

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 5 (1932)
Heft: III

Artikel: Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik
Autor: Pauli, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110167>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik

von W. Pauli, Zürich.

(14. V. 32.)

Es wird gezeigt, wie der Ansatz von WENTZEL und BRILLOUIN zu verallgemeinern ist, um auf den Fall, dass die Wellenfunktion mehrere Komponenten besitzt, wie er ja in der Diracschen Theorie vorliegt, anwendbar zu sein. Dabei ergibt das Näherungsverfahren automatisch, dass die Beugungseffekte und die Wirkungen des Spins von derselben Grössenordnung werden, wie dies von BOHR betont wurde; die geometrisch-optischen Strahlen, die im Limes aus der Wellengleichung folgen, entsprechen den klassisch-relativistischen mechanischen Bahnen eines Punktelektrons ohne Spin. Der Fall eines eindimensionalen elektrischen Feldes mit beliebigem Verlauf wird durchgerechnet, und es ergibt sich hierbei dem Kleinschen Paradoxon entsprechend eine allgemeine Formel für die Häufigkeit des Durchtritts von Elektronen durch ein für sie klassisch unerreichbares Zwischengebiet in ein anderes Gebiet, in welchem ihre Bahnen zu einer negativen Masse gehören müssten.

§ 1. Einleitung.

In der unrelativistischen Wellenmechanik ist der Grenzübergang zur klassischen Mechanik oder was dasselbe ist, zur geometrischen Optik bereits eingehend untersucht. Man macht mit WENTZEL und BRILLOUIN für die Lösung $\psi(q, t)$ der Schrödingergleichung den Ansatz¹⁾

$$\psi = e^{\frac{i}{h} S}$$

und entwickelt S nach Potenzen von h/i

$$S = S_0 + \frac{h}{i} S_1 + \left(\frac{h}{i}\right)^2 S_2 + \dots$$

Man erhält dann in nullter Näherung für S_0 die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung (wir kürzen ab H.-J. Gl.) der klassischen Mechanik und in erster Näherung eine zur Kontinuitätsgleichung äquivalente Relation, bei welcher die Quotienten aus den Komponenten der Stromdichte und der Wahrscheinlich-

¹⁾ Wir bezeichnen hier mit h durchweg die durch 2π dividierte Plancksche Konstante.

keitsdichte $\psi^*\psi$ eben durch die Geschwindigkeitskomponenten der klassischen Bahnen gegeben sind; sie sind gleich

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

wobei in der Hamiltonfunktion $H(p, q)$, für die p_k die Ausdrücke $p_k = \frac{\partial S_0}{\partial q_k}$ einzusetzen sind. Hiemit ist dann gezeigt, dass die dem betrachteten wellenmechanischen Problem entsprechenden geometrisch-optischen Strahlen genau mit den Bahnen des zugehörigen klassisch-mechanischen Problems zusammenfallen.

Wie zuerst von KRAMERS¹⁾ in einwandfreier Weise gezeigt wurde, kann die Methode so ausgebaut werden, dass sie auch die asymptotische Berechnung von Eigenwerten der Energie im Grenzfall grosser Quantenzahlen gestattet. Dabei hat man die Lösungen der H.-J. Gl. auch in solchen Raumgebieten zu benützen, in welche bei dem betrachteten Wert der Energie E das Teilchen gemäss der klassischen Mechanik nicht gelangen könnte und in denen die Lösung S_0 der H.-J. Gl. imaginär wird. An den Umkehrstellen der klassischen Bahn, wo die beiden Gebiete aneinandergrenzen, werden die der geometrischen Optik entsprechenden Näherungslösungen $\psi(q, t)$ singulär und daher versagt an diesen Stellen die geometrische Optik. Um den richtigen Zusammenhang zwischen den Lösungen der geometrischen Optik im klassisch erreichbaren und im klassisch unerreichbaren Gebiet zu finden („Übergangsrelationen“) — das heisst diejenigen Partikularlösungen der H.-J. Gl., welche in beiden Gebieten *dieselbe* Partikularlösung der strengen Wellengleichung approximieren — ist es daher, wie KRAMERS ausführte, unerlässlich, auf die strenge Wellengleichung zurückzugreifen. Dasselbe gilt auch im Gebiete kontinuierlicher Eigenwertspektren, wo es sich nicht um eine Bestimmung des Energiewertes, sondern um die des Verlaufes der Eigenfunktion im ganzen Raum handelt.

Es ist der Zweck der vorliegenden Mitteilung, diese Methode auf Diracs relativistische Wellengleichung eines Elementarteilchens (Elektrons oder Protons) in einem gegebenen äusseren elektromagnetischen Potentialfeld zu übertragen. Dabei ergaben sich einige für diesen Fall charakteristische, in der unrelativistischen Wellenmechanik nicht auftretende Resultate. Zunächst hängt ja in der Diracschen Theorie die Wellenfunktion ausser von den Raumzeitkoordinaten x_1, x_2, x_3, t noch von einem die Werte 1 bis 4

¹⁾ H. A. KRAMERS, ZS. f. Phys. **39**, 828, 1926.

durchlaufenden Index ϱ ab. Um den Grenzübergang zur geometrischen Optik durchzuführen, muss hier angesetzt werden,

$$\psi_{\varrho} = e^{\frac{i}{h} S_{\varrho}} \quad (1)$$

mit der besonderen Festsetzung, dass in der Entwicklung

$$S_{\varrho} = S_0 + \frac{h}{i} S_{1\varrho} + \left(\frac{h}{i}\right)^2 S_{2\varrho} + \dots \quad (2)$$

der erste Term S_0 vom Index ϱ nicht abhängt. Es zeigt sich nämlich, dass man nur auf diese Weise Lösungen erhält, die dem Verhalten der klassisch-mechanischen Bahnen (Strahlen) entsprechen. Dabei ist hier „klassische“ Mechanik immer einschliesslich der Relativitätskorrekturen zu verstehen, da wir über die Grösse der Geschwindigkeit des Elektrons keine einschränkende Voraussetzungen einführen. Die Theorie ist z. B. anwendbar auf klassisch beschreibbare Ablenkungsversuche von Kathodenstrahlen und β -Strahlen in elektrischen und magnetischen Feldern, wie sie zur Prüfung der Abhängigkeit der Elektronenmasse von der Geschwindigkeit ausgeführt wurden. Es ist übrigens formal bequemer, statt (1) und (2) eine andere Bezeichnung einzuführen, derart, dass

$$a_{\varrho} = e^{S_{1\varrho} + \frac{h}{i} S_{2\varrho} + \dots}$$

gesetzt wird, wobei dann für S_0 der Index 0 fortgelassen werden kann. Man hat dann als zu (1) und (2) völlig äquivalenten Ansatz

$$\psi_{\varrho} = a_{\varrho} e^{\frac{i}{h} S} \quad (3)$$

mit

$$a_{\varrho} = a_{0\varrho} + \frac{h}{i} a_{1\varrho} + \dots \quad (4)$$

Über die Realitätseigenschaften von a_{ϱ} und S ist dabei zunächst noch nichts vorausgesetzt.

