\chi^s\, \chi^t/_r - \bar\chi^s/_r\, \chi^t) + 2\, C_{st}\, \psi^s\, \bar\chi^t - 2\, \bar C_{st}\, \bar\psi^s\, \chi^t. \text{[4])} \tag{70}$$

---

[1]) Vgl. II, p. 503.

[2]) Vgl. I, p. 539.

[3]) II, p. 501, Gleichung (2). L wird dort H_3 genannt.

[4]) Die Faktoren 2 fehlen irrtümlicherweise in II.

Hierbei sind ψ^s und χ^t zwei Semivektoren 1. und 2. Art, C_{st} ein numerisch invarianter Semi-Tensor 1. Art. $E^r{}_{st}$ steht für $E^r{}_{st}\,(a_k)$, $E^{*r}{}_{st}$ für $E^r{}_{st}\,(a^*{}_k)$; a_k und $a^*{}_k$ sind reell. Weiter bedeuten

$$\left.\begin{aligned} \psi^s/_r &= \frac{\partial \psi^s}{\partial x^r} - i\,\varepsilon\,\varphi_r\,\psi^s; & \bar{\psi}^s/_r &= \frac{\partial \bar{\psi}^s}{\partial x^r} + i\,\varepsilon\,\varphi_r\,\bar{\psi}^s \\ \chi^t/_r &= \frac{\partial \chi^t}{\partial x^r} - i\,\varepsilon\,\varphi_r\,\chi^t; & \bar{\chi}^t/_r &= \frac{\partial \bar{\chi}^t}{\partial x^r} + i\,\varepsilon\,\varphi_r\,\bar{\chi}^t \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

wobei φ_r das elektromagnetische Vektorpotential darstellt.

Die Diracgleichungen lauten dann

$$\left.\begin{aligned} E^r{}_{st}\,\psi^s/_r &= \bar{C}_{ts}\,\chi^s \\ E^{*r}{}_{st}\,\chi^t/_r &= -\,C_{ts}\,\psi^t \end{aligned}\right\}. \tag{72}$$

Der Stromvektor, dessen Divergenz auf Grund von (72) verschwindet, ist gegeben durch

$$J^r = E^r{}_{st}\,\psi^s\,\bar{\psi}^t + E^{*r}{}_{st}\,\bar{\chi}^s\,\chi^t. \tag{73}$$

Um die Gleichungen (70) bis (73) in Spinorform umzuschreiben, ordnen wir mittels der Beziehungen

$$\psi^l = \sigma^l{}_{\lambda\mu}\,\overset{\lambda}{\xi}{}^\mu \tag{74a}$$

$$\chi^l = -\,\sigma^{l\dot{\varrho}}{}_{\tau}\,\overset{\tau}{\eta}{}_{\varrho} \tag{74b}$$

entsprechend (50) und (52) dem Vektor ψ^l die beiden zweikomponentigen Spinoren $\overset{1}{\xi}$ und $\overset{2}{\xi}$, dem Vektor χ^l die Spinoren $\overset{1}{\eta}$ und $\overset{2}{\eta}$ zu. Wir setzen ferner nach (43)

$$\gamma^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\nu}} = \tfrac{1}{2}\,C^{st}\,\sigma_s{}^{\dot{\mu}\varrho}\,\sigma_{t\nu\dot{\varrho}} \tag{75}$$

und verabreden noch folgende Matrixschreibweise: Neben $\overset{\lambda}{\xi} = \begin{pmatrix} \overset{\lambda}{\xi}{}^1 \\ \overset{\lambda}{\xi}{}^2 \end{pmatrix}$ führen wir $\overset{\lambda}{\xi}{}^\dagger = \left(\overset{\bar{\lambda}}{\xi}{}^1, \overset{\bar{\lambda}}{\xi}{}^2\right)$ ein, so dass z. B.

$$\overset{1}{\xi}{}^\dagger\,\sigma^l\,\overset{2}{\xi} = \overset{\bar{1}}{\xi}{}^\mu\,\sigma^l{}_{\mu\nu}\,\overset{2}{\xi}{}^\nu$$

wird. Ebenso führen wir neben $\overset{\lambda}{\eta}$ noch $\overset{\lambda}{\eta}{}^\dagger$ ein und die zu $\sigma^{l\lambda\mu}$ transponierte Matrix

$$\tau^{l\,\lambda\mu} = \sigma^{l\,\mu\lambda}\,[1]). \tag{76}$$

[1]) Für die spezielle Wahl (57) dieser Matrizen wird $\tau^m = -\sigma^m$ $(m = 1, 2, 3)$; $\tau^4 = +\sigma^4$.

