Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 6 (1933)
Heft: V

Artikel: Über selbsterregte nichtlineare Röhrenschwingungen
Autor: Straub, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110280

Über selbsterregte nichtlineare Röhrenschwingungen

von **Hans Straub.**

(24. V. 33)

A. Einleitung.

Das Problem der Schwingungserzeugung hat seine klassische Behandlung durch Barkhausen erfahren. Darnach können in einem System, das nur konstante elektromotorische Kräfte besitzt, nur dann dauernd Wechselströme bestehen, wenn entweder Widerstand, Induktion oder Kapazität im Laufe der Zeit ihre Grösse ändern. Im Falle der Verwendung von Elektronenröhren übernimmt bei geeigneten Schaltungen der variable Widerstand der Röhren diese stromerzeugende Rolle. Nach Form und Entstehungsweise der Schwingungen bilden die harmonischen Schwingungen und die von Friedländer[6]) *) untersuchten Kippschwingungen, resp. die damit übereinstimmenden, von van der Pol und Appleton[1])–[5]) zuerst genauer erforschten Relaxationsschwingungen die beiden Grenzfälle, zwischen die sich alle vorkommenden Schwingungstypen einordnen lassen. Rein harmonische Schwingungen sind nur in einem widerstandsfreien, aus Kapazitäten und Selbstinduktionen aufgebauten Kreis möglich, in dem also die Schwingungsenergie ohne Energieabgabe an das Gesamtsystem zwischen mindestens zwei Energiespeichern hin und her pendelt. Reine Relaxationsschwingungen liegen vor, wenn die gesamte in einem Energiespeicher pulsierende Energie während jeder Periode irreversibel nach aussen, z. B. in Form von Wärme abgegeben wird. Mit dem einfachsten Fall hat man es zu tun, wenn nur ein in energetischer Hinsicht wesentlicher Speicher vorkommt und die gesamte darin fliessende Energie während jeder Periode in Wärme verwandelt wird. Dieser Fall ist aber nur angenähert realisierbar, da zur Schwingungserzeugung immer ein zweiter Speicher gleicher oder anderer Art notwendig ist, der zwar für die Energiebilanz beliebig wenig in Betracht kommen kann, aber unvermeidbar ist. Letzteres geht schon daraus hervor, dass die Schwingungsgleichung

*) Die hochgestellten Ziffern beziehen sich auf die Nummern des Literaturverzeichnisses.

von höherer als der ersten Ordnung sein muss, was das Vorhandensein von mindestens zwei nichtohmischen Widerständen voraussetzt.

Zur Verdeutlichung der obigen Ausführungen werde die Schwingungsgleichung in ihrer einfachsten Form

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + w(x) \frac{d x}{d t} + \omega^2 x = 0$$

herbeigezogen. Für $w = 0$ liegt die Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen vor, für $w = \text{const.} > 0$ (positiver ohmscher Widerstand) diejenige der gedämpften Sinusschwingungen. Ist aber $w = \text{const.} < 0$ (Widerstand negativ), so erkennt man den Fall eines angefachten Systems mit einer über alle Grenzen ansteigenden Amplitude. Da eine solche Schwingung physikalisch unmöglich ist, so kann diese Differentialgleichung nicht für alle Zeiten gültig sein, sondern es muss notwendig der Moment eintreten, wo der Widerstand positiv wird, $w(x)$ muss also eine zwischen positiven und negativen Werten schwankende Funktion sein. Es habe $w(x)$ der Einfachheit halber die Form einer Potenzreihe:

$$w(x) = -\mu (1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \text{ mit } \mu > 0 .$$

Ist $\mu \ll 1$, so können selbsterregte dauernde Schwingungen von nahezu harmonischem Charakter bestehen, die eine um so reinere Sinusform aufweisen, je kleiner μ ist. Wird $\mu \gg 1$, so ist das Auftreten von eigentlichen Kippschwingungen zu erwarten.

Der Beweis für die Existenz periodischer Lösungen solcher nichtlinearen Differentialgleichungen und die Methode zu deren näherungsweisen Berechnung im Falle kleiner Parameter μ ist von Poincaré[8]) angegeben worden. Ist in einem Fall die formale Möglichkeit solcher periodischer Lösungen dargetan, so ist noch der Nachweis von deren Stabilität zu erbringen.

Wir hatten vor längerer Zeit Gelegenheit zur oszillographischen Untersuchung von Schwingungen verschiedener Elektronenröhrenschaltungen; dabei wurde das Schwergewicht auf die Untersuchung solcher Systeme gelegt, die im wesentlichen nur Speicher einer Sorte enthalten. Natürlich lassen sich die Speicher der andern Art nie ganz vermeiden und es ergab sich die weitere Aufgabe, den Einfluss dieser oftmals unerwünschten und überflüssigen Schaltelemente zu ermitteln. Im folgenden werden die Ergebnisse der experimentellen und theoretischen Untersuchungen an zwei zu Relaxationsschwingungen befähigten Schaltungen (s. Fig. 1 und 2) mitgeteilt, von denen die erste, von VAN DER POL[1]) angegebene, im wesentlichen nur aus Kapazitäten und Ohm'schen Widerständen, die zweite nur aus Selbstinduktionen und Widerständen aufgebaut ist. Während die erste Schaltung bei Vernachlässigung der leicht vermeidbaren Selbstinduktionen auf eine nichtlineare Gleichung zweiter Ordnung führt, verlangt die zweite Anordnung mit Rücksicht auf die unumgänglichen Röhrenkapazitäten die Behandlung einer Gleichung vierter Ordnung, hat also

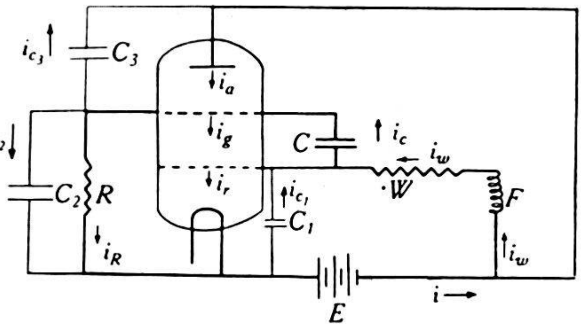

Fig. 1.
Kapazitätsschaltungen — Tetrodenschaltung

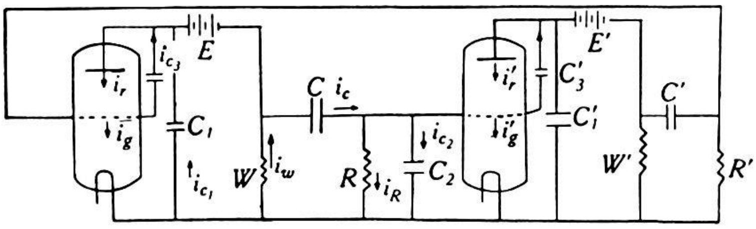

Fig. 1a.
Kapazitätsschaltungen — Zweitriodenschaltung
(Multivibrator von Abraham und Bloch[7])

unter Umständen das Auftreten zweier gekoppelter Schwingungen und damit von Schwebungen zur Folge. Aus der Theorie geht ohne Schwierigkeit hervor, warum unter gewöhnlichen Bedingungen nur eine einzige Schwingung auftritt.

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit war ursprünglich nur als Einleitung zu einer Untersuchung der erzwungenen Kippschwingungen geplant. Diese Absicht musste aber aus beruflichen Gründen aufgegeben werden, dafür wurde das Schwergewicht auf die Behandlung der Differentialgleichung vierter Ordnung für die selbsterregte Schwingung gelegt.

B. Theoretischer Teil.

1. Qualitative Erklärung der Wirkungsweise der benutzten Schaltungen.

Die Röhrenkapazitäten der beiden Schaltungen (Fig. 1 u. 2) können zur qualitativen Erklärung der Schwingungsvorgänge ohne weiteres beiseite gelassen werden, da sie auf die Schwingungserregung im allgemeinen keinen bestimmenden Einfluss haben. Dann reduzieren sich die Systeme der Fig. 1 und 2 auf die durch kräftigere Linienführung hervorgehobenen einfachern Schaltungen.

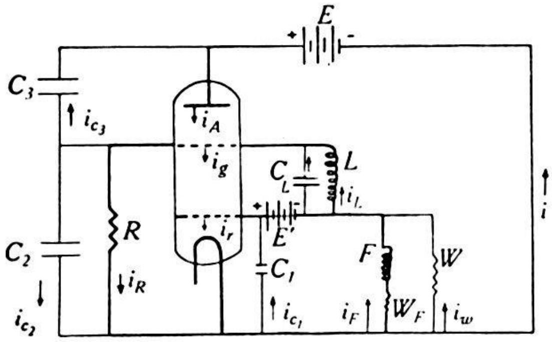

Fig. 2.
Selbstinduktionsschaltungen — Tetrodenschaltung

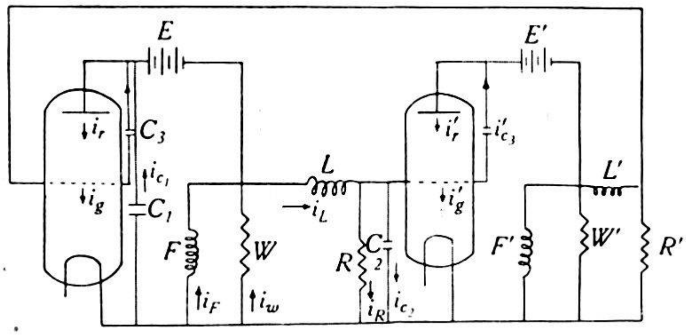

Fig. 2a.
Selbstinduktionsschaltungen — Triodenschaltung

a) Kapazitätsschaltung.

Denken wir uns für einen Moment $R = \infty$, dann stellt sich ein stationärer Gleichstromzustand ein: Das äussere Gitter ladet sich soweit auf, bis der Gitterstrom vollständig verschwunden ist, und der Emissionsstrom verteilt sich nach Massgabe der Anodenspannung und des Widerstandes W in einer aus den Tetrodencharakteristiken (s. Fig. 3a u. 3b) ersichtlichen Weise auf Anodenplatte und positiv geladenes inneres Gitter, das also die Rolle eines Raumladegitters übernimmt, während das äussere Gitter zum Steuergitter wird. Schalten wir jetzt den Gitterableitungswiderstand R ein, so entladet sich das negativ geladene Steuergitter und dessen Spannung steigt. Mit Rücksicht auf die Gestalt der $(\mathfrak{J}_r, \mathfrak{E}_g)$-Charakteristiken sinkt der Raumladungsgitterstrom, was wegen des abnehmenden Spannungsabfalls im Widerstand ein Steigen der Raumladungsgitterspannung zur Folge hat. Dieser Spannungsanstieg wird durch die Kapazität C wenigstens teilweise auf das Steuergitter übertragen und verstärkt so die Abnahme des Raumladegitterstroms. Dieser Prozess geht so lange vor sich, bis eine (bezgl. $\mathfrak{J}_r$) untere Gleichgewichtslage des Systems erreicht ist. Wegen des Gitterableitungswiderstandes R kann aber das System nicht in diesem Zustand verharren, das unter-

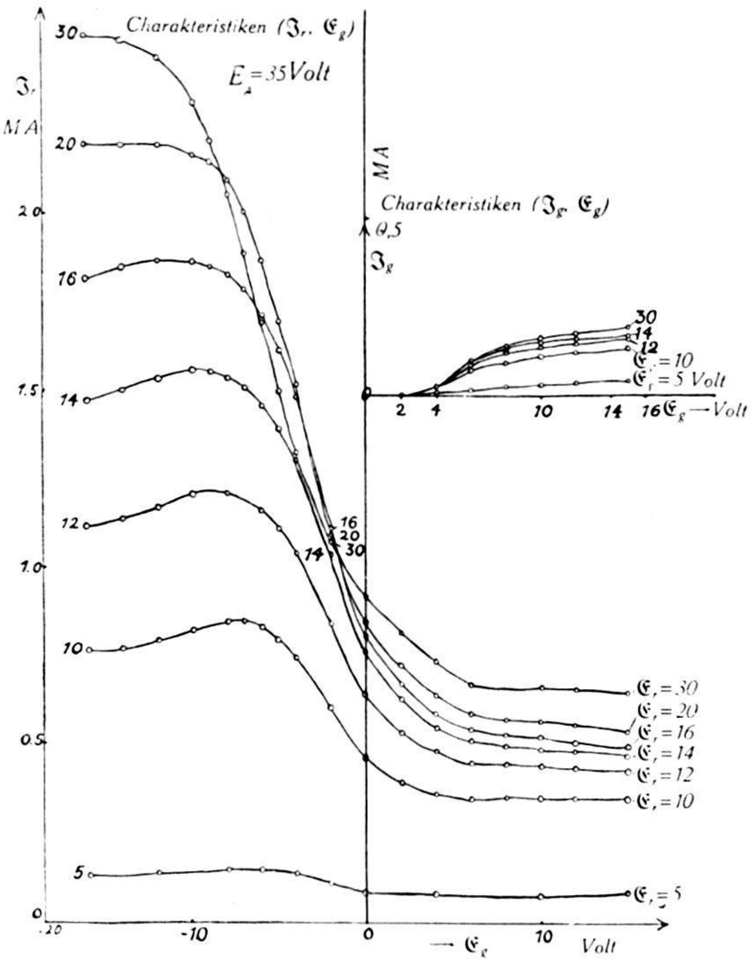

Fig. 3a.

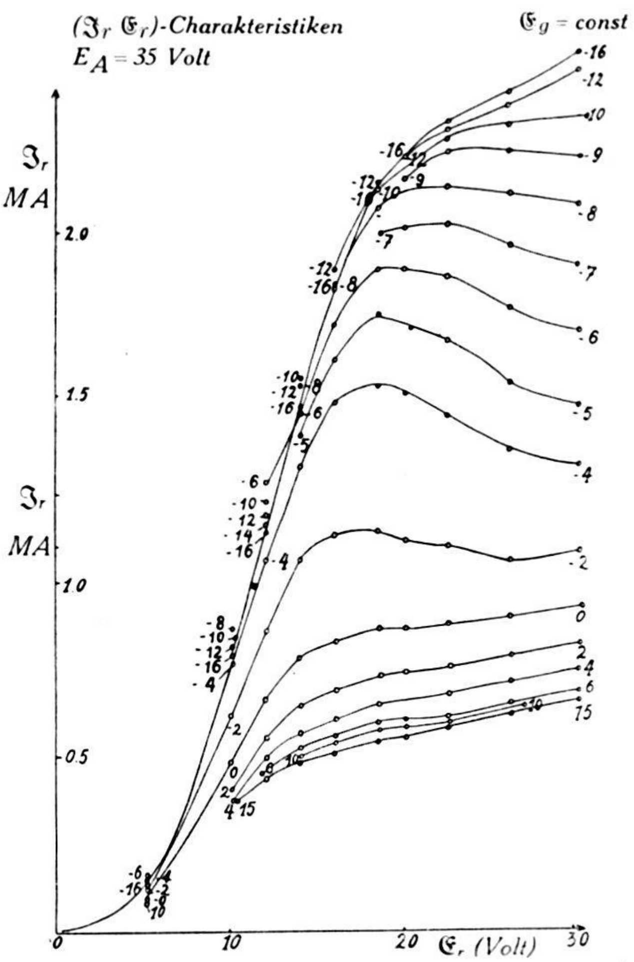

Fig. 3b.

dessen positiv gewordene Steuergitter entlädt sich und dessen Spannung sinkt, so dass das System wieder in das labile Gebiet der fallenden Charakteristik gelangt. Hier bewirkt jetzt die Verringerung der Steuerspannung eine Zunahme des Raumladungsstromes und damit eine Abnahme der Raumladegitterspannung, was ein weiteres Fallen der Steuergitterspannung zur Folge hat, d. h. das System springt in die obere Gleichgewichtslage, in dem ihm aber wegen des Ableitungswiderstandes R auch kein Bleiben vergönnt ist. So kippt also das System von Gleichgewichtslage zu Gleichgewichtslage, und zwar erfolgt dieser Sprung um so jäher, je kleiner die Kapazitäten $C_1 C_2 C_3$ sind, um bei verschwindenden Kapazitäten momentan zu erfolgen.

b) Selbstinduktionsschaltung.

Das auf die notwendigen Elemente reduzierte System besteht aus den beiden Selbstinduktionen L und F und dem Gitterableitwiderstand. Im weitern sei L klein gegen F. Entspricht zu Beginn der Strömungszustand des Systems einem Punkte im Gebiete des fallenden Teiles der Charakteristik und tritt im ersten Moment am Steuergitter eine Spannungszunahme auf, dann erfährt der Raumladungsstrom eine Abnahme und damit die Spannung des Raumladegitters eine Erhöhung. Diese wird durch die kleine Selbstinduktion L auf das Steuergitter übertragen und bewirkt ein weiteres Sinken des Raumladungsstroms, bis das System in die obere Gleichgewichtslage gelangt ist. In diesem Moment weist die Spannung am Steuergitter und damit die Stromänderung in der Selbstinduktion F ein Maximum auf. Durch diese Stromänderung wird das System aus der Gleichgewichtslage in das labile Gebiet gezogen, von wo der Sprung in die untere Gleichgewichtslage erfolgt. Aber auch dieser Strömungszustand ist wegen der Stromänderungen in F nicht von Dauer. Mit wachsendem L entsteht zwischen den beiden Gitterspannungen eine zunehmende Phasenverschiebung, die bei genügender Grösse das Auftreten von Schwingungen verunmöglichen muss. Dagegen sind auch für verschwindendes L im allgemeinen wegen der Unvermeidbarkeit der Röhrenkapazitäten Schwingungen möglich.

2. Die Differentialgleichungen der Tetrodenschaltungen.

a) Kapazitätsschaltung.

Wir werden im folgenden die Momentanwerte des Stromes resp. der Spannung mit den grossen gotischen Buchstaben $\mathfrak{J}$ resp. $\mathfrak{E}$, die Mittelwerte mit den lateinischen Grossbuchstaben J und E und die Momentanwerte des übergelagerten Wechselanteils mit den römischen Kleinbuchstaben i resp. e bezeichnen, und zwar sei

J_h = Heizstrom der Röhre
$\mathfrak{J}_A = J_A + i_A$ = Anodenstrom
$\mathfrak{J}_r = J_r + i_r$ = Raumladungsgitterstrom
$\mathfrak{J}_w = J_w + i_w$ = der im Widerstand W fliessende Strom

$\mathfrak{J}_g = J_g + i_g =$ Steuergitterstrom
$\mathfrak{J}_R = J_R + i_R =$ der im Widerstand R fliessende Strom
$\mathfrak{J}_c = i_c \quad =$ der Strom in der Kapazität C
$\mathfrak{J}_{c_1} = i_{c_1}$ resp. $\mathfrak{J}_{c_2} = i_{c_2}$, resp. $\mathfrak{J}_{c_3} = i_{c_3}$ die Ströme in den Kapazitäten C_1, C_2, C_3.

