

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 5 (1932)

Heft: III

Artikel: Anwendung der Optik trüber Medien auf die Beleuchtung der Atmosphäre. II., Vereinfachte Ausdrücke zur Berechnung der Helligkeit der Atmosphäre

Autor: Gruner, P.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110163>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Anwendung der Optik trüber Medien auf die Beleuchtung der Atmosphäre.

II. Vereinfachte Ausdrücke zur Berechnung der Helligkeit der Atmosphäre

von P. Gruner.

(23. III. 32).

Inhaltsangabe. In Ergänzung einer früheren Arbeit¹⁾ wird der Versuch gemacht, mit Verwendung plausibler Annäherungen eine verhältnismässig einfache Formel herzuleiten, die es gestattet, die Helligkeitsverteilung am ganzen Himmel zu berechnen, für die ideal-reine Atmosphäre und unter Vernachlässigung der mehrfachen Lichtzerstreuung. Ebenso werden einfache Ausdrücke hergeleitet für die Intensität einer homogenen, dünnen atmosphärischen Schicht, wie sie in der optisch getrübbten Atmosphäre anzunehmen ist.

A. Die Helligkeit der Atmosphäre.

Im ersten Teil dieser Arbeit¹⁾ wurden die allgemeinen Gesetze für die Beleuchtung des Himmels angeführt und anknüpfend daran die von KLEINERT und RAMANATHAN durchgeführten Berechnungen eingehend besprochen. Es zeigte sich, dass diese Rechnungen auf Grund verschiedenartiger Annäherungen und zum Teil nur durch graphische Integrationen mühsam ausgeführt werden konnten. Im folgenden wird der Versuch gemacht, die Annäherungen einheitlich zu fassen und sie so zu gestalten, dass eine relativ einfache Schlussformel herauskommt, die nahezu für die ganze sichtbare Himmelsfläche die Helligkeitsverteilung zu berechnen gestattet.

1. Die allgemeinen Grundlagen.

Ein Beobachter B (s. Figur 1) befindet sich in einer Höhe H_0 über der als Kugel mit dem Radius R_0 gedachten Erdoberfläche. Alle weiteren Bezeichnungen werden auf eine durch den Beobachter konzentrisch gelegte Kugelfläche mit dem Radius $R = R_0 + H_0$, die „Grundfläche“ genannt wird, bezogen. Die oberste Grenze der optisch wirksamen Atmosphäre habe die Höhe H über der Grundfläche. Die Sonnenstrahlen werden als Parallelstrahlenbündel

¹⁾ P. GRUNER, Helv. Phys. Acta 5, 31, 1932; wird im folgenden einfach als I bezeichnet.

aufgefasst, das mit der Intensität I auf die oberste Grenze der Atmosphäre auftrifft; dieses Sonnenlicht sei unpolarisiert, I beziehe sich auf eine bestimmte Wellenlänge λ . Die Zenitdistanz der Sonne für den Beobachter B sei $Z = 90^\circ + \delta$, also δ die Sonnentiefe; von der atmosphärischen Strahlenbrechung wird vollständig

