**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 4 (1931)

**Heft:** VI

**Artikel:** Wellenmechanische Behandlung des Problems des freien Elektrons unter gleichzeitigem Einfluss eines homogenen Magnetfeldes und einer ebenen elektromagnetischen Welle : Comptoneffekt im Magnetfeld

**Autor:** Lüdi, Fritz

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-110045

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 15.10.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Wellenmechanische Behandlung des Problems des freien Elektrons unter gleichzeitigem Einfluss eines homogenen Magnetfeldes und einer ebenen elektromagnetischen Welle (Comptoneffekt im Magnetfeld)

von **Fritz Lüdi.**

(17. VIII. 31.)

Inhalt. Es wird die Strahlung eines durch ein beliebig starkes Magnetfeld gebundenen Elektrons nach klassischer, quantentheoretischer und wellenmechanischer Grundlage untersucht. Alle drei Theorien führen zur gleichen Frequenz (doppelte Larmorfrequenz).

Anschliessend wird die Strahlung im Magnetfeld unter Berücksichtigung der Retardierung berechnet; die Verschiebung der Spektrallinie kann in der Schrödinger'schen Weise als Doppler-Effekt gedeutet werden. Weiter wird das Elektron im Magnetfeld durch eine elektromagnetische Welle gestört und die Streustrahlung mit Hilfe der Waller'schen Dispersionsformel untersucht. Bei Beobachtungsrichtung und Einfallsrichtung parallel zum Magnetfeld erhält man für kurze Wellen (Röntgenwellen) einen Ramaneffekt zwischen Comptonstrahlung und Magnetstrahlung, wogegen im Fall langer Wellen das Auftreten eines solchen wie beim Oszillator unterdrückt wird. Es wird noch der Fall schiefer Inzidenz und schiefer Beobachtungsrichtung gestreift.

## Einleitung.

Das Problem eines freien Elektrons im homogenen Magnetfeld ist schon von KENNARD[1]) und C. G. DARWIN[2]) wellenmechanisch behandelt worden; ebenso ist von RABI[3]) die Berechnung der Eigenwerte für das Elektron im homogenen Magnetfeld nach der Dirac'schen Gleichung gegeben. Der Comptoneffekt für das feldfreie Elektron ist zur Genüge untersucht. Bezugnehmend auf eine Notiz von BOTHE[4]) mag es von Interesse sein, einmal das Problem des freien Elektrons im Magnetfeld unter gleichzeitiger Wirkung von Bestrahlung zu studieren.

---

[1]) KENNARD, Zeitschr. f. Phys., Bd. **44**, p. 326.

[2]) C. G. DARWIN, Proc. Roy. Soc., Vol. **117**, p. 258.

[3]) RABI, Zeitschr. f. Phys., Bd. **49**, p. 507.

[4]) BOTHE, Zeitschr. f. Phys., Bd. **41**, p. 872.

## § 1.

Ausgangspunkt für die folgenden wellenmechanischen Behandlungen ist die relativistische Wellengleichung, wie sie z. B. von GORDON[1]) angegeben wurde:

$$\Box \Psi - \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} \sum_a \Phi'_a \frac{\partial \Psi}{\partial x_a} - \frac{4\pi^2}{h^2} \left[ \frac{e^2}{c^2} \sum \Phi'^2_a + m^2 c^2 \right] \Psi = 0. \quad (1)$$

$$\alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Auf ein freies Elektron soll ein homogenes Magnetfeld und eine ebene linear polarisierte Lichtwelle wirken, die beide als schwache Störungen behandelt werden. Die Störungspotentiale $\Phi_a$ der Lichtwelle schreiben wir mit GORDON:

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi_a = a_a \cos \beta \qquad a_4 = i a_0 = 0 \quad \text{(skalares Potential)} \\ \beta = \dfrac{2\pi \nu}{c} \left[ \sum_1^3 n_k x_k - c t \right] = \sum_1^4 l_a x_a = l x. \end{cases}$$

Das Störungspotential $\varphi$ für das Magnetfeld, das in die Y-Richtung $(x_2)$ gelegt wird, ist wegen

$$H_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \quad H_1 = H_3 = 0 \; : \; \varphi_1 = H x_3, \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0. \quad (3)$$

Gleichung (1) nimmt dann mit $\Phi'_a = \lambda(\Phi_a + \varphi_a)$ und unter Vernachlässigung von Gliedern mit $\lambda^2$ folgende Gestalt an:

$$\Box \Psi - \lambda \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} \sum_a a_a \frac{\partial \Psi}{\partial x_a} \cos \beta - \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} H x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^2 \Psi = 0. \quad (1')$$

Diese Gleichung lösen wir durch den Ansatz:

$$\Psi = \Psi_0 + \lambda \Psi^* + \lambda \Psi^{**}; \quad (4)$$

womit wir zum Ausdruck bringen, dass sich die beiden Störungen in ihrer Wirkung auf das freie Elektron $\Psi = \Psi_0$ einfach addieren. Mit Berücksichtigung dass $\Psi_0$ der Gleichung (1) für $\Phi'_a = 0$ genügt,

[1]) GORDON, Zeitschr. f. Phys., Bd. **40**, p. 117.

und weil die Störungen unabhängig sind, zerfällt (1′) mit dem Ansatz (4) in die zwei Gleichungen:

$$\Box \Psi^* - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^2 \Psi^* - \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} H x_3 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_1} = 0. \tag{5a}$$

$$\Box \Psi^{**} - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^2 \Psi^{**} - \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} \sum_1^4 a_\alpha \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_\alpha} \cos\beta = 0. \tag{5b}$$

Die Lösung von (5b) führt mit $\Psi_0$ auf diejenige von Gordon, welche wir hier mit derselben Bedeutung der Schreibweise übernehmen:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_0 + \lambda \Psi^{**} = e^{\frac{2\pi i}{h}\left(px + \lambda \frac{pb}{pl} \sin\beta\right)} \\ px &= \sum_\alpha p_\alpha x_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad p_4 = i\frac{E}{C} \\ pb &= \sum_\alpha p_\alpha b_\alpha \\ pl &= \sum_\alpha p_\alpha l_\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Es bleibt Gleichung (5a) (Störung durch das Magnetfeld) zu lösen. Da die Rechnungen dieses Paragraphen für das Spätere nicht wesentlich sind, geben wir nur die Resultate an. Die Lösung von (5a) heisst:

$$\Psi^* = e^{\frac{2\pi i}{h} px} \frac{B}{2iA}\left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3}{2iA}\right), \tag{7}$$

wo $B$ und $A$ Konstante sind.