Die formale Durchführung dieses Ansatzes wird im folgenden § 2 gegeben. Sie ist analog dem Übergang von der klassischen Wellenoptik zur geometrischen Optik in anisotropen Medien (Kristallen), wo der Polarisation des Lichtes, d. h. dem Vektorcharakter der Feldstärken, Rechnung getragen werden muss. Die klassisch-mechanischen Bahnen, die sich bei der konsequenten Durchführung dieses Grenzüberganges ergeben, sind in unserem Fall genau diejenigen der relativistischen Mechanik eines Punktelektrons der Ladung e , ohne dass der Spin des Elektrons hierbei zum

Vorschein kommt. Dies liegt daran, dass das Spinnmoment des Elektrons dem Wirkungsquantum proportional ist und infolgedessen bei unserer Näherung *alle vom Spin herrührenden Wirkungen auf den raumzeitlichen Verlauf von Dichte und Strom des Teilchens automatisch erst in derselben Näherung erscheinen wie die von der Beugung der Wellen herrührenden Effekte.* Dies ist im Einklang mit dem von BOHR bemerkten Umstand, dass eine Bestimmung des Spinnmomentes eines freien Elektrons durch klassisch-beschreibbare Ablenkungsversuche prinzipiell nicht möglich ist¹⁾. *Durch das hier dargelegte systematische Näherungsverfahren wird diesem von BOHR betonten Umstande automatisch Rechnung getragen.*

Während die Integration der Differentialgleichungen für S und a_{0e} im allgemeinen Fall, das heisst bei beliebigem räumlichen Verlauf des äusseren elektromagnetischen Feldes technisch nicht möglich ist, gelingt sie in Spezialfällen, von denen der wichtigste der eines elektrischen Feldes bestimmter Richtung ist (eindimensionales Problem und Fehlen eines Magnetfeldes). Dieser Fall wird als Beispiel in § 3 durchgerechnet.

Er gestattet überdies eine interessante Anwendung auf das KLEIN'sche Paradoxon, gemäss welchem auf Grund der Theorie Potentialberge mit Höhen von der Grössenordnung mc^2 von Elektronen überwunden werden könnten, indem sie auf diesen Potentialhöhen mit negativer Masse weiterfliegen. Es handelt sich hier bei gegebener Gesamtenergie E des Elektrons um ein Gebiet, welches für Elektronen positiver Masse, ein anderes Gebiet, welches für Elektronen negativer Masse nach der klassischen relativistischen Punktmechanik erreichbar wäre. Obwohl diese Gebiete durch ein klassisch unpassierbares Zwischengebiet getrennt sind, besteht wellenmechanisch eine endliche Durchlässigkeit dieses Zwischengebietes. In § 4 wird gezeigt, wie die Heranziehung der imaginären Lösung von S im Zwischengebiet und der oben erwähnten KRAMERS'schen Methode zur Ermittlung der Übergangsrelationen an den Trennungsstellen der verschiedenen Gebiete es erlaubt, einen allgemeinen Ausdruck für den Durchlässigkeitskoeffizienten D abzuleiten. Dieser beansprucht (asymptotische) Gültigkeit für einen beliebigen *stetigen* Verlauf des (nur von *einer* der Koordinaten abhängigen) Potentials und der Feldstärke. Während die ursprüngliche Klein'sche Rechnung²⁾ sich auf einen *Sprung* des Potentials an einer Grenzfläche bezieht, also nicht unter die

¹⁾ Über eine Diskussion von mehreren Beispielen sowie weitere Literaturangaben vgl. Rapport du conseil-Solvay 1930, Referat W. PAULI über das magnetische Elektron.

²⁾ O. KLEIN, ZS. f. Phys. **53**, 157, 1929.

hier angenommenen Voraussetzungen fällt, sind die bisher in der Literatur für spezielle stetige Potentialverläufe abgeleiteten Ausdrücke für den Durchlässigkeitskoeffizient D (z. B. für homogenes elektrisches Feld) aus unserem allgemeinen Ausdruck leicht durch Spezialisierung zu erhalten.

§ 2. Das allgemeine Näherungsverfahren.

Zur Durchführung unseres Programmes gehen wir mit dem bereits angegebenen Ansatz

$$\psi_{\varrho} = a_{\varrho} e^{\frac{i}{h} S} \quad (3)$$

$$a_{\varrho} = a_{0\varrho} + \frac{h}{i} a_{1\varrho} + \dots \quad (4)$$

in die Diracsche Wellengleichung

$$\left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_0} - e \Phi_0 \right) \psi_{\varrho} + \alpha_{\varrho\sigma}^k \left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{e}{c} \Phi_k \right) \psi_{\sigma} + m_0 c \beta_{\varrho\sigma} \psi_{\sigma} = 0 \quad (5)$$

ein. Hierin ist $x_0 = ct$, $\alpha_{\varrho\sigma}^k$ und $\beta_{\varrho\sigma}$ ($k = 1$ bis 3 ; $\varrho, \sigma = 1$ bis 4) sind die Matricelemente von α^k und β , die den bekannten Relationen

$$\alpha^i \alpha^k + \alpha^k \alpha^i = 2 \delta_{ik}, \quad \alpha^k \beta + \beta \alpha^k = 0, \quad \beta^2 = 1 \quad (6)$$

genügen und es ist hier und im folgenden über jeden doppelt vorkommenden Index zu summieren, und zwar über einen lateinischen Index von 1 bis 3 , über einen griechischen von 1 bis 4 ; die Elektronenladung ist wie üblich mit $-e$ bezeichnet. Φ_0 ist das elektrostatische, Φ_k das Vektorpotential des äusseren Feldes. Durch Einsetzen von (3), (4) in (5) folgen nun durch Ordnen nach Potenzen von $\frac{h}{i}$ mit Einführung der Abkürzungen

$$\pi_0 = -\frac{\partial S}{\partial x_0} + \frac{e}{c} \Phi_0, \quad \pi_k = \frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{e}{c} \Phi_k \quad (7)$$

die sukzessive zu lösenden Gleichungen

$$-\pi_0 a_{0\varrho} + \pi_k \alpha_{\varrho\sigma}^k a_{0\sigma} + m_0 c \beta_{\varrho\sigma} a_{0\sigma} = 0 \quad (I_0)$$

$$-\pi_0 a_{1\varrho} + \pi_k \alpha_{\varrho\sigma}^k a_{1\sigma} + m_0 c \beta_{\varrho\sigma} a_{1\sigma} = -\left(\frac{\partial a_{0\varrho}}{\partial x_0} + \alpha_{\varrho\sigma}^k \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k} \right) \quad (I_1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$-\pi_0 a_{n\varrho} + \pi_k \alpha_{\varrho\sigma}^k a_{n\sigma} + m_0 c \beta_{\varrho\sigma} a_{n\sigma} = -\left(\frac{\partial a_{n-1,\varrho}}{\partial x_0} + \alpha_{\varrho\sigma}^k \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k} \right). \quad (I_n)$$