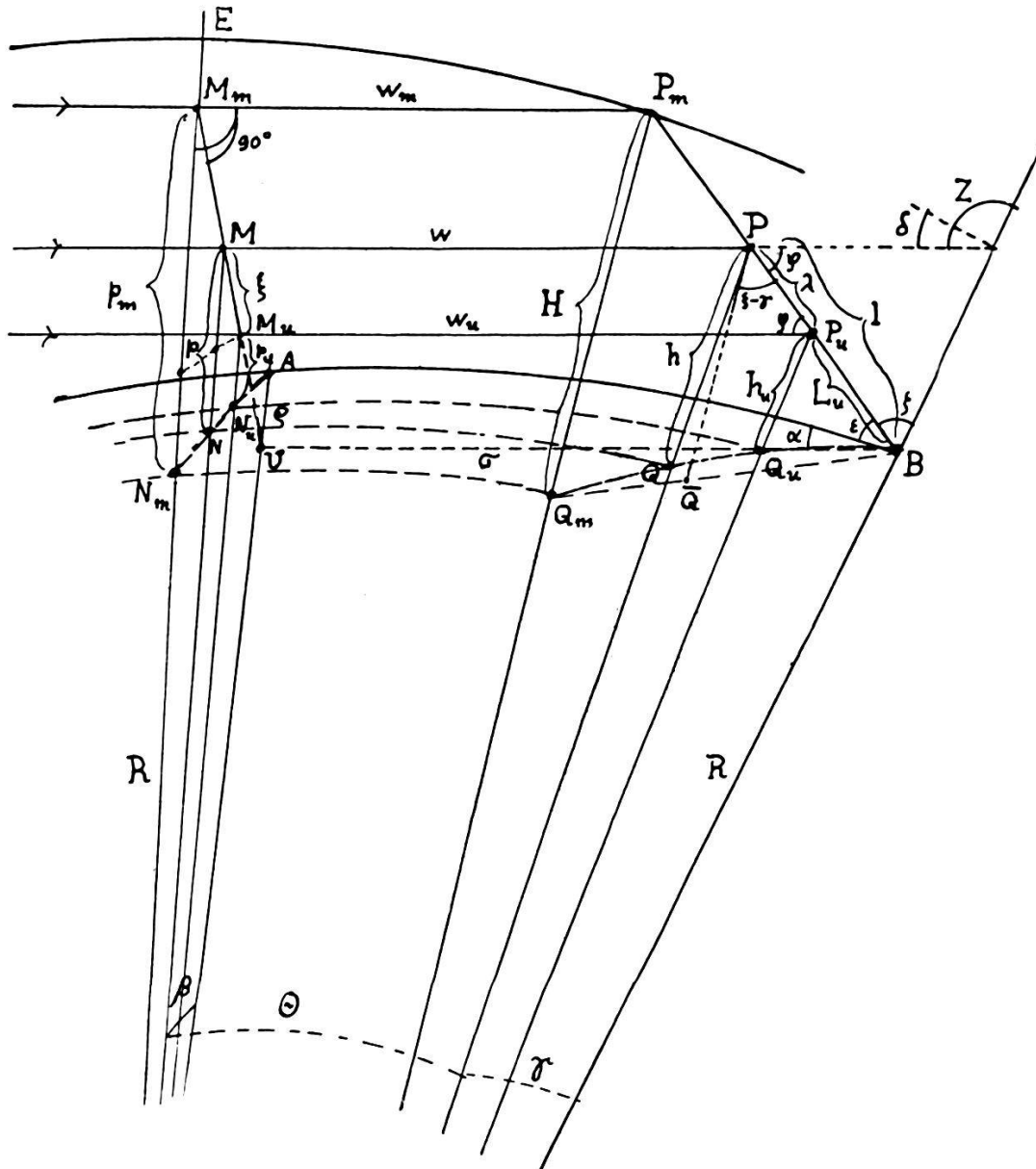


Fig. 1.

abgesehen. Die Meridianebene des Beobachters, die zu den Sonnenstrahlen parallel verläuft, heisst der Sonnenvertikal; er liegt in Figur 1 in der Zeichnungsebene. Der Beobachter blicke in einer unter dem Azimut α (positiv nach links) zum Sonnenvertikal gedrehten Meridianebene, der Blickebene, nach dem Himmel, und zwar in einer Blickrichtung, deren Zenitdistanz $\zeta = 90^\circ - \epsilon$ ist

(ξ positiv, wenn die Blickrichtung nach der Sonnenseite geht; ξ negativ nach der Gegenseite). Der Sehstrahl in dieser Blickrichtung und die ihn treffenden Sonnenstrahlen bilden die Einfallsebene $M_m P_m B$, die in Figur 3 (S. 151) in die Zeichnungsebene gelegt ist. Der Winkel zwischen den einfallenden Sonnenstrahlen und dem nach dem Beobachter gerichteten Sehstrahl heisst der Zerstreuungswinkel φ . Die Einfallsebene ist unter einem Winkel ψ zum Sonnenvertikal geneigt.

Ein im Sehstrahl liegender Punkt P , der sich in der Entfernung $l = BP$ vom Beobachter befindet, habe die Höhe $h = QP$ über der Grundfläche; $p = NM$ sei der kürzeste Abstand der Grundfläche von dem durch P gehenden Sonnenstrahl; auf dem Sonnenstrahl sei $MP = w$ (w ist positiv, wenn P rechts von M liegt; w negativ, wenn P links von M), ferner die Strecke von M bis zur Grenze der Atmosphäre (s. Figur 3, S. 151) $MS = s$. Der Sehstrahl endet im Punkt P_m , für welchen $h = h_m = H$ wird; die Blicklänge BP_m werde mit L_m (oder kurzweg mit L) bezeichnet, die übrigen entsprechenden Grössen sind p_m und $w_m = s_m$. Wenn irgend ein die Grundfläche überragender Gegenstand das Sonnenstrahlenbündel nach unten abgrenzt, so bleibt eine Strecke $BP_u = L_u$ des Sehstrahles im Schatten; die zu P_u gehörenden Grössen sind h_u, p_u, w_u, s_u (es kann Fälle geben, in denen die Grundfläche höher liegt, so dass h_u, p_u und L_u negativ werden; in der Regel ist aber $p_u = 0$).

Befinden sich im Punkt P pro Volumeinheit n gleichartige, isotrope Teilchen¹⁾ und ist Γ deren Zerstreuungsfunktion (s. I, S. 35), die mit dem Auslöschungskoeffizienten κ des durch diese Teilchen gebildeten trüben Mediums durch die Beziehung

$$\kappa = n \cdot k = n \iint \Gamma \cdot d\omega$$

zusammenhängt, so gilt für die *Intensität J der Himmelsbeleuchtung* in der Blickrichtung (s. I, S. 36):

$$J = I \int_{l=L_u}^{l=L_m} n \cdot \Gamma \cdot e^{-\int_0^{s+w+l} \kappa(\xi) d\xi} \cdot dl. \quad (1)$$

Dabei ist ausdrücklich hervorzuheben, dass *nur die einfache Lichtzerstreuung an den schwebenden Teilchen berücksichtigt wird.*

¹⁾ Über die genaueren Voraussetzungen der Theorie siehe: P. GRUNER, Beitr. z. Phys. d. freien Atmosph. 8, 120, 1919.

2. Die geometrischen Beziehungen.

Da die Verhältnisse hier nicht nur im Sonnenvertikal untersucht werden, wie in (I), sind die geometrischen Beziehungen etwas komplizierter.

Gegeben sind: R , $h_m = H$, p_u , δ ; ferner α und ζ .

Aus den sphärischen Dreiecken (Figur 2), die entstehen, wenn man vom Erdzentrum O Radien nach der Sonne, nach F ,

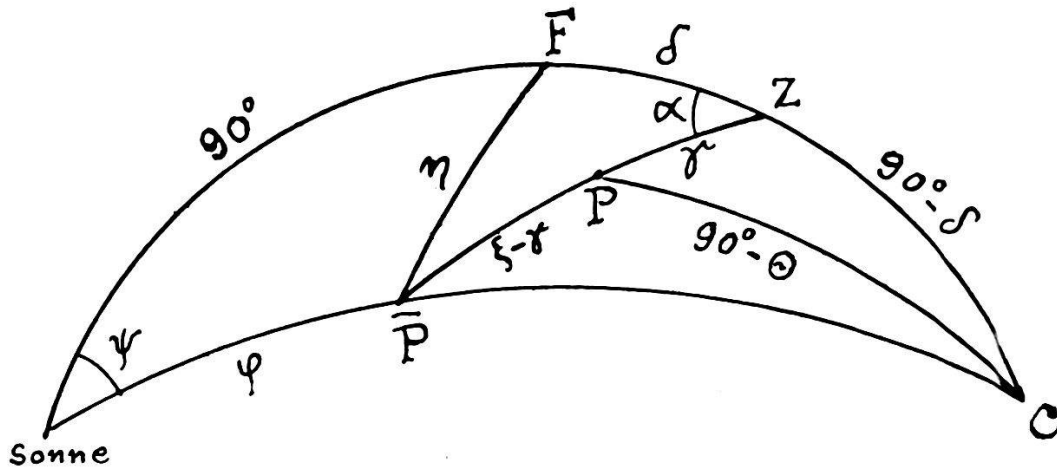


Fig. 2.