Mit (7) und (6) wird die allgemeine Funktion gebildet:

$$\Psi = \int G(p)\,[\psi_0 + \lambda \Psi^* + \lambda \Psi^{**}]\,dp \quad (dp = dp_1\,dp_2 dp_3), \tag{8}$$

worin $G(p)$ eine Gewichtsfunktion bedeutet. Daraus werden die Gordon'schen Stromdichten $s_\alpha$ berechnet:

$$s_\alpha = \frac{1}{i}\left(\overline{\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha} - \Psi \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x} - \frac{4\pi i}{h}\frac{e}{c} \Phi'_\alpha \overline{\Psi}\Psi\right). \tag{9}$$

Zur Berechnung der Strahlen aus den wellenmechanisch verteilten Strömen und Ladungen, sind mit Gordon die retardierten Potentiale

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{c}\int \frac{[s_\alpha]}{R}\,dx, \quad dx = dx_1\,dx_2\,dx_3, \tag{10}$$

zu bestimmen; die Klammer [ ] bedeutet, dass statt $t:t-\frac{R}{c}$ zu setzen ist, wo $R$ die Entfernung von Quellpunkt und Aufpunkt ist. Es entstehen dann neunfache Integrale über $p$ und $p'$ und $x$. Die Gordon'sche Anwendung des Fourier-Theorems ist hier nicht möglich; denn die Lösung (7) entspricht einer aperiodischen Bewegung des Elektrons mit einer kontinuierlichen Menge von Eigenwerten $p_4$. In Wirklichkeit führt aber das Elektron in noch so schwachem Magnetfeld eine periodische Bewegung, eine Schraubenlinie mit einer diskreten Menge von Eigenwerten aus, wie die exakte Behandlung in § 3 mit Berücksichtigung von $H^2$ zeigen wird. Da die aperiodische Bewegung, die (7) entspricht, nur in einem kleinen Raumteil mit der wirklichen Schraubenlinie, die das Elektron tatsächlich ausführt, übereinstimmt, dürfen die Integrale über $x$ nicht von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgeführt werden, und das Fourier-Theorem kann in diesem Fall nicht benützt werden. Aus der Anwendung des Fourier-Theorems schliesst Gordon auf die Gültigkeit des Energie-Impulssatzes, d. h. dass nur ein ganz bestimmtes Gebiet $dp_a \cdots dp_a'$ miteinander kombinieren kann. Aus der Nicht-Anwendbarkeit des Fourier-Theorems für den Magneteffekt schliessen wir, dass in diesem Fall ganz beliebige Kombinationen zwischen $p_a + dp_a$ und $p_a' + dp_a'$ vorkommen. Die Übergangswahrscheinlichkeit dürfte allerdings für solche Kombinationen, die der Eigenfrequenz im Magnetfeld entsprechen, ein Maximum besitzen. Die Komplikation rührt eben daher, dass wir $H^2$ vernachlässigt haben; die spätere Behandlung (§ 3) zeigt, dass gerade nur solche Kombinationen stattfinden, die der Eigenfrequenz im Magnetfeld entsprechen, allerdings ohne Berücksichtigung des Rückstosses des Streuquants; dagegen treten noch andere Kombinationen in der Nähe der Eigenfrequenz auf (Verschiebung der Spektrallinie), wenn der Rückstoss berücksichtigt wird (§ 4).

## § 2.

Die Frequenz $\omega$ für die Kreisbahn des freien Elektrons im homogenen Magnetfeld berechnet sich klassisch unter Vernachlässigung des Energieverlustes durch Strahlung aus dem Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Lorentz-Kraft.

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e}{c} Hv. \tag{11}$$

Für die Umlaufzeit $T$ bzw. Frequenz $\omega$ gilt

$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{e}{c}\frac{H}{2\pi m}.$$

Um die quantentheoretische Frequenz $\gamma$, die das Elektron im Magnetfeld bei Sprüngen aus einer Bahn in eine andere emittieren würde, zu bestimmen, muss die Energie gequantelt werden. Im Magnetfeld besitzt das Elektron nur kinetische Energie; für die Strahlung kommt die Komponente parallel zum Magnetfeld nicht in Betracht. In Polarkoordinaten ist

$$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 \qquad v = r\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} r. \tag{13}$$

Der Azimutalimpuls bestimmt sich aus einer Lagrange'schen Funktion $L$ gemäss

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \tag{14}$$

wobei $L$ in Polarkoordinaten für ein Elektron im Magnetfeld

$$L = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{e}{2c} H r^2 \dot{\varphi} \tag{15}$$

lautet. Die Quantenbedingung für den Azimutalimpuls liefert mit (14) und (15)

$$p_\varphi = m r^2 \left( \dot{\varphi} - \frac{eH}{2mc} \right) = \frac{nh}{2\pi}. \tag{16}$$

Mit

$$\dot{\varphi} = \frac{eH}{mc}$$

nach (11) wird also

$$m r^2 = \frac{nh}{2\pi} \frac{2mc}{eH}$$

so dass mit (13)

$$E_{kin} = \frac{nh}{2\pi} \frac{eH}{mc} \tag{17}$$

folgt. Nach Bohr's Korrespondenzprinzip gilt für die zum Drehimpuls gehörige azimutale Quantenzahl $n$ die Auswahlregel:

$$n \longrightarrow n \pm 1$$

und mit der Bohr'schen Frequenzbedingung wird damit aus (17) die quantentheoretische Strahlungsfrequenz

$$\nu_0 = \frac{e}{c} \frac{H}{2\pi m} \tag{18}$$

also genau so gross wie die klassische Umlauffrequenz $\omega$.

