

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 5 (1932)

**Heft:** V

**Artikel:** Anwendung der Optik trüber Medien. III., Beleuchtung inhomogener, gekrümmter Schichten : Theorie des Purpurlichtes

**Autor:** Gruner, P.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-110175>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Anwendung der Optik trüber Medien.

### III. Beleuchtung inhomogener, gekrümmter Schichten.

#### Theorie des Purpurlichtes

von P. Gruner.

(7. XI. 32.)

*Inhaltsangabe.* Die früheren Untersuchungen über die Beleuchtung dünner, sphärisch-gekrümmter, trüber Schichten werden erweitert auf dickere, inhomogene Schichten, die selber inhomogen beleuchtet werden. Die hergeleiteten Ausdrücke, die immer nur unter der Annahme bloss primärer Lichtzerstreuung gelten, werden auf das Problem des Purpurlichtes angewendet. Es wird eine einfache Theorie desselben entwickelt und an einem durchgerechneten Beispiel die Brauchbarkeit der Theorie dargetan.

#### 1. Intensität gekrümmter, inhomogener Schichten.

In einer vorangehenden Arbeit<sup>1)</sup> haben wir in den Formeln (13) den Ausdruck für die Intensität des von einer dünnen, homogenen, sphärisch gekrümmten, trüben Schicht gestreuten Sonnenlichtes gegeben. Vorausgesetzt wurde, wie dies auch im folgenden getan wird, dass nur primäre Lichtzerstreuung zu berücksichtigen sei, und dass die Sonnenstrahlen ein Parallelstrahlenbündel bilden, dessen atmosphärische Refraktion zunächst zu vernachlässigen sei.

Im nachfolgenden sollen diese Ausdrücke erweitert werden für den Fall einer dickeren, gekrümmten, *inhomogenen* Schicht, die sich als Summe einzelner, für sich homogener, dünner Schichten auffassen lässt. Auch das einfallende Sonnenlicht soll als *inhomogen* angenommen werden, jedoch so, dass es sich in einzelne, für sich homogene Parallelstrahlenbündel zerlegen lässt. Die folgenden Ausführungen gelten nur für die Ebene des Sonnenvertikals; sie lassen sich ohne grundsätzliche Schwierigkeiten auf räumliche Verhältnisse erweitern.

Die Gesamtschicht von der Dicke  $\Delta H$  (s. Fig. 1a) werde in  $p$  sehr dünne, homogene Schichten von derselben Dicke  $\Delta h = 1/p \cdot \Delta H$  zerlegt; sind gewisse homogene Gebiete der Gesamtschicht dicker als  $\Delta h$ , so werden sie als aus mehreren Einzelschichten gleicher Art zusammengesetzt angesehen.

Eine beliebige, mit dem Index  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, p$ ) bezeichnete Einzelschicht ist physikalisch durch die bekannten Konstanten

<sup>1)</sup> P. GRUNER, Helv. Phys. Acta 5, 145, 1932; wird im folgenden einfach als II bezeichnet.

gekennzeichnet:  $\Gamma_m$  = Zerstreuungsfunktion,  $n_m$  = Zahl der zerstreuenden Teilchen pro Volumeneinheit,  $k_m$  = Auslösungskskoeffizient eines Teilchens,  $\varkappa_m = n_m \cdot k_m$  = Auslösungskskoeffizient pro Längeneinheit. Wir führen ausserdem die Grösse

$$Z_m = \frac{\Gamma_m}{k_m} = \frac{n_m \cdot \Gamma_m}{\varkappa_m} \quad (1)$$

als *Zerstreuungsfaktor* ein.

Für die geometrischen Verhältnisse (s. Figur 1c) gelten folgende Feststellungen.

Das in Betracht kommende einfallende Sonnenlicht sei ein die Erdoberfläche (mit Radius  $R$ ) berührendes Parallelstrahlenbündel mit der vertikalen Breite  $\Delta B$ ; es trifft die zu beleuchtende atmosphärische Schicht von unten. Ein Beobachter  $B$  der Erdoberfläche, für welchen die Sonne die Sonnentiefe  $\delta = Z - 90$  hat, blicke unter einem Höhenwinkel  $\varepsilon = 90 - \zeta$  gegen die beleuchtete Schicht; sein Blickstrahl bildet mit der Richtung der Sonnenstrahlen den *Zerstreuungswinkel*

$$\varphi = \varepsilon + \delta. \quad (2)$$

Das Stück dieses Blickstrahles, das innerhalb des Sonnenstrahlenbündels liegt, bestimmt zwei Grenz-Schichten: die obere „Schluss-Schicht“ mit Index  $s$  und die „untere Schicht“ mit Index  $u$ . Umfasst das Strahlenbündel alle Schichten, so wird  $s = p + 1$ ,  $u = 0$ .