nach Z und eine Parallele zu BP nach \bar{P} zieht, ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= -\sin \delta \cos \zeta + \cos \delta \sin \zeta \cos \alpha \\ \cos \eta &= \cos \delta \cos \zeta + \sin \delta \sin \zeta \cos \alpha = \sin \varphi \cos \psi. \end{aligned}$$

Bei gegebenem h folgt:

$$\left. \begin{aligned} l &= \tau - R \cdot \cos \zeta, \text{ wenn } \tau = +\sqrt{2Rh + h^2 + R^2 \cos^2 \zeta}, \\ w &= \sigma - l \cdot \cos \varphi, \text{ wenn } BU = \sigma = R \cdot \sin \delta, \\ (R + p)^2 &= (R + h)^2 - w^2 \text{ ergibt } p; \\ s^2 &= (R + H)^2 - (R + p)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Setzt man hierin $h = H$, so erhält man L , $w_m = s_m$, p_m . Von der untern Strahlenbegrenzung ist p_u gegeben; zur weiteren Berechnung muss man ausgehen von

$$\begin{aligned} (R + p)^2 &= (R + h)^2 - w^2 \\ (R + p)^2 &= R^2 + l^2 + 2Rl \cos \zeta - (R \sin \delta - l \cos \varphi)^2 \\ (R + p)^2 &= R^2 \cos^2 \delta + 2Rl \cos \delta \cos \eta + l^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Auflösung dieser Gleichung mit $p = p_u$ ergibt L_u , das immer eindeutig festgesetzt werden kann; daraus folgt

$$w_u = \sigma - L_u \cdot \cos \varphi.$$

Ferner folgen h_u und s_u aus den oben angegebenen Formeln.

Endlich ergibt sich (Figur 1 oder 3), wenn $P_u P = \lambda$, $M_u M = \xi$ gesetzt wird:

$$w = w_u - \xi \cdot \cotg \varphi = w_u - \lambda \cdot \cos \varphi. \quad (4)$$

3. Die physikalischen Annäherungen.

Wie schon bemerkt, wird nur die primäre Lichtzerstreuung an den in der Atmosphäre schwebenden Teilchen (bzw. den sie bildenden Molekeln) berücksichtigt. Ferner werde angenommen, dass die im Gleichgewicht befindliche Atmosphäre aus konzentrischen, homogenen Kugelschichten bestehe. Es ist dann die Zahl der Teilchen pro Volumeinheit n nur noch eine Funktion der Höhe h . Die einfachste Annahme, die sich den gewohnten Auffassungen am besten anpassen lässt, ist die eines exponentiellen Abfalles:

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda h} \quad (5)$$

worin λ (das hier nicht die Wellenlänge bezeichnet) etwa den Wert $1/8 \text{ km}^{-1}$ haben wird; es entspricht dies auch ungefähr der Annahme für $H = 80 \text{ km}$ (sog. Grenze der Atmosphäre).

Unter Umständen kann diese Exponentialkurve auch durch eine sich anschmiegende gleichseitige Hyperbel approximiert werden. Diese Annäherung ist zweckmässig da, wo das Produkt $n \cdot h$ auftritt, das dann als Konstante behandelt werden kann. Der Wert dieser Konstanten kann als Mittelwert von $n \cdot h$ über die betreffende Höhenstrecke gesetzt werden:

$$\overline{n \cdot h} = \frac{n_0}{h_m - h_u} \int_{h_u}^{h_m} h \cdot e^{-\lambda h} \cdot dh = \text{konstant.}$$

Im Höhenintervall 0 bis H wird dieser Ausdruck $= \frac{1}{\lambda^2 H}$, ein wenig kleiner als n_0 .

Im übrigen ergibt sich:

$$\int_{h_u}^h n \cdot dh = n_0 \int_{h_u}^h e^{-\lambda h} \cdot dh = -\frac{n_0}{\lambda} (e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h_u}).$$

Wenn die Teilchen als isotrop und gleichartig vorausgesetzt werden, sind Γ , n_0 und $k_0 = n_0 k$ bei der Integration Konstante. Es ergibt sich dann für die Intensität, wenn allgemein $\varkappa = n k$ gesetzt wird:

$$J = I \cdot \Gamma \int_{l_u}^L n \cdot e^{-k} \left\{ \int_0^l n \cdot dl + \int_0^{s+w} n \cdot d\xi \right\} \cdot dl.$$

Für reine Molekularstreuung gilt das Rayleigh'sche Gesetz:

$$I = \frac{3}{16 \pi} (1 + \cos^2 \varphi) \cdot k ; \quad z = n k = \frac{8 \pi^3 (\nu^2 - 1)^2}{3 \lambda^4 n}, \quad (6)$$

worin jetzt λ die Wellenlänge, ν den Brechungsindex bezeichnet.

4. Die geometrischen Annäherungen.

Um das Integral für J auswerten zu können, sind gewisse Annäherungen zu treffen, die ihre Berechtigung darin finden, dass R sehr gross gegenüber H ist, sodass die kugelförmigen atmosphärischen Schichten nur wenig von ebenen Schichten abweichen.