Beginnen wir mit der Bedingung (I_0) der nullten Näherung, so sehen wir, dass diese homogenen Gleichungen für die $a_{0\varrho}$ nur Lösungen besitzen, wenn die π_0, π_k gewisse Bedingungen erfüllen, die mit dem Verschwinden der Determinante des Gleichungssystems äquivalent sind. In unserem Fall erhält man sie in bekannter Weise durch Multiplikation von (I_0) mit

$$\pi_0 \delta_{\tau\varrho} + \pi_i \alpha_{\tau\varrho}^i + m_0 c \beta_{\tau\varrho}$$

und Summation über ϱ , was gemäss den Vertauschungsrelationen (6)

$$(-\pi_0^2 + \sum_{k=1}^3 \pi_k^2 + m_0^2 c^2) a_{0\tau} = 0$$

zur Folge hat. Wenn nicht die $a_{0\tau}$ alle (für alle τ) identisch verschwinden sollen, folgt

$$-\pi_0^2 + \sum_{k=1}^3 \pi_k^2 + m_0^2 c^2 = 0 \quad (II_0)$$

was gemäss der Bedeutung (7) von π_0 und π_k mit der H.-J. Gl. der klassisch-relativistischen Punktmechanik übereinstimmt. *Diese erscheint also als Lösbarkeitsbedingung der Gleichungen (I_0) für die $a_{0\varrho}$.*

Wir denken uns nun für S und damit gemäss (7) für π_0 und π_k irgend eine spezielle Lösung von (II_0) vorgegeben und fragen nach der sukzessiven Bestimmung der $a_{0\varrho}, a_{1\varrho}$, usw. Hierfür ist es wesentlich, dass die $a_{0\varrho}$ aus (I_0) noch nicht vollständig bestimmt sind. Bekanntlich existieren bei gegebenen π_0, π_k zwei linear unabhängige Lösungen

$$a_{0\varrho} = A_{\varrho}(\pi_0, \pi_k) \text{ und } a_{0\varrho} = B_{\varrho}(\pi_0, \pi_k)$$

von (I_0), den beiden Spinrichtungen entsprechend. Man kann sie so gewählt denken (vgl. hierzu auch § 3), dass sie nicht explizite von den Koordinaten x_0, x_k abhängen, sondern nur von den π_0, π_k selbst (die ihrerseits Koordinatenfunktionen sind), was wir durch die Schreibweise zum Ausdruck bringen. Dann ist aber die allgemeine Lösung von (I_0)

$$a_{0\varrho} = C(x_0, x_k) A_{\varrho}(\pi_0, \pi_k) + C'(x_0, x_k) B_{\varrho}(\pi_0, \pi_k) \quad (8)$$

worin die C und C' zunächst zwei beliebige Funktionen der Koordinaten (unabhängig vom Index ϱ) sind.

Es ist jedoch zu beachten, dass die *Bedingung der Lösbarkeit der Gleichungen (I_1) der folgenden Näherung* den $a_{0\varrho}$ weitere Einschränkungen auferlegt. Es handelt sich hier ja um ein inhomogenes

lineares Gleichungssystem, dessen zugehörige homogene Gleichungen Lösungen besitzen. In diesem Fall ist die Lösbarkeitsbedingung des inhomogenen Systems bekanntlich die, dass seine rechte Seite orthogonal sein muss zu den Lösungen der adjungierten homogenen Gleichungen. Letztere lauten in unserem Fall (für $\sigma = 1$ bis 4)

$$-a_{\sigma}^{+} \pi_0 + a_{\sigma}^{+} \alpha_{\sigma}^k \pi_k + a_{\sigma}^{+} \beta_{\sigma} m_0 c = 0. \quad (9)$$

Genügt ein Zahlensystem a_{σ}^{+} diesen Gleichungen, so gilt in der Tat identisch in den $a_{n\sigma}$

$$\sum_{\sigma} a_{\sigma}^{+} (-\pi_0 a_{n\sigma} + \pi_k \alpha_{\sigma}^k a_{n\sigma} + m_0 c \beta_{\sigma} a_{n\sigma}) \equiv 0$$

also folgt aus $(I_1), \dots (I_n) \dots$ die weitere Bedingung

$$a_{\sigma}^{+} \left(\frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_0} + \alpha_{\sigma}^k \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (II_1)$$

.....

$$a_{\sigma}^{+} \left(\frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_0} + \alpha_{\sigma}^k \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (II_n)$$

Da die Gleichungen (9) ebenso wie (I_0) zwei linear unabhängige Lösungen besitzen — die wir übrigens sogleich angeben werden — zerfällt (II_1) in zwei unabhängige Gleichungen, die als *zwei simultane partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für die noch unbestimmt gebliebenen Funktionen C und C' in (8) aufgefasst werden können*. Sind die C und C' in einem bestimmten Zeitpunkt beliebig vorgegeben, so bestimmen die Gleichungen (II_1) eindeutig ihren weiteren zeitlichen Verlauf. Allgemein dienen die Lösbarkeitsbedingungen (II_n) der Gleichungen (I_n) zur vollständigen Bestimmung der $a_{n-1,\sigma}$.

Wir können die Lösungen a_{σ}^{+} von (9) sogleich angeben, da die α^k und β hermitische Matrizen sind. Sind dann $A_{\sigma}(\pi_0, \pi_k)$ und $B_{\sigma}(\pi_0, \pi_k)$ die bereits eingeführten Lösungen von (I_0) , und zwar identisch in π_0 und π_k , sofern nur (II_0) erfüllt ist, so können wir die Relationen (9) erfüllen durch

$$a_{0\sigma}^{+} = A_{\sigma}^{*}(\pi_0, \pi_k) \text{ und } a_{0\sigma}^{+} = B_{\sigma}^{*}(\pi_0, \pi_k).$$

Dabei sind A_{σ}^{*} und B_{σ}^{*} konjugiert komplexe Funktionen zu A_{σ} und B_{σ} ; dies soll besagen, dass überall, wo i explizite vorkommt, es durch $-i$ ersetzt wird. Für den Fall, dass π_0 und π_k nicht reell sind, sind diese aber *nicht* durch ihre konjugiert komplexen Werte zu ersetzen, sondern ihre ursprünglichen Werte sind beizubehalten. Nur für reelle π_0 und π_k haben A_{σ}^{*} und B_{σ}^{*} kon-

jugiert komplexe Zahlwerte zu A_ϱ und B_ϱ . An Stelle von $(II_1) \dots (II_n)$ können wir daher auch setzen

$$\left. \begin{aligned} A_\varrho^* (\pi_0, \pi_k) \left(\frac{\partial a_{0\varrho}}{\partial x_0} + \alpha_{\varrho\sigma}^k \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k} \right) &= 0, \\ B_\varrho^* (\pi_0, \pi_k) \left(\frac{\partial a_{0\varrho}}{\partial x_k} + \alpha_{\varrho\sigma}^k \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II_1')$$

.....

$$\left. \begin{aligned} A_\varrho^* (\pi_0, \pi_k) \left(\frac{\partial a_{n-1,\varrho}}{\partial x_0} + \alpha_{\varrho\sigma}^k \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k} \right) &= 0, \\ B_\varrho^* (\pi_0, \pi_k) \left(\frac{\partial a_{n-1,\varrho}}{\partial x_k} + \alpha_{\varrho\sigma}^k \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II_n')$$

