

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 6 (1933)
Heft: I

Artikel: Bemerkung zum Wentzelschen Näherungsverfahren in der relativistischen Dynamik des Elektrons
Autor: Bechert, K.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110265>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bemerkung zum Wentzelschen Näherungsverfahren in der relativistischen Dynamik des Elektrons

von K. Bechert.

(10. I. 33.)

W. PAULI hat kürzlich in dieser Zeitschrift¹⁾ eine Note über „Dirac's Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik“ veröffentlicht. PAULI benutzt dabei die von DIRAC selbst eingeführten vierreihigen Matrizen α^k , β . Es ist aber bequemer und übersichtlicher, wie wir glauben, die von SAUTER²⁾ vorgeschlagene allgemeine Methode der unbestimmten Operatoren γ_l zu benutzen, solange man nur allgemeine Beziehungen der Diracgleichung diskutiert, wie dies in § 2 der Pauli'schen Arbeit geschieht. Die Absicht der vorliegenden Note ist, dies kurz zu zeigen.

§ 1. Einleitung.

Wir erinnern zuerst an einige allgemeine Wahrheiten über die Diracgleichung, die in unserer Bezeichnung lauten soll:

$$(\gamma_l p_l + p_5) \psi = 0. \quad (1)$$

Über zweimal vorkommende Indizes ist zu summieren; $l = 1, 2, 3, 4$. Für die γ_l gilt

$$\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k = 2 \delta_{kl}. \quad (2)$$

Ferner ist

$$p_l = \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{i e}{\hbar c} \Phi_l, \quad p_5 = \frac{\mathcal{E}_0}{\hbar c}; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}; \quad x_l = \{x, y, z, i c t\}. \quad (3)$$

h ist die gewöhnliche Planck'sche Konstante; die ersten drei Komponenten von Φ_l bilden das Vektorpotential; die vierte $\Phi_4 = i \Phi_0$, wo Φ_0 wie bei PAULI das elektrostatische Potential bedeutet. ψ ist für uns eine mit den γ nicht vertauschbare Grösse, für die wir den Sauter'schen Ansatz $\psi = \sum \Gamma_l \psi_l$ gemacht denken können. Die ψ_l sind mit den γ vertauschbar — sie entsprechen den ψ_α bei PAULI —, die Γ_l sind Produkte aus den γ_l , deren Form uns vorläufig nicht kümmern soll.

¹⁾ Vol. V, Heft 3, S. 179 (1932).

²⁾ F. SAUTER, Z. Physik **63**, 803; **64**, 295, 1930.

Die Rechnung mit allgemeinen Operatoren γ_l führt auf dieselben Differentialgleichungen für die ψ , wie das von PAULI benutzte Rechnen mit vierreihigen Matrizen, wenn man die übliche physikalische Deutung der Diracgleichung beibehält¹⁾. Eine Spezialisierung der γ , d. h. ein Ausschreiben der Operatorengleichung (1) in ihre „Komponenten“, wird erst nötig, wenn man die Wellenfunktionen ψ explizit anschreiben will, also ein spezielles Problem vor sich hat. Für die physikalisch wichtigen Größen ist es gleichgültig, wie man die Operatoren γ wählt, wenn sie nur den Gleichungen (2) genügen.

Der Viererstrom des Elektrons folgt aus dem Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial (\bar{\psi} \gamma_l \psi)}{\partial x_l} = \frac{\partial s_l}{\partial x_l} = 0. \quad (4)$$

$\bar{\psi}$ ist die adjungierte Funktion zu ψ ; sie genügt der adjungierten Differentialgleichung:

$$\bar{p}_l \bar{\psi} \gamma_l + p_5 \bar{\psi} = 0 \quad (5)$$

mit

$$\bar{p}_l = -\frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{i e}{\hbar c} \Phi_l. \quad (6)$$

Die Größe s_l enthält bei unserer Rechnung noch Operatoren γ ; sie hängt mit dem (γ -freien) Viererstrom σ_l so zusammen:

$$s_l = 4 A \cdot \sigma_l. \quad (7)$$

A enthält die γ ; in welcher Weise, interessiert uns hier nicht.

§ 2.

Das Wentzel-Brillouin-Kramers-Verfahren, in Operatoren geschrieben.

Wir setzen

$$\psi = a e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (8)$$

wo S wie bei PAULI die klassische Wirkungsfunktion werden soll, also die γ nicht enthalten darf; die γ_l kommen nur in a vor. a wird nach Potenzen von $\frac{\hbar}{i}$ entwickelt:

$$a = a_0 + \frac{\hbar}{i} a_1 + \dots \quad (9)$$

¹⁾ Vgl. K. BECHERT, Z. Physik 79, 26, 1932.