Infolgedessen ist z. B. $\overset{1}{\eta}{}^\dagger \tau^l \overset{2}{\eta} = \overset{\mathrm{T}}{\eta}_\mu \sigma^{l\nu\mu} \overset{2}{\eta}_\nu$. (Da der Transformationscharakter der vorkommenden Grössen aus deren Definition hervorgeht, lassen wir im folgenden die Punkte über den Indices fort.)

Setzt man (74) bis (76) in L ein, so erhält man, wegen (67), nach mehrmaliger Anwendung von (29), (31), (32) und (34) den Ausdruck

$$\begin{aligned} L = A_{\lambda\mu}\left(\overset{\lambda}{\xi}{}^\dagger \sigma^r \overset{\mu}{\xi}{}_{/r} - \overset{\lambda}{\xi}{}^\dagger{}_{/r} \sigma^r \overset{\mu}{\xi}\right) + A^*_{\lambda\mu}\left(\overset{\lambda}{\eta}{}^\dagger \tau^r \overset{\mu}{\eta}{}_{/r} - \overset{\lambda}{\eta}{}^\dagger{}_{/r} \tau^r \overset{\mu}{\eta}\right) \\ -2\,i\left(D_{\lambda\mu}\overset{\lambda}{\eta}{}^\dagger \overset{\mu}{\xi} + \bar{D}_{\mu\lambda}\overset{\lambda}{\xi}{}^\dagger \overset{\mu}{\eta}\right). \end{aligned} \tag{77}$$

Hierbei ist

$$\left.\begin{aligned} A_{\lambda\mu} &= 2\,a_l\,\sigma^l{}_{\mu\lambda} \\ A^*{}_{\lambda\mu} &= 2\,a^*{}_l\,\sigma^l{}_{\lambda\mu} \\ D_{\lambda\mu} &= i\,\gamma_{\mu\lambda}\ \text{(nach (75))}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Wegen der Reellität von a_l und a_l^* sind A und A^* Hermitesche Matrizen, es ist also

$$\left.\begin{aligned} A_{\mu\lambda} &= \bar{A}_{\lambda\mu} \\ A^*{}_{\mu\lambda} &= \bar{A}^*{}_{\lambda\mu} \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Die *Dirac*gleichungen lauten nun

$$\left.\begin{aligned} A_{\lambda\mu}\,\sigma^r \overset{\mu}{\xi}{}_{/r} &= i\,\bar{D}_{\mu\lambda}\overset{\mu}{\eta} \\ A^*{}_{\lambda\mu}\,\tau^r \overset{\mu}{\eta}{}_{/r} &= i\,D_{\lambda\mu}\overset{\mu}{\xi} \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

und der Stromvektor wird

$$J^r = A_{\lambda\mu}\overset{\lambda}{\xi}{}^\dagger \sigma^r \overset{\mu}{\xi} + A^*{}_{\lambda\mu}\overset{\lambda}{\eta}{}^\dagger \tau^r \overset{\mu}{\eta}. \tag{81}$$

§ 8. *Reduktion der Diracgleichungen.*

Die Reduktion der *Dirac*gleichungen, die wir nun vornehmen wollen, stimmt im wesentlichen überein mit der von Einstein und Mayer angegebenen[1]). Der einzige Unterschied ist der, dass wir bereits vor der Reduktion zur Spinorform übergegangen sind, während Einstein und Mayer dies erst nach vollzogener Reduktion tun[2]). Dadurch haben wir den Vorteil, die einfachen Gesetzmässigkeiten der zweireihigen Matrizen ausnützen zu können.

[1]) II, § 2 bis 6.
[2]) III, p. 617.