Die Lagen dieser Schichten ergeben sich aus nachstehenden Formeln, die für einen Punkt  $P_m$  auf der obern Grenzfläche der  $m^{\text{ten}}$  Einzelschicht gelten.

Hiebei ist  $h_m$  die Höhe dieses Punktes über der Erdoberfläche  $p_m$  die Breite des Strahlenbündels von unten bis zum Strahl, der durch  $P_m$  geht;  $\Theta$  und  $\gamma$  sind die Winkel der Erdradien durch  $P_m$  und  $B$  mit dem zu den Sonnenstrahlen normalen Radius:

$$\left. \begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{R + p_m}{R + h_m} & \cos \varepsilon &= \frac{R + h_m}{R} \cdot \cos (\varphi - \Theta) \\ \tan \Theta &= \frac{1}{\sin \varphi} \left( \frac{R}{R + p_m} \cos \varepsilon - \cos \varphi \right); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dabei ist

$$\delta = \Theta + \gamma \quad \varphi - \Theta = \varepsilon + \gamma \quad (4)$$

Um die Formel (13) in II anwenden zu können, wird das unterhalb des Punktes  $P_m$  zur Wirkung kommende, gekrümmte Stück der  $m^{\text{ten}}$  Einzelschicht (s. Figur 1a und b) durch ein Dreie-

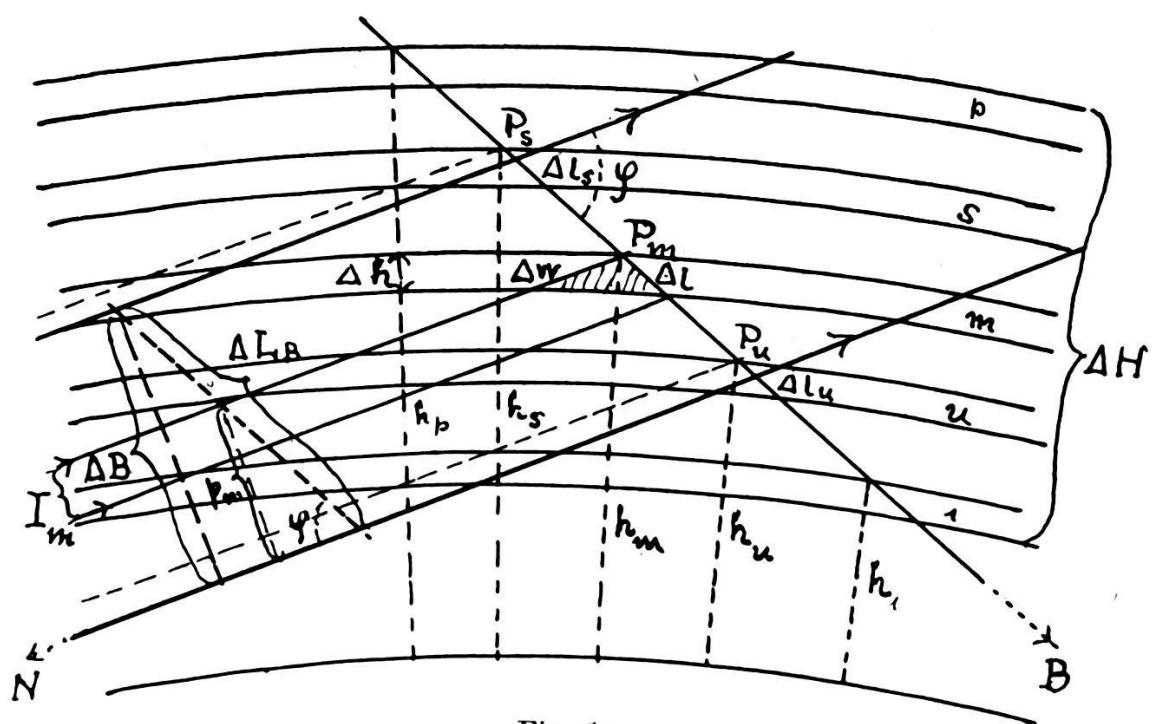


Fig. 1 a.

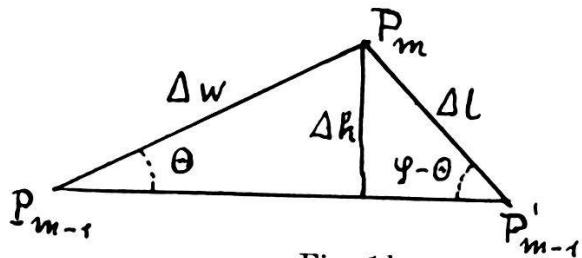


Fig. 1 b.