In analoger Weise bedeutet

$E = E_A =$ Batteriespannung = Anodengitterspannung
$\mathfrak{E}_r = E_r + e_r =$ Raumladegitterspannung
$\mathfrak{E}_g = E_g + e_g =$ Steuergitterspannung.

Die Einführung einer Selbstinduktion F in den W-Kreis erlaubt den Einfluss eines allfälligen Lautsprechers angenähert zu berücksichtigen.

Nach Fig. 1 gelten dann folgende Beziehungen für die Wechselgrössen:

$$i_r + i_c = i_{c_1} + i_w \tag{1}$$

$$i_c = i_R + i_g + i_{c_2} + i_{c_3} \tag{2}$$

$$e_g = i_R R \tag{3}$$

$$i_{c_2} = C_2 e_g' = C_2 \frac{d e_g}{d t} \tag{4a}$$

$$i_{c_3} = C_3 e_g' \tag{4b}$$

$$-e_r = \frac{1}{C_1} \int i_{c_1} dt \tag{5a}$$

$$= i_w W + F \frac{d i_w}{d t} \tag{5b}$$

$$= -i_R R - \frac{1}{c} \int i_c \, dt . \tag{5c}$$

Aus 2), 3) und 4) folgt

$$i_c = \frac{e_g}{R} + e_g' (C_2 + C_3) + i_g, \tag{6}$$

aus 5) und 6)

$$i_{c_1} = - C_1 \left[e_g' \left(1 + \frac{C_2 + C_3}{C} \right) + \frac{e_g}{C R} + \frac{i_g}{C} \right] \tag{7}$$

und aus 1), 5), 6) und 7)

$$i_w = \frac{1}{W}\left\{-F\left[e_g''\left(C_1 + C_2 + C_3 + \frac{C_1}{C}(C_2 + C_3)\right) + \frac{e_g'}{R}\left(1 + \frac{C_1}{C}\right)\right.\right.$$

$$\left.+ i_r' + i_g'\left(1 + \frac{C_1}{C}\right)\right] - e_g\left(1 + \frac{C_2 + C_3}{C}\right) - \frac{1}{CR}\int e_g\,dt$$

$$\left. - \int \frac{i_g}{C}\,dt\right\}. \tag{8}$$

Dann wird mit Rücksicht auf 1) und nach einmaliger Differentiation die erste Schwingungsgleichung für e_g:

$$\bar{A}_3 e_g''' + \bar{A}_2 e_g'' + \bar{A}_1 e_g' + \bar{A}_0 e_g + \bar{B}_2 i_g'' + \bar{B}_1 i_g'$$

$$+ \bar{B}_0 i_g + i_r' + \frac{F}{w} i_r'' = 0, \tag{I}$$

wo die konstanten Koeffizienten mit den Grössen der Schaltelemente durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A}_3 &= \frac{F}{W}\left(C_1 + C_2 + C_3 + \frac{C_1}{C}(C_2 + C_3)\right)\\
\bar{A}_2 &= C_1 + C_2 + C_3 + \frac{C_1}{C}(C_2 + C_3) + \frac{F}{RW}\left(1 + \frac{C_1}{C}\right)\\
\bar{A}_1 &= \frac{1}{R}\left(1 + \frac{C_1}{C}\right) + \frac{1}{W}\left(1 + \frac{C_2 + C_3}{C}\right)\\
\bar{A}_0 &= \frac{1}{CRW}\\
\bar{B}_2 &= \frac{F}{W}\left(1 + \frac{C_1}{C}\right)\\
\bar{B}_1 &= 1 + \frac{C_1}{C}\\
\bar{B}_0 &= \frac{1}{CW}
\end{aligned}\right\} \tag{Ia}$$

verknüpft sind.

Da i_r und i_g Funktionen von e_g und e_r sind:

$$i_r = f_1(e_r, e_g), \quad i_g = f_2(e_r, e_g), \tag{Ib}$$

so benötigt man zur vollständigen Bestimmung des Problems noch eine zweite Differentialgleichung in e_r und e_g. Als solche bietet sich nach 5) und 6)

$$e_r = e_g\left(1 + \frac{C_2 + C_3}{C}\right) + \int \frac{e_g}{CR}\,dt + \frac{1}{C}\int i_g\,dt \qquad \text{(II)}$$

dar. Um eine allzu komplizierte Gestalt der Schwingungsgleichungen zu vermeiden, führt man zweckmässigerweise einige Vereinfachungen ein. Die wirksamste wird durch die Vernachlässigung der Gitterrückwirkung erreicht. Dann sind nämlich i_r und i_g nur Funktionen von e_g, also $i_r = f_1(e_g)$, $i_g = f_2(e_g)$. Diese Annahme tut zwar den experimentellen Tatsachen einige Gewalt an, fälscht sie aber nicht so weit, dass der Charakter der Schwingungen dadurch prinzipiell verändert würde. Der entscheidende Vorteil besteht darin, dass dann die Gleichung I nur noch die eine abhängige Variable e_g aufweist. Nach deren Lösung ergibt II ohne weiteres auch e_r. Man kann aber die Raumladegitterrückwirkung in erster Näherung in Rechnung ziehen, ohne die Schwingungsgleichung allzu unübersichtlich zu machen, indem man

$$i_r = r\,e_r + f_r\,(e_g)$$

setzt, wo r gleich dem reziproken Wert des innern Widerstandes R_i im Gebiete zwischen Kathode und Raumladegitter bedeutet: $r = 1/R_i$. Lassen sich f_r und i_g in eine Potenzreihe von e_g entwickeln, haben also die Form:

$$\left.\begin{aligned} i_r &= r\,e_r + s_1\,e_g + s_2\,e_g^2 + \cdots \\ i_g &= g_1\,e_g + g_2\,e_g^2 + g_3\,e_g^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

dann erhält man durch Kombination der Gleichungen I, Ia, Ib und II die Schwingungsgleichung für die Steuergitterspannung:

$$\bar{A}_3\,\frac{d^3 e_g}{d t^3} + \frac{d^2}{d t^2}\,(\bar{c}_1\,e_g + \bar{c}_2\,e_g^2 + \ldots) + \frac{d}{d t}\,(\bar{b}_1\,e_g + \bar{b}_2\,e_g^2 + \bar{b}_3\,e_g^3 + \ldots)$$

$$+ (\bar{a}_1\,e_g + \bar{a}_2\,e_g^2 + \ldots) = 0 \qquad \text{(III)}$$

mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}
\bar{c}_1 &= \bar{A}_2 + \frac{rF}{W}\left(1 + \frac{C_2 + C_3}{C}\right) + g_1 \bar{B}_2 + \frac{F}{W} s_1 \\
\bar{c}_n &= \bar{B}_2 g_n + \frac{F}{W} s_n \quad \text{für } n > 1 \\
\bar{b}_1 &= \bar{A}_1 + r\left(1 + \frac{C_2 + C_3}{C}\right) + \frac{Fr}{WCR} + \frac{r g_1 F}{WC} + g_1 \bar{B}_1 + s_1 \\
\bar{b}_n &= g_n\left(\bar{B}_1 + \frac{Fr}{WC}\right) + s_n \quad \text{für } n > 1 \\
\bar{a}_1 &= \bar{A}_0 + \frac{r}{CR} + g_1\left(\frac{r}{C} + \bar{B}_0\right) \\
\bar{a}_n &= g_n\left(\frac{r}{C} + \bar{B}_0\right) \quad \text{für } n > 1.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IIIa)}$$

b) Selbstinduktionsschaltung.

Werden alle vorkommenden, auch die nicht notwendigen, aber unvermeidbaren Speicher und Widerstände berücksichtigt, so sind ausser den bei der Kapazitätsschaltung vorkommenden Grössen noch die Selbstinduktion L und die Widerstände w_F und w_L und damit die Ströme

$$\mathfrak{J}_L = i_L + J_L \qquad \mathfrak{J}_F = J_F + i_F$$

einzuführen. In der Folge soll $w_L = C \equiv C_L = 0$ und damit $i_{cL} = 0$ gesetzt werden, weil unter dieser Voraussetzung ohne Aufgabe wesentlicher Eigenschaften namhafte Vereinfachungen eintreten.

Aus den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
& i_r + i_L = i_{c_1} + i_F + i_w \\
& i_L = i_g + i_R + i_{c_2} + i_{c_3} \\
& e_g = i_R R \\
& i_{c_2} = C_2 \frac{d e_g}{dt} \qquad i_{c_3} = C_3 \frac{d e_g}{dt} \\
& -e_r = i_w W = i_F W_F + F \frac{d i_F}{dt} = \frac{1}{C_1}\int i_{c_1} dt = -i_R R - L \frac{d i_L}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad (10$$

und den daraus resultierenden Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
i_L &= i_g + i_R + (C_2 + C_3)\, R\, i'_R \\
i_w &= -\frac{1}{W}\left(i_R R + L\,\frac{d\,i_L}{d\,t}\right) = \\
&\qquad -\frac{1}{W}\,[R\, i_R + L\,(i'_g + i'_R + (C_2 + C_3)\, R\, i''_R)] \\
i_{c_1} &= -C_1\left[R\,\frac{d\,i_R}{d\,t} + L\,\frac{d^2\, i_L}{d\,t^2}\right] \\
&\qquad = -C_1\,[R\, i'_R + L\,(i''_g + i''_R + (C_2 + C_3)\, R\, i'''_R)] \\
i_F &= -\frac{1}{W_F}\Big\{ i_R R + i'_R\left(L + F + \frac{F R}{W}\right) + i''_R\Big[L R\,(C_2 + C_3) \\
&\qquad + F R\,(C_1 + C_2 + C_3) + \frac{L F}{W}\Big] \\
&\qquad + i'''_R\, F L\left(C_1 + \frac{R}{W}\,(C_2 + C_3)\right) + F\, C_1\, L\,(C_2 + C_3)\, R\, i''''_R \\
&\qquad + i_r' L + (L + F)\, i_g' + \frac{F L}{W}\, i''_g + F\, C_1\, L\, i'''_g \Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

folgt in ähnlicher Weise wie oben:

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{A}}_4\, e''''_g + \overline{\overline{A}}_3\, e'''_g + \overline{\overline{A}}_2\, e''_g + \overline{\overline{A}}_1\, e'_g + \overline{\overline{A}}_0\, e_g + \overline{\overline{B}}_3\, i'''_g + \overline{\overline{B}}_2\, i''_g + \overline{\overline{B}}_1\, i'_g \\
+ W_F\,(i_g + i_r) + F\, i_r' = 0\,,
\end{aligned} \quad \text{(I)}$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\overline{A}}_4 &= F\, C_1\, L\,(C_2 + C_3) \\
\overline{\overline{A}}_3 &= F\, L\left(\frac{C_1}{R} + \frac{C_2 + C_3}{W}\right) + W_F\, C_1\, L\,(C_2 + C_3) \\
\overline{\overline{A}}_2 &= L(C_2 + C_3) + F\,(C_1 + C_2 + C_3) + \frac{F L}{R W} + W_F\left(\frac{C_1 L}{R} + \frac{L}{W}(C_2 + C_3)\right) \\
\overline{\overline{A}}_1 &= \frac{L + F}{R} + \frac{F}{W} + W_F\left(C_1 + C_2 + C_3 + \frac{L}{R W}\right) \\
\overline{\overline{A}}_0 &= 1 + W_F\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{W}\right) \\
\overline{\overline{B}}_3 &= F\, C_1\, L \\
\overline{\overline{B}}_2 &= C_1\, L\, W_F + \frac{F L}{R} \\
\overline{\overline{B}}_1 &= F + L\left(1 + \frac{W_F}{W}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (\overline{\text{I}}\text{a})$$

der sich als zweite Schwingungsgleichung anschliesst:

$$\begin{aligned} e_r = R\,i_R + L\,i_L' &= e_g + L\,(i_g' + i_R' + (C_2 + C_3)\,R\,i_R'') \\ &= e_g + \frac{L}{R}\,e_g' + L\,(C_2 + C_3)\,e_g'' + L\,i_g'\,. \end{aligned} \tag{$\overline{\text{II}}$}$$

Die Substitution der speziellen Potenzreihen (9) für i_r und i_g in $\overline{\text{I}}$ ergibt die vereinfachte Differentialgleichung für die Steuergitterspannung:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\bar{A}}_4\,\frac{d^4 e_g}{d t^4} + \frac{d^3}{d t^3}\,(\bar{\bar{d}}_1\,e_g + \bar{\bar{d}}_2\,e_g^2 + \bar{\bar{d}}_3\,e_g^3 + \ldots) \\ &\quad + \frac{d^2}{d t^2}\,(\bar{\bar{c}}_1\,e_g + \bar{\bar{c}}_2\,e_g^2 + \bar{\bar{c}}_3\,e_g^3 + \ldots) + \frac{d}{d t}\,(\bar{\bar{b}}_1\,e_g + \bar{\bar{b}}_2\,e_g^2 + \bar{\bar{b}}_3\,e_g^3 + \ldots) \\ &\quad + (\bar{\bar{a}}_1\,e_g + \bar{\bar{a}}_2\,e_g^2 + \bar{\bar{a}}_3\,e_g^3 + \ldots) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{$\overline{\text{III}}$}$$

mit den Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\bar{d}}_1 = \bar{\bar{A}}_3 + F\,L\,r\,(C_2 + C_3) + g_1\,\bar{\bar{B}}_3 \\ &\bar{\bar{d}}_n = g_n\,\bar{\bar{B}}_3 \qquad \text{für } n > 1 \\ &\bar{\bar{c}}_1 = \bar{\bar{A}}_2 + g_1\,\bar{\bar{B}}_2 + F\,L\,r\left(\frac{1}{R} + g_1\right) + W_F\,L\,r\,(C_2 + C_3) \\ &\bar{\bar{c}}_n = g_n\,(\bar{\bar{B}}_2 + F\,L\,r) \qquad \text{für } n > 1 \\ &\bar{\bar{b}}_1 = \bar{\bar{A}}_1 + g_1\,(\bar{\bar{B}}_1 + L\,W_F\,r) + r\left(F + \frac{W_F\,L}{R}\right) + F\,s_1 \\ &\bar{\bar{b}}_n = g_n\,(\bar{\bar{B}}_1 + W_F\,L\,r) + F\,s_n, \qquad \text{für } n > 1 \\ &\bar{\bar{a}}_1 = \bar{\bar{A}}_0 + W_F\,(s_1 + g_1 + r) \\ &\bar{\bar{a}}_n = W_F\,(s_n + g_n) \qquad \text{für } n > 1\,, \end{aligned}\right\} \tag{$\overline{\text{IIIa}}$}$$

während sich e_r nach Ermittlung der Lösung von $\overline{\text{III}}$ ohne weiteres aus:

$$\begin{aligned} e_r = e_g + L\,\frac{d}{d t}\left[\left(\frac{1}{R} + g_1\right) e_g + g_2\,e_g^2 + \ldots + g_n\,e_g^n + \ldots\right] \\ + L\,(C_2 + C_3)\,\frac{d^2\,e_g}{d t^2} \end{aligned} \tag{$\overline{\text{IV}}$}$$

errechnet.

Bei Vernachlässigung von i_g vereinfacht sich die Schwingungsgleichung $\overline{\text{III}}$ in

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}}_4\,\frac{d^4 e_g}{d t^4} + \bar{\bar{A}}_3\,\frac{d^3 e_g}{d t^3} + \bar{\bar{A}}_2\,\frac{d^2 e_g}{d t^2} + \frac{d}{d t}\,(\bar{\bar{b}}_1\,e_g + \bar{\bar{b}}_2\,e_g^2 + \ldots) \\ + (\bar{\bar{a}}_1\,e_g + \bar{\bar{a}}_2\,e_g^2 + \ldots) = 0, \end{aligned} \tag{$\overline{\text{III}}'$}$$

die aus $\overline{\overline{\mathrm{III}}}$ durch Nullsetzen aller g entsteht. Ist auch W_F verschwindend klein, so fallen die nichtlinearen Glieder der von Ableitungen freien Terme weg: $\bar{\bar{a}}_2 = \bar{\bar{a}}_3 = \bar{\bar{a}}_4 \cdots = \bar{\bar{a}}_n = 0$. Können auch C_1 oder gleichzeitig C_2 und C_3 vernachlässigt werden, dann ist $\bar{\bar{A}}_4 = 0$ und die Ordnung der Differentialgleichung sinkt auf 3. Können aber alle drei Kapazitäten $C_1 C_2 C_3$ unberücksichtigt bleiben, so erniedrigt sich die Ordnung sogar auf 2; wir haben den Fall der reinen Selbstinduktionsschaltung vor uns, der also unter geeigneten Bedingungen zu Schwingungen befähigt sein kann. Verschwindet aber die Selbstinduktion L, so kann das Auftreten von Schwingungen, wie schon erwähnt, nur durch die Existenz der Röhrenkapazitäten $C_1 C_2 C_3$ erklärt werden.

3. Qualitative Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Eine quantitative Lösung der Differentialgleichung ist nur unter bestimmten Bedingungen und in bestimmten Koeffizientenbereichen möglich. Im allgemeinen aber hat man sich mit einer Art qualitativer Integration, welche die Null- und Unendlichkeitsstellen, die Maxima und Minima, den oszillatorischen Charakter, die Asymptoten usw. vornehmlich im reellen Feld liefert, zu begnügen.

Im folgenden benützen wir zur Skizzierung einiger Ergebnisse dieser qualitativen Integrationsmethoden vorwiegend die Schwingungsgleichung in der für die reine Kapazitätsschaltung (bei Vernachlässigung des Steuergitterstroms und nach Vornahme einiger einfachen Transformationen) gültigen Form

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \mu \left(-1 + 2 \beta_2 x + 3 \beta_3 x^2 + \cdots\right) \frac{d x}{d t} + x = 0, \quad \mu > 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung zweiter Ordnung ist äquivalent dem System der beiden Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{d x}{d t} = y, \quad \frac{d y}{d t} = -x + \mu \left(1 - 2 \beta_2 x - 3 \beta_3 x^2 + \cdots\right) y, \tag{1'}$$

gehört also zu der Gruppe der Differentialgleichungen der Gestalt

$$\frac{d x}{d t} = X(x, y) \qquad \frac{d y}{d t} = Y(x, y).$$

Den Verlauf der reellen Integralkurven für Gleichungen dieser Form, wo $X(x, y)$ und $Y(x, y)$ Polynome in x, y sind, hat zuerst

Poincaré[8]) eingehend diskutiert. Weitere Untersuchungen über das Verhalten der Lösungen in der Umgebung der singulären Stellen für allgemeinere Formen von X und Y (Potenzreihen, stetige Funktionen) haben ausser Poincaré z. B. Bendixson[9]), Picard[10]), Dulac[11]), [12]), [13]), Perron[14]) beigesteuert.