Alles weitere gründet sich nun auf die Tatsache, dass offensichtlich die Funktion L (77) und der Stromvektor J^r (81) *ungeändert* bleiben und die Diracgleichungen (80) sich *kovariant* transformieren bei Ersetzung von ξ, η, A, A^*, D durch die folgendermassen definierten Grössen $\underset{\sim}{\xi}$, $\underset{\sim}{\eta}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A}^*$ und $\underset{\sim}{D}$:

$$\overset{\lambda}{\xi} = U^{\lambda}{}_{\mu}\,\underset{\sim}{\overset{\mu}{\xi}}\,; \qquad \overset{\lambda}{\eta} = V^{\lambda}{}_{\mu}\,\underset{\sim}{\overset{\mu}{\eta}}\,. \tag{82a}$$

$$\underset{\sim}{A}_{\lambda\mu} = \overline{U}^{\varrho}{}_{\lambda}\, A_{\varrho\tau}\, U^{\tau}{}_{\mu}\,; \qquad \underset{\sim}{A}^*{}_{\lambda\mu} = \overline{V}^{\varrho}{}_{\lambda}\, A^*{}_{\varrho\tau}\, V^{\tau}{}_{\mu}\,. \tag{82b}$$

$$\underset{\sim}{D}_{\lambda\mu} = \overline{V}^{\varrho}{}_{\lambda}\, D_{\varrho\tau}\, U^{\tau}{}_{\mu}\,. \tag{82c}$$

Diese Transformationen entsprechen genau den von Einstein und Mayer benutzten[1]):

$$\left.\begin{array}{c} \psi^k = c'^k{}_l\, \underset{\sim}{\psi}^l\,; \quad \chi^k = \bar c^k{}_l\, \underset{\sim}{\chi}^l\,; \quad \underset{\sim}{C}^{st} = c'^s{}_k\, c^t{}_l\, C^{kl} \\ a_k = c'_k{}^m\, \bar c'_m{}^l\, \underset{\sim}{a}_l\,; \quad a^*{}_k = c_k{}^m\, \bar c_m{}^l\, \underset{\sim}{a}_l^* \end{array}\right\} \tag{83}$$

wenn gesetzt wird:

$$c'^k{}_l = \sigma^k{}_{\dot\nu\varrho}\, \sigma_l{}^{\dot\mu\varrho}\, U^{\dot\nu}{}_{\dot\mu}\,; \quad c^k{}_l = \sigma^k{}_{\dot\nu\varrho}\, \sigma_l{}^{\dot\mu\varrho}\, \overline{V}^{\dot\nu}{}_{\dot\mu}\,, \tag{84}$$

wie sich aus (74) und (78) mit Benutzung von (39), (41), (43) und (45) ergibt. Es ist natürlich vorausgesetzt, dass sowohl die Transformationen U und V als auch die Transformationen c und c' von Null verschiedene Determinanten haben, was nach (84) und (44) auf dasselbe hinauskommt.

Es handelt sich nun darum, geeignete U und V zu finden, die den Diracgleichungen eine einfache Form geben. Da die Transformationen U und V voneinander unabhängig sind, können A und A^* zugleich auf Diagonalform gebracht werden, derart, dass überdies die Diagonalelemente $k_\lambda = A_{\lambda\lambda}$ und $k^*{}_\lambda = A^*{}_{\lambda\lambda}$ (nicht summieren!) die Werte ± 1 oder 0 haben. Jeder Wahl von A und A^* entsprechen nach (78) bestimmte Werte von a_k und $a^*{}_k$. Besonders einfach wird diese Zuordnung, wenn das System $\sigma^l{}_{\dot\lambda\mu}$ in der Form (57) gewählt ist.

Nach den bekannten Sätzen über die Hauptachsentransformationen Hermitescher Formen ergeben sich wegen (78) und (33) die folgenden Fälle:

1. Det $(A_{\lambda\mu}) > 0$ (a^l zeitartig) führt auf $k_1 = k_2 = \pm 1$, nach (57) also: $(\mathring{a}^1,\ \mathring{a}^2,\ \mathring{a}^3,\ \mathring{a}^4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,\ 0,\ 0,\ \pm 1)$.

---

[1]) II, p. 502—503.

2. Det $(A_{\lambda\mu}) < 0$ (a^l raumartig) führt auf $k_1 = -k_2 = 1$, nach (57): $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (0, 0, 1, 0).

3. Det $(A_{\lambda\mu}) = 0$ ($a_l\, a^l = 0$) führt auf $k_1 = \pm 1$, $k_2 = 0$, nach (57): $\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (0, 0, 1, 1).