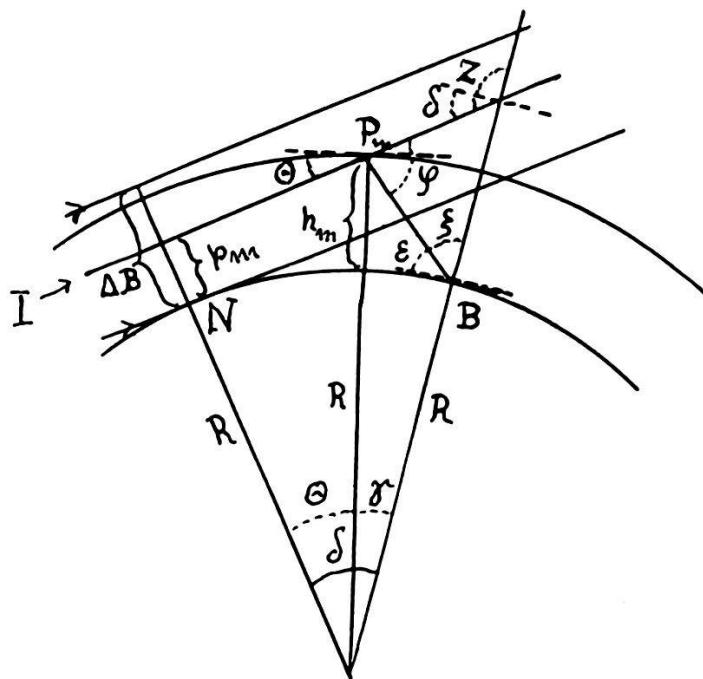


Fig. 1 c.

eck ersetzt, dessen Basis senkrecht zur Höhe  $\Delta h$  steht, und dessen Seiten sich berechnen lassen:

$$\Delta w = \frac{\Delta h}{\sin \Theta} \quad \Delta l = \frac{\Delta h}{\sin (\varphi - \Theta)}, \quad (5)$$

woraus sich der *Durchlässigkeitsfaktor* ergibt:

$$D = \frac{\Delta l}{\Delta l + \Delta w}. \quad (6)$$

Diese Ausdrücke müssten eigentlich für alle Punkte  $P_m$  ( $m = u, u + 1, \dots, s$ ), in denen der Blickstrahl die Grenzflächen der Einzelschichten trifft, besonders berechnet werden, da für jeden ein anderer Wert von  $\Theta$  gilt. — Berücksichtigt man aber die für die Atmosphäre geltenden Verhältnisse (vgl. Figur 2, S. 358), wonach die Dicke  $\Delta H$  der Gesamtschicht immer noch verschwindend ist gegenüber  $R$ , so genügt es, für eine gegebene Blickrichtung einen mittleren Wert von  $\Theta$  anzunehmen (entweder für  $P_s$  oder für  $P_u$ ) und somit alle Dreiecke in den Einzelschichten als gleich vorauszusetzen, mit demselben  $\Delta w$  und  $\Delta l$ .

Nur für die 2 Grenzschichten sind dann diejenigen Teile, die nicht mehr innerhalb des Strahlenbündels liegen, abzuziehen: von der Schlusschicht ist nur das Dreieck mit der Blicklänge  $\Delta l_s = \frac{1}{r_s} \Delta l$  zu berücksichtigen; von der untern Schicht ist das Dreieck mit der Blicklänge  $\Delta l_u = \frac{1}{r_u} \Delta l$  abzuziehen.

Diese Werte  $\Delta l_s$  und  $\Delta l_u$ , bzw. die Faktoren  $\frac{1}{r_s}$  und  $\frac{1}{r_u}$  ergeben sich aus den folgenden Beziehungen (s. Figur 1a):

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_B &= \frac{\Delta B}{\sin \varphi} = \Delta l_s + (s - u) \Delta l - \Delta l_u \\ \frac{p_m}{\sin \varphi} &= (1 + m - u) \Delta l - \Delta l_u; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

der Wert des Durchlässigkeitsfaktors  $D$  bleibt, wie leicht ersichtlich, unverändert.

Die Anwendung der Formeln (13) aus II setzt voraus, dass das einfallende Licht innerhalb eines Strahlenbündels, in welchem  $\Delta l$  liegt, homogen sei. Da wir hier eine beliebig inhomogene, räumliche Verteilung der Lichtintensität innerhalb der Breite  $\Delta B$  annehmen, trifft dies nicht zu. Immerhin kann (bei der vorausgesetzten „Dünne“ der Einzelschichten) nur eine kleine Inhomogenität zur Auswirkung kommen; es ist deshalb berechtigt, für das zum Punkte  $P_m$  gehörige Einzelschichtdreieck einen Mittelwert  $I_m$  des einfallenden Lichtes einzusetzen. Es ist zu beachten,

dass dieser Wert  $I_m$  nicht vom Index  $m$  der Schicht abhängt, sondern eine Funktion des zu  $P_m$  gehörenden  $p_m$  ist.