Nehmen wir an, dass

$$\frac{dx}{dt} = X_1(x,y) + X_2(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y_1(x,y) + Y_2(x,y) \tag{2}$$

ist, wo

$$X_1(x,y) = ax + by, \qquad Y_1(x\,y) = cx + dy$$

und X_2 und Y_2 Potenzreihen von x, y sind, die mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension beginnen, dann ist $x = y = 0$ sicher eine singuläre Stelle. Das Verhalten der Lösung in der Umgebung des Nullpunktes hängt dann im allgemeinen nur von den linearen Gliedern der rechten Seite, und zwar von der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\,(a+d) + (ad - bc) = 0 \tag{3}$$

ab. In unserm speziellen Fall der Gleichung (1′) wird dieser Ausdruck

$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0 \tag{3a}$$

und deren Wurzeln sind

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1} \qquad \lambda_2 = \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}\,. \tag{3a′}$$

Fall 1: Sind beide Wurzeln reell und von gleichem Vorzeichen (für die Gleichung (1′) kann dieses nach (3a′) nur das positive sein und dies trifft ein für $\mu > 2$), so ist der Nullpunkt ein sogenannter Knotenpunkt (noeud). Durch jeden Punkt in der Umgebung der singulären Stelle geht nur eine Integralkurve und diese mündet in einer bestimmten Richtung in den Nullpunkt. Ist $xY_1 - yX_1$ nicht identisch Null, so münden alle Lösungen in den beiden der Gleichung $xY_1 - yX_1 = 0$ genügenden Richtungen in den Nullpunkt; für die Gleichung (1′) haben die Richtungstangenten die Beträge λ_1, λ_2. Ist aber $xY_1 - xY_1 \equiv 0$, so trifft jede Integralkurve in einer bestimmten Richtung im Nullpunkt ein, und zu jeder Richtung gehört eine Lösung.

Fall 2: Sind die Wurzeln konjugiert komplex, aber nicht rein imaginär (dies findet bei unserm Beispiel für $\mu < 2$, $\mu \neq 0$ statt), so nähern sich sämtliche in der Umgebung des singulären Punktes verlaufenden Integralkurven in Spiralen diesem Punkt; es liegt ein Brenn- oder Strudelpunkt, nach Poincaré „foyer" vor.

Fall 3: Sind aber die Wurzeln λ rein imaginär, so kann die singuläre Stelle entweder ein Brennpunkt oder ein Wirbelpunkt (centre), d. h. ein von geschlossenen Integralkurven umgebener Punkt sein. Im allgemeinen verlangt die Entscheidung zwischen diesen beiden Möglichkeiten umfassende Untersuchungen. Bei der vorliegenden speziellen Differentialgleichung (1′) werden aber die Wurzeln λ_i nur für $\mu = 0$ rein imaginär, und zwar $\lambda_{1,2} = \pm i$. Dann entsprechen aber, wie leicht ersichtlich, allen Lösungen Kreise um den Nullpunkt; dieser ist also ein Zentrum.

Fall 4: Der vierte mögliche Fall ist durch zwei reelle Wurzeln entgegengesetzten Vorzeichens charakterisiert. Es gibt in der Umgebung des Nullpunktes nur vier Lösungen, die in zwei bestimmten Tangentenrichtungen von entgegengesetzten Seiten in diesen einmünden. Dieser Fall eines Sattelpunktes (col) kommt bei der vorliegenden speziellen Differentialgleichung nicht vor.

Natürlich existieren ausser dem Nullpunkt noch andere Singularitäten, z. B. im Unendlichen, deren Diskussion würde aber an dieser Stelle zu weit führen, weshalb auf die oben angegebene Literatur hingewiesen sei.

Deuten wir diese für die spezielle Differentialgleichung gewonnenen Ergebnisse physikalisch. Wir haben schon erwähnt, dass im Fall (3) alle Kreise um den Nullpunkt Lösungen darstellen. Diesen entsprechen als Integrale der Ausgangsgleichung (1) einfache Sinusfunktionen; wir haben es also mit harmonischen Schwingungen zu tun. Sobald μ einen noch so geringen endlichen Wert annimmt, so wird der Charakter der Lösungen tiefgreifend verändert. Die Integralkurven schlingen sich in Spiralen um den Nullpunkt, die für geeignet gewählte Koeffizienten der Differentialgleichungsglieder asymptotisch in eine geschlossene Kurve übergehen (Grenzzykel, cercle limite), d. h. das entsprechende elektrische System strebt oszillierend, je nach den Anfangsbedingungen mit wachsender oder abnehmender Amplitude einem stationären Schwingungszustand zu. Ähnliches gilt für den Fall reeller Wurzeln λ, mit dem Unterschied, dass sich die Integralkurven sofort von der singulären Stelle entfernen und für $\mu > 10$ praktisch schon nach einem Umlauf mit dem Grenzzykel zusammenfallen. Die Anzahl dieser möglichen Grenzzykel wird mit dem Grad des Polynoms $(-1 + 2\beta_2 x + \cdots)$ ansteigen, und zwar ist die maximale Anzahl für den Grad $2n$ gleich n und kann für eine unendliche Potenzreihe selbst unbegrenzt wachsen. Die spezielle Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = -x + \mu y (1 - x^2) \tag{1a'}$$

hat entweder einen oder keinen Grenzzykel, im letzteren Fall ist eine stabile Schwingung unmöglich, im ersteren Fall nähern sich die Integralkurven von der Aussen- und Innenseite asymptotisch dieser geschlossenen Kurve; es gibt eine und nur eine stabile Schwingung. Der Nachweis mit Hilfe der Poincaré'schen Methoden wird wegen der mehrfachen Singularität im Unendlichen (die beiden Kurven $X \equiv y = 0$ und $Y \equiv -x + \mu y (1 - x^2) = 0$ haben dort eine mehrfache Berührungsstelle) ziemlich umständlich und wir begnügen uns deshalb mit einem Verweis auf die Arbeiten der oben genannten Autoren, insbesondere von Dulac. Die Ableitung der Bedingungen für die Existenz von Grenzkurven und deren Anzahl für Differentialgleichungen mit kleinem Parameter μ erfolgt im Kapitel 4.

Von Poincaré und Picard sind allgemeine, in der Umgebung des Nullpunktes gültige Lösungen des Systems (2) angegeben worden, insofern folgende drei Bedingungen erfüllt sind: 1. Alle Wurzeln λ_i der charakteristischen Gleichung müssen auf derselben Seite einer durch den Nullpunkt der Gauss'schen Zahlenebene gehenden Geraden liegen. Dieser Bedingung genügt das spezielle System (1'). 2. Es muss eine lineare Variablentransformation geben, so dass das System die Gestalt

$$\frac{ds_i}{dt} = \lambda_i s_i + S_i (s_1 \cdots s_n)$$

annimmt, wobei die Funktion S_i nur Glieder höhern als ersten Grades enthält. 3. Es existiert keine Beziehung der Form $\lambda_i = q_1 \lambda_1 + \cdots + q_n \lambda_n$, wo die q_i ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe grösser als 1 ist.

Das spezielle Gleichungssystem (1') geht durch die Transformation

$$x = \frac{\lambda_2 \xi - \lambda_1 \eta}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad y = \frac{\xi - \eta}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{4}$$

resp.

$$\xi = x - \lambda_1 y \qquad \eta = x - \lambda_2 y \tag{4'}$$

in die gewünschte Form 2, nämlich in

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi + a\left[\lambda_2^2 \xi^3 - \lambda_1^2 \eta^3 + \xi \eta^2 (2+\lambda_1^2) - \eta \xi^2 (2+\lambda_2^2)\right] = \Xi$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta + b\left[\lambda_2^2 \xi^3 - \lambda_1^2 \eta^3 + \xi \eta^2 (2+\lambda_1^2) - \eta \xi^2 (2+\lambda_2^2)\right] = H$$

mit

$$a = \frac{\mu \lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} \qquad b = \frac{\mu \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}$$

über. Sind dann z_1, z_2 die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$\Xi \frac{d z_1}{d\xi} + H \frac{d z_1}{d\eta} - \lambda_1 z_1 = 0$$

$$\Xi \frac{d z_2}{d\xi} + H \frac{d z_2}{d\eta} - \lambda_2 z_2 = 0,$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \xi + a_{30}\xi^3 + a_{21}\xi^2\eta + a_{12}\xi\eta^2 + a_{03}\eta^3 + O_4' \\ z_2 &= \eta + b_{03}\eta^3 + b_{12}\eta^2\xi + b_{21}\xi^2\eta + b_{30}\xi^3 + O_4'' \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} a_{30} &= -\frac{a\lambda_2^2}{2\lambda_1}, \; a_{21} = a\frac{(2+\lambda_2^2)}{\lambda_1+\lambda_2}, \; a_{12} = -a\frac{(2+\lambda_1^2)}{2\lambda_2}, \; a_{03} = \frac{a\lambda_1^2}{3\lambda_2-\lambda_1} \\ b_{03} &= -\frac{b\lambda_1^2}{2\lambda_2}, \; b_{12} = -b\frac{(2+\lambda_1^2)}{\lambda_1+\lambda_2}, \; b_{21} = b\frac{(2+\lambda_2^2)}{2\lambda_1}, \; b_{30} = -\frac{b\lambda_2^2}{3\lambda_1-\lambda_2} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und die O_4', O_4'' mit Gliedern vierter Dimension beginnen, dann verwandelt sich das ursprüngliche System in

$$\frac{d z_i}{dt} = \lambda_i z_i, \qquad (i = 1, 2)\,. \tag{7}$$

Deren Integration ergibt

$$z_i = C_i e^{\lambda_i t} \tag{8}$$

oder

$$\frac{z_2^{\lambda_1}}{z_1^{\lambda_2}} = C\,. \tag{8'}$$

Sind λ_1, λ_2 positiv reelle Grössen und drückt man die z_i durch ξ, η und weiterhin durch x, y aus, so erhält man die von

Poincaré angegebene Form der Integrale in reeller Gestalt. Löst man die Gleichung (5) nach den Variablen ξ, η auf:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= z_1 - [a_{30} z_1^3 + a_{21} z_1^2 z_2 + a_{12} z_1 z_2^2 + a_{03} z_2^3] + \cdots \\ \eta &= z_2 - [b_{30} z_1^3 + b_{21} z_1^2 z_2 + b_{12} z_1 z_2^2 + b_{03} z_2^3] + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und ersetzt die z_i durch $C_i e^{\lambda_i t}$, so findet man die Picard'sche Lösungsform und daraus ohne weiteres x und y als Funktionen der Zeit t.

Sind aber die λ_i komplex: $\lambda_1 = \nu_1 + i\nu_2$, $\lambda_2 = \nu_1 - i\nu_2$, so setze man

$$z_1 = v_1 + i v_2 \qquad z_2 = v_1 - i v_2. \tag{10}$$

Dann gilt

$$\frac{d v_1}{d t} = \nu_1 v_1 - \nu_2 v_2$$

$$\frac{d v_2}{d t} = \nu_2 v_1 + \nu_1 v_2$$

mit den Lösungen

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= A e^{\nu_1 t} \cos \nu_2 t - B e^{\nu_1 t} \sin \nu_2 t \\ v_2 &= A e^{\nu_1 t} \sin \nu_2 t + B e^{\nu_1 t} \cos \nu_2 t \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Zerlegt man in (9) die z_i, a_{ik}, b_{ik} in ihre Real- und Imaginärteile, dann lassen sich diejenigen von $\xi = \zeta_1 + i\,\zeta_2$ und $\eta = \zeta_1 - i\,\zeta_2$ und damit

$$x = \frac{\nu_2 \zeta_1 - \nu_1 \zeta_2}{\nu_2} \qquad y = -\frac{\zeta_2}{\nu_2}$$

durch v_1 und v_2, d. h. durch die Zeit t ausdrücken.

Die praktische Gültigkeit dieser Lösungen, welche einen Ausdruck für die Anlaufvorgänge der zugrunde liegenden elektrischen Systeme darstellen, ist natürlich auf die Umgebung des Nullpunktes, d. h. des Gleichstromzustandes beschränkt.

4. Die Parameterentwicklung der Schwingungsgleichung, vierter Ordnung.

a) *Die allgemeine Schwebungslösung.*

Die allgemeine Integration der Schwingungsgleichung für beliebige Koeffizientenwerte stösst auf sehr grosse Schwierigkeiten. Dagegen führt im Falle kleiner Koeffizienten eine Parameterentwicklung dann zu einem praktisch auswertbaren Ergebnis, wenn wir uns auf die Ermittlung einfach oder mehrfach periodischer Lösungen beschränken und die Anlaufvorgänge unberücksichtigt lassen. Zwar lassen sich diese mittels der im vorigen Abschnitt erwähnten Reihenentwicklungen wenigstens im Bereich kleiner Amplituden übersehen, sobald sie aber von der Grössenordnung der stationären Schwingungsamplituden werden, genügt die Konvergenz der Reihen nicht mehr, und erst die stationären Vorgänge sind, wenigstens für geringe Parameterwerte, einer mathematischen Behandlung leicht zugänglich. Der Parameter ist so zu wählen, dass bei dessen Verschwinden eine periodische oder eine Schwebungslösung herauskommt, also alle nichtlinearen Glieder und alle ungeraden Ableitungen verschwinden. Dann erhält man eine lineare Schwingungsgleichung ohne Dämpfungsglieder, deren allgemeines Integral aus der Summe zweier ungedämpfter Sinusschwingungen mit den im allgemeinen inkommensurablen Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 besteht. Die folgenden Näherungslösungen sind in mehrfache Fourier'sche Reihen entwickelbar, deren Argumente aus den ganzzahligen Vielfachen der Argumente $\omega_1 t$ und $\omega_2 t$ gebildet sind. Unter normalen Bedingungen bleibt übrigens nur die Schwingung mit der grösseren Periodendauer übrig, der Vorgang ist periodisch.

Führen wir vorerst die für die Zwecke der näherungsweisen Auflösung dienlichen Umformungen der Ausgangsgleichung

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{A}_4 \frac{d^4 x}{d t^4} + \frac{d^3}{d t^3}(\bar{d}_1 x + \bar{d}_2 x^2 + \cdots + \bar{d}_n x^n + \cdots) \\
&+ \frac{d^2}{d t^2}(\bar{c}_1 x + \bar{c}_2 x^2 + \cdots + \bar{c}_n x^n + \cdots) \\
&+ \frac{d}{d t}(\bar{b}_1 x + \bar{b}_2 x^2 + \cdots + \bar{b}_n x^n + \cdots) \\
&+ (\bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 + \cdots \bar{a}_n x^n + \cdots) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

aus. Dazu dividiere man diese durch $\bar{a}_1$ und setze

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\,\varepsilon_3 = \frac{\bar{d}_1}{\bar{a}_1}, \quad \varepsilon_4 = \frac{\bar{A}_4}{\bar{a}_1} = \varepsilon_4{}'\,(1 + \mu\,\varphi_1 + \mu^2\,\varphi_2 + \cdots \mu^n\,\varphi_n + \cdots) \\
&\varepsilon_2 = \frac{\bar{c}_1}{\bar{a}_1} = \varepsilon_2{}'\,(1 + \mu\,\psi_1 + \mu^2\psi_2 + \cdots + \mu^n\,\psi_n + \cdots) \\
&\delta_n = \frac{\bar{d}_n}{\bar{d}_1} \qquad \gamma_n = \frac{\bar{c}_n}{\bar{c}_1}\left|\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1}\right| \qquad \beta_n = \frac{\bar{b}_n}{|\bar{b}_1|}\,\frac{|\bar{a}_1|}{\bar{a}_1} \\
&\alpha_n = \frac{\bar{a}_n}{\bar{a}_1}\left|\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1}\right| \qquad \mu = \left|\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_1}\right|
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wo die φ_i und ψ_i noch nachträglich zu bestimmende Konstanten bedeuten, dann erhält man die Schwingungsgleichung in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_4'(1+\mu\varphi_1+\cdots)\frac{d^4 x}{dt^4}+\mu\varepsilon_3\frac{d^3 D(x)}{dt^3}\\ &+\varepsilon_2'(1+\mu\psi_1+\mu^2\psi_2+\cdots)\frac{d^2}{dt^2}(x+\mu C(x))+\mu\frac{d\,B(x)}{dt}+x+\mu A(x)=0, \end{aligned}\right\}\quad(1')$$

wobei von den abkürzenden Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} D(x)&=x+\delta_2 x^2+\delta_3 x^3+\cdots, & C(x)&=\gamma_2 x^2+\gamma_3 x^3+\cdots\\ B(x)&=\beta_1 x+\beta_2 x^2+\beta_3 x^3+\cdots, & A(x)&=\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\cdots \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Gebrauch gemacht wurde. Wir verwenden den Lösungsansatz

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2 x_2+\cdots+\mu^n x_n+\cdots \qquad (4)$$

und entwickeln dementsprechend auch $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ nach μ. So lautet z. B.

$$B(x)=B_0+\mu B_1+\mu^2 B_2+\cdots+\mu^n B_n+\cdots$$

mit

$$\left.\begin{aligned} B_0&=\beta_1 x_0+\beta_2 x_0^2+\beta_3 x_0^3+\cdots+\beta_n x_0^n+\cdots\\ B_1&=x_1 B_0', \quad \left(B_0'=\frac{dB_0}{dx_0},\ B_0''=\frac{d^2 B_0}{dx_0^2}\cdots B_0^{(n)}=\frac{d^n B_0}{dx_0^n}\cdots\right)\\ B_2&=x_2 B_0'+\frac{x_1^2}{2}B_0''\\ &\cdots\cdots\cdots\\ B_n&=x_n B_0'+B_0''\sum\frac{(x_{\alpha_1})^{\nu_{\alpha_1}}(x_{\alpha_2})^{\nu_{\alpha_2}}}{\nu_{\alpha_1}!\,\nu_{\alpha_2}!}+\cdots\\ &\quad+B_0^{(n)}\sum\frac{(x_{\alpha_1})^{\nu_{\alpha_1}}\cdots(x_{\alpha_r})^{\nu_{\alpha_r}}}{\nu_{\alpha_1}!\cdots\nu_{\alpha_r}!}+\cdots+B_0^{(n)}\frac{x_1^n}{n!}. \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Dabei bedeutet

$$\sum\frac{(x_{\alpha_1})^{\nu_{\alpha_1}}\cdots(x_{\alpha_r})^{\nu_{\alpha_r}}}{\nu_{\alpha_1}!\cdots\nu_{\alpha_r}!}$$

die Summe aller Ausdrücke, die entstehen, wenn man unter dem Summenzeichen für $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ und $\nu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_2}, \cdots \nu_{\alpha_r}$ alle Kombinationen derjenigen ganzzahligen nicht negativen Werte einsetzt, welche den Bedingungen $\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}+\cdots\nu_{\alpha_r}=r$ und $\alpha_1\nu_{\alpha_1}+\alpha_2\nu_{\alpha_2}+\cdots+\alpha_r\nu_{\alpha_r}=n$ genügen. Entsprechende Ausdrücke gelten für $A(x)$, $C(x)$, $D(x)$.