Wir lassen den Fall 3. beiseite, da er nicht zu physikalisch brauchbaren Lösungen zu führen scheint, und setzen im folgenden stets

$$k_\lambda = \pm 1, \quad k^*_\lambda = \pm 1 \quad (\lambda = 1,2) \tag{85}$$

voraus.

Ruhende Teilchen werden im Fall eines verschwindenden elektromagnetischen Feldes beschrieben durch die Funktionen

$$\overset{\lambda}{\xi} = e^{-i\nu x^4} \cdot \overset{\lambda}{\alpha}\,; \qquad \overset{\lambda}{\eta} = e^{-i\nu x^4} \cdot \overset{\lambda}{\beta}\,,$$

wobei die Spinoren $\overset{\lambda}{\alpha}$ und $\overset{\lambda}{\beta}$ von den x^i nicht abhängen. Setzt man noch $\nu = \sqrt{2}\ \omega$ und $\sqrt{2} \cdot \tau^4\, \overset{\mu}{\beta} = \overset{\mu}{\gamma}$, so folgt aus (80), unter Berücksichtigung von $\sigma^4\, \tau^4 = \frac{1}{2}$ (nach (76) und (36)),

$$\left.\begin{aligned} \omega\, A_{\lambda\mu}\, \overset{\mu}{\alpha} + \overline{D}_{\mu\lambda}\, \overset{\mu}{\gamma} &= 0 \\ \omega\, A^*_{\lambda\mu}\, \overset{\mu}{\gamma} + D_{\lambda\mu}\, \overset{\mu}{\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{86}$$

Durch Nullsetzen der Determinante des Systems (86)

$$\begin{vmatrix} \omega k_1 & 0 & \overline{D}_{11} & \overline{D}_{21} \\ 0 & \omega k_2 & \overline{D}_{12} & \overline{D}_{22} \\ D_{11} & D_{12} & \omega k^*_1 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & \omega k^*_2 \end{vmatrix}$$

ergibt sich wegen (85) für den Eigenwert ω die Gleichung

$$\omega^4 - p\omega^2 + q = 0$$

mit den *reellen* Koeffizienten

$$p = k^*_1\, k_1\, |D_{11}|^2 + k^*_1\, k_2\, |D_{12}|^2 + k^*_2\, k_1\, |D_{21}|^2 + k^*_2\, k_2\, |D_{22}|^2 \tag{87a}$$

$$q = k^*_1\, k_1\, k^*_2\, k_2\, |D_{11}\, D_{22} - D_{12}\, D_{21}|^2\,, \tag{87b}$$

also ist

$$\omega^2 = \frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4\,q}\,. \tag{88}$$

Je nach den Werten von k und k^* findet man:

I. a^i und a^{*i} raumartig, also $k_1 = k^*_1 = +1$, $k_2 = k^*_2 = -1$. Da in diesem Fall $q \geqq 0$, ist ω nur dann reell, wenn $p^2 - 4\,q \geqq 0$

und $p \geqq 0$. Die beiden Teilchenmassen sind voneinander verschieden, wenn $p^2 - 4q \neq 0$.

II. a^i und a^{*i} zeitartig, also $k_1 = k_2$; $k^*_1 = k^*_2$. Es ist $q \geqq 0$, aber nach der Hadamardschen Determinantenabschätzung stets $p^2 - 4q \geqq 0$. Für die Reellität von ω ist also notwendig und hinreichend, dass $p > 0$, d. h. $k_1 = k^*_1$.

III. a^i raumartig, a^{*i} zeitartig: $k_1 = -k_2 = 1$; $k^*_1 = k^*_2$. Es ist $q \leqq 0$, also stets $p^2 - 4q \geqq 0$, und zwar haben die zwei Lösungen $\omega_1{}^2$ und $\omega_2{}^2$ verschiedenes Vorzeichen, so dass nur die eine der beiden auf reelle ω führt.

In allen diesen Fällen kann man noch eine weitere Reduktion vornehmen, wobei nur Transformationen U und V zugelassen werden, die A und A^* ungeändert lassen. Dabei bleibt die Gleichung für ω bestehen, also sind auch p und q invariant.