Für unsren Fall kommt nun die Formel (13) in II sofort in folgender Weise zur Verwendung:

Das Schichtdreieck unterhalb  $P_m$  (Figur 1 b) liefert als Beitrag zum Streulicht die Intensität:

$$i'_m = I'_m \cdot Z_m \cdot D (1 - e^{-(\zeta_m (\Delta l + \Delta w))}),$$

wenn  $I'_m$  die auf das Dreieck bei  $P_m$  einfallende mittlere Lichtintensität ist. Diese hat aber die  $(m - 1)$  darunter liegenden Schichten durchsetzen müssen, also ist

$$I'_m = I_m e^{-(\zeta_{m-1} + \zeta_{m-2} + \dots + \zeta_1) \Delta w};$$

ferner muss das zerstreute Licht wiederum  $(m - 1)$  untere Schichten durchsetzen, es wird

$$i_m = i'_m e^{-(\zeta_{m-1} + \zeta_{m-2} + \dots + \zeta_1) \Delta l}.$$

Führt man den *Absorptionsfaktor* ein

$$A = e^{-(\Delta w + \Delta l)} \quad (8)$$

so wird die Intensität des vom Einzelschichtdreieck unterhalb  $P_m$  nach  $B$  gestreuten Lichtes

$$i_m = I_m \cdot Z_m \cdot D \cdot (1 - A^{\zeta_m}) \cdot A^{\zeta_{m-1} + \zeta_{m-2} + \dots + \zeta_1} \quad (9)$$

Für das Einzelschichtdreieck der obern Schlusschicht sind  $\Delta w$  und  $\Delta l$  im Verhältnis  $1/r_s$  zu verkleinern, es wird also

$$i_s = I_s \cdot Z_s \cdot D \left(1 - A^{\frac{\zeta_s}{r_s}}\right) \cdot A^{\zeta_{s-1} + \zeta_{s-2} + \dots + \zeta_1}. \quad (9a)$$

Vom Einzelschichtdreieck der untern Schicht ist der Anteil des nicht mehr beleuchteten Stückes mit dem Ausdruck  $1 - A^{\frac{\zeta_u}{r_u}}$  vom Gesamtwert  $1 - A^{\zeta_u}$  abzuziehen; es bleibt also

$$i_u = I_u \cdot Z_u \cdot D \left(A^{\frac{\zeta_u}{r_u}} - A^{\zeta_u}\right) A^{\zeta_{u-1} + \zeta_{u-2} + \dots + \zeta_1}. \quad (9b)$$

Die *Gesamthelligkeit* des unter dem Winkel  $\varphi$  dem Beobachter  $B$  zugestreuten Lichtes ergibt sich zu

$$J = i_s + \sum_{m=u+1}^{m=s-1} (i_m) + i_u. \quad (10)$$

Denkt man sich die betrachtete Schicht in die reine, ideale Atmosphäre eingebettet, so kommen noch einige Zusatzfaktoren und Zusatzglieder hinzu.

Ist  $I$  die Intensität des auf die Atmosphärengrenze einfallen-

den Sonnenlichts, so erleidet dieses auf seinem Weg nach  $P_m$  bis zum Eintritt in die unterste Einzelschicht ( $m = 1$ ) eine Absorption, die wir als *atmosphärischen Faktor*  $F_a(p_m)$  bezeichnen wollen; ebenso wird das aus der untersten Schicht austretende Licht in der Blickrichtung auf einer Strecke  $l_0$  eine atmosphärische Auslöschung erfahren, die gegeben ist durch

$$e^{-\int_0^{l_0} \kappa dl}.$$

Ausserdem sind aber alle Sonnenstrahlen bereits einmal durch die ganze Schicht gegangen, so dass das nach  $P_m$  gelangende Strahlenbündel einen weiteren Absorptionsfaktor erhält:

$$\sum_1^p (e^{-\kappa A w}).$$

Demnach ist im Ausdruck für  $i_m$  die Intensität  $I_m$  zu ersetzen durch

$$I \cdot F_a(p_m) \cdot \sum_1^p (e^{-\kappa A w}), e^{-\int_0^{l_0} \kappa dl};$$

dabei ist dann die Dicke  $\Delta B$  des Sonnenstrahlenbündels der Höhe  $h_p$  der obersten Schichtgrenze gleichzusetzen.