## § 3.

Um das Problem des Elektrons im homogenen Magnetfeld wellenmechanisch mit Berücksichtigung des quadratischen Gliedes zu behandeln, gehen wir von (1) aus, wo $\Phi_a' = \varphi_a \Phi_a = 0$ gesetzt ist. Das Magnetfeld legen wir jetzt in die $z$-Richtung und wählen der symmetrischen Schreibweise wegen die magnetischen Potentiale [vgl. (3)]:

$$\varphi_x = -\tfrac{1}{2} H y \qquad \varphi_y = +\tfrac{1}{2} H x \qquad \varphi_z = 0. \tag{19}$$

Dann lautet (1):

$$\Box \Psi + \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} \frac{H}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} y - \frac{\partial \Psi}{\partial y} x\right) - \frac{4\pi^2}{h^2}\left\{\frac{e^2}{c^2} \frac{H^2}{4} (x^2 + y^2) + m^2 c^2\right\} \Psi = 0, \tag{20}$$

die Variablen $t$ und $z$ kommen nicht explizite vor; deshalb machen wir den Ansatz für $\Psi$:

$$\Psi = e^{\frac{2\pi i}{h}[(m c^2 + E') t - p_z \cdot z]} \cdot v(x, y), \tag{21}$$

wo $E'$ die gesamte Bewegungsenergie bedeutet. Damit wird (20):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{4\pi^2}{h^2} p_z^2 \cdot v + \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{1}{c^2} (m c^2 + E') \cdot v + \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} \frac{H}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} y - \frac{\partial v}{\partial y} \cdot x\right) - \frac{4\pi^2}{h^2}\left\{\frac{H^2}{4} \frac{e^2}{c^2} (x^2 + y^2) + m^2 c^2\right\} v = 0, \tag{22}$$

in Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{4\pi^2}{h^2} p_z^2 \cdot v + \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{1}{c^2} (m c^2 + E')^2 \cdot v - \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} \frac{H}{2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\frac{e^2}{c^2} \frac{H^2}{4} r^2 + m^2 c^2\right] v = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} \frac{H}{2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + [C^2 - B^2 r^2] v = 0, \tag{23}$$

mit den Abkürzungen:

$$C^2 = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[2m\left(E' - \frac{p_z^2}{2m}\right) + \frac{E'^2}{c^2}\right], \qquad B^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{e^2}{c^2} \frac{H^2}{4}. \tag{24}$$

$\varphi$ kommt in (23) nicht explizite vor; wir können deshalb separieren durch den Ansatz

$$v = e^{in\varphi}\,\chi(r)\,; \tag{25}$$

$n$ ist eine ganze Zahl entsprechend der Eindeutigkeitsbedingung für die $\Psi$-Funktion. Die Differentialgleichung für $\chi(r)$ wird damit:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \left[A^2 - B^2 r^2 - \frac{n^2}{r^2}\right]\chi = 0\,, \tag{26}$$

$$A^2 = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[2m\left(E + \frac{nh}{4\pi m}\frac{e}{c}H\right)\right], \tag{27}$$

$$2mE = 2mE' + \frac{E'^2}{c^2} - p_z^2\,. \tag{28}$$

Die letztere Abkürzung bedeutet zugleich, dass $E$ nur die Bewegungsenergie senkrecht zum Magnetfeld ist, welche wir kurzweg als „Kreisenergie" bezeichnen wollen. Gleichung (26) ist ganz ähnlich gebaut wie die Schrödinger'sche[1]) Gleichung für das Wasserstoffatom; wir machen deshalb für $\chi$ den weiteren Ansatz:

$$\chi = e^{-\delta r^2} P(r)\,, \tag{29}$$

$P(r)$ ist ein noch zu bestimmendes Polynom. Die Konstante $\delta$ bestimmt sich aus (26) für sehr grosse $r$; von (26) bleibt dann noch:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - B^2\chi = 0\,, \tag{30}$$

und mit der Variablen $r^2 = \varrho$ wird (30):

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\varrho^2} - B^2\chi = 0\,,$$

welche zur Lösung

$$\chi = e^{-\frac{B}{2}\varrho}$$

hat. Also ist die Konstante

$$\delta = \frac{B}{2}\,. \tag{31}$$

Mit (29) und (31) erhalten wir aus (26) die Differentialgleichung für das Polynom

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - 2Br\right)\frac{\partial P}{\partial r} + \left[A^2 - 2B - \frac{n^2}{r^2}\right]P = 0\,; \tag{32}$$

wir setzen für $P$ die Reihenentwicklung

$$P = \sum R_k r^k \tag{33}$$

[1]) Schrödinger, Annalen d. Phys., Bd. **79**, p. 361.

und bekommen damit aus (32) die Rekursionsformeln für die Koeffizienten

$$R_{k+2} = R_k \frac{2B(k+1) - A^2}{(k+2)^2 - n^2} . \tag{34}$$

Aus der Randbedingung für die $\Psi$-Funktion: reguläres Verhalten im Endlichen, Verschwinden der $\Psi$-Funktion im Unendlichen, schliessen wir, dass das Polynom mit der $n$-ten Potenz anfangen muss, da es keine negativen Potenzen besitzen darf, und dass es mit der $l$-ten Potenz abbrechen muss (Beweis am Schluss dieses Paragraphen), wobei $l \geqq n$.

Dass das Polynom nur gerade oder nur ungerade Potenzen besitzt, sieht man aus (34) ohne weiteres. Die Endlichkeitsbedingung für das Polynom verlangt, dass vom ersten Koeffizienten $R_l$ an alle folgenden $R_{l+2}$ usw. verschwinden müssen. Das ist der Fall, wenn in (34) der Zähler für $k = l$ verschwindet. Das führt mit den Grössen $A^2$ und $B$ (24 und 27), direkt zu den Eigenwerten für die Kreisenergie (bei Vernachlässigung der Relativitätskorrektur $\frac{E'^2}{C^2}$ in (28):

$$E_{n,l} = \frac{e}{c} H \frac{h}{4\pi m} (l + 1 - n) \tag{35}$$

mit den zugehörigen Eigenfunktionen (vgl. 21, 25, 29):

$$\left.\begin{aligned} \Psi(n, l, p_z) &= e^{\frac{2\pi i}{h}[(mc^2 + E')t - p_z \cdot z]} \; e^{in\varphi} \; \chi_n^l(r) \\ \text{wobei} \qquad & \\ \chi_n^l(r) &= e^{-\delta r^2} P_n^l(r) , \quad E' = E_{n,l} + \frac{p_z^2}{2m} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

ist. Zu einem Eigenwert $E_{n,l}$ gehören offenbar unendlich viele Eigenfunktionen $\Psi(n, l, p_z)$, d. h. es besteht eine unendlichfache Entartung der Eigenwerte. Der Begriff Entartung ist hier aber nicht mit demjenigen für die mehrfachperiodischen Systeme in der Bohr'schen Quantentheorie zu verwechseln, denn in unserem Fall haben wir nur ein einfach-periodisches System, bei dem eine Entartung im Sinne der Bohr'schen Theorie gar nicht möglich ist. Hier bedeutet dieser Ausdruck vielmehr, dass es unendlich viele Koordinaten-Systeme gibt, in bezug auf die das Elektron dieselbe Energie besitzt, nämlich alle, welche durch Parallelverschiebung der $z$-Achse entstehen, oder mit anderen Worten: das Elektron braucht nicht gerade um unsere gewählte $z$-Achse zu rotieren, es kann auch um eine parallel dazu verschobene rotieren.