Besonders einfach ist II. Hier handelt es sich um unitäre Transformationen, und es ist bekannt, dass jede Matrix D durch geeignet gewählte U und V auf Diagonalform gebracht werden kann, derart, dass $D_{11} = m_1$ und $D_{22} = m_2$ reell und positiv sind. Man erkennt, dass dann die Gleichungen (80) in zwei getrennte vierkomponentige Systeme vom *Dirac*schen Typus zerfallen, die sich von einander nur durch die Werte der Massen unterscheiden. Ebenso zerfällt J^r in zwei Teilströme $\overset{1}{J}{}^r$ und $\overset{2}{J}{}^r$, von denen jeder für sich einer Kontinuitätsgleichung genügt. In dem Falle $p > 0$, dem einzigen, der auf reelle Werte von ω führt, haben $\overset{1}{J}{}^4$ und $\overset{2}{J}{}^4$, also auch die zugehörigen elektrischen Ladungsdichten $\varepsilon \overset{1}{J}{}^4$ und $\varepsilon \overset{2}{J}{}^4$ *gleiches Vorzeichen.*

I. soll nur für den Fall reeller, von einander und von Null verschiedener Werte der Massen behandelt werden, also für $q > 0$, $p > 0$, $p^2 - 4q > 0$. Wie im nächsten Paragraphen gezeigt wird, gibt es dann „pseudo-unitäre", d. h. A und A^* festlassende, Transformationen U und V, die D auf Diagonalform bringen, wobei überdies $D_{11} = m_1$ und $D_{22} = -m_2$ (mit reellen und positiven m_λ) gemacht werden kann[1]). Die Gleichungen (80) zerfallen dabei in die beiden Systeme vom Diracschen Typus:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^r \overset{1}{\xi}/_r &= i\, m_1 \overset{1}{\eta} \\ \tau^r \overset{1}{\eta}/_r &= i\, m_1 \overset{1}{\xi} \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} \sigma^r \overset{2}{\xi}/_r &= i\, m_2 \overset{2}{\eta} \\ \tau^r \overset{2}{\eta}/_r &= i\, m_2 \overset{2}{\xi} \end{aligned}\right\}$$

[1]) Ist $q > 0$, $p > 0$, aber $p^2 - 4q = 0$, also nur ein einziger Wert für die Masse vorhanden, so lassen sich die Diracgleichungen nur dann zerfällen, wenn, in der Bezeichnungsweise von § 9, $D\,\hat{D}$ ein Multiplum der Einheitsmatrix. Andernfalls hat das achtkomponentige Gleichungssystem (86) auch nur vier unabhängige Eigenlösungen.

Der Stromvektor ist nach (81) $J^r = \overset{1}{J}{}^r + \overset{2}{J}{}^r$ mit

$$\overset{1}{J}{}^r = \overset{1}{\xi}{}^\dagger \sigma^r \overset{1}{\xi} + \overset{1}{\eta}{}^\dagger \tau^r \overset{1}{\eta}\ ; \quad \overset{2}{J}{}^r = -(\overset{2}{\xi}{}^\dagger \sigma^r \overset{2}{\xi} + \overset{2}{\eta}{}^\dagger \tau^r \overset{2}{\eta}),$$

wobei noch $\overset{1}{J}{}^r{}_{,r} = \overset{2}{J}{}^r{}_{,r} = 0$.

Daraus folgt insbesondere (nach (35)) $\overset{1}{J}{}^4 > 0$, $\overset{2}{J}{}^4 < 0$, so dass auch die zugehörigen Ladungsdichten *verschiedenes Vorzeichen* haben.

Die übrigen Fälle, von denen keiner auf zwei verschiedene reelle Massen führt, sollen unerörtert bleiben.

§ 9. *Mathematische Hilfsbetrachtungen*[1]).

Bei den folgenden Betrachtungen, die den entsprechenden Überlegungen über Hermitesche Formen und unitäre Transformationen genau nachgebildet sind, bedienen wir uns des Matrizenkalküls.

Unter dem Vektor x verstehen wir das System (x_1, x_2). Wir gehen aus von dem Ausdruck

$$(x, y) = x_1\, y_1 - x_2\, y_2. \tag{88}$$

Es ist stets

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \tag{88a}$$

und

$$(\alpha\, x, y) = \bar{\alpha}\, (x, y)\ ; \quad (x, \beta\, y) = \beta\, (x, y) \tag{88b}$$

für beliebige komplexe Zahlen α und β.