Hiezu kommt noch die Beleuchtung der gesamten reinen Atmosphäre selber, die in ihren untern Teilen durch die Schicht mehr oder weniger stark geschwächt wird. In der Regel genügt es aber, eine blosse Superposition der beiden Beleuchtungswirkungen anzunehmen, so dass der Ausdruck (10) für  $J$  einfach noch um den Ausdruck auf S. 152 in II zu vermehren ist.

Beschränken wir uns auf den Hauptanteil des Intensitätsausdruckes, auf (9), so lässt sich dessen Verhalten leicht diskutieren.

Der Faktor  $A^{\kappa_{m-1} + \dots + \kappa_1}$ , der immer kleiner als 1 ist, zeigt die zunehmende Auslöschung der Einzelschicht mit der Zunahme der Anzahl der darunter liegenden Schichten, mit der Zunahme ihrer Auslöschungskoeffizienten und mit der Zunahme der Strecke  $\Delta w + \Delta l$  (also mit abnehmender Steilheit des einfallenden und des gestreuten Lichtes).

Bei gegebenem  $\kappa$  gibt der „geometrische Faktor“

$$G = D(1 - A^\kappa)$$

die Abhängigkeit der Intensität  $i_m$  von den rein geometrischen Verhältnissen. Dessen Diskussion lässt sich in gleicher Weise durchführen, wie dies in früheren Arbeiten<sup>1)</sup> gemacht wurde.

<sup>1)</sup> GRUNER, Helv. phys. Acta **1**, 1, 1928; GRUNER und GRÜTTER, Helv. phys. Acta **3**, 477, 1930.

$G$  ist eine monotone Funktion sowohl von  $\Delta w$  wie von  $\Delta l$ . Bei konstantem  $\Delta l$  nimmt  $G$  mit wachsendem  $\Delta w$  ab: vom Wert  $1 - e^{-z \cdot \Delta l}$  für  $\Delta w = 0$ , bis zu Null für  $\Delta w = \infty$ ; je kleiner  $\Delta l$  um so flacher verläuft die  $G$ -Kurve. Bei konstantem  $\Delta w$  nimmt  $G$  mit wachsendem  $\Delta l$  zu: vom Wert Null für  $\Delta l = 0$  bis zum Wert 1 für  $\Delta l = \infty$ ; je grösser  $\Delta w$ , um so flacher verläuft die  $G$ -Kurve.

Die Abhängigkeit von den physikalischen Eigenschaften der  $m^{\text{ten}}$  Einzelschicht ist gegeben durch die Faktoren

$$Z \cdot (1 - A^z) = \frac{n \cdot \Gamma}{z} (1 - e^{-z(\Delta w + \Delta l)}).$$

Im allgemeinen ist  $n \cdot \Gamma$  proportional  $z$ , so dass die eigentliche Abhängigkeit von  $z$  nur durch  $1 - e^{-z(\Delta l + \Delta w)}$  bestimmt ist; die Intensität des gestreuten Lichtes nimmt also mit zunehmender Auslöschung zu! Dieses paradoxe Resultat folgt eben daraus, dass die zunehmende Auslöschung durch eine Zunahme der Intensität der Lichtzerstreuung bedingt ist. Würde man dagegen  $n \cdot \Gamma$  als unabhängig von  $z$  ansehen, so zeigt der Ausdruck  $1/z \cdot (1 - e^{-z(\Delta w + \Delta l)})$  eine Abnahme mit wachsendem  $z$ .

## 2. Theorie des Purpurlichtes.

Das Auftreten trübender Schichten in der Atmosphäre muss besondere Lichterscheinungen bedingen, die in der meteorologischen Optik ganz allgemein als Ringerscheinungen verschiedenster Art, zur Zeit der Dämmerung aber besonders als *Purpurlicht* bekannt sind. Aus den verschiedenen Erklärungsweisen<sup>1)</sup> desselben scheint sich neuerdings nachfolgende Auffassung als die plausibelste zu ergeben.

Eine in der Atmosphäre schwebende, inhomogene Schicht trübender Teilchen wird von der untergehenden bzw. aufgehenden Sonne von unten beleuchtet. Die Sonnenstrahlen haben auf ihrem langen Weg durch die Atmosphäre (und auch durch die unter dem Horizont liegenden Schichten) schon eine starke selektive Auslöschung erfahren, die ein starkes Überwiegen der langwelligen Strahlen bedingt. In der Schicht tritt eine Zerstreuungswirkung ein, die bei geeigneter Grösse der suspendierten Teilchen als *Beugungerscheinung* im weitesten Sinne des Wortes aufgefasst werden kann; d. h. es entsteht um die Sonne eine zentrale, mehr oder weniger weisse Scheibe mit gelbrottem bis purpurrotem Rande; die Intensität dieser roten Töne wird besonders überwiegen, da

<sup>1)</sup> GRUNER und KLEINERT, Die Dämmerungerscheinungen. Probleme der kosmischen Physik X. Henri Grand, Hamburg, 1927.

dieselben bereits im einfallenden Strahlenbündel verstärkt sind. Dieser rote Ring ist es, der dem Beobachter als Purpurlicht erscheint.