Dieses Verhalten ist ähnlich demjenigen des freien Elektrons, das ebenfalls unendlich viele Eigenfunktionen zu einem bestimmten Eigenwert $E'$ hat, entsprechend dem Umstand, dass das Elektron unendlich viele Bewegungsrichtungen $(p_x\, p_y\, p_z)$ mit derselben Energie besitzen kann.

Zusatz: Beweis der auf Seite 6, 7 angegebenen Bedingungen für das Polynom.

1. Das Polynom darf keine negativen Potenzen besitzen, weil sonst die $\chi$-Funktion im Nullpunkt irregulär würde.

2. Aus der Rekursionsformel (34) sieht man, falls das Polynom mit einer Potenz $< n$ beginnt, dass der Koeffizient $R_n$ unendlich würde (für $k = n-2$) und somit alle weiteren Koeffizienten, also: Irregularität von $\chi$ im Endlichen. Um diese zu vermeiden, muss $P(r)$ mit der $n$-ten Potenz anfangen.

3. Dass das Polynom beim $l$-ten Glied abbrechen muss, zeigen wir damit, dass das unendliche Polynom stärker divergiert als $e^{\delta r^2}$ (vgl. (29)). In Reihenform ist

$$e^{\delta r^2} = 1 + \frac{B}{2}\frac{r^2}{1!} + \left(\frac{B}{2}\right)^2 \frac{r^4}{2!} + \left(\frac{B^3}{2}\right)\frac{r^6}{3!} + \ldots$$

Andererseits lautet das Polynom mit Berücksichtigung von (34):

$$P(r) = R_n \left[ r^n + \frac{2B(n+1) - A^2}{(n+2)^2 - n^2} r^{n+2} + \frac{2B(n+1) - A^2}{(n+2)^2 - n^2} \cdot \frac{2B(n+3) - A^2}{(n+4)^2 - n^2} r^{n+4} + \frac{2B(n+1) - A^2}{(n+2)^2 - n^2} \cdot \frac{2B(n+3) - A^2}{(n+4)^2 - n^2} \cdot \frac{2B(n+5) - A^2}{(n+6)^2 - n^2} r^{n+6} + \ldots \right].$$

Das $(m+1)$-te Glied dieser Reihe können wir allgemein schreiben, wenn der Nenner $(a+b)^2 - a^2$ in $(a+b+a)$ $(a+b-a)$ zerlegt und im Zähler noch durch $2B$ dividiert wird $\left(\alpha = \frac{A^2}{2B}\right)$:

$$\frac{r^n (2B)^m r^{2m} (n+1-\alpha)(n+3-\alpha)\ldots(n+2m-1-\alpha)}{(2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m)(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2m)}$$

$$= r^n \frac{(2B)^m}{2^m \cdot m!} \frac{r^{2m}}{2^m} \frac{(n+1-\alpha)}{n+1} \frac{(n+3-\alpha)}{n+2} \frac{(n+5-\alpha)}{n+3} \cdots \frac{(n+2m-1-\alpha)}{n+m}$$

$$= r^n \frac{B^m \cdot r^{2m}}{2^m \cdot m!} \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1-\alpha}{n+2}\right) \left(1 + \frac{2-\alpha}{n+3}\right) \cdots \left(\frac{n+2m-1-\alpha}{n+m}\right) \right].$$

Nun konvergiert der letzte Klammerausdruck für $m \to \infty$ (unendl. Polynom) gegen 2. Es besteht aber der Satz, dass ein unendliches Produkt von der Form in der eckigen Klammer nur dann gegen einen endlichen Wert konvergiert, wenn der letzte Faktor gegen 1 konvergiert. Der Faktor

$$\frac{B^m}{2^m} \frac{r^{2m}}{m!}$$

ist aber identisch mit dem $(m+1)$-ten Glied der Reihe für $e^{\delta r^2}$. Weil die eckige Klammer divergiert, so divergiert also das Polynom stärker als $e^{\delta r^2}$, d. h. die Randbedingung für $\chi$ im Unendlichen ist bei nicht abbrechendem Polynom (Quantelung der Energie) nicht erfüllt.

Zum Schluss sollen die Eigenwerte (35) verglichen werden mit den von RABI[1]) unter Berücksichtigung des Spins berechneten. Wir sahen aus (34), dass $n$ und $l$ entweder gerade oder ungerade sind; also können wir (35) schreiben

$$E_r = \frac{e}{c} H \frac{h}{4\pi m} (2r+1) , \quad r = 0, 1, 2 \ldots . \tag{39}$$

RABI findet

$$E_j = \frac{e}{c} H \frac{h}{2\pi m} j , \quad j = 0, 1, 2 \ldots . \tag{40}$$

Die Berücksichtigung des Spins ergibt also doppelt so viele Energieniveaus. Wir können den Spin aber auch nachträglich berücksichtigen, indem wir bedenken, dass ein Spin-Elektron wegen seines magnetischen Momentes $m = \frac{e}{c} \frac{h}{4\pi m}$ im Magnetfeld die zusätzliche Energie

$$(\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}) = \pm \frac{e}{c} H \frac{h}{4\pi m} \tag{41}$$

erhält, je nachdem, der Spin parallel ($\uparrow$) oder antiparallel ($\downarrow$) zu $\mathfrak{H}$ gerichtet ist. Damit wird (39):

$$E_r^{\uparrow} = \frac{e}{c} H \frac{h}{4\pi m} [(2r+1)+1] = \frac{e}{c} H \frac{h}{2\pi m} (r+1)$$

$$E_r^{\downarrow} = \frac{e}{c} H \frac{h}{4\pi m} [(2r+1)-1] = \frac{e}{c} H \frac{h}{2\pi m} \cdot r,$$

und das sind die Rabi'schen Energieniveaus.