Einsetzen von (8) und (9) in (1) gibt als Näherungsgleichungen:

$$i \pi_l \gamma_l a_0 + m_0 c a_0 = 0 \left(\text{Faktor von } \frac{i}{\hbar} \right) \quad (10a)$$

$$i \pi_l \gamma_l a_1 + m_0 c a_1 = -i \gamma_l \frac{\partial a_0}{\partial x_l} \left(\text{Faktor von } \hbar^0 \right) \quad (10b)$$

$$i \pi_l \gamma_l a_n + m_0 c a_n = -i \gamma_l \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_l} ; \left(\text{Faktor von } \left(\frac{\hbar}{i} \right)^{n-1} \right).$$

Dabei ist

$$\pi_l = \frac{\partial S}{\partial x_l} + \frac{e}{c} \Phi_l \quad (11)$$

gesetzt. Durch linke Multiplikation von (10a) mit $i \pi_l \gamma_l - m_0 c$ erhält man

$$(i \pi_n \gamma_n - m_0 c) (i \pi_l \gamma_l + m_0 c) a_0 = 0 = \left(- \sum_{l=1}^4 \pi_l^2 - m_0^2 c^2 \right) a_0.$$

Die Klammer enthält keine γ mehr, also folgt

$$\sum_l \pi_l^2 + m_0^2 c^2 = 0, \quad (12)$$

das ist die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung der klassischen Mechanik.

Für das Folgende brauchen wir die zu (10) adjungierten Gleichungen. Wir machen den (8) und (9) entsprechenden Ansatz

$$\bar{\psi} = \bar{a} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{S}} \quad (13)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \frac{\hbar}{i} \bar{a}_1 + \dots \quad (14)$$

und erhalten aus (5), wie man ohne Rechnung einsieht:

$$i \bar{\pi}_l \bar{a}_0 \gamma_l + m_0 c \bar{a}_0 = 0 \quad (15a)$$

$$i \bar{\pi}_l \bar{a}_1 \gamma_l + m_0 c \bar{a}_1 = i \frac{\partial \bar{a}_0}{\partial x_l} \gamma_l \quad (15b)$$

mit

$$\bar{\pi}_l = - \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_l} + \frac{e}{c} \bar{\Phi}_l. \quad (16)$$

Als Hamilton-Jacobi-Gleichung folgt aus (15a) (durch rechte Multiplikation mit $i \bar{\pi}_l \gamma_l - m_0 c$):

$$\sum_l \bar{\pi}_l^2 + m_0^2 c^2 = 0. \quad (17)$$

Aus dem Vergleich von (12) mit (17) erkennt man, unter Beachtung von (11) und (16), dass

$$S = -\bar{S} \quad (18)$$

bis auf eine unwesentliche additive Konstante und ferner, dass $\pi_l = \bar{\pi}_l$. Die Lösbarkeitsbedingung für die Gleichungen (10b), (15b) läuft jetzt in unserer Schreibweise auf die triviale Behauptung hinaus: Es gilt für irgendwelche Funktionen \bar{v}, w identisch

$$v \cdot [(i \pi_l \gamma_l + m_0 c) w] \equiv [\bar{v} (i \pi_l \gamma_l + m_0 c)] \cdot w. \quad (19)$$

Die eckige Klammer deutet an, wie wir uns die Faktoren zusammengefasst denken. Wenden wir (19) auf die Gleichung (10b) an mit $\bar{v} = a_0, w = a_1$, so kommt:

$$\bar{a}_0 (i \pi_l \gamma_l + m_0 c) a_1 = -i \bar{a}_0 \gamma_l \frac{\partial a_0}{\partial x_l} = 0, \quad (20)$$

(1. Lösbarkeitsbedingung). Analog aus (15b) mit $\bar{v} = \bar{a}_1, w = a_0$:

$$\bar{a}_1 (i \pi_l \gamma_l + m_0 c) a_0 = i \frac{\partial \bar{a}_0}{\partial x_l} \gamma_l a_0 = 0, \quad (21)$$

(2. Lösbarkeitsbedingung). Subtraktion von Gl. (20) von (21) gibt die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{a}_0 \gamma_l a_0) = 0, \quad (22)$$

die man mit $S = -\bar{S}$ natürlich auch direkt aus (4) als erste Näherung erhalten kann. $\bar{a}_0 \gamma_{1,2,3} a_0$ sind die Stromkomponenten, $a_0 \gamma_4 a_0 \cdot i c$ die Dichte¹⁾.