Zunächst wird für jeden Punkt P des Sehstrahles eine Proportionalität zwischen l und h angenommen, indem die Bogenlinie $B Q Q_m$ der Grundfläche (s. Figur 1) durch die Sehne $B \bar{Q} Q_m$ ersetzt wird, und die Höhen $h = P Q$ durch die zu $H = P_m Q_m$ parallelen Höhen $P \bar{Q}$ ersetzt werden. Es wird dann:

$$l = \frac{L}{H} h,$$

$$n \cdot dl = \frac{L}{H} n_0 \cdot e^{-\lambda h} \cdot dh,$$

$$\int_0^l n dl = -n_0 \frac{L}{\lambda H} \cdot e^{-\lambda h}.$$

Wesentlich gröber muss die Annäherung im

$$\int_0^{s+w} n \cdot d\xi$$

ausgeführt werden.

Es genügt, wenn hier die gekrümmten Atmosphärenschichten durch ebene ersetzt werden, deren mittlere Höhe h für jeden Sonnenstrahl $S M P$ gleich $M N = p$ gesetzt wird¹⁾. Dann wird (s. Figur 3):

$$\int_0^{s+w} n \cdot d\xi = n_{(p)} \cdot (s+w)_{(p)}.$$

¹⁾ Eventuell könnte p durch einen bestimmten Faktor verkleinert werden, doch ist kaum zu erwarten, dass die Annäherung dadurch wesentlich verbessert würde.

Auch hier werden diese Höhen p alle parallel zu $M_m N_m = p_m$ angenommen und die Bogenlinie $N_u N N_m$ (Fig. 1) durch die Sehne $N_u \bar{N} N_m$ ersetzt, so dass p durch $M \bar{N}$ ersetzt wird. Zweckmässig wird dann $p = \tau + p_u$, $p_m = \tau_m + p_u$ gesetzt.

Führen wir abkürzend

$$\frac{\tau_m}{\xi_m} = \frac{p_m - p_u}{(L - L_u) \sin \varphi} = \cos \psi_m \quad (7)$$

ein, so wird $\tau = \xi \cos \psi_m$ (ψ_m ist eine reine Rechnungsgrösse).

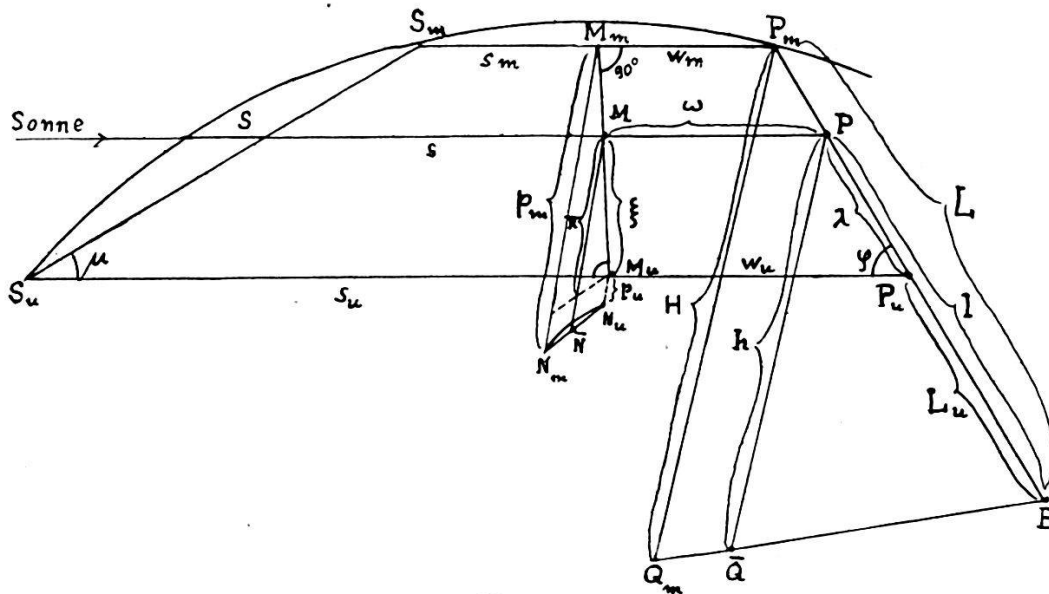


Fig. 3.

Als weitere Annäherung ist in der Einfallsebene (Figur 3) das flache Bogenstück $S_u S_m$ durch die Sehne $S_u S_m$ zu ersetzen. Unter Benützung des Neigungswinkels μ

$$\cotg \mu = \frac{s_u - s_m}{(L - L_u) \sin \varphi} \quad (8)$$

wird dann:

$$s_u - s = \xi \cotg \mu = \tau \frac{\cotg \mu}{\cos \psi_m}.$$

Verbunden mit $w = w_u - \xi \cotg \varphi$ (nach (4) S. 149), und unter Einsetzen von $\tau = h - p_u$, indem nun $p = h$ als Höhe des Sonnenstrahles SP angenommen wird, folgt:

$$n(s + w) = n \left(s_u + w_u - (h - p_u) \frac{\cotg \mu + \cotg \varphi}{\cos \psi_m} \right).$$

Mit den Substitutionen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cotg \mu + \cotg \varphi}{\cos \psi_m} &= C, \\ s_u + w_u &= S_u, \\ S_u + p_u C &= S, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wird

$$n(s + w) = n(S - C h).$$

Hierin wird nun nh durch den *konstanten* Mittelwert \overline{nh} ersetzt, so dass sich ergibt:

$$\int_0^{s+w} n d\xi = n_0 \cdot S \cdot e^{-\lambda h} - \overline{nh} \cdot C.$$

Dabei ist bei Berechnung des Mittelwertes \overline{nh} von p_u bis p_m zu integrieren.