Infolge der Substitution des Lösungsansatzes (4) in (1') und Nullsetzen der Ausdrücke gleicher Potenzen von μ zerfällt die Schwingungsgleichung in die unbegrenzte Folge linearer (mit Ausnahme der ersten) inhomogener Differentialgleichungen vierter Ordnung ohne Dämpfungsglieder:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_4' \frac{d^4 x_0}{d t^4} + \varepsilon_2' \frac{d^2 x_0}{d t^2} + x_0 = 0 \\
&\varepsilon_4' \frac{d^4 x_1}{d t^4} + \varepsilon_2' \frac{d^2 x_1}{d t^2} + x_1 + X_1(x_0) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\varepsilon_4' \frac{d^4 x_n}{d t^4} + \varepsilon_2' \frac{d^2 x_n}{d t^2} + x_n + X_n(x_0, x_1 \cdots, x_{n-1}) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

mit den Inhomogenitätsgliedern

$$\left.\begin{aligned}
X_1(x_0) &= \varepsilon_4' \varphi_1 \frac{d^4 x_0}{d t^4} + \varepsilon_3 \frac{d^3 D_0}{d t^3} + \varepsilon_2' \frac{d^2}{d t^2}(\psi_1 x_0 + C_0) \\
&\quad + \frac{d B_0}{d t} + A_0 = 0 \\
X_2(x_0, x_1) &= \varepsilon_4' \frac{d^4}{d t^4}(\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_0) + \varepsilon_3 \frac{d^3 D_1}{d t^3} \\
&\quad + \varepsilon_2' \frac{d^2}{d t^2}(\psi_2 x_0 + \psi_1 (x_1 + C_0) + C_1) + \frac{d B_1}{d t} + A_1 = 0 \\
X_n(x_0, x_1 \cdots x_{n-1}) &= \varepsilon_4' \frac{d^4}{d t^4}(\varphi_1 x_{n-1} + \varphi_2 x_{n-2} + \cdots + \varphi_n x_0) \\
&\quad + \varepsilon_3 \frac{d^3 D_{n-1}}{d t^3} + \varepsilon_2' \frac{d^2}{d t^2}(\psi_1 x_{n-1} + \cdots x_0 \psi_n + C_{n-1} + \cdots + \psi_{n-1} C_0)
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Lösung der Differentialgleichung nullter Annäherung lautet für $\varepsilon_4' > 0$, $\varepsilon_2' > 0$:

$$\begin{aligned}
x_0 &= M_1 \sin(\omega_1 t - \varphi) + M_2 \sin(\omega_2 t - \psi) \\
&= \mathfrak{M}_1 \left(e^{i(\omega_1 t - \varphi)} - e^{-i(\omega_1 t - \varphi)}\right) + \mathfrak{M}_2 \left(e^{i(\omega_2 t - \psi)} - e^{-i(\omega_2 t - \psi)}\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

mit den 4 Integrationskonstanten, nämlich den beiden Amplituden M_1, M_2 resp. $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ und den Phasenkonstanten φ, ψ, und den aus der charakteristischen Gleichung

$$\varepsilon_4' n^4 + \varepsilon_2' n^2 + 1 = 0$$

gewonnenen Kreisfrequenzen

$$n_{1,2}^2 = -\omega_{1,2}^2 = -\frac{\varepsilon_2'}{2 \varepsilon_4'}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4 \varepsilon_4'}{\varepsilon_2'^2}}\right). \tag{9}$$

Die Integrationskonstanten lassen sich erst aus der Differentialgleichung erster Näherung

$$\varepsilon_4' \frac{d^4 x_1}{d t^4} + \varepsilon_2' \frac{d^2 x_1}{d t^2} + x_1 + X_1(x_0) = 0$$

bestimmen. Die Phasenkonstanten könnte man zwar im Inkommensurabilitätsfall ohne weiteres gleich Null setzen, da unabhängig von allen Anfangsbedingungen immer einmal der Moment beliebig nahe verschwindender Phasendifferenz eintreten muss. Wir wollen dies aber, um die Freiheit in der Wahl der Anfangsbedingungen für die weiteren Näherungen nicht zu verlieren, unterlassen, resp. nur scheinbar tun, indem wir der Einfachheit der Darstellung halber die Argumente $\omega_1 t - \varphi$ und $\omega_2 t - \psi$ durch $\omega_1 t$ und $\omega_2 t$ ersetzen, uns aber bewusst bleiben, dass dies im allgemeinen nur eine abkürzende Schreibweise bedeutet.

An dieser Stelle wird auch ersichtlich, aus welchen Gründen ε_4 und ε_2 nach Potenzen des Parameters μ entwickelt wurden. Im allgemeinen werden nämlich die Frequenzen nicht durch die Grössen ε_4 und ε_2 allein bestimmt, sondern auch von den übrigen in der Schwingungsgleichung vorkommenden Koeffizienten beeinflusst sein. Bezeichnen wir mit ε_4' und ε_2' die Werte der Konstanten, deren Substitution an Stelle von ε_4 und ε_2 in der charakteristischen Gleichung die wahren Frequenzen ergibt, so werden sich diese ebenfalls nach Potenzen von μ entwickeln lassen, sich also aus der Umkehrung der Formeln für ε_4 und ε_2, d. h. aus

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_4' &= \varepsilon_4 \left[1 - \mu\varphi_1 + \mu^2(\varphi_1^2 - \varphi_2) + \cdots\right] \\ \varepsilon_2' &= \varepsilon_2 \left[1 - \mu\psi_1 + \mu^2(\psi_1^2 - \psi_2) + \cdots\right] \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

berechnen lassen, so dass dann auch die Ausdrücke (9) für die Frequenzen in nach Potenzen von μ fortschreitenden Reihen entwickelt erscheinen.

Für das Weitere denken wir uns die A_0, B_0, C_0, D_0 in eine zweifache Fourierreihe entwickelt, wobei die Darstellung von B_0 als Beispiel auch für die übrigen Funktionen gelten mag, also

$$B_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{m\omega_1 + n\omega_2}\, e^{i(m\omega_1 + n\omega_2)t}. \tag{11}$$

Dabei sollen die $b_{m\omega_1+n\omega_2}$ die Bedeutung der folgenden Ausdrücke haben:

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (2n)!\,\beta_{2n}\left[\frac{\mathfrak{M}_1^{2n}}{n!\,n!}+\frac{\mathfrak{M}_1^{2(n-1)}\mathfrak{M}_2^2}{(n-1)!\,(n-1)!\,1!\,1!}\right.\\
&\quad\left.+\cdots+\frac{\mathfrak{M}_1^2\mathfrak{M}_2^{2(n-1)}}{1!\,1!\,(n-1)!\,(n-1)!}+\frac{\mathfrak{M}_2^{2n}}{n!\,n!}\right]\\
&= \frac{\beta_2}{2}(M_1^2+M_2^2)+3\,\beta_4\left(\frac{M_1^4}{8}+\frac{M_1^2M_2^2}{2}+\frac{M_2^2}{8}\right)+\cdots\\[2ex]
b_{\omega_1} &= \sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)!\,\beta_{2n-1}\left[\frac{\mathfrak{M}_1^{2n-1}}{n!\,(n-1)!}+\frac{\mathfrak{M}_1^{2n-3}\mathfrak{M}_2^2}{(n-1)!\,(n-2)!\,1!}\right.\\
&\quad\left.+\cdots+\frac{\mathfrak{M}_1^3\mathfrak{M}_2^{2n-4}}{2!\,1!\,(n-1)!\,(n-2)!}+\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2^{2n-2}}{1!\,(n-1)!\,(n-1)!}\right]\\
&= -b_{-\omega_1}=\frac{M_1}{2i}\left[\beta_1+3\,\beta_3\left(\frac{M_1^2}{4}+\frac{M_2^2}{2}\right)\right.\\
&\quad\left.+5\,\beta_5\left(\frac{M_1^4}{8}+3\frac{M_1^2M_2^2}{4}+\frac{3}{8}M_2^4\right)+\cdots\right]\\[2ex]
b_{\omega_2} &= \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)!\,(-1)^{n-1}\beta_{2n-1}\left[\frac{\mathfrak{M}_2^{2n-1}}{n!\,(n-1)!}+\frac{\mathfrak{M}_2^{2n-3}\mathfrak{M}_1^2}{(n-1)!\,(n-2)!\,1!}+\cdots\right.\\
&\quad\left.+\frac{\mathfrak{M}_2^3\mathfrak{M}_1^{2n-4}}{2!\,1!\,(n-1)!\,(n-2)!}+\frac{\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_1^{2n-2}}{1!\,(n-1)!\,(n-1)!}\right]=-b_{-\omega_2}\\
&= \frac{M_2}{2i}\left[\beta_1+3\,\beta_3\left(\frac{M_2^2}{4}+\frac{M_1^2}{2}\right)\right.\\
&\quad\left.+5\,\beta_5\left(\frac{M_2^4}{8}+\frac{3M_1^2M_2^2}{4}+\frac{3}{8}M_2^4\right)+\cdots\right]\\[2ex]
b_{2\omega_1} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n)!\,\beta_{2n}\left[\frac{\mathfrak{M}_1^{2n}}{(n+1)!\,(n-1)!}+\frac{\mathfrak{M}_1^{2n-2}\mathfrak{M}_2^2}{n!\,(n-2)!\,1!\,1!}\right.\\
&\quad\left.+\cdots+\frac{\mathfrak{M}_1^4\mathfrak{M}_2^{2n-4}}{1!\,3!\,(n-2)!\,(n-2)!}+\frac{\mathfrak{M}_1^2\mathfrak{M}_2^{2n-2}}{2!\,(n-1)!\,(n-1)!}\right]=+b_{-2\omega_1}\\
&= -\left[\frac{\beta_2}{4}M_1^2+\beta_4\left(\frac{M_1^4}{4}+\frac{3}{4}M_1^2M_2^2\right)+\cdots\right]\\[2ex]
b_{2\omega_2} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n!)\,\beta_{2n}\left[\frac{\mathfrak{M}_2^{2n}}{(n+1)!\,(n-1)!}+\frac{\mathfrak{M}_2^{2n-2}\mathfrak{M}_1^2}{n!\,(n-2)!\,1!\,1!}+\right.\\
&\quad\left.\cdots+\frac{\mathfrak{M}_2^4\mathfrak{M}_1^{2n-4}}{1!\,3!\,(n-1)!\,(n-2)!}+\frac{\mathfrak{M}_2^2\mathfrak{M}_1^{2n-2}}{2!\,(n-1)!\,(n-1)!}\right]=+b_{-2\omega_2}
\end{aligned}\right\}\quad(12a)$$

$$\left.\begin{aligned} b_{\omega_1+\omega_2} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n)!\,\beta_{2n}\left[\frac{\mathfrak{M}_1^{2n-1}\mathfrak{M}_2}{n!(n-1)!1!}+\frac{\mathfrak{M}_1^{2n-3}\mathfrak{M}_2^3}{(n-1)!(n-2)!2!1!}\right.\\ &\quad\left.+\dots+\frac{\mathfrak{M}_1^3\mathfrak{M}_2^{2n-3}}{1!2!(n-1)!(n-2)!}+\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2^{2n-1}}{1!n!(n-1)!}\right]\\ &= b_{-(\omega_1+\omega_2)} = -b_{(\omega_1-\omega_2)} = -b_{-(\omega_1-\omega_2)}\\ &= -\left[\frac{\beta_2}{2}M_1M_2+3\beta_4\left(\frac{M_1^3M_2}{4}+\frac{M_1M_2^3}{4}\right)+\dots\right] \end{aligned}\right\} \quad (12a)$$

und allgemein für $p+q=2s$:

$$\begin{aligned} b_{p\omega_1+q\omega_2} &= \sum_{n=\frac{|p|+|q|}{2}}(-1)^{n-\frac{(p+q)}{2}}(2n)!\,\beta_{2n}\left[\frac{\mathfrak{M}_1^{2n-|q|}\mathfrak{M}_2^{|q|}}{\left(n+\frac{p-|q|}{2}\right)!\left(n-\frac{p+|q|}{2}\right)!|q|!}\right.\\ &\quad+\frac{\mathfrak{M}_1^{2n-2-|q|}\mathfrak{M}_2^{|q|+2}}{\left(n-1+\frac{p-|q|}{2}\right)!\left(n-1-\frac{p+|q|}{2}\right)!(|q|+1)!1!}+\dots\\ &\quad+\frac{\mathfrak{M}_1^{2(n-m)-|q|}\mathfrak{M}_2^{|q|+2m}}{\left(n-m+\frac{p-|q|}{2}\right)!\left(n-m-\frac{p+|q|}{2}\right)!(|q|+m)!m!}+\dots\\ &\quad\left.+\frac{\mathfrak{M}_1^{|p|}\mathfrak{M}_2^{2n-|p|}}{|p|!\left(n-\frac{|p|-q}{2}\right)!\left(n-\frac{|p|+q}{2}\right)!}\right] \end{aligned}$$

und für $p+q=2s-1$: (12b)

$$\begin{aligned} b_{p\omega_1+q\omega_2} &= \sum_{n=\frac{|p|+|q|+1}{2}}^{\infty}(-1)^{n-\frac{p+q+1}{2}}(2n-1)!\,\beta_{2n-1}\times\\ &\quad\left[\frac{\mathfrak{M}_1^{2n-1-|q|}\mathfrak{M}_2^{|q|}}{\left(n-\frac{|q|+1-p}{2}\right)!\left(n-\frac{|q|+1+p}{2}\right)!|q|!}+\dots\right.\\ &\quad+\frac{\mathfrak{M}_1^{2(n-m)-1-|q|}\mathfrak{M}_2^{|q|+2m}}{\left(n-m-\frac{|q|+1-p}{2}\right)!\left(n-m-\frac{|q|+1+p}{2}\right)!(|q|+m)!m!}+\dots\\ &\quad\left.+\frac{\mathfrak{M}_1^{|p|}\mathfrak{M}_2^{2n-|p|-1}}{|p|!\left(n-\frac{|p|-q+1}{2}\right)!\left(n-\frac{|p|+q+1}{2}\right)!}\right]. \end{aligned}$$

Dann wird

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X'_{m\omega_1+n\omega_2}e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[Y'_{m\omega_1+n\omega_2}\left(e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t}+e^{-i(m\omega_1+n\omega_2)t}\right)\right.\\ &\quad\left.+Y'_{-(m\omega_1+n\omega_2)}\left(e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t}-e^{-i(m\omega_1+n\omega_2)t}\right)\right]; \end{aligned}$$

dabei sind die Koeffizienten X' resp. Y' durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
&X_0{}' = a_0\\
&X'_{\pm\omega_1} = \pm\,\varepsilon_4{}'\,\varphi_1\,\omega_1^4\,\mathfrak{M}_1 - i\,\varepsilon_3\,\omega_1^3\,d_{\omega_1} \mp \varepsilon_2{}'\,\omega_1^2\,(\psi_1\,\mathfrak{M}_1 + c_{\omega_1})\\
&\qquad + i\,\omega_1\,b_{\omega_1} \pm a_{\omega_1}\\
&X'_{\pm\omega_2} = \pm\,\varepsilon_4{}'\,\varphi_1\,\omega_2^4\,\mathfrak{M}_2 - i\,\varepsilon_3\,\omega_2^3\,d_{\omega_2} \mp \varepsilon_2{}'\,\omega_2^2\,(\psi_1\,\mathfrak{M}_2 + c_{\omega_2})\\
&\qquad + i\,\omega_2\,b_{\omega_2} \pm a_{\omega_2}
\end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

und allgemein

$$\left.\begin{aligned}
X'_{m\,\omega_1+n\,\omega_2} = -\,i\,\varepsilon_3\,(m\,\omega_1+n\,\omega_2)^3\,d_{m\,\omega_1+n\,\omega_2}\\
-\varepsilon_2{}'\,(m\,\omega_1+n\,\omega_2)^2\,c_{m\omega_1+n\omega_2} + i\,(m\,\omega_1+n\,\omega_2)\,b_{m\omega_1+n\omega_2} + a_{m\omega_1+n\omega_2}
\end{aligned}\right\} \tag{14b}$$

resp. bei Verwendung der Bezeichnungen

$$Y'_{m\omega_1+n\omega_2} = \frac{X'_{m\omega_1+n\omega_2} + X'_{-(m\omega_1+n\omega_2)}}{2},$$

$$Y'_{-(m\omega_1+n\omega_2)} = \frac{X'_{m\omega_1+n\omega_2} - X'_{-(m\omega_1+n\omega_2)}}{2}$$

durch

$$\begin{aligned}
&Y'_{\omega_1} = -\,i\,\varepsilon_3\,\omega_1^3\,d_{\omega_1} + i\,\omega_1\,b_{\omega_1}\\
&Y'_{-\omega_1} = \varepsilon_4{}'\,\varphi_1\,\omega_1^4\,\mathfrak{M}_1 - \varepsilon_2{}'\,\omega_1^2\,(\psi_1\,\mathfrak{M}_1 + c_{\omega_1}) + a_{\omega_1}\\
&Y'_{\omega_2} = -\,i\,\varepsilon_3\,\omega_2^3\,d_{\omega_2} + i_{\omega_2}\,b_{\omega_2}\\
&Y'_{-\omega_2} = \varepsilon_4{}'\,\varphi_1\,\omega_2^4\,\mathfrak{M}_2 - \varepsilon_2{}'\,\omega_2^2\,(\psi_1\,\mathfrak{M}_2 + c_{\omega_2}) + a_{\omega_2}\ \text{usw.}
\end{aligned}$$

bestimmt. Wenn $X_0{}' = a_0 \neq 0$, so wird die allfällig auftretende Schwingung unsymmetrisch; damit die Lösung quasiperiodisch ist, müssen die Bedingungen

$$Y'_{\omega_1} = Y'_{\omega_2} = 0 \quad (16a) \qquad \text{und} \qquad Y'_{-\omega_1} = Y'_{-\omega_2} = 0 \quad (16b)$$

erfüllt sein. Aus der Doppelgleichung (16a), d. h. bei Verwendung der expliziten Schreibweise aus

$$M_1\,\varepsilon_3\,\omega_1^2\left[1 + 3\,\delta_3\left(\frac{M_1^2}{4} + \frac{M_2^2}{2}\right) + 5\,\delta_5\left(\frac{M_1^4}{8} + \frac{3}{4}\,M_1^2\,M_2^2 + \frac{3}{8}\,M_2^2\right) + \cdots\right]$$
$$= M_1\left[\beta_1 + 3\,\beta_3\left(\frac{M_1^2}{4} + \frac{M_2^2}{2}\right) + \cdots\right]$$

$$M_2\,\varepsilon_3\,\omega_2^2\left[1 + 3\,\delta_3\left(\frac{M_1^2}{2} + \frac{M_2^2}{4}\right) + 5\,\delta_5\left(\frac{3}{8}\,M_1^4 + \frac{3}{4}\,M_1^2 M_2^2 + \frac{M_2^2}{8}\right) + \cdots\right]$$
$$= M_2\left[\beta_1 + 3\,\beta_3\left(\frac{M_1^2}{2} + \frac{M_2^2}{4}\right) + \cdots\right]$$

errechnen sich die Amplituden M_1 und M_2. Aus den beiden andern Bedingungsgleichungen (16b) folgen die Werte für die Koeffizienten φ_1, ψ_1:

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon_2'\,\omega_1^2\,\omega_2^2\,(c_{\omega_2}\mathfrak{M}_1 - c_{\omega_1}\mathfrak{M}_2) + a_{\omega_1}\,\omega_2^2\,\mathfrak{M}_2 - a_{\omega_2}\,\omega_1^2\,\mathfrak{M}_1}{\varepsilon_4'\,\omega_1^2\,\omega_2^2\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2\,(\omega_2^2 - \omega_1^2)}$$

$$\psi_1 = \frac{\varepsilon_2'\,\omega_1^2\,\omega_2^2(c_{\omega_2}\,\omega_1^2\,\mathfrak{M}_1 - c_{\omega_1}\,\omega_2^2\,\mathfrak{M}_2) + a_{\omega_1}\,\omega_2^4\,\mathfrak{M}_2 + a_{\omega_2}\,\omega_1^4\,\mathfrak{M}_1}{\varepsilon_2'\,\omega_1^2\,\omega_2^2\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2\,(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\,.$$

Begnügen wir uns in den Gleichungen (16a) mit den beiden ersten Näherungsgliedern und setzen speziell $A(x) = C(x) = 0$ und $D(x) = x$, dann erhält man für die Amplitudengrössen die vier möglichen Lösungen:

$$\left.\begin{aligned}
&1.\ M_1 = M_2 = 0\\
&2.\ M_1^2 = \frac{4\,\varepsilon_3\,(2\,\omega_2^2 - \omega_1^2) - 4\,\beta_1}{9\,\beta_3}\,,\quad M_2^2 = \frac{4\,\varepsilon_3\,(2\,\omega_1^2 - \omega_2^2) - 4\,\beta_1}{9\,\beta_3}\\
&3.\ M_1^2 = \frac{4}{3\,\beta_3}\,(\varepsilon_3\,\omega_1^2 - \beta_1)\,,\qquad M_2 = 0\\
&4.\ M_2^2 = \frac{4}{3\,\beta_3}\,(\varepsilon_3\,\omega_2^2 - \beta_1)\,,\qquad M_1 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

während φ_1 und ψ_1 verschwinden.