Den Pauli'schen Satz über das Verhältnis von Strom und Dichte bekommen wir so: Wir multiplizieren (10a) von links mit $\bar{a}_0 \gamma_k \gamma_4$ ($k \neq 4$) und (15a) von links mit $\gamma_4 \gamma_k a_0$, setzen $\pi_l = \bar{\pi}_l$ ein und addieren:

$$i \pi_l a_0 (\gamma_k \gamma_4 \gamma_l + \gamma_l \gamma_4 \gamma_k) a_0 + m_0 c \bar{a}_0 (\gamma_k \gamma_4 + \gamma_4 \gamma_k) a_0 = 0.$$

¹⁾ In den Größen $\bar{a}_0 \gamma_k a_0, \bar{a}_0 \gamma_4 a_0$ stecken, genauer gesagt, noch die Operatoren γ , doch treten sie auch hier, wie überhaupt bei allen Größen der Form γ -freier Operator mal $\bar{\psi}$ mal γ -Operator mal γ -freier Operator mal ψ , in einem gemeinsamen Faktor $4 A$ heraus. Vgl. K. Bechert, l. c.) Man kann also in Gleichung (23) unter den Ausdrücken $\bar{a}_0 \gamma_k a_0, \bar{a}_0 \gamma_4 a_0$ einfach die physikalischen Größen des Stroms und der Dichte $\cdot i c$ verstehen, weil $4 A$ aus (23) herausfällt.

Der zweite Ausdruck ist Null nach (2), weil wir $k \neq 4$ voraussetzen. Im ersten geben die Glieder mit $l = 4$: $2 i \pi_4 \bar{a}_0 \gamma_k a_0$, diejenigen mit $l = k$: $-2 i \pi_k \bar{a}_0 \gamma_4 a_0$, die andern heben sich auf, wegen (2). Es bleibt:

$$\pi_4 \bar{a}_0 \gamma_k a_0 = \pi_k \bar{a}_0 \gamma_4 a_0. \quad (23)$$

Dies ist der von PAULI angegebene Satz, aus dem er unter anderem die Bohr'sche Behauptung bestätigt, dass eine Bestimmung des Spinnmomentes des Elektrons durch klassisch beschreibbare Ablenkungsversuche nicht möglich ist. Die weiteren Überlegungen verlaufen genau wie in der Pauli'schen Arbeit.

Wir wollen die weitere Behandlung nach der Sauter'schen Methode noch kurz skizzieren, obwohl sie für das folgende *spezielle* Problem keine Vorteile gegenüber der Matrizenrechnung bietet. Wenn man genau die Pauli'schen Differentialgleichungen erhalten will, wird man den Ansatz machen (man könnte natürlich irgendeinen anderen auch machen, würde dann aber nicht gerade Pauli's Differentialgleichungen bekommen):

$$a_0 = \sum_{r=1}^{16} \Gamma_r a_{0r}; \quad (24)$$

mit

$$\begin{array}{cccc|cccc} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & \Gamma_5 & \Gamma_6 & \Gamma_7 & \Gamma_8 \\ \hline 1 & \gamma_1 \gamma_3 & -i \gamma_3 & -i \gamma_1 & -i \gamma_1 \gamma_2 & -i \gamma_2 \gamma_3 & -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 & -\gamma_2 \\ \hline \Gamma_9 & \Gamma_{10} & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} \\ \hline \gamma_4 & \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 & -i \gamma_3 \gamma_4 & -i \gamma_1 \gamma_4 & -i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 & -i \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 & -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 & -\gamma_2 \gamma_4 \end{array}$$

Es gilt, wie man leicht sieht (vgl. K. BECHERT, l. c.)

$$\Gamma_j A = \sum_{r=0}^3 \Gamma_{j+4r}, \text{ mit } A = (1 - i \gamma_1 \gamma_2) (1 + \gamma_4); \quad j = 1, \dots, 16. \quad (25)$$

Man darf allgemein setzen (BECHERT, l. c.):

$$a_{0r} = a_{0, r+4} \quad (26)$$

und findet aus (24) und (25):

$$a_0 = \sum_{l=1}^4 \Gamma_l A a_{0l}. \quad (27)$$

Für die adjungierte Funktion \bar{a}_0 und die zugehörigen $\bar{\Gamma}_\nu$ soll gelten:

$$\bar{a}_0 = \sum_{\nu=1}^{16} \bar{\Gamma}_\nu \bar{a}_{0\nu} \quad (28)$$

mit

$$\begin{array}{|c c c c|} \hline \bar{\Gamma}_1 & \bar{\Gamma}_2 & \bar{\Gamma}_3 & \bar{\Gamma}_4 \\ \hline 1 & -\gamma_1 \gamma_3 & -i \gamma_3 & -i \gamma_1 \\ \hline \bar{\Gamma}_9 & \bar{\Gamma}_{10} & \bar{\Gamma}_{11} & \bar{\Gamma}_{12} \\ \hline \gamma_4 & -\gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 & i \gamma_3 \gamma_4 & i \gamma_1 \gamma_4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c c c c|} \hline \bar{\Gamma}_5 & \bar{\Gamma}_6 & \bar{\Gamma}_7 & \bar{\Gamma}_8 \\ \hline -i \gamma_1 \gamma_2 & -i \gamma_2 \gamma_3 & -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_2 \\ \hline \bar{\Gamma}_{13} & \bar{\Gamma}_{14} & \bar{\Gamma}_{15} & \bar{\Gamma}_{16} \\ \hline -i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 & -i \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 & \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 & -\gamma_2 \gamma_4 \\ \hline \end{array}$$

Dann folgt aus $\bar{a}_{0\nu} = \bar{a}_{0,\nu+4}$, wie man leicht bestätigt:

$$\bar{a}_0 = \sum_{l=1}^4 A \bar{\Gamma}_l \bar{a}_{0l}. \quad (29)$$

Die Berechnung des Viererstroms s_l geschieht nach dem vom Verfasser (l. c.) angegebenen allgemeinen Schema:

$$s_l = \bar{a}_0 \gamma_l a_0 = \sum_{k,n=1}^4 A \bar{\Gamma}_k \gamma_l \Gamma_n A \bar{a}_{0k} a_{0n} = 4 A \sigma_l.$$

Es liefern auch hier nur die Glieder einen Beitrag, für die $\bar{\Gamma}_k \gamma_l \Gamma_n = \Gamma_{1,5,9,13}$ ist. So kommt:

$$s_3 = -i(\bar{a}_{01} a_{03} - \bar{a}_{02} a_{04} + a_{03} a_{01} - a_{04} a_{02}); \quad (30)$$

Also hat die Bedingung (20): $\bar{a}_0 \gamma_l \frac{\partial a_0}{\partial x_l} = 0$ die Form $(\frac{\partial}{\partial x_k} = 0$ für $k \neq 3$, wie bei PAULI):

$$\bar{a}_{01} \frac{\partial a_{03}}{\partial x_3} - \bar{a}_{02} \frac{\partial a_{04}}{\partial x_3} + \bar{a}_{03} \frac{\partial a_{01}}{\partial x_3} - \bar{a}_{04} \frac{\partial a_{02}}{\partial x_3} = 0; \quad (31)$$

Bedingung (21): $\frac{\partial \bar{a}_0}{\partial x_l} \gamma_l a_0 = 0$ geht (in ihrer ausgeschriebenen Form) aus (31) durch Vertauschung von \bar{a}_{0i} mit a_{0i} hervor.

Die Gleichung (10a) liefert mit dem Ansatz (27) die Pauli'schen Gleichungen, — so war der Ansatz gerade eingerichtet —, wenn man noch beachtet, dass

$$i \pi_4 = \frac{\partial S}{\partial c t} - \frac{e}{c} \Phi_0 = -\pi_0 \quad (\text{Pauli's Bezeichnung}):$$

$$\begin{aligned} \pi_3 a_{03} + (mc - \pi_0) a_{01} &= 0; \\ \pi_3 a_{01} + (-mc - \pi_0) a_{03} &= 0; \\ \pi_3 a_{04} + (-mc + \pi_0) a_{02} &= 0; \\ \pi_3 a_{02} + (mc + \pi_0) a_{04} &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Für die adjungierten Funktionen gelten dieselben Gleichungen. Dabei braucht man sich hier über die Änderungen, die durch das Imaginärwerden von π_3 eintreten könnten, nicht den Kopf zu zerbrechen. Die adjungierten Gleichungen behalten auf jeden Fall ihre Form bei. Als allgemeine Lösung, die den Bedingungen (20), (21) genügt, findet man

$$\begin{aligned} a_{0v} &= \bar{a}_{0v}; \quad a_{01} = \alpha \sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_0 - mc}}; \quad a_{02} = \beta \sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_0 - mc}}; \\ a_{03} &= \alpha \sqrt{\frac{\pi_0 - mc}{\pi_3}}; \quad a_{04} = -\beta \sqrt{\frac{\pi_0 - mc}{\pi_3}}. \end{aligned} \quad (33)$$

α, β sind willkürliche Konstanten. Die Lösung (33) ist natürlich dieselbe wie bei PAULI.

München, Institut f. theoretische Physik.