5. Die Intensität der Himmelsbeleuchtung.

Mit diesen Annäherungen wird:

$$J = I \cdot \Gamma \cdot n_0 \cdot \frac{L}{H} e^{k \overline{nh} C} \int_{h_u}^H e^{-\lambda h} \cdot e^{-z_0 \left(s - \frac{L}{\lambda H} \right)} \cdot e^{-\lambda h} \cdot dh.$$

Für $e^{-\lambda h} = x$ wird das Integral zu

$$\int e^{-z_0 \left(s - \frac{L}{\lambda H} \right) x} \cdot dx.$$

Unter Berücksichtigung, dass für $h = H$ die obere Grenze von $x = 0$ ist, folgt

$$J = I \cdot \frac{n_0 \Gamma}{z_0} \cdot \frac{L}{\lambda H} \cdot \frac{e^A}{B} (1 - e^{-B z_u}),$$

worin

$$A = k \overline{nh} C, \quad z_u = z_0 \cdot e^{-\lambda h_u} = k \cdot n_u$$

$$B = S - \frac{L}{\lambda H}, \quad n = n_0 e^{-\lambda h}$$

$$C = \frac{\cotg \mu + \cotg \varphi}{\cos \psi_m}, \quad S = S_u + p_u C, \quad S = s_u + w_u.$$

In genügender Annäherung kann in den meisten Fällen, wo A klein ist, $e^A = 1$ gesetzt werden; ebenso ist in der Regel $p_u = 0$, also $S = S_u$. Wird noch das Rayleigh'sche Gesetz verwendet, so wird

$$J = I \cdot \frac{3}{16 \pi} (1 + \cos^2 \varphi) \cdot \frac{1 - e^{-B z_u}}{B} \cdot \frac{L}{\lambda H}.$$

mit

$$B = s_u + w_u - \frac{L}{\lambda H}.$$

Beschränkt man die Berechnungen auf den Sonnenvertikal, so sind B und z_u , bzw. h_u , einfach zu berechnen. Man findet ohne grosse Schwierigkeiten:

$$\left. \begin{aligned} w_u &= R \frac{\sin \zeta - \sin (\zeta - \delta)}{\cos (\zeta - \delta)}, \quad s_u = (2 R + H) H \\ \operatorname{tg} \Theta_u &= \frac{w_u}{R}, \quad h_u = w_u \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta_u}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Will man dabei das Glied e^A berücksichtigen, so berechnet sich

$$p = l \cdot \cos (\zeta - \delta) - R (1 - \cos \delta),$$

und es wird

$$C = \operatorname{cotg} \mu + \operatorname{cotg} \varphi.$$

B. Die Helligkeit einer dünnen homogenen Atmosphärenschicht.

In der idealreinen Atmosphäre, wie sie im vorigen Abschnitt vorausgesetzt wurde, können mannigfache trübende Teilchen schweben, wodurch die Helligkeitsverteilung des Himmels stark verändert wird. Um diese störenden Einflüsse zu berechnen, soll zunächst nur die optische Wirkung einer sehr dünnen, homogenen, trübenden Schicht im leeren Raum betrachtet werden.

Die Schicht wird als homogen bezeichnet, wenn sie konstante Werte von n und h und I aufweist, abgesehen von der Abhängigkeit von I von φ . Die Schicht gilt als dünn, wenn sie durch zwei konzentrische Kugelflächen in den Höhen h und $h' = h - \Delta h$ über der Grundfläche begrenzt ist, so lange man die Dicke Δh und die damit zusammenhängenden Strecken Δl , Δw und Δp als Differentiale behandeln darf.

1. Allgemeine geometrische Beziehungen.

Bei gegebener Höhe h der oberen Schichtfläche und gegebenem δ , ζ und α gilt für einen anvisierten Punkt P derselben:

$$l = \tau - R \cdot \cos \zeta ; \quad \tau = + \sqrt{(R + h)^2 - R^2 \sin^2 \zeta},$$

$$w^2 = (R + h)^2 - (R + p)^2.$$

Die untere Schichtfläche, in der Höhe $h' = h - dh$, wird vom

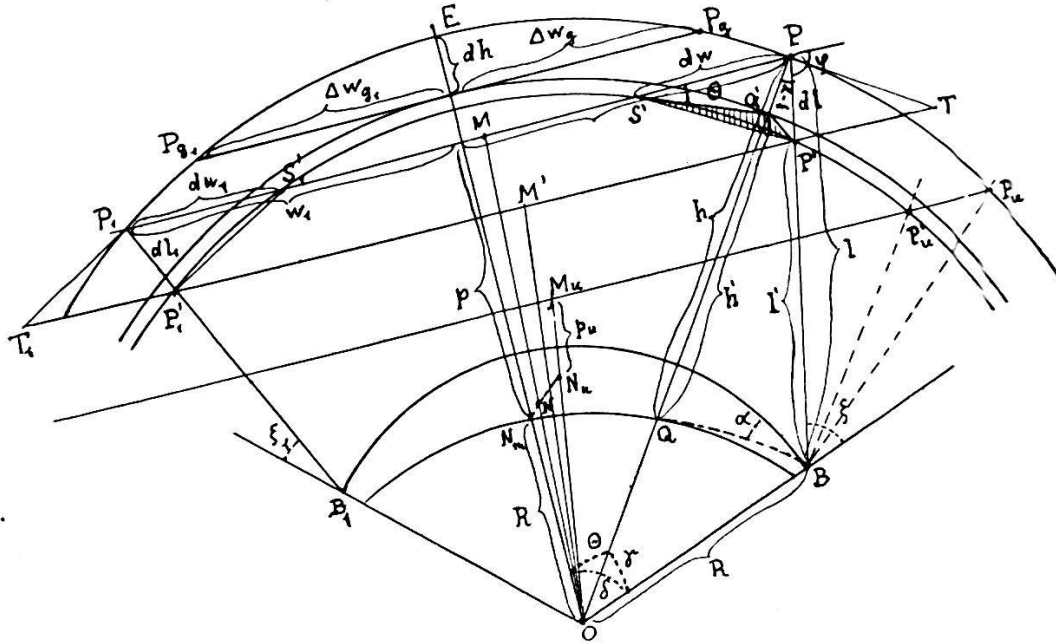


Fig. 4.

Sehstrahl, bei konstantem α und ζ , im Punkte P' getroffen, so dass

$$PP' = -dl = -d\tau = -\frac{R+h}{\tau} \cdot dh = -\frac{dh}{\cos(\zeta - \gamma)}$$

wird.