[1]) RABI, l. c.

## § 4.

Nach HEISENBERG bestimmen die Matrizenelemente $q_{rr'}$ die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand des Elektrons mit der Quantenzahl $r$ zu demjenigen mit der Quantenzahl $r'$; sie geben also die Auswahlregel für die zu diesen Übergängen gehörigen Frequenzen $\nu(rr')$. Diese Matrizenelemente können nach SCHRÖDINGER[1]) aus den Eigenfunktionen (36) berechnet werden:

$$q_{rr'} = \int\int\int q\, \Psi_r \overline{\Psi}_{r'} dv. \tag{42}$$

Massgebend für die Polarisation sind die kartesischen Koordinaten, resp. die dazu gehörigen verallgemeinerten Lagekoordinaten $q_{rr'}$. Für die $x$-Richtung ist $q = x = r\cos\varphi$; das Volumelement wird in Zylinderkoordinaten $dv = r\, d\varphi\, dr\, dz$; also wird mit (36)

$$\begin{aligned} A_r = q^x_{n\,l,\,n'\,l'} = \int\int\int r\cos\varphi \left[ e^{\frac{2\pi i}{h}\left[\left(m c^2 + E_{n\,l} + \frac{p_z^2}{2m}\right) t - p_z \cdot z\right]} e^{i n \varphi} e^{-\delta r^2} P^l_n \right] \\ \cdot \left[ e^{-\frac{2\pi i}{h}\left[\left(m c^2 + E_{n'\,l'} + \frac{p_{z'}^2}{2m}\right) t - p_{z'} \cdot z\right]} e^{-i n' \varphi} e^{-\delta r^2} P^{l'}_{n'} \right] r\, d\varphi\, dr\, dz. \end{aligned} \tag{43}$$

Dabei ist in (36) für die totale Bewegungsenergie $-E'$: Kreisenergie $E_{n\,l}$ (35) plus Translationsenergie $\frac{p_z^2}{2m}$ in der $z$-Richtung gesetzt worden (vgl. (28)). Der Impuls $p_z$ ist in den Zuständen $(n\,l\,p_z)$ und $(n'\,l'\,p_z')$ derselbe, solange vom Rückstoss des ausgestrahlten Lichtquants abgesehen wird. (43) wird also mit

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\begin{aligned} q^x_{rr'} = e^{2\pi i \nu(rr') t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i}{h} \Delta p_z \cdot z} dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[ e^{i(n-n'+1)\varphi} + e^{i(n-n'-1)\varphi} \right] d\varphi \\ \cdot \int_0^{\infty} r^2 e^{-2\delta r^2} P^l_n P^{l'}_{n'} dr \end{aligned} \tag{44}$$

wobei

$$\nu(rr') = \frac{1}{h}(E_{n\,l} - E_{n'\,l'}).$$

---

[1]) SCHRÖDINGER, Annalen d. Phys., Bd. **79**, p. 734.

Das erste Integral ist die Dirac'sche „$\delta$"-Funktion und liefert nur einen Beitrag für $\Delta p_z = 0$. Wesentlich sind das zweite und dritte Integral; das zweite liefert nur einen Betrag für

$$n' = n \pm 1 \tag{45}$$

somit haben wir die Auswahlregel für $n$. Wir zeigen, dass diese die Auswahlregel für den Drehimpuls $p_\varphi$ bestimmt. Der Drehimpuls für die $z$-Richtung ist

$$M_{xy} = x p_y - p_x y$$

mit Beachtung, dass für das Elektron im Magnetfeld (nicht konservatives System) für den Impuls $\mathfrak{p}$ die Beziehung gilt:

$$\mathfrak{p} = m \dot{\mathfrak{q}} + \frac{e}{c} \mathfrak{A},$$

und mit Berücksichtigung des Ausdruckes (19) für das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ nimmt $M_{xy}$ in Operatorform folgende Gestalt in Polarkoordinaten an[1]).

$$M_{xy} = \frac{h}{2\pi i}\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Ausgeübt auf die $\Psi$-Funktion (36) folgt

$$M_{xy} \Psi = n \frac{h}{2\pi} \Psi$$

$n \frac{h}{2\pi}$ ist also der zu $\Psi$ gehörige „Drehimpuls" $p_\varphi$ und für diesen gilt dieselbe Auswahlregel (45), wie nach dem Bohr'schen Korrespondenzprinzip zu erwarten war. Das dritte Integral in (44) heisst

$$\int_0^\infty r^2 e^{-2\delta r^2} P_n^l P_{n\pm1}^{l'} dr = \int_0^\infty r^2 e^{-2\delta r^2} [R_n r^n + R_{n+2} r^{n+2} + \ldots] [R_{n\pm1} r^{n\pm1} + R_{n\pm3} r^{n\pm3} + \ldots] dr \tag{46}$$

wo das erste Polynom bis zur $l$-ten, das zweite bis zur $l'$-ten Potenz läuft. (46) liefert die Auswahlregel für $l$. Durch Ausführen des Produktes in (46) entstehen Integrale von der Form

$$R_i R_k \int_0^\infty e^{-2\delta r^2} r^{i+k+2} dr \tag{47}$$

mit der Substitution

$$r^2 = x \qquad dx = 2 r dr \qquad r^{i+k+2} = x^{\frac{1}{2}(i+k+2)}$$

[1]) Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, wellenmech. Ergänzungsband, p. 297.

wird (47):

$$R_i R_k \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-2\delta x} e^{\frac{1}{2}(i+k+1)} dx \tag{48}$$

$i + k + 1$ ist immer eine gerade Zahl (vgl. (46)); deshalb gibt die Ausrechnung dieses Integrals

$$\frac{1}{2} R_i R_k \left(\frac{i+k+1}{2}\right)! \, (2\delta)^{-\frac{i+k+3}{2}}$$

also wird (46) mit (31):

$$\int_0^\infty r^2 e^{-2\delta r^2} P_n^l P_{n\pm1}^{l'} dr = \frac{1}{2} \sum_{i,k} R_i R_k \left(\frac{i+k+1}{2}\right)! \, B^{\frac{i+k+3}{2}} \tag{49}$$

$i$ läuft von $n$ bis $l$ und $k$ von $n \pm 1$ bis $l'$. Die Rekursionsformel (34) für die $R_i$ resp. $R_k$ lautet mit (27) und (35)

$$R_{k+2} = R_k \frac{2B(k-l)}{(k+2)^2 - n^2} . \tag{50}$$

Durchgerechnete Beispiele zeigen, dass (49) mit Benutzung von (50) nur dann einen von 0 verschiedenen Wert liefert, wenn für $l$ die Auswahlregel

$$l' = l \pm 1 \tag{51}$$

gilt[1]).