Ist A ein linearer Operator, so gibt es stets einen und nur einen Operator B, der der Relation

$$(A\, x, y) = (x, B\, y) \tag{89a}$$

oder, was wegen (88a) damit äquivalent ist,

$$(x, A\, y) = (B\, x, y) \tag{89b}$$

für alle Vektoren x und y genügt. Wir nennen B den zu A adjungierten Operator und bezeichnen ihn mit

$$B = \hat{A} \tag{90}$$

---

[1]) Die Entwicklungen dieses Paragraphen sind etwas ausführlicher, als für den unmittelbaren Zweck — die Reduktion der Diracgleichungen — notwendig wäre.

Nach (89) ist der adjungierte Operator des adjungierten wieder der ursprüngliche, so dass aus (90) folgt:

$$\hat{B} = A. \tag{90a}$$

Wir benötigen für das folgende noch die sich aus der Definition ergebenden Beziehungen

$$\widehat{A\,B} = \hat{B}\,\hat{A} \tag{91}$$

$$(\widehat{A^{-1}}) = (\hat{A})^{-1}. \tag{92}$$

$$\text{Ist } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \text{ so wird } \hat{A} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_{11} & -\overline{\alpha}_{21} \\ -\overline{\alpha}_{12} & \overline{\alpha}_{22} \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Wenn $A = \hat{A}$ ist, sprechen wir von einem *selbstadjungierten* Operator. Insbesondere ist nach (90a) und (91) jeder Operator von der Gestalt $A\,\hat{A}$ oder $\hat{A}\,A$ selbstadjungiert.

Einen Operator U, für den stets $(Ux,\ Ux) = (\hat{U}\,U\,x,\ x) = (x,\ x)$, also auch

$$\hat{U}\,U = U\,\hat{U} = 1 \tag{94}$$

gilt, nennen wir „pseudo-unitär". Er ist von der Gestalt

$$U = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix};\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

x sei ein von Null verschiedener Vektor. Ist $(x,\ y) = 0$, so folgt $y_1 = \omega\,\overline{x}_2$, $y_2 = \omega\,\overline{x}_1$, also $|y_1|^2 - |y_2|^2 = |\omega|^2\,(|x_2|^2 - |x_1|^2)$.

Für $(x,\ x) = 0$ hat $(x,\ y) = 0$ nur die Lösung $y = \varrho \cdot x$. Für $(x, x) \neq 0$ ist y durch $(x, y) = 0$ bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt, sein Betrag $(y,\ y)$ ist von Null verschieden und hat das umgekehrte Vorzeichen wie $(x,\ x)$.

Wir fragen nun nach den Eigenwerten und Eigenvektoren eines selbstadjungierten Operators $A = \hat{A}$. Es sei

$$A\,x = \lambda \cdot x.$$

Da nach (88a) und (89) $(A\,x,\ x) = (x,\ A\,x)$ reell, muss also $\lambda\,(x,\ x)$ reell sein.

1. Fall: $(x,\ x) \neq 0$. Folglich ist λ reell. Es gibt, bis auf einen Faktor, nur einen Vektor y, für den $(x,\ y) = 0$. Für diesen ist $(A\,y,\ x) = (y,\ A\,x) = \lambda\ (y,\ x) = 0$. Folglich ist $A\,y = \mu \cdot y$. Da $(y,\ y) \neq 0$, ist μ ebenfalls reell. Bei geeigneter Normierung (und etwaiger Vertauschung der Reihenfolge) ist $(x,\ x) = +1$; $(y,\ y) = -1$;

$(x, y) = 0$. Daher kann man durch einen geeigneten pseudo-unitären Operator U auf dieses System x, y transformieren, in dem A die Diagonalform hat. Es ist also

$$A = \hat{U}\,\mathring{A}\,U\,; \quad \mathring{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. \tag{95}$$