Der Sonnenstrahl nach P trifft die untere Schichtfläche in S' , so dass, bei konstantem p ,

$$PS' = -dw = -\frac{R+h}{w} \cdot dh = -\frac{dh}{\sin \Theta}$$

wird.

Auf eine Schicht von endlicher Dicke Δh (s. Figur 5) übertragen, ergibt sich:

$$\Delta l = \frac{R+h}{\tau} \cdot \Delta h = \frac{\Delta h}{\cos(\zeta - \gamma)} ; \quad \Delta w = \frac{R+h}{w} \cdot \Delta h = \frac{\Delta h}{\sin \Theta}. \quad (11)$$

Die Winkel in den 3 Dreiecken, die in P zusammenstossen,

sind: $\zeta - \gamma$, $90 - \Theta$, $180 - \varphi$; der Winkel v , den die Einfallsebene $S' P P'$ mit der Vertikalen $P Q'$ bildet, berechnet sich aus

$$\sin v = \frac{\cos \delta \cdot \sin \alpha}{\sin \varphi} \cdot \sin (\zeta - \gamma).$$

Die hier getroffene Annäherung liegt darin, dass das Kugelflächenstück $S' Q' P'$ ersetzt wird durch ein ebenes Dreieck in der Tangentialebene an Q' . Der Schnitt der Einfallsebene mit der

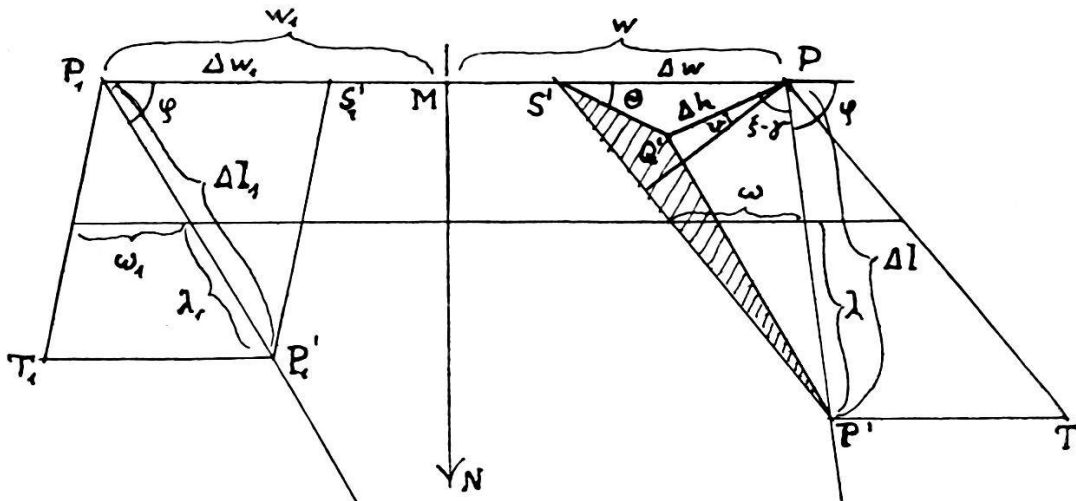


Fig. 5.

Schicht wird also in mehr oder weniger grosser Annäherung durch das Trapez $S' P T P'$ ersetzt.

2. Die Grenzwinkel.

Je nach den Gebieten, die der Sehstrahl in der Schicht durchläuft, ist die Verwendung der getroffenen Annäherung verschieden.

Die Sonnenstrahlen, die die untere Schichtfläche umhüllen und für die also $p = h'$, durchsetzen in der Schicht eine Strecke $P_{g_1} P_g = 2 \Delta w_g$ (Figur 4). Ebenso werden die der Erdoberfläche am nächsten durchgehenden Sonnenstrahlen (im Abstand $R + p_u$) die untere Schichtfläche in Punkten P'_u , die obere in Punkten P_u treffen¹⁾.

Bei gegebenem α werden sich folgende Grenzwerte von ζ feststellen lassen:

ζ_u für den Sehstrahl $B P_u$, ζ'_u für $B P'_u$, ζ_g für $B P_g$ und ζ_{g_1} für $B P_{g_1}$.

Diese Grenzwinkel lassen sich auf folgende Weise berechnen: für jeden der 4 Punkte P_g , P_{g_1} , P_u , P'_u ist h und p vorgegeben,

¹⁾ Um die Figur nicht zu kompliziert zu gestalten, sind die Punkte P_{g_1} , P_g , P'_u und P_u perspektivisch nicht richtig gezeichnet.

also sind ohne weiteres die Strecken Δw_g , $w_u = M_u P_u$ und $w_a = M'_u P'_u$, sowie die zugehörigen Winkel Θ aus $\cos \Theta = (R + p)/(R + h)$ zu berechnen; ev. kann zuerst Θ und dann $w = (R + p) \operatorname{tg} \Theta$ bestimmt werden. Aus dem ΔPCZ (Figur 2, S. 148) folgt:

$$\sin \Theta = \cos \gamma \cdot \sin \delta - \sin \gamma \cdot \cos \delta \cdot \cos \alpha.$$

Mit Benützung eines Hülfswinkels x :

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \delta \cos \alpha$$

folgt

$$\sin (x - \gamma) = \frac{\sin \Theta \cdot \sin x}{\sin \delta}.$$

Vermittelst des daraus gefundenen γ ergibt sich ζ aus

$$\frac{R}{R + h} = \frac{\sin (\zeta - \gamma)}{\sin \zeta} = \cos \gamma - \sin \gamma \cdot \operatorname{cotg} \zeta.$$

3. Die Berechnung der Wegstrecken.

1) Für $\zeta'_u < \zeta < \zeta_g$ ist der Weg des die Schicht durchsetzenden Sonnenstrahles (Figur 5) vor und nach der Streuung

$$\Delta w_1 + \omega + \lambda.$$

Da hier $\Delta w_1 = \Delta w$, ferner

$$\frac{\omega}{\lambda} = \frac{\Delta w}{\Delta \lambda},$$

so folgt für diesen Weg:

$$\Delta w + \lambda \frac{\Delta l + \Delta w}{\Delta l} = \Delta w + \frac{\lambda}{D},$$

wenn

$$D = \frac{\Delta l}{\Delta l + \Delta w}$$

gesetzt wird.