Diesen äquivalente Relationen erhält man auch, indem man, ganz analog zum Übergang von (I_0) zu (II_0) , die Relationen $(I_1) \dots (I_n)$ mit

$$+ \pi_0 \delta_{\tau\varrho} + \pi_l \alpha_{\tau\varrho}^l + m_0 c \beta_{\tau\varrho}$$

multipliziert und über ϱ summiert. Dabei verschwindet zufolge (II_0) die linke Seite identisch und man erhält

$$\begin{aligned} + \pi_0 \left(\frac{\partial a_{0\tau}}{\partial x_0} + \alpha_{\tau\sigma}^k \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k} \right) + \pi_l \left(\alpha_{\tau\varrho}^l \frac{\partial a_{0\varrho}}{\partial x_0} + (\alpha^l \alpha^k)_{\tau\sigma} \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k} \right) \\ + m_0 c \left(\beta_{\tau\varrho} \frac{\partial a_{0\varrho}}{\partial x_k} + (\beta \alpha^k)_{\tau\sigma} \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k} \right) = 0 \end{aligned} \quad (II_1'')$$

.....

$$\begin{aligned} + \pi_0 \left(\frac{\partial a_{n-1,\tau}}{\partial x_0} + \alpha_{\tau\sigma}^k \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k} \right) + \pi_l \left(\alpha_{\tau\varrho}^l \frac{\partial a_{n-1,\varrho}}{\partial x_0} + (\alpha^l \alpha^k)_{\tau\sigma} \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k} \right) \\ + m_0 c \left(\beta_{\tau\varrho} \frac{\partial a_{n-1,\varrho}}{\partial x_k} + (\beta \alpha^k)_{\tau\sigma} \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k} \right) = 0. \end{aligned} \quad (II_n'')$$

Wir bekommen auf diese Weise zwar vier Gleichungen (II_n'') für jedes n , aber nur zwei von ihnen sind linear unabhängig und sie sind mit (II_n') äquivalent.

Eine Integration der Gleichungen (I) und der aus ihnen folgenden Bedingungen (II) im allgemeinen Fall, das heisst bei beliebigem äusseren Feld Φ_k ist uns nicht gelungen. Dagegen soll eine wichtige Konsequenz aus den Gleichungen (I_1') und (II_1') besprochen werden, welche die Beziehung dieser Gleichungen zu den klassisch-mechanischen Bahnen herstellt. In dem klassisch

erreichbaren Gebiet ist S und daher auch π_0, π_k reell und für die folgende Betrachtung möge daher, im Gegensatz zum bisherigen, dies ausdrücklich vorausgesetzt werden. Aus (II₁') und (8) folgt zunächst unter Benützung der vorausgesetzten Reellität von π_0, π_k

$$a_{0\varrho}^* \left(\frac{\partial a_{0\varrho}}{\partial x_0} + \alpha_{\varrho\sigma}^k \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k} \right) = 0$$

und durch Übergang zum konjugiert komplexen wegen der Hermitizität der α^k

$$\left(\frac{\partial a_{0\sigma}^*}{\partial x_0} + \frac{\partial a_{0\varrho}^*}{\partial x_k} \alpha_{\varrho\sigma}^k \right) a_{0\sigma} = 0.$$

Addition dieser beiden Gleichungen ergibt mit Einführung von Dichte und Strom gemäss

$$\varrho = a_{0\varrho}^* a_{0\varrho}, \quad s_k = \frac{1}{c} i_k = a_{0\varrho}^* \alpha_{\varrho\sigma}^k a_{0\sigma} \quad (10)$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_0} + \frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0. \quad (11)$$

Man beachte, dass bei reellem S gemäss (3) diese Funktion aus den Ausdrücken für Dichte und Strom herausfällt, so dass letztere nur von a_ϱ abhängen; die Ausdrücke (10) sind dann die der ersten Näherung. Ferner ist zu betonen, dass die Kontinuitätsgleichung weniger aussagt als die Gleichungen (I₁), (II₁'), so dass diese aus jener nicht zurück gefolgert werden können.

Wir können nun einen einfachen Ausdruck für den Quotienten aus Strom und Dichte ableiten, der ganz analog wie bei der unrelativistischen Wellenmechanik in der betrachteten Näherung mit der Geschwindigkeit des Elektrons auf der klassischen Bahn übereinstimmt. Wir gehen dabei aus von den Relationen (I₀) und (9), wobei wir in letzteren a_ϱ^+ durch $a_{0\varrho}^*$ ersetzen, was für reelle π_0, π_k erlaubt ist. Diese Relationen schreiben wir in der Form

$$\begin{aligned} -\pi_0 a_{0\sigma} + \pi_l \alpha_{\sigma\tau}^l a_{0\tau} + m_0 c \beta_{\sigma\tau} a_{0\tau} &= 0 \\ -a_{0\sigma}^* \pi_0 + a_{0\varrho}^* \alpha_{\varrho\sigma}^l \pi_l + a_{0\varrho}^* \beta_{\varrho\sigma} m_0 c &= 0 \end{aligned}$$

multiplizieren die erste Gleichung von links mit $a_{0\varrho}^* \alpha_{\varrho\sigma}^k$, die zweite Gleichung von rechts mit $\alpha_{\sigma\tau}^k a_{0\tau}$, summieren beide Male

über σ und addieren beide Gleichungen. Dann ergibt sich zunächst

$$-2\pi_0(a_{0\varrho}^* \alpha_{\varrho\sigma}^k a_{0\sigma}) + \pi_l a_{0\varrho}^* (\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k)_{\varrho\tau} a_{0\tau} + \\ + m_0 c a_{0\varrho}^* (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k)_{\varrho\tau} a_{0\tau} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Vertauschungsrelationen (6) und Verwendung der Ausdrücke (10) für Dichte und Strom vereinfacht sich dies zu

$$\pi_0 s_k = \pi_k \varrho$$

oder

$$i_k = c s_k = \varrho \frac{c \pi_k}{\pi_0}. \quad (12)$$

Die Hamiltonfunktion $H(p_k, x_k)$ der klassisch-relativistischen Punktmechanik ist nun

$$H(p_k, x_k) = -\frac{\partial S}{\partial t} = c \left(\pi_0 - \frac{e}{c} \Phi_0 \right) = \\ = c \sqrt{m^2 c^2 + \sum_{k=1}^3 \left(p_k + \frac{e}{c} \Phi_k \right)^2} - e \Phi_0 \quad (13)$$

also

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{c \pi_k}{\sqrt{m^2 c^2 + \sum_{k=1}^3 \pi_k^2}} = \frac{c \pi_k}{\pi_0}. \quad (14)$$

Dabei ist im Einklang mit (7) und (II₀) gesetzt

$$\pi_0 = + \sqrt{m^2 c^2 + \sum_{k=1}^3 \pi_k^2}. \quad (15)$$

Diese Wahl des Vorzeichens der Quadratwurzel in (13), (14), (15) entspricht, wie man sieht, einem Teilchen mit positiver Masse. Für ein Teilchen mit negativer Masse würde gelten

$$H(p_k, x_k) = -\frac{\partial S}{\partial t} = c \left(\pi_0 - \frac{e}{c} \Phi_0 \right) = \\ - c \sqrt{m^2 c^2 + \sum_{k=1}^3 \left(p_k + \frac{e}{c} \Phi_k \right)^2} - e \Phi_0 \quad (13')$$