[1]) Nach Abschluss der Arbeit wurde ich von Herrn G. Beck brieflich auf den allgemeinen Beweis der Auswahlregel hingewiesen. Es kommt im wesentlichen darauf an, dass man erkennt, dass der Ausdruck (46)

$$\int_0^\infty r \chi_n^l \chi_{n\pm1}^{l'} r \, dr$$

nichts anderes als die Entwicklungskoeffizienten $d_{ll'}$ darstellt, wenn man die Funktion

$$r \chi_{n-1}^{l'} = \sum_l d_{ll'} \chi_n^l$$

nach dem vollständigen Orthogonalsystem $\chi_n^l$ entwickelt (der Fall $r \chi_{n+1}^{l'}$ kann durch Änderung der Bezeichnungsweise $n' \longrightarrow n$, $n \longrightarrow n'$ auf obigen zurückgeführt werden.) Es lässt sich dann allgemein unter Berücksichtigung der Differenzialgleichung (32) für die Polynome $P_n^l$ und der Rekursionsformel (34) für die Koeffizienten $R_k$ beweisen, dass diese Entwicklungssumme sich auf zwei Glieder reduziert.

$$r \chi_{n-1}^l = d_{l,l-1} \chi_n^{l-1} + d_{l,l+1} \chi_n^{l+1}$$

also die Auswahlregel

$$l' = l \pm 1$$

gilt. Ähnlich müsste man bei den Strömen $s_a$ in (71) verfahren.

Die Bedeutung von (51) und (45) ist folgende: wird (44) mit der Ladung $e$ multipliziert, so ergibt sich das wellenmechanische Dipolmoment für die $x$-Richtung, welches nur Übergänge für

$$l \longrightarrow l \pm 1$$
$$n \longrightarrow n \pm 1$$

also die Frequenzen

$$\nu(rr') = \frac{1}{h}\,\frac{e}{c}\,\frac{Hh}{4\pi m}\,[l + 1 - n - (l' + 1 - n')] = \frac{e}{c}\,\frac{H}{4\pi m}\,[\pm 2]$$

erlaubt. Die wellenmechanische Frequenz

$$\nu_0 = \frac{e}{c}\,\frac{H}{2\pi m}$$

ist also gleich der klassisch und quantentheoretisch berechneten Frequenz (für die Ausstrahlung kommt nur das positive Vorzeichen in (52) in Betracht).

Um das Dipolmoment für die $y$-Richtung zu berechnen, müssen wir in (43) $y = r \sin \varphi$ an Stelle von $x = r \cos \varphi$ setzen; das bedingt, dass

$$q^y_{rr'} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\, q^x_{rr'}$$

wird. Ferner gilt

$$q^z_{rr'} = 0\,.$$

Das wellenmechanische Dipolmoment ist also links-zirkular polarisiert und gehört zur klassischen Umlaufsfrequenz $\omega$.

## § 5.

Es ist von Interesse bei dem relativ einfachen Beispiel eines durch ein Magnetfeld gebundenen Elektrons die Ausstrahlung mit Berücksichtigung des Rückstosses des ausgestrahlten Lichtquants zu untersuchen. Um den Impuls des Lichtquants zu berücksichtigen, müssen statt der wellenmechanischen Dipolmomente die retardierten Potentiale bestimmt werden, die sich aus den wellenmechanischen verteilten Strömen $s_a$

$$S_a = \frac{1}{i}\left[\overline{\psi}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_a} - \psi\,\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_a} - \frac{4\pi i}{h}\,\frac{e}{c}\,\varphi_a \psi\,\overline{\psi}\right] \qquad (56)$$

berechnen. Die Ladungsdichte $\varrho_{pp'}^{rr'}$, die zum Übergang $(r \to r'$ $p_z \to p_z'$ gehört, wird mit

$$x_4 = ict, \qquad \varphi_4 = i\varphi_0 = 0, \qquad s_4 = ic\varrho_{pp'}^{rr'},$$

$$\varrho_{pp'}^{rr'} = -\frac{1}{ic^2}\left(\Psi_r \frac{\partial \overline{\Psi}_{r'}}{\partial t} - \overline{\Psi}_{r'} \frac{\partial \Psi_r}{\partial t}\right); \tag{57}$$

mit (36) gibt das einen Ausdruck von der Form:

$$\varrho_{pp'}^{rr'} = e^{2\pi i \nu(rr'\,pp')t}\, \varrho_0 \binom{rr'}{pp'} \tag{58}$$

mit den Abkürzungen:

$$\nu(rr'\,pp') = \frac{1}{h}\left[E_{n\,l} + \frac{p_z^2}{2m} - E_{n'l'} - \frac{p_z'^2}{2m}\right] \tag{59}$$

$$\varrho_0 \binom{rr'}{pp'} = a\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(p_z - p_z')\cdot z}\, e^{i(n-n')\varphi}\, \chi_n^l \chi_{n'}^{l'}, \tag{60}$$

wo $a$ eine Konstante ist.

Wir können jetzt für die retardierten Potentiale die Formeln von KLEIN[1]), mit derselben Voraussetzung über die Kleinheit der Dimensionen der Elektronenbahn gegenüber dem Abstand von Aufpunkt und Koordinatenursprung, verwenden:

$$V = \frac{1}{s}\, e^{2\pi i \nu\left(t - \frac{s}{c}\right)} \int \varrho_0\, e^{\frac{2\pi i \nu}{c}(\mathfrak{n}'\mathfrak{r})}\, dv$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{cs}\, e^{2\pi i \nu\left(t - \frac{s}{c}\right)} \int \mathfrak{J}_0 e^{\frac{2\pi i \nu}{c}(\mathfrak{n}'\mathfrak{r})}\, dv, \tag{61}$$

wo $s$ den Abstand von Koordinatenursprung zum Aufpunkt, $\mathfrak{r}$ den Vektor vom Koordinatenursprung zum Quellpunkt und $\mathfrak{n}'$ den Einheitsvektor in der Beobachtungsrichtung bezeichnet.