Vor Weiterführung der Rechnung sind diese so errechneten Amplitudenwerte auf ihre Realität, und, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die entsprechenden Schwingungen auf ihre Stabilität zu untersuchen. Nur wenn mindestens eine mögliche stabile Schwingung existiert, ist die Rechnung weiterzuführen.

An dieser Stelle wollen wir annehmen, dass sogar zwei solche Amplitudenwerte vorhanden sind, so dass Schwebungen auftreten, und auf die Diskussion der Realitäts- und Stabilitätsfragen erst weiter unten eingehen. Dann nimmt die weitere Näherung der allgemeinen Schwebungslösung die Gestalt

$$x_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x'_{m\omega_1+n\omega_2}\, e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t} \tag{19}$$

an, wo x'_{ω_1}, $x'_{-\omega_1}$, x'_{ω_2}, $x'_{-\omega_2}$ aus der Differentialgleichung zweiter Näherung bestimmbare Integrationskonstanten sind, während die übrigen $x'_{m\omega_1+n\omega_2}$ durch den Ausdruck

$$x'_{m\omega_1+n\omega_2} = -\frac{X'_{m\omega_1+n\omega_2}}{\varepsilon_4'\,(m\omega_1+n\omega_2)^4 - \varepsilon_2'\,(m\omega_1+n\omega_2)^2 + 1} \tag{20}$$

gegeben sind.

Wir machen für das Folgende durchgehend die Annahme $C(x) = 0$, $D(x) = x$, welche ohne wesentliche Änderung der Ergebnisse eine beträchtliche Vereinfachung in den Ausdrücken für $X'_{m\omega_1+n\omega_2}$ resp. $Y'_{m\omega_1+n\omega_2}$ und im weiteren für die Differentialgleichungen der höhern Näherungen zur Folge hat. Unter dieser vereinfachenden Annahme wird die Differentialgleichung der zweiten Näherung

$$\varepsilon_4' \frac{d^4 x_2}{d t^2} + \varepsilon_2' \frac{d^2 x_2}{d t^2} + x_2 + X_2(x_0, x_1) = 0$$

mit

$$X^{(2)} = \varepsilon_4' \varphi_2 \frac{d^4 x_0}{d t^4} + \varepsilon_2' \psi_2 \frac{d^2 x_0}{d t^2} + \varepsilon_4' \varphi_1 \frac{d^4 x_1}{d t^4} + \varepsilon_2' \psi_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} + \varepsilon_3 \frac{d^3 x_1}{d t^3} + \frac{d B_1}{d t} + A_1 .$$

Setzt man für x_1 den Ausdruck (19) und für

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= x_1 A_0' = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{m\omega_1+n\omega_2} e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t} \\
\frac{d B_1}{d t} &= \frac{d(x_1 B_0')}{d t} \\
&= i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (m\omega_1 + n\omega_2)\, q_{m\omega_1+n\omega_2} e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t}, \\
&\text{wo} \\
p_{m\omega_1+n\omega_1} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} x'_{r\omega_1+s\omega_2} a'_{(m-r)\omega_1+(n-s)\omega_2} \\
&\text{und} \\
q_{m\omega_1+n\omega_2} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} x'_{r\omega_1+s\omega_2} b'_{(m-r)\omega_1+(n-s)\omega_2}
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

ist und die a', b' aus a und b durch die Substitution der α_n resp. β_n durch $(n+1)\alpha_{n+1}$ resp. $(n+1)\beta_{n+1}$ hervorgehen, dann gelten für die Koeffizienten der Fourierreihe von

$$X_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^{(2)}_{m\omega_1+n\omega_2} e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t}, \tag{13'}$$

wenn man noch die Bedingungsgleichungen (15a) bedenkt, die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
X_0^{(2)} &= p_0 \\
X_{\omega_1}^{(2)} &= \mathfrak{M}_1 (\varepsilon_4{}' \, \omega_1^4 \, \varphi_2 - e_2{}' \, \omega_1^2 \, \psi_2) \\
&\quad - \frac{a_{\omega_1}}{\mathfrak{M}_1} \, x'_{\omega_1} - i \, \varepsilon_3 \, \omega_1^3 \, x'_{\omega_1} + i \, \omega_1 \, q_{\omega_1} + p_{\omega_1} \\
X_{-\omega_1}^{2} &= \mathfrak{M}_1 (- \varepsilon_4{}' \, \omega_1^4 \, \varphi_2 + \varepsilon_2{}' \, \omega_1^2 \, \psi_2) \\
&\quad - \frac{a_{\omega_1}}{\mathfrak{M}_1} \, x'_{-\omega_1} + i \, \varepsilon_3 \, \omega_1^3 \, x'_{-\omega_1} - i \, \omega_1 \, q_{-\omega_1} + p_{-\omega_1}
\end{aligned}\right\} \quad (22a)$$

und entsprechende Ausdrücke für $X_{\omega_2}^{(2)}$, $X_{-\omega_2}^{(2)}$, die aus den obigen durch Ersatz von ω_1, $\mathfrak{M}_1$ durch ω_2, $\mathfrak{M}_2$ hervorgehen; allgemein gilt

$$\left.\begin{aligned}
X_{m\omega_1+n\omega_2}^{(2)} &= \varepsilon_4{}' \, (m\omega_1 + n\omega_2)^4 \, \varphi_1 - i \, \varepsilon_3 \, (m\omega_1 + n\omega_2)^3 \\
&- \varepsilon_2{}' \, \psi_1 \, (m\omega_1 + n\omega_2)^2 + i \, (m\omega_1 + n\omega_2) \, q_{m\omega_1+n\omega_2} + p_{m\omega_1+n\omega_2} \, .
\end{aligned}\right\} \quad (22b)$$

Aus den Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
Y_{-\omega_1}^{(2)} &= (\varepsilon_4{}' \, \omega_1^2 \varphi_2 - \varepsilon_2{}' \, \psi_2) \, \omega_1^2 \, \mathfrak{M}_1 + \left(\frac{x'_{\omega_1} - x'_{-\omega_1}}{2}\right)\left(\frac{-a_{\omega_1}}{\mathfrak{M}_1} + a_0{}' - a'_{2\omega_1}\right) \\
&\quad + a'_{\omega_1+\omega_2} (x'_{-\omega_2} - x'_{\omega_2}) + i \, \omega_1 \left(\frac{Q_{\omega_1} + Q'_{-\omega_1}}{2}\right) + \frac{P_{\omega_1} - P_{-\omega_1}}{2} \\
Y_{-\omega_2}^{(2)} &= (\varepsilon_4{}' \, \omega_2^2 \varphi_2 - \varepsilon_2{}' \, \psi_2) \, \omega_2^2 \, \mathfrak{M}_2 + \left(\frac{x'_{\omega_2} - x'_{-\omega_2}}{2}\right)\left(\frac{-a_{\omega_2}}{\mathfrak{M}_2} + a_0{}' - a'_{2\omega_2}\right) \\
&\quad + a'_{\omega_1+\omega_2} (x'_{-\omega_1} - x'_{\omega_1}) + i \, \omega_2 \left(\frac{Q_{\omega_2} + Q_{-\omega_2}}{2}\right) + \frac{P_{\omega_2} - P_{-\omega_2}}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
Q_{\omega_1} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' x'_{r\omega_1+s\omega_2} \, b'_{(1+r)\,\omega_1 - s\omega_2} = q_{\omega_1} - (x'_{\omega_1} \, b_0{}' + x'_{-\omega_1} \, b'_{2\omega_1}) \\
&\quad + b'_{\omega_1+\omega_2} \, (x'_{\omega_2} - x'_{-\omega_2}) \\
Q_{-\omega_1} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' x'_{r\omega_1+s\omega_2} \, b'_{-(1+r)\,\omega_1 - s\omega_2} = q_{-\omega_1} - (x'_{\omega_1} \, b'_{2\omega_1} + x'_{-\omega_1} b_0{}') \\
&\quad - b'_{\omega_1+\omega_2} \, (x'_{\omega_2} - x'_{-\omega_2}) \\
P_{\omega_1} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' x'_{r\omega_1+s\omega_2} \, a'_{(1-r)\,\omega_1 - s\omega_2} = p_{\omega_1} - (x'_{\omega_1} \, a_0{}' + x'_{-\omega_1} \, a'_{2\omega}) \\
&\quad + a'_{\omega_1+\omega_2} \, (x'_{\omega_2} - x'_{-\omega_2}) \\
P_{-\omega_1} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' x'_{r\omega_1+s\omega_2} \, a'_{-(1+r)\,\omega_1 - s\omega_2} = p_{-\omega_1} - (x'_{\omega_1} \, a'_{2\omega_1} + x'_{-\omega_1} a_0{}') \\
&\quad - a'_{\omega_1+\omega_2} \, (x'_{\omega_2} - x'_{-\omega_2}) \, ,
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

die Q_{ω_2}, $Q_{-\omega_2}$, P_{ω_2}, $P_{-\omega_2}$ aus den obigen Formeln (24) durch Vertauschung von ω_1 und ω_2 hervorgehen und die Beistriche an den

Summenzeichen das Fehlen der Glieder mit den Indexkombinationen $|r| + |s| = 1$ anzeigen, folgen die beiden Werte von φ_2 und ψ_2:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_2\,\varepsilon_1{}'\,\omega_1^2\,\omega_2^2\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2\,(\omega_2^2-\omega_1^2)\\
&\quad=\frac{x'_{\omega_1}-x'_{-\omega_1}}{2}\left[\left(\frac{-a_{\omega_1}}{\mathfrak{M}_1}+a_0{}'-a'_{2\omega_1}\right)\omega_2^2\,\mathfrak{M}_2-2\,a'_{\omega_1+\omega_2}\omega_1^2\,\mathfrak{M}_1\right]\\
&\quad+\frac{x'_{\omega_2}-x'_{-\omega_2}}{2}\left[\left(\frac{a_{\omega_2}}{\mathfrak{M}_2}-a_0{}'+a'_{2\omega_2}\right)\omega_1^2\,\mathfrak{M}_1-2\,a'_{\omega_1+\omega_2}\,\omega_2^2\,\mathfrak{M}_2\right]\\
&\quad+i\,\omega_1\,\omega_2\left[\omega_2\,\mathfrak{M}_2\left(\frac{Q_{\omega_1}+Q_{-\omega_1}}{2}\right)-\omega_1\,\mathfrak{M}_1\left(\frac{Q_{\omega_2}+Q_{-\omega_2}}{2}\right)\right]\\
&\quad+\omega_2^2\,\mathfrak{M}_2\left(\frac{P_{\omega_1}-P_{-\omega_1}}{2}\right)-\omega_1^2\,\mathfrak{M}_1\left(\frac{P_{\omega_2}-P_{-\omega_2}}{2}\right),\\
&\psi_2\,\varepsilon_2{}'\,\omega_1^2\,\omega_2^2\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2\,(\omega_2^2-\omega_1^2)\\
&\quad=\frac{x'_{\omega_1}-x'_{-\omega_1}}{2}\left[\left(-\frac{a_{\omega_1}}{\mathfrak{M}_1}+a_0{}'-a'_{2\omega_1}\right)\omega_2^4\,\mathfrak{M}_2-2\,a'_{\omega_1+\omega_2}\,\omega_1^4\,\mathfrak{M}_1\right]\\
&\quad+\frac{x'_{\omega_2}-x'_{-\omega_2}}{2}\left[\left(\frac{a_{\omega_2}}{\mathfrak{M}_2}-a_0{}'+a'_{2\omega_2}\right)\omega_1^4\,\mathfrak{M}_1-2\,a'_{\omega_1+\omega_2}\omega_2^4\,\mathfrak{M}_2\right]\\
&\quad+i\,\omega_1\,\omega_2\left[\omega_2^3\,\mathfrak{M}_2\left(\frac{Q_{\omega_1}+Q_{-\omega_1}}{2}\right)-\omega_1^3\,\mathfrak{M}_1\left(\frac{Q_{\omega_2}+Q_{-\omega_2}}{2}\right)\right]\\
&\quad+\omega_2^4\,\mathfrak{M}_2\left(\frac{P_{\omega_1}-P_{-\omega_1}}{2}\right)-\omega_1^4\,\mathfrak{M}_1\left(\frac{P_{\omega_2}-P_{-\omega_2}}{2}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

Die beiden andern Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}
&Y^{(2)}_{\omega_1}=i\,\omega_1\,(b_0{}'-b'_{2\omega_1}+\varepsilon_3\,\omega_1^2)\left(\frac{x'_{\omega_1}-x'_{-\omega_1}}{2}\right)\\
&\quad+i\,\omega_1\left[b'_{\omega_1+\omega_2}\,(x'_{-\omega_2}-x'_{\omega_2})+\frac{Q_{\omega_1}-Q_{-\omega_1}}{2}\right]+\frac{P_{\omega_1}+P_{-\omega_1}}{2}=0\\
&Y^{(2)}_{\omega_2}=i\,\omega_2\,(b_0{}'-b'_{2\omega_2}+\varepsilon_3\,\omega_2^2)\left(\frac{x'_{\omega_2}-x'_{-\omega_2}}{2}\right)\\
&\quad+i\,\omega_2\left[b'_{\omega_1+\omega_2}\,(x'_{-\omega_1}-x'_{\omega_1})+\frac{Q_{\omega_2}-Q_{-\omega_2}}{2}\right]+\frac{P_{\omega_2}+P_{-\omega_2}}{2}=0
\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

ergeben zwei Beziehungen für die Integrationskonstanten x'_{ω_1}, $x'_{-\omega_1}$, x'_{ω_2}, $x'_{-\omega_2}$. Die Ermittlung der restlichen Konstanten hängt von den für die Phasenkonstanten φ und ψ angenommenen Werten ab. Wird $\varphi = \psi = 0$ gesetzt, so haben wir zur vollständigen Bestimmung der Integrationskonstanten noch zwei Anfangsbedingungen festzulegen, als solche können z. B.

$$x_1(0) = \frac{d^2\,x_1(0)}{d\,t^2} = 0$$

dienen (die erste Ableitung ist schon durch die übrigen Bedingungen fixiert). Werden die Werte von φ und ψ noch offen gelassen, so erhalten wir die noch unbestimmten Konstanten durch Nullsetzen von $x_1(o)$ und seinen drei ersten Ableitungen.