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = - \frac{c \pi_k}{\sqrt{m^2 c^2 + \sum_{k=1}^3 \pi_k^2}} = - \frac{c \pi_k}{\pi_0}, \quad (14')$$

$$\pi_0 = - \sqrt{m^2 c^2 + \sum_{k=1}^3 \pi_k^2}. \quad (15')$$

Der Vergleich von (14) und (14') mit (12) zeigt, dass in beiden Fällen gilt

$$i_k = q \frac{\partial H}{\partial p_k} = q \dot{x}_k.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (11) folgt dann, dass die Teilchen sich längs den durch

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (16a)$$

bestimmten Bahnen fortpflanzen. Aus der H.-J.-Gl. (II₀), die äquivalent ist mit

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H \left(\frac{\partial S}{\partial x_k}, x_k \right)$$

und aus

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k}$$

folgt dann in bekannter Weise

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= \frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_l} \dot{x}_l = - \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \right)_p - \\ &\quad - \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial^2 S}{\partial x_l \partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} \end{aligned}$$

also

$$\dot{p}_k = - \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \right)_p \quad (16b)$$

Die Bahnen sind also genau die der klassisch-relativistischen Punktmechanik und zwar für ein Teilchen ohne Spin. Die vom Spin herrührenden Effekte sind, was ihren Einfluss auf den Verlauf von Dichte und Strom betrifft, zusammen mit Beugungseffekten erst in den Amplituden a_{1e} der nächsten Näherung enthalten, auf deren Berechnung wir aber nicht näher eingehen wollen.

Ein Sonderfall der allgemeinen Lösung von (I) und (II) ist der der stationären Lösung, bei welcher ψ_e die Zeit nur als Exponentialfunktion enthält gemäss

$$\psi_e = u_e(x) e^{-\frac{i}{h} E t} \quad (17)$$

worin dann E die Energie bedeutet. Man muss dann setzen

$$S = \bar{S}(x) - E t \quad (18)$$

und

$$a_e = a_e(x), \quad \frac{\partial a_e}{\partial x_0} = 0$$

$$u_e(x) = a_e(x) e^{\frac{i}{\hbar} \bar{S}} \quad (3')$$

worin \bar{S} und a jetzt unabhängig von t werden. An Stelle von (7) kommt

$$\pi_0 = \frac{E + e \Phi_0}{c}, \quad \pi_k = \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k} \quad (7')$$

$$H\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k}, x_k\right) = E$$

und alle Terme in den Gleichungen (I) und (II), die Differentiationen nach x_0 enthalten, fallen fort.

§ 3.

Beispiel des Teilchens in einem elektrischen Feld mit fester Richtung.

Wir legen die x_3 -Achse in die Feldrichtung, so dass Φ_0 nur von x_3 abhängt, sonst aber beliebig ist. Infolge der Abwesenheit eines Magnetfeldes ist $\Phi_k = 0$, also $\pi_k = p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k}$. Wir wollen uns auf den Fall beschränken, dass das Teilchen sich parallel der x_3 -Achse bewegt, wobei also $p_1 = p_2 = 0$. Für die zur Energie E gehörige stationäre Lösung hängt dann auch S nur von x_3 ab und zwar hat man

$$\pi_0 = \frac{E + e \Phi_0}{c}, \quad p_3 = \pi_3 = \pm \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2}, \quad \bar{S} = \int \pi_3 dx_3. \quad (19)$$

In den klassisch erreichbaren Gebieten ist $|\pi_0| > mc$, also π_3 reell, die beiden Vorzeichen entsprechen den beiden Bewegungsrichtungen des Teilchens nach $+x_3$ oder nach $-x_3$.

Zur weiteren Durchrechnung spezialisieren wir nun die Diracschen Matrizen, z. B. so, dass β diagonal wird:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (20a)$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20b)$$

Die Gleichungen (I₁) lauten dann

$$\left. \begin{aligned} (-\pi_0 + m c) a_{01} + \pi_3 a_{03} &= 0 \\ (-\pi_0 - m c) a_{03} + \pi_3 a_{01} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21a)$$

$$\left. \begin{aligned} (-\pi_0 + m c) a_{02} - \pi_3 a_{04} &= 0 \\ (-\pi_0 - m c) a_{04} - \pi_3 a_{02} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21b)$$

Die Stromkomponente s_3 muss vermöge der Kontinuitätsgleichung bei unserem eindimensionalen Problem konstant sein für stationäre Lösungen, bei denen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_0} = 0,$$

und ist gegeben durch

$$s_3 = (a_{01}^* a_{03} + a_{03}^* a_{01}) - (a_{02}^* a_{04} + a_{04}^* a_{02}). \quad (22)$$

Die Gleichungen (21a) und (21b) sind befriedigt durch den Ansatz

$$a_{0e} = A_e \text{ oder } a_{0e} = B_e \quad (23)$$

wenn wir gemäss

$$A_1 A_3 = 1, \quad B_2 B_4 = -1 \quad (24)$$

normierend, setzen

$$A_1 = \sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_0 - m c}}, \quad A_3 = \sqrt{\frac{\pi_0 - m c}{\pi_3}}, \quad A_2 = A_4 = 0 \quad (25a)$$

$$B_1 = B_3 = 0, \quad B_2 = -\sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_0 - m c}}, \quad B_4 = \sqrt{\frac{\pi_0 - m c}{\pi_3}} \quad (25b)$$

Hierbei ist zu beachten, dass vermöge $\pi_3^2 = \pi_0^2 - m^2 c^2$ von den beiden Gleichungen (21a) oder (21b) jeweils die eine bereits aus der anderen folgt. Bei reellen π_0 und π_3 ist nach (22) für jede der Lösungen A_e und B_e der Strom s_3 konstant.

Wir haben nun noch die Bedingungen (II₁') zu prüfen, die in unserem Fall lauten (es kommt i nicht explizite in A_e und B_e vor!)

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial a_{03}}{\partial x_3} + A_3 \frac{\partial a_{01}}{\partial x_3} &= 0 \\ -B_2 \frac{\partial a_{04}}{\partial x_3} - B_4 \frac{\partial a_{02}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1} \frac{\partial a_{01}}{\partial x_3} &= - \frac{1}{A_3} \frac{\partial a_{03}}{\partial x_3}, \\ \frac{1}{B_2} \frac{\partial a_{02}}{\partial x_3} &= - \frac{1}{B_4} \frac{\partial a_{04}}{\partial x_3}.\end{aligned}\quad (26')$$

Vermöge (24) sind diese Bedingungen für $a_{0e} = A_e$ und $a_{0e} = B_e$ erfüllt, so dass die allgemeinste zulässige Lösung lautet

$$a_{0e} = C_1 A_e + C_2 B_e \quad (27)$$

mit *konstanten* (von den Koordinaten unabhängigen) C_1 und C_2 . Dieser Ansatz ist auch zutreffend, falls die Ausdrücke unter den Wurzeln in (25a) und (25b) nicht positiv reell sind. An den Stellen, wo $\pi_3 = 0$, also $\pi_0 = \pm mc$, werden die a_{0e} singulär und die Näherung der geometrischen Optik versagt dort.