Aus (61) bestimmt sich dann der elektrische Vektor

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi i \nu}{c}(\mathfrak{A} - \mathfrak{n}' V) \tag{62}$$

es ist daraus ersichtlich, dass für die Diskussion von $\mathfrak{E}$ nur $\mathfrak{A}$ wesentlich ist. Berechnet man $s_1 = \mathfrak{J}_x$, so wird aus (56) mit Beachtung von (19):

$$\mathfrak{J}_x = c\, e^{2\pi i \nu' t}\, e^{2\pi i \mathfrak{s}_z \cdot z}\, e^{i(n+1-n')\varphi}$$

$$\left\{-(n+n')\frac{\chi_n^l \chi_{n'}^{l'}}{r} + \left(\chi_{n'}^{l'} \frac{\partial \chi_n^l}{\partial r} - \chi_n^l \frac{\partial \chi_{n'}^{l'}}{\partial r}\right) - \frac{2\pi}{h}\frac{e}{c} H r\, \chi_n^l \chi_{n'}^{l'}\right\}$$

$$+ c'\, e^{2\pi i \nu' t}\, e^{2\pi i \mathfrak{s}_z \cdot z}\, e^{i(n-1-n')\varphi}$$

$$\left\{+(n+n')\frac{\chi_{n'}^{l'} \chi_n^l}{r} + \left(\chi_{n'}^{l'} \frac{\partial \chi_n^l}{\partial r} - \chi_n^l \frac{\partial \chi_{n'}^{l'}}{\partial r}\right) + \frac{2\pi}{h}\frac{e}{c} H r\, \chi_n^l \chi_{n'}^{l'}\right\} \tag{63}$$

[1]) KLEIN, Zeitschr. f. Phys., Bd. **41**, p. 422, Gl. 38.

$c$ und $c'$ sind Konstanten; ferner ist

$$\nu' = \frac{1}{h}\left[E_{nl} - \frac{p_z^2}{2m} - E_{n'l'} - \frac{p_z'^2}{2m}\right] \mathfrak{s}_z = -\frac{1}{h}(p_z - p_z')\,\mathfrak{s}_x = \mathfrak{s}_y = 0\,. \quad (64)$$

Geht man mit (63) in (61) ein, so entstehen Integrale über $z$, $\varphi$ und $r$, die wir einzeln diskutieren. Es sei gleich bemerkt, dass wir der beträchtlichen mathematischen Vereinfachung wegen nur in der $z$-Richtung beobachten wollen $\mathfrak{n}_z' \neq 0$ $\mathfrak{n}_x' = \mathfrak{n}_y' = 0$; es sei $dv = dz d\varphi r dr$ in Zylinderkoordinaten. Das Integral über $z$ liefert nur einen merklichen Beitrag, wenn der Exponent

$$2\pi i\left(\mathfrak{s}_z + \mathfrak{n}_z'\frac{\nu}{c'}\right)z$$

Null ist, d. h. wenn der Impulssatz für die $z$-Richtung erfüllt ist:

$$\frac{h\nu'}{c} + p_z' = p_z \quad (65)$$

unter Zuhilfenahme von (64). Das Integral über $\varphi$ liefert die Auswahlregel für $n$:

$$n' = n \pm 1\,. \quad (66)$$

Damit erhält man weiter für die Integration über $r$ die Auswahlregel für $l$

$$l' = l \mp 1 \quad (67)$$

mit Beachtung der Auswahlregeln für $n$ und $l$ kann der Energiesatz (64) geschrieben werden:

$$h\nu' = h\nu_0 + \frac{1}{2m}(p_z^2 - p_z'^2) \quad (68)$$

wobei $\nu_0$ die Eigenfrequenz (53) im Magnetfeld ist. (68) schreiben wir mit Berücksichtigung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v')$ des Elektrons parallel zum Magnetfeld:

$$h\nu' = h\nu_0 + \bar{v}(p_z - p_z') \quad (69)$$

mit dem Impulssatz (65) kombiniert folgt:

$$\nu'\left(1 - \frac{\bar{v}}{c}\right) = \nu_0$$

oder

$$\nu' = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{\bar{v}}{c}}\,. \quad (70)$$

[1]) O. Klein, loc. cit., p. 422, Gl. 40.

Bei Berücksichtigung des Rückstosses des ausgestrahlten Lichtquants erhalten wir also eine Dopplerverschiebung der Eigenfrequenz. Die Deutung ist ähnlich derjenigen von SCHRÖDINGER für den Dopplereffekt. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass

$$\mathfrak{A}_y = e^{-\frac{i\pi}{2}} \mathfrak{A}_x$$

ist, und dass $\mathfrak{A}_z$ zeitlich konstant ist, so dass wir sagen können: der Vektor $\mathfrak{E}$ führt eine zirkulare Schwingung in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld aus.

## § 6.

Das Elektron im Magnetfeld soll jetzt einer Störung durch eine ebene linearpolarisierte elektromagnetische Welle (Lichtwelle oder Röntgenwelle) unterworfen werden. Von der Wirkung des Wellenfeldes auf den Elektronenspin wird abgesehen, was für nicht allzu hohe Frequenzen (Ultragammastrahlen) erlaubt ist. Die Wechselwirkung zwischen Magnetfeld und Wellenfeld besteht dann in einer Kombination von Comptoneffekt und Magneteffekt. Das Vektorpotential der störenden Welle werde durch

$$\mathfrak{a} = -\frac{c}{2\pi i \nu} E_0 \cos 2\pi i \nu \left(t - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}{c}\right), \quad (V = 0)$$

beschrieben. Die gestörte Schrödinger'sche Gleichung (1) nimmt in vektorieller Schreibweise folgende Form an, wenn in $\mathfrak{a}$ nur lineare Glieder, dagegen in $\mathfrak{A}$ die quadratischen Glieder berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \Box \Psi - \frac{4\pi i}{h}\frac{e}{c}\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\Psi - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\frac{e^2}{c^2}\mathfrak{A}^2 + m^2 c^2\right]\Psi \\ - \frac{4\pi i}{h}\frac{e}{c}\mathfrak{a}\,\mathrm{grad}\,\Psi - \frac{4\pi^2}{h^2}\frac{e^2}{c^2}2(\mathfrak{A}\mathfrak{a})\,\Psi = 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Wird für $\Psi$ der Ansatz