Die erste Methode ergibt folgende Resultate. Aus (26) folgt unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{i\,\omega_1}{2}(b_0' - b'_{2\omega_1}) - \frac{i\,\varepsilon_3\,\omega_1^3}{2}, \quad B' = -i\,\omega_1\,b'_{\omega_1+\omega_2} \\ C' &= i\,\omega_1\left(\frac{Q_{\omega_1} - Q_{-\omega_1}}{2}\right) + \frac{P_{\omega_1} + P_{-\omega_1}}{2} \\ A'' &= -i\,\omega_2\,b'_{\omega_1+\omega_2}, \quad B'' = -\frac{i\,\varepsilon_3\,\omega_2^3}{2} + i\,\omega_2\left(\frac{b_0' - b'_{2\omega_2}}{2}\right) \\ C'' &= i\,\omega_2\left(\frac{Q_{\omega_2} - Q_{-\omega_2}}{2}\right) + \frac{P_{\omega_2} + P_{-\omega_2}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

für die beiden Differenzen

$$\left.\begin{aligned} x'_{\omega_1} - x'_{-\omega_1} &= \frac{B'\,C'' - C'\,B''}{A'\,B'' - A''\,B'} = D_1 \\ x'_{\omega_2} - x'_{-\omega_2} &= \frac{A'\,C'' - C'\,A''}{A''\,B' - A'\,B''} = D_2 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

und aus den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = (x'_{\omega_1} + x'_{-\omega_1}) + (x'_{\omega_2} + x'_{-\omega_2}) + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' x'_{m\omega_1+n\omega_2} = 0$$

$$\frac{d^2\,x_1(0)}{d\,t^2} = \omega_1^2\,(x'_{\omega_1} + x'_{-\omega_1}) + \omega_2^2\,(x'_{\omega_2} + x'_{-\omega_2}) + \sum{}' \sum{}' (m\omega_1 + n\omega_2)^2\,x'_{m\omega_1+n\omega_2} = 0$$

für deren Summen

$$\left.\begin{aligned} (x'_{\omega_1} + x'_{-\omega_1}) &= \frac{S_2' - \omega_2^2\,S_0'}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = S_1 \\ (x'_{\omega_2} + x'_{-\omega_2}) &= \frac{S_2' - \omega_1^2\,S_0'}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = S_2, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} S_2' &= \sum{}' \sum{}' (m\omega_1 + n\omega_2)^2\,x'_{m\omega_1+n\omega_2} \\ S_0' &= \sum{}' \sum{}' x'_{m\omega_1+n\omega_2} \end{aligned}\right\} \tag{30a}$$

bedeutet, also für die einzelnen Konstanten

$$x_{\omega_1} = \frac{D_1 + S_1}{2}, \quad x_{-\omega_1} = \frac{S_1 - D_1}{2}, \quad x_{\omega_2} = \frac{D_2 + S_2}{2}, \quad x_{-\omega_2} = \frac{S_2 - D_2}{2}. \tag{31}$$

In analoger Weise werden die folgenden Näherungslösungen errechnet. So lautet z. B. die zweite Zusatzlösung:

$$x_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{(2)}_{m\omega_1+n\omega_2} e^{i\,(m\omega_1+n\omega_2)\,t}$$

mit

$$x^{(2)}_{m\omega_1+n\omega_2} = -\frac{X^{(2)}_{m\omega_1+n\omega_2}}{\varepsilon_4'\,(m\omega_1+n\omega_2)^4 - \varepsilon_2'\,(m\omega_1+n\omega_2)^2+1}\,.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten $x^{(2)}_{\omega_1}$, $x^{(2)}_{-\omega_1}$, $x^{(2)}_{\omega_2}$, $x^{(2)}_{-\omega_2}$ benötigt man die Kenntnis der Differentialgleichung dritter Näherung

$$\varepsilon_4'\,\frac{d^4 x_3}{dt^4} + \varepsilon_2'\,\frac{d^2 x_3}{dt^2} + x_3 + X_3\,(x_0, x_1, x_2) = 0\,.$$

Aus den Bedingungsgleichungen $X^{(3)}_{\omega_1} = X^{(3)}_{-\omega_1} = X^{(3)}_{\omega_2} = X^{(3)}_{-\omega_2} = 0$ erhält man die Werte von φ_3, ψ_3 und zwei Beziehungen zwischen den vier Integrationskonstanten $x^{(3)}_{\omega_1}$, $x^{(3)}_{-\omega_1}$, $x^{(3)}_{\omega_2}$, $x^{(3)}_{-\omega_2}$. Die beiden andern Beziehungen werden durch passend gewählte Anfangsbedingungen für $x_2(0)$ und eine Ableitung

$$\frac{d^n\,x_2{}^{(0)}}{dt^n} \quad (\text{wo } n < 4)$$

geliefert.

b) *Periodische Lösung.**)

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Behandlung der Differentialgleichung, wenn nur die Schwingung mit *einer* Grundfrequenz (für Röhrenschwingungen ω_1) stabil ist, d. h. die Lösung eine periodische Funktion der Zeit darstellt ($\mathfrak{M}_2 = 0$). Dann lässt sich die vorerst unbestimmte Kreisfrequenz (nennen wir sie ω) durch die Substitution $\tau = \omega t$ aus dem Exponenten entfernen, womit die im Schwebungsfall auftretenden Schwierigkeiten betr. die Koeffizienten ε_4 und ε_2 dahinfallen.

---

*) Die in diesem Abschnitt verwendete Methode wurde von APPLETON und GREAVES[5]) an einer Gleichung zweiter Ordnung auseinandergesetzt. Da diese Arbeit in den die Kippschwingungen betreffenden in der Zeitschrift f. drahtl. Telegr. u. Teleph. erschienenen Publikationen von VAN DER POL und APPLETON nirgends erwähnt ist, kam sie uns erst nachträglich zu Gesicht, nachdem wir im Anschluss an die Veröffentlichungen von HORN[16]) und POINCARÉ dieses Verfahren schon verwendet hatten. Noch später wurden wir auf die Mitteilung von ANDRONOW[19]) aufmerksam. Einen Konvergenzbeweis für diese Parameterentwicklung hat GREAVES[18]) angegeben.

Um die Differentialgleichung (1) in der gewünschten Form zu erhalten, dividiere man wiederum durch $\bar{a}_1$ und setze

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_0^2 = \left|\frac{\bar{a}_1}{c_1}\right|, \quad \mu = \omega_0 \left|\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_1}\right|, \quad \tau = \omega t \\
&\varepsilon_4 = \frac{\bar{A}_4}{\bar{a}_1}\,\omega_0^4 = \frac{\bar{A}_4\,\bar{a}_1}{\bar{c}_1^2}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{\bar{d}_1}{\bar{a}_1}\left|\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1}\right|\omega_0^2 \\
&\delta_n = \frac{\bar{d}_n}{\bar{d}_1}, \ \gamma_1 = \left|\frac{\bar{a}_1}{\bar{c}_1}\right|\frac{\bar{c}_1}{\bar{a}_1}, \ \gamma_n = \frac{1}{\mu}\frac{\bar{c}_n}{|\bar{c}_1|}\frac{|\bar{a}_1|}{\bar{a}_1}, \ \beta_n = \frac{\bar{b}_n}{|\bar{b}_1|}\frac{|\bar{a}_1|}{a_1}, \ \alpha_n = \frac{1}{\mu}\frac{\bar{a}_n}{\bar{a}_1},
\end{aligned}\right\} \tag{32a}$$

dann erhält man, wenn man wie früher von den abkürzenden Bezeichnungen der Formeln (3) Verwendung macht:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_4 \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\frac{d^4 x}{d\tau^4} + \varepsilon_3\,\mu\frac{\omega^3}{\omega_0^3}\frac{d^3 D(x)}{d\tau^3} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{d^2}{d\tau^2}(\gamma_1 x + \mu\, C(x)) \\
&\qquad + \mu\frac{\omega}{\omega_0}\frac{d B(x)}{d\tau} + x + \mu\, A(x) = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Entwickelt man $\frac{\omega}{\omega_0}$, x und $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ nach Potenzen von μ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\omega}{\omega_0} &= 1 + \mu\varrho_1 + \mu^2\varrho_2 + \cdots + \mu^n\varrho_n + \cdots \\
x &= x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \cdots + \mu^n x_n + \cdots \\
A(x) &= A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \cdots + \mu^n A_n + \cdots \\
B(x) &= B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \cdots + \mu^n B_n + \cdots \\
C(x) &= C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \cdots + \mu^n C_n + \cdots \\
D(x) &= D_0 + \mu D_1 + \mu^2 D_2 + \cdots + \mu^n D_n + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

und setzt die Koeffizienten gleicher Potenzen von μ gleich Null, so erhält man die unendliche Folge von Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \varepsilon_4\frac{d^4 x_0}{d\tau^4} + \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0 \\
&\text{b)}\quad \varepsilon_4\frac{d^4 x_1}{d\tau^4} + \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 + X_1(x_0) = 0 \\
&\text{und allgemein} \\
&\text{c)}\quad \varepsilon_4\frac{d^4 x_n}{d\tau^4} + \frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + x_n + X_n(x_0\cdots x_{n-1}) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

mit den leicht berechenbaren Inhomogenitätsgliedern X_n.

Da, nach Annahme, die Lösung periodisch sein soll, so wird in nullter Näherung

$$x_0 = \mathfrak{M}\,(e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau})\,, \tag{35}$$

wobei für Röhrenschaltungen im allgem. nur die Wurzel

$$\omega^2 = \frac{1}{2\,\varepsilon_4}\left(1 - \sqrt{1 - 4\,\varepsilon_4}\right) \tag{35a}$$

der charakteristischen Gleichung stabilen Schwingungen entspricht. In der Differentialgleichung der ersten Näherung wird X_1 durch den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} X_1 = 4\,\varepsilon_4\,\varrho_1 \frac{d^4 x_0}{d\tau^4} + \varepsilon_3 \frac{d^3 D_0(x_0)}{d\tau^3} + \frac{d^2}{d\tau^2}\left(C_0(x_0) + 2\,\varrho_1 x_0\right) \\ + \frac{d\,B_0(x_0)}{d\tau} + A_0(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

dargestellt. Denken wir uns darin A_0, B_0, C_0, D_0 in Fourierreihen entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \mathfrak{M}\left[a_0 + a_1(e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) + a_2(e^{2i\omega\tau} + e^{-2i\omega\tau}) + \cdots\right. \\ &\quad \left. + a_n(e^{ni\omega\tau} + (-1)^n e^{-ni\omega\tau}) + \cdots\right] \\ B_0 &= \mathfrak{M}\left[b_0 + b_1(e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) + b_2(e^{2i\omega\tau} + e^{-2i\omega\tau}) + \cdots\right. \\ &\quad \left. + b_n(e^{in\omega\tau} + (-1)^n e^{-in\omega\tau}) + \cdots\right] \\ C_0 &= \mathfrak{M}\left[c_0 + c_1(e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) + c_2(e^{2i\omega\tau} + e^{-2i\omega\tau}) + \ldots\right. \\ &\quad \left. + c_n(e^{in\omega\tau} + (-1)^n e^{-in\omega\tau}) + \ldots\right] \\ D_0 &= \mathfrak{M}\left[d_0 + d_1(e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) + d_2(e^{2i\omega\tau} + e^{-2i\omega\tau}) + \ldots\right. \\ &\quad \left. + d_n(e^{in\omega\tau} + (-1)^n e^{-in\omega\tau}) + \ldots\right], \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

wo beispielsweise

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}\,b_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (2n)! \frac{\mathfrak{M}^{2n}}{n!\,n!}\beta_{2n} = \frac{\beta_2}{2}M^2 + \frac{3\,\beta_4}{8}M^4 + \cdots \\ \mathfrak{M}\,b_1 &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)}\beta_{2n}\,\mathfrak{M}^{2n-1} \\ &= \frac{M}{2\,i}\left(\beta_1 + \frac{3\,\beta_3}{4}M^2 + \frac{5\,\beta_5}{8}M^4 + \cdots\right) \\ \mathfrak{M}\,b_2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!\,\beta_{2n}}{(n+1)!\,(n-1)!}\mathfrak{M}^{2n} = -\left(\frac{\beta_2}{4}M^2 + \frac{\beta_4}{4}M^4 + \ldots\right) \\ \mathfrak{M}\,b_{2s-1} &= \sum_{n=s}^{\infty}(-1)^{n-s-1}\frac{(2n-1)!}{(n+s-1)!\,(n-s)!}\beta_{2n-1}\,\mathfrak{M}^{2n-1} \\ \mathfrak{M}\,b_{2s} &= \sum_{n=s}^{\infty}(-1)^{n-s}\frac{(2n)!}{(n+s)!\,(n-s)!}\beta_{2n}\,\mathfrak{M}^{2n} \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

und wo die a_n, b_n, c_n gleichgebaute Funktionen der entsprechenden Konstanten α_n, β_n, γ_n bedeuten, so wird

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \mathfrak{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X'_n\, e^{in\omega\tau} \\ &= \mathfrak{M}\sum_{n=0}^{\infty}\left[Y'_n(e^{in\omega\tau} + e^{-in\omega\tau}) + Y'_{-n}(e^{in\omega\tau} - e^{-in\omega\tau})\right] \end{aligned}\right\} \tag{36a}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
&X_0' = a_0 \\
&X'_{\pm 1} = \pm 4\,\varepsilon_4\,\varrho_1\,\omega^4 - i\,\varepsilon_3\,\omega^3\,d_1 \mp \omega^2\,(c_1 + 2\,\varrho_1) + i\,b_1\,\omega \pm a_1 \\
&X'_{\pm(2n-1)} = -\,i\,\varepsilon_3\,(2\,n-1)^3\,\omega^3\,d_{2n-1} \mp (2\,n-1)^2\,\omega^2\,c_{2n-1} \\
&\qquad + (2\,n-1)\,i\,\omega\,b_{2n-1} \pm a_{2n-1} \\
&X'_{\pm 2n} = \mp\,8\,i\,\varepsilon_3\,n^3\,\omega^3\,d_{2n} - 4\,n^2\,\omega^2\,c_{2n} \pm 2\,n\,i\,\omega\,b_{2n} + a_{2n}
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

resp.

$$\left.\begin{aligned}
&Y_1' = \frac{X_1' + X'_{-1}}{2} = -\,i\,\varepsilon_3\,\omega^3 d_1 + i\,b_1\,\omega \\
&Y_{-1}' = \frac{X_1' - X'_{-1}}{2} = 4\,\varrho_1\,\varepsilon_4\,\omega^4 - \omega^2(c_1 + 2\,\varrho_1) + a_1 \quad \text{usw.}
\end{aligned}\right\} \tag{37a}$$

Damit die Lösung periodisch ist, müssen die Bedingungen

$$\mathfrak{M}\,X_1' = \mathfrak{M}\,X'_{-1} = 0 \tag{38a}$$

resp.

$$\mathfrak{M}\,Y_1' = \mathfrak{M}\,Y'_{-1} = 0\,, \tag{38b}$$

d. h.

$$\mathfrak{M}\,(-\,i\,\varepsilon_3\,\omega^2 d_1 + i\,b_1\,\omega) = 0 \tag{38'a}$$

und

$$\mathfrak{M}\,[4\,\varepsilon_4\,\varrho_1\,\omega^4 - \omega^2(c_1 + 2\,\varrho_1) + a_1] = 0 \tag{38'b}$$

erfüllt sein. $\mathfrak{M}$ berechnet sich also bei Verwendung der expliziten Schreibweise aus der Gleichung (38'a):

$$\left.\begin{aligned}
&M\,[-\,\varepsilon_3\,\omega^2(\delta_1 + \tfrac{3}{4}\,\delta_3\,M^2 + \tfrac{5}{8}\,\delta_5\,M_4 + \ldots) \\
&+ (\beta_1 + \tfrac{3}{4}\,\beta_3\,M^2 + \tfrac{5}{8}\,\beta_5\,M^4 + \cdots)] = 0
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

und ϱ_1 aus (38'b):

$$\varrho_1\,\omega^2(4\,\varepsilon_4\,\omega^2 - 2) = \omega^2(\tfrac{3}{4}\,\gamma_3\,M^2 + \cdots) - (\tfrac{3}{4}\,\alpha_3\,M^2 + \cdots). \tag{40}$$

Die Lösung der ersten Näherung hat die Gestalt der Fourierreihe

$$x_1 = \mathfrak{M}\left[x_0' + (x_1'\,e^{i\omega\tau} + x'_{-1}\,e^{-i\omega\tau}) + \sum_{n=2}^{\infty}(x'_n\,e^{in\omega\tau} + x'_{-n}e^{-in\omega\tau})\right], \tag{41}$$

wo für $n \neq 1$

$$x'_n = -\frac{X'_n}{\varepsilon_4\,n^4\,\omega^4 - n^2\,\omega^2 + 1}$$

ist, und x_1' und x'_{-1} vorläufig noch unbestimmte Integrationskonstanten bedeuten, die sich erst aus der Differentialgleichung zweiter Näherung ergeben. Diese lautet

$$\varepsilon_4\,\frac{d^4\,x_2}{d\tau^4} + \frac{d^2\,x_2}{d\tau^2} + x_2 + X_2\,(x_0,\,x_1) = 0, \tag{34c}$$

wobei X_2 die Bedeutung des Ausdrucks

$$\left.\begin{aligned} X_2 = \varepsilon_4 \frac{d^4}{d\tau^4} [4\varrho_1 x_1 + (4\varrho_2 + 6\varrho_1) x_0] + \varepsilon_3 \frac{d^3}{d\tau^3} (x_1 D_0' + 3\varrho_1 D_0) \\ + \frac{d^2}{d\tau^2} [x_1 (C_0' + 2\varrho_1) + (2\varrho_2 + \varrho_1^2) x_0 + 2\varrho_1 C_0] \\ + \frac{d}{d\tau} (x_1 B_0' + \varrho_1 B_0) + x_1 A_0' \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

besitzt. Führen wir die Rechnung in der Folge unter den Voraussetzungen $A(x) = C(x) = 0, D = x$ durch, so verschwindet ϱ_1, X_2 reduziert sich auf

$$\left.\begin{aligned} X_2 = 4\varepsilon_4 \varrho_2 \frac{d^4 x_0}{d\tau^4} + \varepsilon_3 \frac{d^3 x_1}{d\tau^3} + 2\varrho_2 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau} (x_1 B_0') \\ = \mathfrak{M} \sum_{n=1}^{\infty} (X_n^{(2)} e^{in\omega\tau} + X_{-n}^{(2)} e^{-in\omega\tau}) \end{aligned}\right\} \tag{42'}$$

und x_n' wird allgemein

$$x_n' = -\frac{i n \omega b_n}{\varepsilon^4 n^4 \omega^4 - n^2 \omega^2 + 1} . \tag{41a}$$

Die Entwicklung von B_0' in eine Fourierreihe

$$B_0' = b_0' + \sum_{n=1}^{\infty} b_n' (e^{in\omega\tau} + (-1)^{n-1} e^{-in\omega\tau}) \tag{43}$$

geht aus derjenigen von B_0 durch Ersatz aller in den Ausdrücken von b_n enthaltenen Koeffizienten β_n durch $(n+1)\beta_{n+1}$ hervor. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} b_0' &= \beta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!\,n!} \beta_{2n+1} \mathfrak{M}^{2n} = \beta_1 + \tfrac{3}{2}\beta_3 M^2 + \tfrac{15}{8}\beta_5 M^4 + \cdots \\ b_1' &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!} \beta_{2n} \mathfrak{M}^{2n-1} = \frac{M}{i} (\beta_2 + \tfrac{3}{2}\beta_4 M^2 + \cdots) \\ b_2' &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,(n-1)!} \beta_{2n+1} \mathfrak{M}^{2n} = -M^2 (\tfrac{3}{4}\beta_3 + \tfrac{5}{8}\beta_5 M^2 + \ldots) \\ b_{2n-1}' &= \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n-m} \frac{(2n)!}{(n+m-1)!\,(n-m)!} \beta_{2n} \mathfrak{M}^{2n-1} \\ b_{2n}' &= \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n-m} \frac{(2n+1)!}{(n+m)!\,(n-m)!} \beta_{2n+1} \mathfrak{M}^{2n} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$\text{und } b_{n-1}' + b_{n+1}' = n b_n . \tag{44a}$$