§ 4. Anwendung auf das Klein'sche Paradoxon.

In § 2 wurde bereits erwähnt, dass der Fall $\pi_0 > 0$ einem Teilchen mit positiver Masse, der Fall $\pi_0 < 0$ einem Teilchen mit negativer Masse entspricht. Bedeutet K_l die Komponente der Lorentzkraft, die bei gegebenen äusseren elektromagnetischen Feld auf die Elektronenladung ($-e$) wirkt, so folgt in der Tat aus den kanonischen Bewegungsgleichungen (16) und der Hamiltonfunktion (13) bzw. (13')

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}_l}{\sqrt{1 - \sum_k \frac{\dot{x}_k^2}{c^2}}} \right) = K_l$$

bzw.

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}_l}{\sqrt{1 - \sum_k \frac{\dot{x}_k^2}{c^2}}} \right) = K_l.$$

Für $\pi_0 < 0$ wird also die Beschleunigung der Kraft entgegengesetzt gerichtet, wie es bei negativer kinetischer Energie der Fall wäre.

Wie aus (15) bzw. (15') folgt, ist bei reellen π_k stets $|\pi_0| > mc$ so dass die Lösungen mit $\pi_0 > 0$ und die mit $\pi_0 < 0$ niemals stetig ineinander übergehen können. In der klassischen relativistischen Punktmechanik kann also die Ausschliessung der letzteren der Erfahrung widersprechenden Lösungen widerspruchsfrei und eindeutig durchgeführt werden. In der Wellenmechanik ist dies

jedoch, wie bekanntlich von KLEIN gezeigt wurde, nicht der Fall, da hier die Gebiete, wo die π_k teilweise komplex sind und wo π_0 zwischen $-mc$ und $+mc$ liegt, ebenfalls vom Teilchen erreicht werden können.

Wir erläutern dies an dem im vorigen § betrachteten Beispiel des eindimensionalen elektrischen Feldes. Dabei denken wir uns das Potential Φ_0 bei wachsendem x_3 *stetig abnehmend*, so dass es für hinreichend grosse x_3 negativ wird. Bei gegebener Energie E haben wir dann drei Gebiete zu unterscheiden.

$$1) \quad x_3 < a, \quad mc < \pi_0 = \frac{E + e \Phi_0}{c}$$

$$2) \quad a < x_3 < b, \quad -mc < \pi_0 = \frac{E + e \Phi_0}{c} < mc$$

$$3) \quad b < x_3, \quad \pi_0 = \frac{E + e \Phi_0}{c} < -mc$$

$x_3 = a$ entspricht dem Umkehrpunkt der im Gebiet 1) verlaufenden klassischen Bahn eines Teilchens mit positiver Masse und der Gesamtenergie E , der weiter rechts liegende Punkt $x_3 = b$ entspricht dem Umkehrpunkt der im Gebiet 3) verlaufenden klassischen Bahn eines Teilchens mit negativer Masse und derselben Energie E . Sowohl im Gebiet 1) als auch im Gebiet 3) ist $\pi_3^2 = \pi_0^2 - m^2 c^2$ positiv, also π_3 reell. An den beiden kritischen Punkten $x_3 = a$ und $x_3 = b$ verschwindet π_3 . Im klassisch unerreichbaren Gebiet 2) ist π_3^2 negativ, also π_3 rein imaginär.

Es kann nun in jedem Gebiet sowohl eine nach rechts wie eine nach links laufende Welle vorhanden sein und wir müssen deshalb die spezielle Lösung der Wellengleichung, die wir betrachten wollen, noch näher charakterisieren. Es soll diejenige stationäre Lösung sein, die als Grenzfall eines von links an den kritischen Punkt $x_3 = a$ sich heranbewegenden Wellenpaketes aufgefasst werden kann. Sie ist dadurch charakterisiert, dass im Gebiet 3) *nur* eine nach rechts laufende fortschreitende Welle vorhanden ist, womit gemeint ist, dass die durch (14') definierte Gruppengeschwindigkeit der Welle nach $+x_3$ weisen soll. Im Gebiet 1) wird dann eine einfallende und eine reflektierte Welle vorhanden sein. Zu ermitteln ist der Durchlässigkeitskoeffizient D , definiert als Quotient aus dem Strom der nach rechts fortschreitenden Welle in 3) durch den Strom der nach rechts fortschreitenden Welle in 1). Wir werden sehen, dass unsere ganze asymptotische Näherung nur für den Fall gilt, dass D eine sehr kleine Zahl ist. Eine

formale Vereinfachung wird dadurch erzielt, dass man sich auf den Fall beschränken kann, wo a_{03} und a_{04} durchweg Null sind, d. h. auf die Lösung A_e des § 3. Die Lösung B_e , bei der umgekehrt a_0 und a_{02} verschwinden und ebenso auch die allgemeinste Linearkombination beider Lösungen gemäss (27) würde nämlich exakt denselben Durchlässigkeitskoeffizienten ergeben, wie man leicht nachrechnen kann.

Wir setzen also gemäss (25a) entsprechend $\pi_3 = \pm \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2}$ an:

Im Gebiet 1)

$$\begin{aligned}
 u_{01} &= a_{01} e^{\frac{i}{h} \bar{S}} = \left(\frac{\pi_0 + m c}{\pi_0 - m c} \right)^{1/4} \\
 &\quad \left[C_1 e^{\frac{i}{h} \int_a^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2} dx_3} + C_1' e^{-\frac{i}{h} \int_a^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2} dx_3} \right] \\
 u_{03} &= a_{03} e^{\frac{i}{h} \bar{S}} = \left(\frac{\pi_0 - m c}{\pi_0 + m c} \right)^{1/4} \\
 &\quad \left[C_1 e^{\frac{i}{h} \int_a^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2} dx_3} - C_1' e^{-\frac{i}{h} \int_a^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2} dx_3} \right] \\
 s_3 &= u_{01}^* u_{03} + u_{03}^* u_{01} = 2 (|C_1|^2 - |C_1'|^2) \quad (28_1)
 \end{aligned}$$

Im Gebiet 2)

$$\begin{aligned}
 u_{01} &= a_{01} e^{\frac{i}{h} \bar{S}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{m c + \pi_0}{m c - \pi_0} \right)^{1/4} \\
 &\quad \left[C_2 e^{-\frac{1}{h} \int_a^{x_3} \sqrt{m^2 c^2 - \pi_0^2} dx_3} + C_2' e^{+\frac{1}{h} \int_a^{x_3} \sqrt{m^2 c^2 - \pi_0^2} dx_3} \right] \\
 u_{03} &= a_{03} e^{\frac{i}{h} \bar{S}} = e^{+\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{m c - \pi_0}{m c + \pi_0} \right)^{1/4} \\
 &\quad \left[C_2 e^{-\frac{1}{h} \int_a^{x_3} \sqrt{m^2 c^2 - \pi_0^2} dx_3} - C_2' e^{+\frac{1}{h} \int_a^{x_3} \sqrt{m^2 c^2 - \pi_0^2} dx_3} \right] \\
 s_3 &= u_{01}^* u_{03} + u_{03}^* u_{01} = 2i [C_2 C_2'^* - C_2'^* C_2], \quad (28_2)
 \end{aligned}$$