2. Fall: $(x, x) = 0$.

a) Ist noch ein zweiter Eigenwert $\mu \neq \lambda$ vorhanden, so gehört zu ihm ein Eigenvektor y, der von x linear unabhängig ist — daraus folgt $(x, y) \neq 0$ — und für den gleichfalls $(y, y) = 0$, weil sonst auch $(x, x) \neq 0$ wäre. Nun ist $(A\,x, y) = \bar{\lambda}\,(x, y) = (x, Ay) = \mu\,(x, y)$. Da $(x, y) \neq 0$, wird also $\mu = \bar{\lambda}$.

b) Es sei nur der eine Eigenwert λ vorhanden, der notwendig reell ist, da er einer reellen quadratischen Gleichung genügt. Gibt es zu diesem Eigenwert zwei unabhängige Eigenvektoren, so ist $A = \lambda \,.\, 1$.

c) Ist $A \neq \lambda \cdot 1$, so gilt für den einzigen vorhandenen Eigenvektor $(x, x) = 0$; denn sonst müsste es, auf Grund der obigen Konstruktion, noch einen zweiten geben.

$$\text{Aus } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \qquad (\alpha_{11} \text{ und } \alpha_{22} \text{ reell})$$

folgt die Eigenwertgleichung $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$ mit den reellen Koeffizienten $a = \alpha_{11} + \alpha_{22}$, $b = \operatorname{Det} A$. Folglich ist

$$\lambda = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4\,b}\,.$$

Im 1. Fall ist daher $a^2 - 4b > 0$, im Fall 2a: $a^2 - 4b < 0$, im Fall 2b: $a^2 - 4b = 0$, $\alpha_{12} = 0$, im Fall 2c: $a^2 - 4b = 0$, $\alpha_{12} \neq 0$. Eine Hauptachsentransformation durch pseudo-unitäre Operatoren ist nur in den Fällen 1 und 2b möglich.

Wird eine (nicht notwendig selbstadjungierte) Matrix D durch zwei pseudo-unitäre Transformationen U und V auf die Diagonalform L gebracht — $D = V\,L\,U$ —, so ist nach (91) und (94) $D\,\hat{D} = V\,L\,\hat{L}\,\hat{V}$.

Da mit L auch $L\,\hat{L}$ diagonal ist (vgl. (93)), muss die selbstadjungierte Matrix $D\,\hat{D}$ zum Fall 1 oder 2b gehören. Wir wollen 2b ausschliessen und dementsprechend annehmen, dass

$$p^2 - 4\,q > 0, \tag{96}$$

wobei p gleich der Spur von $D \hat{D}$ und q gleich Det $(D \hat{D})$. Nach (93) wird also $p = |D_{11}|^2 - |D_{12}|^2 - |D_{21}|^2 + |D_{22}|^2$ und $q = |D_{11} D_{22} - D_{12} D_{21}|^2$, in genauer Übereinstimmung mit (87), wenn dort $k_1 = k_1^* = +1$, $k_2 = k^*_2 = -1$ gesetzt wird. Weiter müssen nach (93) die beiden Eigenwerte von $L \hat{L}$ positiv sein. Da ihr Produkt gleich q, also positiv, haben beide gleiches Vorzeichen, und es genügt zu verlangen, dass

$$p > 0. \tag{97}$$

Wenn umgekehrt (96) und (97) erfüllt sind und die Determinante von D nicht verschwindet, gibt es eine Matrix V derart, dass $D \hat{D} = V K \hat{V}$, wobei $K = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$. Daher kann $K = L \hat{L}$ gesetzt werden, mit $L = \begin{pmatrix} \lambda e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & \mu e^{i\psi} \end{pmatrix}$ (die Phasen φ und ψ beliebig). Es ist also $D \hat{D} = V L \hat{L} \hat{V}$ oder, nach (91) und (92), $(L^{-1} V^{-1} D)$ $(\hat{D} \hat{V}^{-1} \hat{L}^{-1}) = 1$. Folglich ist $U = L^{-1} V^{-1} D$ pseudo-unitär ((94)), und es wird

$$D = V L U. \tag{98}$$

Es sei erwähnt, dass auch im Fall Det $D = 0$ die Darstellung (98) gültig bleibt.

Auf diejenigen Normalformen, auf die eine Matrix durch geeignete U und V transformiert werden kann, wenn (96) und (97) nicht erfüllt sind, gehen wir nicht mehr ein.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Hinweise spreche ich Herrn Prof. Pauli meinen besten Dank aus.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.