Die zeitlich-räumliche Entwicklung des Purpurlichtes und seiner Intensität hängt, ausser von den Dimensionen der Schicht und der Lichtverteilung im einfallenden Strahlenbündel, wesentlich von der Zerstreuungsfunktion  $\Gamma$  ab, die ihrerseits eine Funktion des Zerstreuungswinkels  $\varphi$  ist. Der Beugungscharakter von  $\Gamma$  wird sich allgemein darin äussern, dass  $\Gamma$  für das „rote“ Licht innerhalb gewisser Werte  $\varphi$  und  $\varphi'$  einen hohen Wert erreicht und ausserhalb derselben sehr gering ist (die ausserhalb der zentralen Beugungsscheibe entstehenden Beugungsmaxima der Beugungsringe sind so schwach, dass sie keine Rolle mehr spielen). Diese Grenzwerte  $\varphi$  und  $\varphi'$  variieren für die verschiedenen Einzelschichten; da die Grösse der schwebenden Teilchen naturgemäss von unten nach oben abnimmt, so werden die oberen Einzelschichten starke Beugung mit grossen Winkeln  $\varphi$  und  $\varphi'$ , grossem  $\Gamma$  und grossem  $\alpha$  aufweisen, die untern aber kleine  $\varphi$  und  $\varphi'$ , kleine  $\Gamma$  und kleine  $\alpha$ .

Wenn nun unsere Formeln (9) — (10) zur *angenäherten* Berechnung der Helligkeitsverteilung im Purpurlicht verwendet werden sollen, so können wir folgende Annäherungen treffen:

Das einfallende Sonnenstrahlenbündel ist in Wirklichkeit inhomogen, speziell seine rote Färbung nimmt von unten nach oben ab. Diese Inhomogenität ersetzen wir durch ein im Mittelwert homogenes, rotes Strahlenbündel von der Intensität  $I = 100$  und von einer begrenzten Breite  $AB$ . Die trübende Schicht zerlegen wir in homogene Einzelschichten, deren Wert von  $I$  zwischen bestimmten Grenzwerten  $\varphi$  und  $\varphi'$  direkt als konstant (unabhängig von  $\varphi$ ) angenommen wird, während er ausserhalb dieser Werte gleich Null gesetzt wird. Für  $z$  und für  $Z = \frac{nI}{z}$  sind für jede Einzelschicht passende konstante Werte zu wählen.

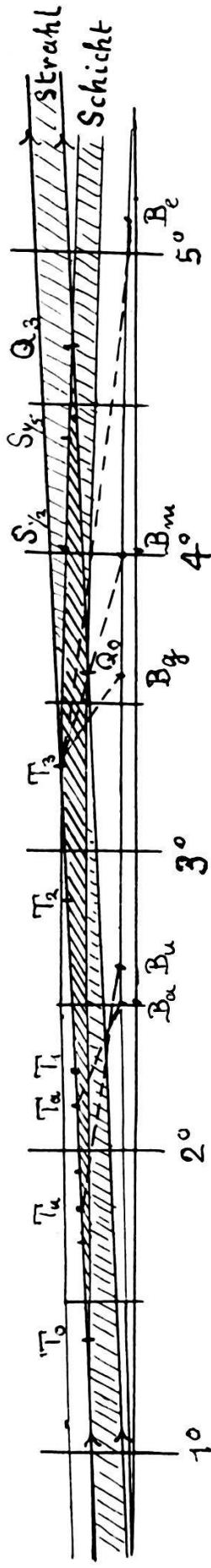


Fig. 2.

Um ein Urteil über die Brauchbarkeit dieser Theorie zu bekommen, wird im folgenden ein konkreter Fall durchgerechnet.