Im Gebiet 3)

$$\begin{aligned}
 u_{01} &= a_{01} e^{\frac{i}{h} \bar{S}} = \left(\frac{-\pi_0 - m c}{-\pi_0 + m c} \right)^{1/4} \\
 &\quad \left[C_3 e^{-\frac{i}{h} \int_b^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2} d x_3} + C_3' e^{+\frac{i}{h} \int_b^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2} d x_3} \right] \\
 u_{03} &= a_{03} e^{\frac{i}{h} \bar{S}} = \left(\frac{-\pi_0 + m c}{-\pi_0 - m c} \right)^{1/4} \\
 &\quad \left[C_3 e^{-\frac{i}{h} \int_b^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2} d x_3} + C_3' e^{+\frac{i}{h} \int_b^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2 c^2} d x_3} \right] \\
 s_3 &= u_{01}^* u_{03} + u_{03}^* u_{01} = 2 (|C_3|^2 - |C_3'|^2). \quad (28_3)
 \end{aligned}$$

Im Gebiet 3) ist, wie aus dem Ausdruck für den Strom hervorgeht, für die nach rechts (links) fortschreitende Welle π_3 im Gegensatz zu s_3 negativ (positiv). Wir werden, unserem Programm entsprechend, für die hier zu betrachtende Lösung $C_3' = 0$ zu setzen haben.

Sollen unsere Lösungen eine und dieselbe Partikularlösung der strengen Wellengleichung approximieren, so muss, da für diese der Strom s_3 durchwegs konstant ist, s_3 in den drei Gebieten übereinstimmende Werte haben.

$$|C_1|^2 - |C_1'|^2 = i [C_2 C_2'^* - C_2^* C_2'] = |C_3|^2 - |C_3'|^2. \quad (29)$$

Der Durchlässigkeitskoeffizient ist

$$D = \frac{|C_3|^2}{|C_1|^2} \quad (30)$$

Wenn dieser eine kleine Zahl ist, wird sich $|C_1'|$ nur wenig von $|C_1|$ unterscheiden, ferner wird (verglichen mit $|C_1|^2$) C_2' von der Ordnung D , C_2 von der Ordnung 1 werden, da die beiden Terme von u_{01} und u_{03} im Gebiet 2) in der Nähe von $x_3 = b$ von derselben Grössenordnung werden müssen.

Um die Übergangsrelationen an den kritischen Stellen zu erhalten, genügt die geometrische Optik nicht, es ist vielmehr nötig, die strengen Wellengleichungen heranzuziehen. Andererseits müssen diese nur in der Nähe der kritischen Stellen, nicht im Zwischengebiet benützt werden. Wie dies zu geschehen hat, ist nicht für die relativistische Theorie charakteristisch, sondern ist in dieser ganz analog wie in der unrelativistischen Theorie. Wir wollen uns hier diesbezüglich deshalb kurz fassen und wegen der

Einzelheiten auf die eingangs zitierten Untersuchungen von KRAMERS verweisen. Man kann entweder in der Nähe der kritischen Stellen $\pi_0 + mc$ bzw. $\pi_0 - mc$ durch einen linearen Verlauf ersetzen und aus dem Verhalten der exakten Lösungen der Wellengleichung für homogenes Feld an den kritischen Stellen auf die allgemeine Form der Übergangsrelationen schliessen. Oder man kann, in der Nähe der kritischen Stellen in die komplexe Ebene ausweichend, das Verhalten der asymptotischen Partikularlösungen in der komplexen Ebene untersuchen. Dabei wird von der exakten Lösung der Wellengleichung nur vorausgesetzt, dass sie in der Nähe der kritischen Stellen analytisch in die komplexe Ebene fortgesetzt werden kann. Dies ist immer zutreffend, wenn das Potential und seine Ableitung dort stetig sind.

Betrachten wir zunächst die erste kritische Stelle $x_3 = a$, so kann man durch derartige Überlegungen zeigen¹⁾:

$$\begin{aligned} \text{für } C_1 = 0 \text{ gilt } C_2' &= C_1' \\ \text{für } C_2' = 0 \text{ gilt } C_2 &= C_1. \end{aligned}$$

Da ferner falls im Gebiet 1) u_{01} reelle und u_{03} rein imaginär ist, wie man aus der strengen Wellengleichung entnimmt, dasselbe für alle Gebiete folgt, ist der lineare Zusammenhang zwischen C_1, C_1' und C_2, C_2' hierdurch bereits bestimmt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2} C_1 + \frac{i}{2} C_1' \\ C_2' &= i C_1 + C_1'. \end{aligned} \quad (31a)$$

Man bestätigt hiermit übrigens den ersten Teil der Gleichung (29).

Die Behandlung der zweiten kritischen Stelle $x_3 = b$ gestaltet sich analog. Man führe zuerst folgende Abkürzungen ein: Das Wirkungsintegral

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{h} \int_a^b |\pi_3| dx_3 = \frac{1}{h} \int_a^b \sqrt{m^2 c^2 - \pi_0^2} dx_3 = \\ &= \frac{1}{h} \int_a^b \sqrt{m^2 c^2 - \left[\frac{E + e \Phi_0(x_3)}{c} \right]^2} dx_3 \end{aligned} \quad (32)$$

zwischen den kritischen Stellen, das im folgenden eine wesentliche Rolle spielen wird. Sodann

$$\bar{C}_2 = C_2 e^{-W}, \quad \bar{C}_2' = C_2' e^{+W}. \quad (33)$$

¹⁾ Vgl. insbesondere A. ZWAAN, Diss. Utrecht 1929, Kap. III, § 2, ferner H. A. KRAMERS und G. P. ITTMANN, ZS. f. Phys. **58**, 217, 1929, besonders S. 221 und 222.

Die letzteren Ausdrücke sind so gewählt, dass (28₂) richtig bleibt, wenn man die untere Integrationsgrenze a durch b und gleichzeitig C_2, C_2' durch \bar{C}_2, \bar{C}_2' ersetzt. Es ergibt sich dann wieder zunächst:

$$\begin{aligned} \text{für } C_3' = 0 \text{ gilt } \bar{C}_2 &= C_3 \\ \text{für } \bar{C}_2 = 0 \text{ gilt } \bar{C}_2' &= C_3' \end{aligned}$$

und sodann mit Rücksicht auf die Realitätsverhältnisse

$$\begin{aligned} \bar{C}_2 &= C_3 + i C_3' \\ \bar{C}_2' &= i/2 C_3 + 1/2 C_3' \end{aligned} \quad (31b)$$

Allgemein gilt als Folge von (31b) die zweite der Gleichungen (29).

Indem wir nunmehr $C_3' = 0$ setzen, folgt aus (31a), (33), (31b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_1 + \frac{i}{2} C_1' &= e^W C_3 \\ i C_1 + C_1' &= e^{-W} \frac{i}{2} C_3 \end{aligned} \quad (34)$$

und hieraus

$$C_3 = \frac{e^{-W}}{1 + \frac{1}{4} e^{-2W}} C_1, \quad C_1' = -i \frac{1 - \frac{1}{4} e^{-2W}}{1 + \frac{1}{4} e^{-2W}} C_1 \quad (35)$$

wobei man die Relation

$$|C_3|^2 = |C_1|^2 - |C_1'|^2$$

leicht bestätigen kann.