Dann nehmen die Koeffizienten von X_1 die einfachere Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
X'_{\pm 1} &= \pm 4\, \varepsilon_4 \varrho_1 \omega^4 + i \varepsilon_3 \omega^3 \mp 2\, \varrho_1 \omega^2 + i \omega b_1 \\
X'_{2n-1} &= X'_{-(2n-1)} = (2\,n-1) i \omega b_{2n-1} \\
X'_{2n} &= -X'_{-2n} = 2\,n i \omega b_{2n} \\
Y'_1 &= -i \varepsilon_3 \omega^3 + i \omega b_1 \\
Y'_{-1} &= 4\, \varepsilon_4 \varrho_1 \omega^4 - 2\, \varrho_1 \omega^2 \text{ usw.}
\end{aligned}\right\} \quad (37')$$

und diejenigen von X_2 werden

$$\left.\begin{aligned}
X^{(2)}_1 &= 4\, \varepsilon_4 \varrho_2 \omega^4 - i \varepsilon_3 \omega^3 x_1' - 2\, \varrho_2 \omega^2 + i \omega q_1 \\
X^{(2)}_{-1} &= -4\, \varepsilon^4 \varrho_2 \omega^4 + i \varepsilon_3 \omega^3 x'_{-1} + 2\, \varrho_2 \omega^2 + i \omega q_{-1} \\
X^{(2)}_{2n-1} &= -i (2\,n-1)^3 \varepsilon_3 \omega^3 x'_{2n-1} + i \omega q_{2n-1} \\
X^{(2)}_{-(2n-1)} &= i (2\,n-1)^3 \varepsilon_3 \omega^3 x'_{-(2n-1)} + i \omega q_{-(2n-1)} \\
X^{(2)}_{2n} &= -8\, i \varepsilon_3 n^3 \omega^3 x'_{2n} + i \omega q_{2n} \\
X^{(2)}_{-2n} &= 8\, i \varepsilon_3 n^3 \omega^3 x'_{-2n} + i \omega_n q_{-2n} \\
&\text{resp.} \\
Y^{(2)}_1 &= i\, \varepsilon_3 \omega^3 \left(\frac{x'_{-1} - x'_1}{2}\right) + i \omega \left(\frac{q_1 + q_{-1}}{2}\right) \\
Y^{(2)}_{-1} &= 4\, \varepsilon_4 \varrho_2 \omega^4 - i \varepsilon_3 \omega^3 \left(\frac{x'_1 + x'_{-1}}{2}\right) - 2\, \varrho_2 \omega^2 + i \omega \left(\frac{q_1 - q_{-1}}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

usw., wobei die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= x_1' b_0' + x'_{-1} b_2' + \sum_2^\infty (-1)^{n-1} x_n' (b'_{n-1} + b'_{n+1}) \\
&= x_1' b_0' + x'_{-1} b_2' + \sum_2^\infty (-1)^{n-1} n\, x_n' b_n \\
q_{-1} &= -[x'_{-1} b_0' + x_1' b_2' + \sum_2^\infty (-1)^{n-1} x_n' (b'_{n-1} + b'_{n+1})] \\
&= -[(x'_1 b_0' + x_1' b_2' + \sum_2^\infty (-1)^{n-1} x_n' b_n)] \\
q_{2m-1} &= (2\,m-1) [x_1' b'_{2m-2} + x'_{-1} b'_{2m} \\
&\quad + \sum_{n=2}^\infty (-1)^{n-1} x_n' (b'_{n-2m+1} + b'_{2m+n-1})] \\
q_{-(2m-1)} &= -(2\,m-1) [x'_{-1} b'_{2m-2} + x_1' b'_{2m} \\
&\quad + \sum_{n=2}^\infty (-1)^{n-1} x_n' (b'_{n-2m+1} + b'_{2m+n-1})] \\
q_{2m} &= 2m [x_1' b'_{2m-1} + x'_{-1} b'_{2m+1} + \sum_{n=2}^\infty (-1)^n x_n' (b'_{n-2m} - b'_{2m+n})] \\
q_{-2m} &= -2m [x'_{-1} b'_{2m-1} + x_1' b'_{2m+1} + \sum_{n=2}^\infty (-1)^n x_n' (b'_{n-2m} - b'_{2m+n})]
\end{aligned}\right\} \quad (45a)$$

Verwendung fanden.

Damit auch x_2 eine periodische Lösung ist, muss

$$Y_1^{(2)} = Y_{-1}^{(2)} = 0 \tag{46}$$

sein. Aus

$$Y_1^{(2)} = i\,\varepsilon_3\,\omega^3 \left(\frac{x'_{-1} - x_1'}{2}\right) + \frac{i\,\omega}{2}\,(x_1' - x'_{-1})\,(b_0' - b_2') = 0 \tag{46a}$$

folgt, wenn man bedenkt, dass $i\,\varepsilon_3\,\omega^3 = i\,\omega\,b_1$ (s. Formel (38)) ist,

$$x_1' = x'_{-1} \tag{47a}$$

und damit

$$q_1' = -\,q'_{-1} \tag{47b}$$

und aus $Y_1^{(2)} = 0$ ergibt sich für

$$\left.\begin{aligned} \varrho_2 &= -\frac{i\,\omega}{4\,\varepsilon_4\,\omega^4 - 2\,\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\, n\, x_n'\, b_n \\ &= \frac{1}{4\,\varepsilon_4\,\omega^4 - 2\,\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2\,\omega^2\,b_n^2}{\varepsilon_4\,n^4\,\omega^4 - n^2\,\omega^2 + 1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Bestimmen wir endlich noch die Integrationskonstante x_1' so, dass für $\tau = 0$ auch $x_1 = 0$ ist, so findet man

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= +\,x'_{-1} = -\sum_{n=2}^{\infty} x'_{2n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X'_{2n-1}}{\varepsilon_4\,n^4\,\omega^4 - n^2\,\omega^2 + 1} \\ &= i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2\,n-1)\,\omega\,b_{2n-1}}{\varepsilon_4\,n^4\,\omega^4 - n^2\,\omega^2 + 1} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

und die Lösung der ersten Näherung wird

$$\left.\begin{aligned} x_1 = M \Bigg[& i \sum_{n=1}^{\infty} x'_{2n+1} \cos \omega\tau + \sum_{n=1}^{\infty} x'_{2n} \sin 2\,n\,\omega\tau \\ & - i \sum_{n=1}^{\infty} x'_{2n+1} \cos (2\,n+1)\,\omega\tau \Bigg]\,. \end{aligned}\right\} \tag{41'}$$

Diejenige der folgenden Näherung lautet

$$x_2 = \mathfrak{M} \left[x_1^{(2)}\, e^{i\,\omega\,\tau} + x_{-1}^{(2)}\, e^{-i\,\omega\,\tau} + \sum_{2}^{\infty} \left(x_n^{(2)}\, e^{i\,n\,\omega\,\tau} + x_{-n}^{(2)}\, e^{-i\,n\,\omega\,\tau} \right) \right],$$

wobei allgemein

$$x_n^{(2)} = -\frac{X_n^{(2)}}{\varepsilon_4\,n^4\,\omega^4 - n^2\,\omega^2 + 1}$$

ist. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten $x_1^{(2)}$, $x_{-1}^{(2)}$ benötigt man wieder die Differentialgleichung der nächsten, also der dritten Näherung

$$\varepsilon_4 \frac{d^4 x_3}{d\tau^3} + \frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + x_3 + X_3(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

insbesondere die Ausdrücke für $X_1^{(3)}$, $X_{-1}^{(3)}$. Bei deren Nullsetzung ergibt sich ϱ_3 und eine Bedingungsgleichung für die beiden Integrationskonstanten; eine weitere erhält man aus der Anfangsbedingung $x_2 = 0$ für den Zeitmoment $\tau = 0$. In dieser Weise fortfahrend lassen sich beliebig viele Ergänzungslösungen x_m berechnen.

c) *Ableitung der Periodizitäts- und Stabilitätsbedingungen.*

Im Anschluss an die im vorigen angegebenen Schwingungslösungen sei dieser Abschnitt, neben einer nochmaligen Ableitung der Periodizitätsbedingungen, im wesentlichen der Stabilitätsuntersuchung dieser möglichen Schwingungen gewidmet; und zwar werde die Aufgabe zuerst für ein System mit einem Freiheitsgrad (Differentialgleichung zweiter Ordnung) und darauf für ein solches mit zwei Freiheitsgraden (Differentialgleichung vierter Ordnung) auf einem etwas andern als dem von van der Pol[4]) angegebenem Wege gelöst.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \mu \frac{d B(x)}{d\tau} + x + \mu A(x) = 0 \tag{50}$$

bildet, wie schon erwähnt, einen Spezialfall des Systems

$$\frac{dx}{d\tau} = y + \mu f(x, y, \mu), \qquad \frac{dy}{d\tau} = -x + \mu g(x, y, \mu)$$

(f und g Potenzreihen von x, y und μ), in dem $f = 0$ und

$$g = -\left(\frac{dB}{d\tau} + A\right)$$

ist. Bedenkt man, dass

$$\frac{1}{2}\frac{d(x^2 + y^2)}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{dz^2}{d\tau} = \mu[yg(x, y, \mu) + x f(x, y, \mu)]$$

und dass für einen periodischen Vorgang die Änderung Δz nach einem Umlauf verschwinden muss, so lautet die Stationäritätsbedingung

$$z \Delta z = \mu \int_0^{2\pi} [y g(x, y, \mu) + x f(x, y, \mu)] \, d\tau = 0.$$

Diese Formel geht, wenn man bedenkt, dass für $\mu = 0$

$$x = x_0 = M \sin \tau, \qquad y = y_0 = M \cos \tau, \qquad z = M$$

wird, in erster Näherung in

$$\Delta M = \int_0^{2\pi} [g(M \sin \tau, M \cos \tau, 0) \cos \tau + f(M \sin \tau, M \cos \tau, 0) \sin \tau] \, d\tau = 0 \tag{51}$$

oder in unserm speziellen Fall in

$$\int_0^{2\pi} g(M \sin \tau, M \cos \tau, 0) \cos \tau \, d\tau = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{d B(x_0)}{d\tau} + A(x_0) \right) \cos \tau \, d\tau = 0 \tag{51a}$$

über. Die Wurzeln dieser Potenzreihe entsprechen möglichen stationären Schwingungen.

Ebenso einfach lässt sich die Stabilitätsbedingung formulieren. Aus

$$\delta M \Delta M \sim M \Delta \delta M = \mu \delta \int_0^{2\pi} [y g + x f] \, d\tau$$

folgt mit dem gleichen Grade der Annäherung

$$\Delta \delta M = \mu \delta M \int_0^{2\pi} \left[\cos \tau \sin \tau \frac{\partial g(x_0, y_0, 0)}{\partial x_0} + \cos^2 \tau \frac{\partial g(x_0, y_0, 0)}{\partial y_0} + \sin^2 \tau \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sin \tau \cos \tau \frac{\partial f}{\partial y_0} \right] d\tau ,$$

und dieser Ausdruck nimmt bei Verwendung der Beziehungen

$$\int_0^{2\pi} f(x_0, y_0, 0) \sin \tau \, d\tau = -f \cos \tau \Big/_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos \tau \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{d x_0}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial y_0} \frac{d y_0}{d\tau} \right) d\tau$$

$$= M \int_0^{2\pi} \left(\cos \tau \sin \tau \frac{\partial f_0}{\partial x_0} - \cos^2 \tau \frac{\partial f_0}{\partial y_0} \right) d\tau = 0$$

$$\int_0^{2\pi} g(x_0, y_0, 0) \cos \tau \, d\tau = -M \int_0^{2\pi} \left(\sin \tau \cos \tau \frac{\delta g_0}{\partial x_0} - \sin^2 \tau \frac{\partial g_0}{\partial y_0} \right) d\tau = 0$$

die einfache Gestalt

$$\frac{\Delta\,\partial M}{\delta M} = \mu \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g(x_0, y_0, 0)}{\partial y_0} + \frac{\partial f(x_0, y_0, 0)}{\partial x_0} \right) d\tau < 0 \tag{52}$$

an. In expliziter Schreibweise lautet für die Schwingungsgleichung (50) die Periodizitätsbedingung (im Falle positiver μ):

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x_0, y_0, 0)\cos\tau\, d\tau \\ &= \frac{M}{8\pi}\int_0^{2\pi} (e^{i\tau}+e^{-i\tau})^2\,[b_0'+b_1'(e^{i\tau}-e^{-i\tau})+b_2'(e^{2i\tau}+e^{-2i\tau})+\cdots]\, d\tau \\ &= \frac{M}{2}(b_0'+b_2') = \frac{M}{2}b_1 = \frac{M}{2}(\beta_1+\frac{3\beta_3}{4}M^2+\frac{5\beta_5}{8}M^4+\cdots) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{51b}$$

und die Stabilitätsbedingung

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta g(x_0, y_0, 0)}{\partial y_0}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\frac{dB(x_0)}{dx_0}\, d\tau \\ &\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[b_0' + b_1'(e^{i\tau}-e^{-i\tau})+\cdots]\, d\tau = b_0' \\ &\quad = \beta_1 + \frac{3}{2}\beta_3' M^2 + \frac{15}{8}\beta_5 M^4 + \ldots > 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{52b}$$

Beschränkt man sich auf die beiden ersten Terme, so ergeben sich die beiden möglichen Amplitudenwerte

$$M_0 = 0\,, \qquad M_1^2 = -\frac{4}{3}\frac{\beta_1}{\beta_3}\,. \tag{51c}$$

Zieht man die Stabilitätsbedingungen heran, so zeigt sich, dass die der ersten Lösung entsprechende stationäre Strömung nur für positives β_1 verwirklicht werden kann, während für den Eintritt einer Schwingung mit endlicher Amplitude M_1 die beiden Bedingungen

$$\beta_1 < 0 \qquad \text{und} \qquad \beta_3 > 0 \tag{52c}$$

erfüllt sein müssen.

Interessantere Verhältnisse treten bei Hinzunahme eines weiteren Dämpfungsfaktors β_5 ein. Wie schon APPLETON und VAN DER POL[3]) gezeigt, stellen dann die Lösungen

$$M_0 = 0\,, \quad M_1^2 = -P + \sqrt{P^2 - Q}\,, \quad M_2^2 = -P - \sqrt{P^2 - Q}, \tag{51d}$$

wo

$$P = \frac{3}{5} \frac{\beta_3}{\beta_5} \qquad Q = \frac{8}{5} \frac{\beta_1}{\beta_5}$$

bedeutet, mögliche Amplitudenwerte dar. Die Stabilitätsbedingungen lauten für

$$\left.\begin{array}{ll} M_0: & \beta_1 > 0 \\ M_1: & \beta_5 M_1^2 > 0 \\ M_2: & \beta_5 M_2^2 < 0\,. \end{array}\right\} \qquad (52\,\mathrm{d})$$

Eine vollständige Tabelle aller Möglichkeiten findet sich an der genannten Stelle der van der Pol'schen Arbeit. Darnach entsprechen nur folgende Kombinationen möglichen und zugleich stabilen stationären Strömungs- resp. Schwingungsvorgängen:

$$\begin{array}{lll} M_0 = 0 & \text{für} & \beta_1 > 0 \\ M_1^2 > 0 & ,, & \beta_5 > 0 \ \text{(abgesehen von der Kombination} \\ & & \qquad \beta_1 > 0,\, \beta_3 > 0,\, \beta_5 > 0) \\ M_2^2 > 0 & ,, & \beta_5 < 0,\ \beta_3 > 0,\ \ \beta_1 < 0. \end{array}$$

Das stärkste Interesse beansprucht der Fall $\beta_5 > 0$, $\beta_3 < 0$, $\beta_1 > 0$, wo die beiden Amplitudenwerte M_0 und M_1 zugleich möglich und stabil sind. Unter diesen Umständen kann wegen der positiven Anfangsteilheit $\beta_1 > 0$ die Schwingung nicht automatisch auftreten. Erst wenn das System durch einen äussern Anstoss in das Gebiet negativen Widerstandes gebracht worden ist, setzen Schwingungen ein, die dann ohne weiteres Zutun erhalten bleiben.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch auf ein System mit 2 Freiheitsgraden ausdehnen. Die notwendige Bedingung für das Bestehen stationärer Schwingungen im Falle der Gültigkeit der Kreisgleichung vierter Ordnung

$$\varepsilon_4 \frac{d^4 x}{d\tau^4} + \mu \varepsilon_3 \frac{d^3 x}{d\tau^3} + \varepsilon_2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \mu \frac{d B}{d\tau} + x + \mu A = 0 \qquad (53)$$

lässt sich aber einfacher auf die folgende, von APPLETON und VAN DER POL[3]) auf die Gleichung zweiter Ordnung angewendete Weise ableiten. Man mache den Lösungsansatz:

$$x = M_1 \sin \omega_1 t + M_2 \sin \omega_2 t,$$

wo M_1 und M_2 Funktionen von t bedeuten, und beschränke sich in den sukzessiven Ableitungen von x jeweilen auf die erste Ableitung von M_1 und M_2; die nichtlinearen Glieder der Differentialgleichung denke man sich in eine mehrfache Fourierreihe entwickelt, wobei nur die ersten Glieder Berücksichtigung finden mögen:

$$g(t) = \frac{dB}{dt} + A = \frac{2}{T} \sin \omega_1 t \int_0^T g(t) \sin \omega_1 t\, dt$$
$$+ \frac{2}{T} \cos \omega_1 t \int_0^T g(t) \cos \omega_1 t\, dt + \frac{2}{T} \sin \omega_2 t \int_0^T g(t) \sin \omega_2 t\, dt$$
$$+ \frac{2}{T} \cos \omega_2 t \int_0^T g(t) \cos \omega_2 t\, dt$$

und T die Dauer einer Quasiperiode der bedingt periodischen Funktion (gt) sei. Nach der Substitution dieser Ausdrücke in die Schwingungsgleichung müssen die vier mit den Faktoren $\sin \omega_1 t$, $\cos \omega_1 t$ resp. $\sin \omega_2 t$, $\cos \omega_2 t$ multiplizierten Terme für sich verschwinden.

$$\left.\begin{aligned}
&M_1 (\varepsilon_4 \omega_1^4 - \varepsilon_2 \omega_1^2 + 1) - 3 \mu \varepsilon_3 \omega_1^2 \frac{dM_1}{dt} + \frac{2}{T} \mu \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} + A\right) \sin \omega_1 t\, dt = 0 \\
&M_2 (\varepsilon_4 \omega_2^4 - \varepsilon_2 \omega_2^2 + 1) - 3 \mu \varepsilon_3 \omega_2^2 \frac{dM_2}{dt} + \frac{2}{T} \mu \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} + A\right) \sin \omega_2 t\, dt = 0 \\
&\frac{dM_1}{dt} (-4 \varepsilon_4 \omega_1^3 + 2 \varepsilon_2 \omega_1) - \mu \varepsilon_3 \omega_1^2 M_1 + \frac{2}{T} \mu \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} + A\right) \cos \omega_1 t\, dt = 0 \\
&\frac{dM_2}{dt} (-4 \varepsilon_4 \omega_2^3 + 2 \varepsilon_2 \omega_2) - \mu \varepsilon_3 \omega_2^2 M_2 + \frac{2}{T} \mu \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} + A\right) \cos \omega_2 t\, dt = 0
\end{aligned}\right\}$$