Es sei  $\Delta B = 10$  km,  $R = 6370$  km,  $\Delta H = 9$  km, die untere Grenzfläche der Schicht sei in einer Höhe  $h_0 = 12$  km. Wir zerlegen die Schicht in 3 homogene Einzelschichten, also  $\Delta h = 3$  km, von unten nach oben mit den Indizes 1, 2, 3 versehen, und nehmen folgende Werte der Konstanten an:

$$\begin{aligned} h_1 = 15: \quad z_1 = 0,01 \quad Z_1 = 1 \quad \text{innerhalb} \quad \varphi_1 = 10^0 \quad \text{und} \quad \varphi'_1 = 20^0 \\ h_2 = 18: \quad z_2 = 0,02 \quad Z_2 = 3 \quad \text{,,} \quad \varphi_2 = 20^0 \quad \text{,,} \quad \varphi'_2 = 30^0 \\ h_3 = 21: \quad z_3 = 0,03 \quad Z_3 = 5 \quad \text{,,} \quad \varphi_3 = 30^0 \quad \text{,,} \quad \varphi'_3 = 40^0 \end{aligned}$$

Die Punkte, in denen der oberste Strahl des „roten“ Strahlensbündels die Grenzflächen der Einzelschichten (in den Höhen  $h_0 = 12$  km,  $h_1 = 15$  km,  $h_2 = 18$  km,  $h_3 = 21$  km) schneiden, sind mit  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  bezeichnet; die entsprechenden Schnittpunkte mit dem untersten Strahl sind  $Q_0$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ; ihre Lage bzw. die Winkel  $\Theta$  sind nach (3) berechnet.

Für die Punkte  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  sind nach (10) die Intensitäten  $J$  für die, je um  $10^0$  auseinanderstehenden Werte von  $\varphi$  berechnet, für welche die  $Z$  von Null verschieden sind; dazu wurden dann die Winkel  $\varepsilon$  und  $\delta$  aus (3) und (4) berechnet. Um noch einige Zwischenwerte zu erhalten, wurden noch die Intensitäten, die von den passend gewählten Punkten  $T_{1,5}$ ,  $T_{1,2}$ ,  $S_{1,2}$  und  $S_{1,5}$  ausgehen, berechnet. Endlich ergibt eine einfache Rechnung, unter welchem Winkel die betreffenden Punkte gerade im Horizont des Beobachters untergehen (also  $\varepsilon = 0$  ist).

Auf Grund dieser Zahlen (siehe S. 360), die in Figur 2 im richtigen Verhältnis gezeichnet sind, lässt sich *ein ungefähres Bild des Purpurlichtverlaufes angeben, das mit den Beobachtungsergebnissen in befriedigender Übereinstimmung steht.*

Wir lassen hier die angenähert interpolierten Werte folgen, die einen Vergleich mit den Beobachtungsresultaten ermöglichen:

$\delta$	Untere Grenze d. Purpurlichtes		Maximalstelle und Intensität			Obere Grenze d. Purpurlichtes	
	$\varphi$	$\varepsilon$	$\varphi$	$\varepsilon$	$J$	$\varphi$	$\varepsilon$
$2^0 30'$	—	—	—	—	—	20	$17^0 30'$
$2^0 35'$	$15^0$	$12^0 25'$	—	—	—	—	—
$3^0 0'$	10	$7^0$	20	$17^0$	15	30	$27^0$
$3^0 30'$	10	$6^0 30'$	20	$16^0 30'$	22	40	$36^0 30'$
$4^0 0'$	10	$6^0$	20	$16^0$	<b>26</b>	40	$36^0$
$4^0 30'$	10	$5^0 30'$	25	$20^0 30'$	20	35	$30^0 30'$
$5^0 0'$	10	$5^0$	15	$10^0$	10	25	$20^0$
$5^0 10'$	10	$4^0 50'$	—	—	—	10	$4^0 50'$

Es ergeben sich folgende Resultate:

	$\Theta$	$\delta$	$\epsilon$	$J$	$\varphi = 10^\circ$			$\varphi = 20^\circ$			$\varphi = 30^\circ$			$\varphi = 40^\circ$		
					$\varphi = 10^\circ$		$J$	$\varphi = 20^\circ$		$J$	$\varphi = 30^\circ$		$J$	$\varphi = 40^\circ$		$J$
					$\delta$	$\epsilon$		$\delta$	$\epsilon$		$\delta$	$\epsilon$		$\delta$	$\epsilon$	
$T_0$	$1^\circ 27'$	$4^\circ 58'$	$0^\circ$	$0$				$2^\circ 33'$	$7^\circ 27'$	(4,0)						
$T_{1/6}$	$1^\circ 43'$							$2^\circ 49'$	$7^\circ 11'$	8,8	$2^\circ 17'$	$17^\circ 43'$	(4,0)			
$T_{1/2}$	$1^\circ 55'$							$3^\circ 20'$	$6^\circ 40'$	14,2	$2^\circ 42'$	$17^\circ 18'$	6,6			
$T_1$	$2^\circ 16'$	$6^\circ 12'$	$0^\circ$	$0$				$4^\circ 17'$	$5^\circ 43'$	16,3	$3^\circ 23'$	$16^\circ 37'$	23,4	$3^\circ 10'$	$26^\circ 50'$	11,1
$T_2$	$2^\circ 51'$	$7^\circ 9'$	$0^\circ$	$0$				$5^\circ 15'$	$4^\circ 45'$	(3,9)	$4^\circ 0'$	$16^\circ 0'$	25,3	$3^\circ 45'$	$26^\circ 15'$	22,6
$T_3$	$3^\circ 22'$	$8^\circ 1'$	$0^\circ$	$0$							$4^\circ 40'$	$15^\circ 20'$	5,7	$4^\circ 23'$	$25^\circ 37'$	36 $^\circ 23'$
$S_{1/2}$	$4^\circ 0'$	$8^\circ 39'$	$0^\circ$	$0$										$4^\circ 47'$	$25^\circ 13'$	7,5
$S_{1/6}$	$4^\circ 23'$	$9^\circ 2'$	$0^\circ$	$0$												
$Q_0$	$3^\circ 31'$	$7^\circ 2'$	$0^\circ$	$0$												
$Q_3$	$4^\circ 39'$	$9^\circ 18'$	$0^\circ$	$0$												

Bem.: Für  $J$  wird ein Schwellenwert willkürlich angenommen: Werte von  $J < 5$  sollen dem Auge nicht mehr erkennbar sein.

Als Vergleich geben wir die Mittelwerte, die RIGGENBACH in *Basel* aus seinen Beobachtungen<sup>1)</sup> 1883—1885 hergeleitet hat:

$\delta$	Untere Grenze			Obere Grenze		
	$\varphi$	$\varepsilon$	$h$	$\varphi$	$\varepsilon$	$h$
2° 15'	18° 15'	16°	2,6 km	18° 15'	16°	2,6 km
2° 30'	27° 30'	25°	3,5	15° 30'	13°	3,2
3° 0'	31°	28°	5,4	12°	9°	4,5
3° 30'	37° 30'	34°	7,9	11°	7,5°	6,2
4° 0'	37°	33°	10,6	10°	6°	7,7
4° 30'	30° 30'	26°	13,4	10°	5,5°	9,5
5° 0'	25°	20°	16,0	10°	5°	11,3
5° 30'	21° 30'	16°	18,6	8° 30'	3°	11,3
6° 0'	18°	12°	20,7	—	—	—
6° 30'	14° 30'	8°	21,4	—	—	—

RIGGENBACH berechnet die „Höhe“ der trübenden Schicht unter der Annahme, dass sie stets die Stelle angebe, in welcher sie von dem die Erde tangierenden Sonnenstrahl getroffen werde; diese, nach unserer Theorie durchaus nicht zulässige Annahme gibt dann ein ständiges Anwachsen dieser „Höhe“.

Unsere Zahlen zeigen (s. auch Fig. 2, S. 358), dass ein Beobachter  $B_a$  zuerst das Purpurlicht als Purpurfleck in der Höhe  $\varepsilon = 17^{\circ} 30'$  erblickt, bald nachher sieht er es in  $B_u$  schon wesentlich nach unten ausgebreitet, in einer Höhe  $\varepsilon = 12^{\circ} 25'$ . Seine obere Grenze steigt rasch, von  $B_g$  aus erscheint (bei  $\delta = 3^{\circ} 30'$ ) das Purpurlicht in seiner höchsten Ausdehnung:  $\varepsilon = 36^{\circ} 30'$ . Etwas später weist es seine maximale Intensität auf, bei  $\delta = 4^{\circ}$ , in einer Höhe  $\varepsilon = 16^{\circ}$ ; dann schrumpft es zusammen, und ein Beobachter  $B_e$  sieht, bei  $\delta = 5^{\circ} 10'$ , seine letzten Spuren in  $\varepsilon = 4^{\circ} 50'$  verschwinden.

Selbstverständlich werden sich durch passende Veränderung der angenommenen Zahlwerte für  $\varphi$  und  $\varphi'$ , für  $Z$  und für  $z$ , sehr verschiedenartige Purpurlichtarten ergeben. — Auf die interessante Frage, in welcher Weise umgekehrt aus photometrischen Beobachtungen die Werte von  $Z$ ,  $z$  usw. berechnet werden könnten, werden wir erst später eingehen.

Bern, im Oktober 1932.

<sup>1)</sup> RIGGENBACH, Verh. Nat. Ges. Basel **8**, 1. — 1886. S. auch GRUNER, Denkschr. Schweizer. Naturf. Gesellschaft **57**, 1921.