Bei der Beurteilung der Genauigkeit, mit der dieses Resultat Gültigkeit beanspruchen kann, ist zu beachten, dass es zwischen den Punkten $x_3 = a$ und $x_3 = b$ ein Gebiet von einer mit $b-a$ vergleichbaren Ausdehnung geben muss, in welchem der Gradient der Wellenlänge $\frac{2\pi h}{|\pi_3|}$ klein ist; andernfalls wäre die Anwendung der geometrischen Optik unerlaubt. Ist dies erfüllt, so ist stets W eine grosse Zahl und wir können und sollen daher e^{-2W} gegen 1 vernachlässigen. An Stelle von (35) erhalten wir dann einfach

$$C_3 = e^{-W} C_1, \quad C_1' = -i C_1 \quad (35a)$$

und für den durch (30) definierten Durchlässigkeitskoeffizient

$$D = e^{-2W}. \quad (36)$$

Die Unabhängigkeit dieses Wertes von D von der Polarisation der Elektronenwelle wurde bereits erwähnt.

Dieses Resultat ist bisher in der hier erreichten Allgemeinheit — der Verlauf des Potentials $\Phi_0(x_3)$ zwischen den kritischen

Stellen war von der Stetigkeit abgesehen, beliebig — nicht in der Literatur angegeben. Für zwei spezielle Annahmen über den Potentialverlauf, das homogene Feld

$$-e \Phi_0(x_3) = a x_3$$

und den Verlauf

$$-e \Phi_0(x_3) = \frac{P}{2} \frac{1 - e^{-a x_3}}{1 + e^{-a x_3}}$$

ist D von *Sauter*¹⁾ berechnet worden. Die Auswertung des Wirkungsintegrals (32) in diesen Spezialfällen ergibt exakte Übereinstimmung unseres allgemeinen Ausdruckes (36) mit den von SAUTER angegebenen D -Werten. Hierzu sei bemerkt, dass auch SAUTER bei der Auswertung der strengen Lösungen schliesslich asymptotische Näherungen einführt, die unseren genau entsprechen.

§ 5. Bemerkungen zur Frage der prinzipiellen Bedeutung der Übergänge in Zustände mit negativer kinetischer Energie.

Es sei gestattet, hier noch einige Bemerkungen anzufügen über die prinzipielle Bedeutung des Kleinschen Paradoxons, obwohl diese mit der vorangehenden methodischen Untersuchung, die ganz innerhalb des Rahmens der bisherigen Theorie verläuft, nur in einem losen Zusammenhang stehen. Der Verfasser ist der Meinung, dass alle bisherigen Versuche, sich mit dem Kleinschen Paradoxon (oder allgemeiner auch mit den gemäss der bisherigen Theorie durch Strahlung bedingten Übergängen zu Zuständen negativer Energie, auf die wir hier nicht näher eingehen) auseinanderzusetzen, nicht als befriedigend angesehen werden können. Zunächst scheint der blosser Hinweis auf den Umstand, dass für alle praktisch herstellbaren elektrischen Felder der Koeffizient D gemäss (36) ungeheuer klein wird, nicht ausreichend zu sein, um die Schwierigkeit zu entkräften. Wenn nämlich ein Elektron mit negativer kinetischer Energie erst einmal entstanden wäre, so sollte es nach der Theorie ebenso stabil sein wie ein gewöhnliches Elektron, und da in der Natur beliebig lange Zeiten zur Verfügung stehen, müssten bei Richtigkeit der Theorie jene Elektronen mit negativer Masse sicherlich in merklicher Zahl vorhanden sein, auch wenn ihre Entstehungswahrscheinlichkeit eine sehr kleine wäre.

Sodann liegen bisher zwei Versuche vor, die Theorie so abzuändern, dass die Übergänge zu Zuständen negativer Energie nicht nur unwahrscheinlich, sondern unmöglich werden. Bei beiden Versuchen dieser Art treten dann jedoch ebenso grosse

¹⁾ F. SAUTER, ZS. f. Phys. **69**, 742, 1931; **73**, 547, 1931.

Schwierigkeiten an anderen Stellen auf. So stellt z. B. der Vorschlag von SCHRÖDINGER¹⁾ — abgesehen davon, dass, wie SCHRÖDINGER selbst betont, die relativistische Invarianz der Theorie hierbei verloren geht — im Widerspruch mit der klassischen Thomsonschen Formel für die Streuung von Licht durch freie Elektronen, deren Gültigkeit für Wellenlängen des Lichtes, die gross sind gegenüber h/mc , sowohl aus empirischen als auch aus theoretischen Gründen unbedingt zu fordern ist. Andererseits wird bei der sogenannten Diracschen „Löcherwelt“²⁾, dem zweiten der erwähnten Versuche einer Abänderung der Theorie, in ihrer neuesten Fassung an Stelle des Elektrons mit negativer Masse ein „Antielektron“ eingeführt, dessen Ladung $+e$ und dessen Masse gleich der des gewöhnlichen Elektrons ist. Es ist wesentlich für diese Theorie, dass die Naturgesetze in bezug auf Elektron und Antielektron exakt symmetrisch sein sollten. Um daher das tatsächliche Fehlen der Antielektronen zu erklären, muss man eine besondere Annahme über den Anfangszustand in der Natur machen, in welchem bereits die eine Elektronensorte die andere sehr stark überwiegen müsste. Von den strahlungstheoretischen Schwierigkeiten dieser Theorie ganz abgesehen, scheint dies ein überaus künstlicher und unbefriedigender Ausweg zu sein.

Sicherlich hängt das Problem der Zustände negativer Energie so eng mit der Frage der Stabilität des Elektrons und der Beziehung von Elektron und Proton zusammen, dass eine Beseitigung dieser Schwierigkeit erst von einer Theorie erwartet werden kann, welche zwischen der Atomistik der elektrischen Ladung und der Existenz des Wirkungsquantums eine logische Verbindung herstellt³⁾. Andererseits scheinen dem Verfasser die Zustände negativer Energie so eng verknüpft zu sein mit dem ganzen Formalismus der jetzigen Theorie — dem Operieren mit kontinuierlichen Wellenfunktionen in Raum und Zeit, deren Quadrate die Wahrscheinlichkeit für den Teilchenort bestimmen — dass wir in dem Kleinschen Paradoxon einen Hinweis dafür zu erblicken meinen, dass die künftige Theorie des Elektrons mit wesentlichen und tiefgreifenden grundsätzlichen Abänderungen des Formalismus der jetzigen Wellenmechanik verbunden sein wird.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

¹⁾ E. SCHRÖDINGER, Berl. Ber. 1931, S. 63.

²⁾ P. A. M. DIRAC, Proc.-Roy. Soc. A, **126**, 360, 1930; **133**, 60, 1931.

³⁾ Die Notwendigkeit einer solchen Verbindung wurde von BOHR besonders nachdrücklich hervorgehoben (vgl. z. B. dessen Faraday Lecture, Journ. of the Chemical Society, Febr. 1932, S. 349).