Hiebei geht λ von Null bis Δl . Es ist möglich, dass die Wegstrecke $\Delta w_1 = \Delta w$ wegfällt, wenn die störende Schicht nur rechts von MN ausgebildet ist.

2) Für $\zeta_{g_1} < \zeta$ (s. Figur 5, links) ist der zu betrachtende Weg in der Schicht nur $\omega_1 + \lambda_1$, worin

$$\frac{\omega_1}{\Delta l_1 - \lambda_1} = \frac{\Delta w_1}{\Delta l_1}.$$

Es folgt für diesen Weg:

$$\Delta w_1 + \lambda_1 \frac{\Delta l_1 - \Delta w_1}{\Delta l_1} = \Delta w_1 + \frac{\lambda_1}{D_1},$$

wenn

$$D_1 = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_1 - \Delta w_1}.$$

Auch hier geht λ_1 von Null bis Δl_1 .

3) Für $\zeta_g < \zeta < \zeta_{g_1}$, wenn der Sehstrahl $P'P$ in P'' in die von der Schicht oberhalb Δw_g gebildeten Kalotte eindringt, sind die Wegstrecken die zu $\Delta l'$ und $\Delta l''$ (s. Figur 6) gehören, zu unterscheiden, und es ist $M_g P'' = \Delta w''$ zu bestimmen.

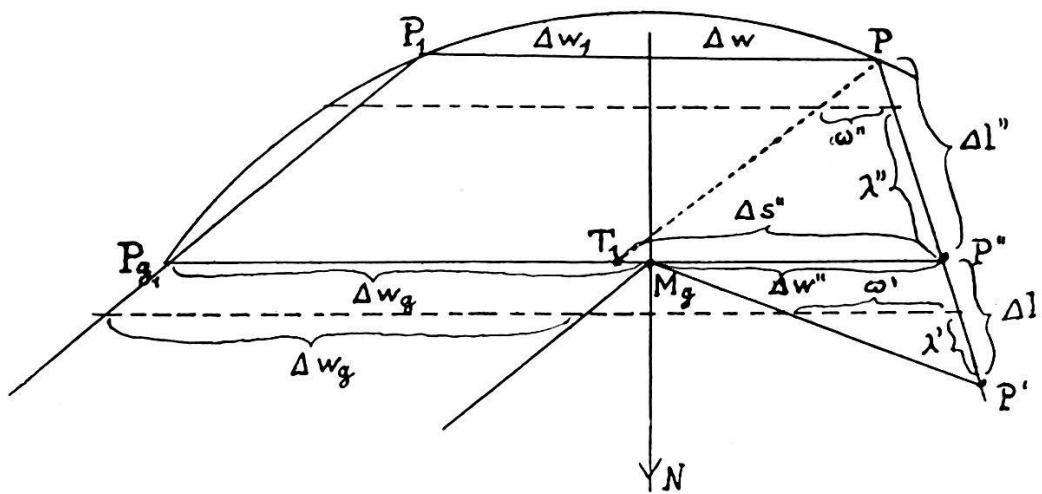


Fig. 6.

Wie im allgemeinen Fall unseres ersten Abschnittes (s. Figur 3, S. 151) wird der Schnitt der Einfallsebene mit der Schicht durch ein geeignetes Trapez (s. Figur 6) ersetzt, und für den Teil der Schicht der links unterhalb $M_g P_g$ liegt, wird die Länge der sie durchquerenden Sonnenstrahlen konstant = Δw_g angenommen.

a) Für $\Delta l' = P'P''$ gelten dieselben Beziehungen wie im Fall 1), nur ist das Δw_1 des früheren Falles hier = Δw_g zu setzen.

Der betrachtete Weg wird demnach:

$$\Delta w_g + \frac{\lambda'}{D'},$$

mit

$$D' = \frac{\Delta l'}{\Delta l' + \Delta w''},$$

wobei λ' von Null bis $\Delta l'$ läuft. Es ist zu bemerken, dass Δw_g immer positiv ist, während $\Delta w'' = M_g P''$ positiv oder negativ ist, je nachdem P'' rechts oder links von M_g liegt.

b) Für $\Delta l'' = P'' P$ ist, ähnlich wie im Abschnitt A, das Trapez PP_1P_gP'' zu betrachten. Seine obere Seite ist $PP_1 = \Delta w + \Delta w_1$ (wobei $\Delta w_1 = \pm \Delta w$ für P rechts oder links von NM_g); seine untere Seite ist $P_gP'' = \Delta s_g = \Delta w_g + \Delta w'' = \Delta s'' + \Delta w + \Delta w_1$, wenn $T_1 P'' = \Delta s''$ gesetzt wird, wobei $PT_1 \parallel P_1P_g$ gezogen ist.

Der betrachtete Weg wird dann:

$$\Delta w' + \Delta w + \omega'' + \lambda'' + \Delta l'.$$

Hierin wird

$$\omega'' + \lambda'' = \Delta s'' + \lambda'' \cdot \frac{\Delta l'' - \Delta s''}{\Delta l''},$$

also der Weg:

$$\Delta s_g + \frac{\lambda''}{D''} + \Delta l',$$

mit

$$D'' = \frac{\Delta l''}{\Delta l'' - \Delta s''},$$

worin wiederum die Vorzeichen von $\Delta w''$ und Δw richtig zu berücksichtigen sind und λ'' von Null bis $\Delta l''$ geht.