Berücksichtigt man, dass bei der über eine Quasiperiode erstreckten Integration alle trigonometrischen Funktionen verschwinden und jeweilen nur das Glied a_{ω_1} resp. a_{ω_2}, b_{ω_1}, b_{ω_2} übrig bleibt, vernachlässigt in den beiden ersten Gleichungen dM_1/dt resp. dM_2/dt und multipliziert die beiden letzten Gleichungen mit M_1 resp. M_2, dann ergibt das erste Gleichungspaar die Frequenzbedingungen

$$\left.\begin{aligned}
&M_1(\varepsilon_4 \omega_1^4 - \varepsilon_2 \omega_1^2 + 1) + 2 i \mu a_{\omega_1} \\
&\qquad \equiv M_1[\varepsilon_4 \omega_1^4 - \varepsilon_2 \omega_1^2 + 1 + \tfrac{3}{4} \mu \alpha_3 (M_1^2 + 2 M_2^2) + \cdots] = 0 \\
&M_2(\varepsilon_4 \omega_2^4 - \varepsilon_2 \omega_2^2 + 1) + 2 i \mu a_{\omega_2} \\
&\qquad \equiv M_2[\varepsilon_4 \omega_2^4 - \varepsilon_2 \omega_2^2 + 1 + \tfrac{3}{4} \mu \alpha_3 (M_2^2 + 2 M_1^2) + \cdots] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

und das zweite die Periodizitätsbedingungen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d M_1^2}{d t}(-2\varepsilon_4\omega_1^2+\varepsilon_2)= \\
&\qquad -M_1^2\mu(-\varepsilon_3\omega_1^2+\beta_1+\tfrac{3}{4}\beta_3(M_1^2+2M_2^2)+\cdots)=0 \\
&\frac{d M_2^2}{d t}(-2\varepsilon_4\omega_2^2+\varepsilon_2)= \\
&\qquad -M_2^2\mu(-\varepsilon_3\omega_2^2+\beta_1+\tfrac{3}{4}\beta_3(M_2^2+2M_1^2)+\ldots)=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Zur Ableitung der Stabilitätsbedingungen erteile man[4]) M_1^2 und M_2^2 die kleinen Änderungen δM_1^2 und δM_2^2; dann erhält man die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}(\delta M_1^2)=P_1\delta M_1^2+Q_1\delta M_2^2 \qquad \frac{d}{dt}(\delta M_2^2)=P_2\delta M_2^2+Q_2\delta M_1^2,$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
P_1&=\frac{\mu(\beta_1-\varepsilon_3\omega_1^2)-\frac{3}{2}\mu\beta_3(M_1^2+M_2^2)+\cdots}{-2\varepsilon_4\omega_1^2+\varepsilon_2} \\
P_2&=\frac{\mu(\beta_1-\varepsilon_3\omega_2^2)-\frac{3}{2}\mu\beta_3(M_1^2+M_2^2)+\cdots}{-2\varepsilon_4\omega_2^2+\varepsilon_2} \\
Q_1&=\frac{\frac{3}{2}\mu\beta_3 M_1^2}{-2\varepsilon_4\omega_1^2+\varepsilon_2} \qquad Q_2=\frac{\frac{3}{2}\mu\beta_3 M_2^2+\cdots}{-2\varepsilon_4\omega_2^2+\varepsilon_2}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (56a)$$

Deren Lösungen haben die Form $\delta M^2 = M_0 e^{kt}$, wobei k der charakteristischen Gleichung

$$k^2-k(P_1+P_2)+(P_1P_2-Q_1Q_2)=0$$

genügt. Damit die Schwingungen stabil sind, müssen die k negativ, d. h. es muss

$$-(P_1+P_2)>0\,, \qquad P_1P_2-Q_1Q_2>0 \qquad (56)$$

sein. Begnügen wir uns mit den beiden explizit hingeschriebenen Gliedern von b_{ω_1} und b_{ω_2}, setzen also nur $\beta_1 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$, dann werden die Bedingungen für einen stationären Vorgang:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d M_1^2}{d t}&=K_1M_1^2(M_{10}^2-M_1^2-2M_2^2)=0 \\
\frac{d M_2^2}{d t}&=K_2M_2^2(M_{20}^2-M_2^2-2M_1^2)=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (55')$$

wo

$$K_1=\frac{\frac{3\mu\beta_3}{4}}{-2\varepsilon_4\omega_1^2+\varepsilon_2} \qquad K_2=\frac{\frac{3\mu\beta_3}{4}}{-2\varepsilon_4\omega_2^2+\varepsilon_2} \qquad (55a')$$

und

$$M_{10}^2 = \frac{4}{3\beta_3}(\varepsilon_3\,\omega_1^2 - \beta_1)\,, \quad M_{20}^2 = \frac{4}{3\beta_3}(\varepsilon_3\,\omega_2^2 - \beta_1)\,. \qquad (55\text{b}')$$

Ist weiterhin $a_{\omega_1} = a_{\omega_2} = a_{m\omega_1 + n\omega_2} = 0$, dann genügen ω_1^2 und ω_2^2 derselben Gleichung $\varepsilon_4\,\omega^4 - \varepsilon_2\,\omega^2 + 1 = 0$ mit den beiden Wurzeln

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\varepsilon_2}{2\,\varepsilon_4}\left(1 \mp \sqrt{1 - 4\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2^2}}\right), \qquad \omega_1^2 < \omega_2^2$$

und es wird

$$\frac{d}{dt}\,\delta M_1^2 = K_1\{[M_{10}^2 - 2(M_1^2 + M_2^2)]\,\delta M_1^2 - 2\,M_1^2\,\delta M_2^2\}$$

$$\frac{d}{dt}\,\delta M_2^2 = K_2\{[M_{20}^2 - 2(M_1^2 + M_2^2)]\,\delta M_2^2 - 2\,M_2^2\,\delta M_1^2\}$$

und

$$K_1 = \tfrac{3}{4}\frac{\mu\,\beta_3}{\varepsilon_4(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\,, \qquad K_2 = \tfrac{3}{4}\frac{\mu\,\beta_3}{\varepsilon_4(\omega_1^2 - \omega_2^2)} = -K_1. \qquad (55\text{a}'')$$

Aus (55) geht hervor, dass stationäre Zustände in den folgenden vier Fällen möglich sind:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & M_1^2 = M_2^2 = 0 & \\ 2) & M_1^2 = \frac{1}{3}(2\,M_{20}^2 - M_{10}^2)\,, & M_2^2 = \frac{1}{3}(2\,M_{10}^2 - M_{20}^2) \\ 3) & M_1^2 = M_{10}^2\,, & M_2^2 = 0 \\ 4) & M_2^2 = M_{20}^2\,, & M_1^2 = 0. \end{array}\right\} \quad (57)$$

Die Stabilitätsbedingungen (56) mit den Faktoren

$$\left.\begin{array}{ll} P_1 = K_1[M_{10}^2 - 2(M_1^2 + M_2^2)], & Q_1 = -2\,K_1\,M_1^2 \\ P_2 = K_2[M_{20}^2 - 2(M_1^2 + M_2^2)], & Q_2 = -2\,K_1\,M_2^2 \end{array}\right\} (56\text{a}')$$

entscheiden dann über den tatsächlichen Eintritt des einen oder andern Schwingungsfalles.

Fall 1: $M_1^2 = M_2^2 = 0$.

Hier ist $P_1 = K_1\,M_{10}^2$, $P_2 = K_2\,M_{20}^2$, $Q_1 = Q_2 = 0$ und die Ungleichungen lauten einfach

$$-(K_1\,M_{10}^2 + K_2\,M_{20}^2) > 0 \qquad K_1 K_2\,M_{10}^2\,M_{20}^2 > 0.$$

Aus der zweiten Bedingung folgt, dass der Gleichstromzustand stabil ist, wenn $K_1\,M_{10}^2$ und $K_2\,M_{20}^2$ dasselbe Vorzeichen besitzen, und aus der ersten Ungleichung, dass dieses das negative sein muss; d. h. es muss gleichzeitig

$$\frac{\varepsilon_3\,\omega_1^2 - \beta_1}{\varepsilon_4(\omega_2^2 - \omega_1^2)} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon_3\,\omega_2^2 - \beta_1}{\varepsilon_4(\omega_1^2 - \omega_2^2)} < 0$$

sein, woraus sich für β_1 die Ungleichung $\varepsilon_3\,\omega_2^2 > \beta_1 > \varepsilon_3\,\omega_1^2 > 0$ ergibt, während das Vorzeichen von β_3 ohne Einfluss auf die Stabilität bleibt.

Fall 2: $M_1^2 = \frac{1}{3}\,(2\,M_{20}^2 - M_{10}^2)$, $\qquad M_2^2 = \frac{1}{3}\,(2\,M_{10}^2 - M_{20}^2)$.
Die einzigen möglichen Werte von M_{10} und M_{20}, welche positive Beträge von M_1^2 und M_2^2 zur Folge haben, genügen den Ungleichungen

$$2\,M_{10}^2 > M_{20}^2 > \frac{M_{10}^2}{2}, \text{ resp. } 2\,M_{20}^2 > M_{10}^2 > \frac{M_{20}^2}{2}.$$

Bei der Aufstellung der Stabilitätsbedingungen sind die beiden Unterfälle $K_1 \gtrless 0$, d. h. $\beta_3 \gtrless 0$ zu unterscheiden:

a) $K_1 > 0$, $\beta_3 > 0$:
Stabilitätsbedingungen $2\,M_{10}^2 > M_{20}^2 > M_{10}^2$ resp.

$$M_{20}^2 > M_{10}^2 > \frac{M_{20}^2}{2},$$

oder damit gleichbedeutend $\beta_3 > 0$, $\beta_1 < \varepsilon_3(2\,\omega_1^2 - \omega_2^2)$.

b) $K_1 < 0$, $\beta_3 < 0$:
Stabilitätsbedingungen

$$M_{10}^2 > M_{20}^2 > \frac{M_{10}^2}{2}, \text{ resp. } 2\,M_{20}^2 > M_{10}^2 > M_{20}^2,$$

woraus folgt $\beta_3 < 0$, $\beta_1 < \varepsilon_3(2\,\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Fall 3: $M_2^2 = 0$, $\qquad M_1^2 = M_{10}^2 \equiv \dfrac{4}{3\,\beta_3}\,(\varepsilon_3\,\omega_1^2 - \beta_1) > 0$.

Daraus ergeben sich die möglichen Fälle

a) $K_1 > 0$, $\beta_3 > 0$, $\beta_1 < \varepsilon_3\,\omega_1^2$
b) $K_1 < 0$, $\beta_3 < 0$, $\beta_1 > \varepsilon_3\,\omega_1^2$.

Davon ist nur der Fall $K_1 > 0$, $\beta_3 > 0$ in dem durch die Ungleichung

$M_{20}^2 > 2\,M_{10}^2 > 0$, resp. $\beta_3 > 0$, $\varepsilon_3\,\omega_1^2 > \beta_1 > \varepsilon_3(2\,\omega_1^2 - \omega_2^2)$

beschränkten Gebiet stabil.

Fall 4: $M_1^2 = 0$, $\qquad M_2^2 = M_{20}^2 \equiv \dfrac{4}{3\,\beta_3}\,(\varepsilon_3\,\omega_2^2 - \beta_1) > 0$.

Mögliche Fälle:

a) $K_1 > 0$, $\beta_3 > 0$, $\quad \beta_1 < \varepsilon_3\,\omega_2^2$
b) $K_1 < 0$, $\beta_3 < 0$, $\quad \beta_1 > \varepsilon_3\,\omega_2^2$.

Stabil ist der durch die Ungleichungen $K_1 < 0$, $\beta_3 < 0$, $M_{10}^2 > 2\,M_{20}^2$ charakterisierte Fall im Bereich

$$M_{10}^2 > 2\,M_{20}^2 > 0, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon_3\,\omega_2^2 < \beta_1 < \varepsilon_3(2\,\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

Die beiden Fälle $\beta_3 \gtrless 0$ entsprechen zwei verschiedenen Klassen von schwingenden Organen, wobei die erste z. B. durch passend geschaltete Elektronenröhren und die zweite durch den Lichtbogen repräsentiert wird [20] [21]. Da bei der von uns untersuchten Anordnung $\beta_3 > 0$ ist, wollen wir uns vorwiegend auf die Diskussion dieses Falles beschränken. Die genauere Prüfung der obigen Resultate ergibt, dass die Stabilitätsbedingungen der niederfrequenten ω_1-Schwingung die für Röhrenschwingungen typische Form zeigen, während diejenigen der hochfrequenten, durch die Kreisfrequenz ω_2 charakterisierten Schwingung vielmehr einer Lichtbogenschaltung zuzugehören scheinen. Dies geht besonders deutlich aus der Vergleichung der Periodizitätsfälle (3) und (4) hervor. Darnach ist für $\beta_3 > 0$ (Röhre) nur die ω_1-Schwingung stabil, während für $\beta_3 < 0$ (Lichtbogen) nur die ω_2-Schwingung dauernd existieren kann. Dasselbe entgegengesetzte Verhalten der beiden Schwingungen wird auch im Gleichstrom-Fall 1 deutlich, wo die Ungleichung $\beta_1 > \varepsilon_3 \omega_1^2 > 0$ die für Röhrenschwingungen charakteristische Form aufweist, die für $\varepsilon_3 \to 0$ besagt, dass der Gesamtwiderstand der äussern Schaltung kleiner als der negative Widerstand des für den Schwingungsvorgang massgebenden Röhrenabschnittes sein muss, während der zweite Teil der Ungleichung, nämlich $\varepsilon_3 \omega_2^2 > \beta_1$ die für Lichtbogenschwingungen zu erwartende Gestalt besitzt. Allerdings zeigt ein Blick auf den Schwebungsfall 2, dass auch für $\beta_1 > \varepsilon_3 \omega_2^2$ keine Schwingungen möglich sind, da unter diesen Bedingungen R^2 und S_0^2 und damit R^2 und S^2 imaginär werden. Ein anschauliches Bild der Lage und Ausdehnung der verschiedenen Schwingungsgebiete in Abhängigkeit vom Koeffizienten β_1 geben die folgenden beiden Figuren, von denen die erste für positives und die zweite für negatives β_3 gilt.

$\beta_3 > 0$ (Röhrenschwingungen)

$R^2 > 0,\ S^2 > 0$	$S = 0,\ R^2 > 0$	$R = S = 0$	$R^2 < 0,\ S^2 < 0$
Schwebungslösung	**Period. Lösung**	**Gleichstromlösung**	**Imag. Amplituden**

$\beta_1 =$ $\varepsilon_3 (2\,\omega_1^2 - \omega_2^2)$ $\varepsilon_3\, \omega_1^2$ $\varepsilon_3\, \omega_2^2$

$\beta_3 < 0$ (Lichtbogenschwingungen)

$R^2 < 0,\ S^2 < 0$	$R = S = 0$	$R = 0,\ S^2 > 0$	$R^2 > 0,\ S^2 > 0$
Imag. Amplituden	**Gleichstromlösung**	**Period. Lösung**	**Schwebungslösung**

$\beta_1 =$ $\varepsilon_3\, \omega_1^2$ $\varepsilon_3\, \omega_2^2$ $\varepsilon_3 (2\,\omega_2^2 - \omega_1^2)$

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

Literaturverzeichnis.

[1]) VAN DER POL, BALTHASAR jr. Über „Relaxationsschwingungen" I & II. Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie u. Telephonie. Bd. 28, 1926, p. 178—184 und Bd. 29, 1927, p. 114—118.

[2]) VAN DER POL, BALTHASAR jr. Over „Relaxatie-trillingen". Tijdschrift van het Nederlandsch Radiogenootschap. Deel **3**, p. 25—40.

[3]) APPLETON, E. V. und VAN DER POL, BALTHASAR. On a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator. Phil. Mag. Ser. 6, Vol. **43**, 1922, p. 177—193.

[4]) VAN DER POL, BALTHASAR jr. On a oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom. Phil. Mag. Ser. 6, Vol. **43**, p. 700—719.

[5]) APPLETON, E. V. and GREAVES, W. M. H. On the solution of the representative differential equation of the triode oscillator. Phil. Mag. Ser. 6, Vol. **45**, 1923, p. 401—414.

[6]) FRIEDLÄNDER, E. Über Kippschwingungen, insbesondere bei Elektronenröhren. Teil 1, 2. Archiv für Elektrotechnik, Bd. **17**, 1926, p. 1—16 und 103—143; s. a. Bd. **20**, p. 158 ff.

[7]) ABRAHAM, HENRI et BLOCH, EUGÈNE. Mesure en valeur absolue des périodes des oscillations électriques de haute fréquence. Annales de Physique. Sér. 9, Tome **12**, p. 237—302.

[8]) POINCARÉ, HENRI. a) Mémoires sur les courbes définies par une équation différtentielle. Journal de mathématique, Sér. 3, Tome **7**, p. 375—422 (1881), et Tome 8, p. 251—296 (1882).
b) Sur les courbes définies par les équations différentielles. Journal de mathématiques Sér. 4, Tome **2**, p. 151—217 (1886).
c. Ein Abdruck dieser Arbeiten s. Oeuvres de HENRI POINCARÉ. Tome **1**, Paris 1928.

[9]) BENDIXSON, IVAR. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta mathematica. Bd. **24**, 1901, p. 1—88.

[10]) PICARD, EMILE. Traité d'Analyse. Tome **3**, Paris 1896.

[11]) DULAC, HENRI. Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. Journal de l'Ecole polytechnique. Sér. 2, Cahier **9**, 1904, p. 1—125.

[12]) DULAC, HENRI. Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières. Bulletin de la Société mathématique de France. Tome **40**, 1912, p. 324—383. S. daselbst weitere Literatur.

[13]) DULAC, HENRI. Sur les cycles limites. Bulletin d. l. Soc. math. de France. Tome **51**, 1923, p. 45—188.

[14]) PERRON, O. Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung. 1. Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. I, II. Mathemat. Zeitschr. **15**, 1922, p. 121—146 und **16**, 1923, p. 273—295.

[15]) BIEBERBACH, L. Differentialgleichungen. Aufl. **3**, S. 74—113. Berlin: Springer 1930.

[16]) HORN, J. Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit 1 Freiheitsgrad. Zs. f. Mathematik u. Physik. Bd. **47**, 1902, p. 400 ff.

[17]) Poincaré, Henri. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome **I**, p. 79 ff., Paris, 1892.

[18]) Greaves, W. M. H. On a certain family of periodic solutions of differential equations with an application to the triode oscillator. Proceedings of the Royal Society. Ser. A, Vol. **103**, p. 516 ff., London 1923.

[19]) Andronow, A. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues. Comptes Rendus ... Tome **189**, 1929. p. 559–561.

[20]) Barkhausen, A. Elektronenröhren. Bd. **2**, Aufl. 3, p. 114–115.

[21]) Steimel, K. Die Stabilität und die Selbsterregung elektrischer Kreise mit Organen fallender Charakteristik. Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. Bd. **36**, 1930, p. 161–172.