4) Für $\zeta_u < \zeta < \zeta'_u$ ist die Bestimmung des Weges genau gleich wie im Falle 1), nur geht λ von Δl_u bis Δl ; Δl_u ist die Sehstrahlänge von der untern Schichtfläche an bis zum untersten Sonnenstrahl $M_u P_u$ (Figur 4, S. 154); auf derselben findet nur noch Auslöschung statt.

4. Die Intensität des von der Schicht gestreuten Lichtes.

Die allgemeine Intensitätsformel (S. 147) ergibt für eine solche homogene Schicht, in welcher I , n und \varkappa bei der Integration konstant sind:

$$J = I \cdot n \cdot \Gamma \int_{\lambda}^l e^{-\varkappa \cdot \text{Weg}} \cdot d\lambda. \quad (12)$$

In sämtlichen vorhin erwähnten Fällen nimmt der Weg die Form $a + b\lambda$ an, worin die Grenzen von λ richtig zu wählen sind, und im Fall 3) noch eine Unterteilung $l' \rightarrow l''$, $l'' \rightarrow l$ vorzunehmen ist.

Allgemein wird:

$$\int_{\Delta l_u}^{\Delta l} e^{-\varkappa(a+b\lambda)} \cdot d\lambda = \frac{e^{-\varkappa a} \cdot e^{-\varkappa b \Delta l_u}}{\varkappa b} (1 - e^{-\varkappa b (\Delta l - \Delta l_u)}).$$

Die Fälle 1) und 2) lassen sich zusammenfassen; sie umfassen den Fall, wo der Sehstrahl die Schichtkalotte über P_g , P_g nicht trifft und nur die vollständig beleuchtete Schicht trifft, also $\Delta l_u = 0$, $a = \Delta w$, $b = \frac{1}{D}$ bzw. $\frac{1}{D_1}$; also

$$J = I \cdot \frac{n \cdot F}{z} \cdot D \cdot e^{-\kappa \Delta w} \left(1 - e^{-\kappa \frac{\Delta l}{D}} \right), \quad (13)$$

mit

$$D = \frac{\Delta l}{\Delta l \pm \Delta w}.$$

Im Fall 4) ist Δl_u von Null verschieden, es gilt also

$$J = I \cdot \frac{n \cdot F}{z} \cdot D \cdot e^{-\kappa \Delta w} \left(e^{-\kappa \frac{\Delta l_u}{D}} - e^{-\kappa \frac{\Delta l}{D}} \right), \quad (13a)$$

mit

$$D = \frac{\Delta l}{\Delta l + \Delta w}.$$

Im Fall 3) ergibt die Ausrechnung:

$$J = I \cdot \frac{n \cdot F}{z} \left\{ D' \cdot e^{-\kappa \Delta w_g} \left(1 - e^{-\kappa \frac{\Delta l'}{D'}} \right) + D'' \cdot e^{-\kappa (\Delta s_g + \Delta l')} \left(1 - e^{-\kappa \frac{\Delta l''}{D''}} \right) \right\} \quad (13b)$$

mit

$$D' = \frac{\Delta l'}{\Delta l' + \Delta w''}, \quad D'' = \frac{\Delta l''}{\Delta l'' - \Delta s''}.$$

Um diese Formeln auszuwerten, d. h. um die Intensität der Beleuchtung der Schicht bei gegebenem n , κ , F , R , h und Δh für jede Zenitdistanz der Sonne $Z = 90^\circ + \delta$ und für jede Blickrichtung (ζ , α) berechnen zu können, muss man Δl , Δw , Δl_u , Δw_g , $\Delta s''$, Δs_g , $\Delta w''$, $\Delta l'$ und $\Delta l''$ in Abhängigkeit der gegebenen Größen berechnen:

Für den Punkt P auf der oberen Schichtfläche mit der Höhe h findet man l und w , wie in (2) S. 148.

Aus (11) findet man Δl und Δw .

Im Falle 4) bestimmt sich l_u aus p_u wie in (3) S. 148 und daraus $\Delta l_u = \Delta l - (l - l_u)$.

Für den Fall 3) kann Δw_g mit genügender Genauigkeit berechnet werden aus $\Delta w_g = \sqrt{2 R \cdot \Delta h}$; das Δw entspricht dem zu h und l gehörenden w ; für den Punkt P' in der Höhe h' findet man l' ; für den Punkt P'' muss man aus $p = h'$ die Länge l'' berechnen,

wie in (3) S. 148 und daraus $\Delta w''$, woraus dann Δs_g und $\Delta s''$ zu finden sind.

Wenn die Intensität nur im Sonnenvertikal beobachtet wird werden die Formeln entsprechend einfacher. Überhaupt lassen sich die geometrischen Beziehungen wesentlich vereinfachen, wenn man Δh als genügend klein ansehen darf.

Schlussbemerkungen.

Die von uns neu aufgestellte Formel für die Intensität der allgemeinen Himmelsbeleuchtung (S. 152) ist noch nicht zu Berechnungen verwendet worden; es wäre erfreulich, wenn ein jüngerer Forscher sich die Zeit nehmen würde, die Formel auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen.

Die Formel (13) für eine homogene, dünne Schicht ist sehr eingehend von *H. Kleinert*¹⁾ (s. I S. 38) zu Berechnungen verwendet worden; wir werden später darauf eingehen. Eine Diskussion dieser Formel (13), für D mit positivem Vorzeichen, wurde vom Verfasser a. 1927 gegeben²⁾, aber unter Weglassung des Faktor $e^{-x\Delta w}$. Dieselbe Formel (13), in vollständiger Form, aber für I mit negativem Vorzeichen, ist a. 1930 vom Verfasser zusammen mit *M. Grütter*³⁾ durchdiskutiert worden.

Bern, März 1932.

¹⁾ H. KLEINERT, Inauguraldissertation 1921, deren Manuskript in der Stadtbibliothek Bern aufbewahrt wird.

²⁾ P. GRUNER, *Helv. Phys. Acta* **1**, 1, 1927.

³⁾ P. GRUNER und M. GRÜTTER, *Helv. Phys. Acta* **3**, 477, 1930.