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi^* \tag{72}$$

gemacht, so erhält man eine inhomogene Störungsgleichung der Form

$$\begin{aligned} \Box \Psi^* + \frac{4\pi i}{h}\frac{e}{c}\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\Psi^* - \frac{4\pi^2}{h^2}\left(\frac{e^2}{c^2}\mathfrak{A}^2 + m^2 c^2\right)\Psi^* \\ = \frac{4\pi^2}{h^2}\frac{e^2}{c^2}2(\mathfrak{A}\mathfrak{a})\,\Psi_1 + \frac{4\pi i}{h}\frac{e}{c}\mathfrak{a}\,\mathrm{grad}\,\Psi_1. \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, dass hier zum Unterschied der üblichen Störungsprobleme (bei denen nur die linearen Glieder der Vektorpotentiale berücksichtigt werden) auf der rechten Seite das erste Glied hinzutritt. Durch eine Schrödinger'sche Störungsrechnung, wobei die Relativitätskorrektion vernachlässigt wird, erhält man für $\Psi^*$ wenn die cos-Funktion in Exponentialform geschrieben wird:

$$\left.\begin{aligned} \Psi^* &= F_n\, e^{\frac{2\pi i}{h}(mc^2 + E' + h\nu)t} + \bar{F}_n e^{\frac{2\pi i}{h}(mc^2 + E' - h\nu)t} \\ F_n &= -\sum_s \frac{\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{B}_{ns}}{8\pi^2 \nu (\nu_{ns} - \nu)} v_s \qquad \bar{F}_n = -\sum_s \frac{\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \boldsymbol{B}_{sn}}{8\pi^2 \nu (\nu_{ns} + \nu)} v_s . \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Es sind hier, wie auch im folgenden, im allgemeinen die Bezeichnungsweisen von J. Waller[1]) benützt, da von ihm die allgemeine Streuungsformel bereits abgeleitet ist und somit auf seine Rechnungen hingewiesen werden darf. Die einzige Abänderung in der vorliegenden Arbeit besteht darin, dass nun auch das quadratische Glied von $\mathfrak{A}$ berücksichtigt wird, während $\mathfrak{a}$ linear auftritt. So ersetzen wir unser früheres $\Psi(xyz)$ in (36) durch die Waller'sche Bezeichnung $v_s$ ($v_s$ ist nur eine Funktion der Koordinaten).

Für $\boldsymbol{B}_{ns}$ folgt also

$$\boldsymbol{B}_{ns} = \frac{2\pi i}{h} \int \tilde{v}_s \frac{e}{m} \left[ \frac{h}{2\pi i} \operatorname{grad} v_n - \frac{e}{c} \mathfrak{A} v_n \right] e^{-\frac{2\pi i \nu}{h}(n\tau)} d\tau . \quad (74)$$

Für $\tilde{\boldsymbol{B}}_{sn}$ ist der konjugierte Wert von $\boldsymbol{B}_{ns}$ mit Vertauschung der Indizes zu nehmen.

Mit den gestörten Eigenfunktionen (72) und (73) werden die Ströme $s_a$ (56) berechnet (wobei wir uns nur auf die in $\boldsymbol{E}_0$ linearen Glieder beschränken), und aus diesen das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ (61) (nicht zu verwechseln mit dem Vektorpotential des Magnetfeldes), das (wie in § 5) für die Ausstrahlung massgebend ist. Für den in $\boldsymbol{E}_0$ linear-abhängigen Teil $\mathfrak{A}^*_{nn'}$ ergibt sich ein analoger Ausdruck wie für das Dipolmoment nach Waller[1]):

$$\mathfrak{A}^*_{nn'} = a \left\{ \boldsymbol{E}_0 \gamma_{nn'} + b \sum_s \left[ \frac{(\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{B}_{sn})\, \tilde{\boldsymbol{B}}'_{sn'}}{\nu_{ns} + \nu} + \frac{(\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{B}_{n's})\, \tilde{\boldsymbol{B}}'_{ns}}{\nu_{n's} - \nu} \right] \right\} e^{2\pi i \nu' t} \quad (75)$$

$a$ und $b$ sind zeitliche Konstanten; der Summationsbuchstabe $s$

[1]) J. Waller, Zeitschr. f. Phys. **51**, p. 213.

repräsentiert den Zwischenzustand $s, r, p_z''$ (vgl. Gl. (36)); ferner bedeutet

$$\nu' = \nu_{nn'} + \nu = \frac{E(n, l, p_z) - E(n' l' p_z')}{h} + \nu$$

$$\gamma_{nn'} = \int \mathfrak{v}_n \dot{v}_{n'} \frac{e^2}{m} e^{i(x'-x)\mathfrak{r}} d\tau$$

$$\boldsymbol{B}_{ns} = \frac{2\pi i}{h} \int \mathfrak{v}_s \frac{e}{m} \left[ \frac{2\pi i}{h} \operatorname{grad} v_n - \frac{e}{c} \mathfrak{A} v_n \right] e^{-i\varkappa\mathfrak{r}} d\tau$$

$$\boldsymbol{B}'_{ns} = \frac{2\pi i}{h} \int \mathfrak{v}_s \frac{e}{m} \left[ \frac{2\pi i}{h} \operatorname{grad} v_n - \frac{e}{c} \mathfrak{A} v_n \right] e^{-i\varkappa'\mathfrak{r}} d\tau$$

$$\varkappa = \frac{2\pi\nu}{c} \mathfrak{n} \qquad \varkappa' = \frac{2\pi\nu'}{c} \mathfrak{n}'$$

$\mathfrak{n}$: Einfallsrichtung; $\mathfrak{n}'$: Beobachtungsrichtung.

Für lange Wellen, also bei Vernachlässigung der Retardierung, ist das Glied $\gamma_{nn'}$ für nichtkohärente Strahlung $(n \neq n')$ Null infolge der Orthogonalitätsbedingung für die $\chi_n^l$ in (36). Mit Beachtung der Gleichung für den Impuls $\mathfrak{p}$ auf Seite 386 wird

$$\boldsymbol{B}_{ns} = \frac{2\pi i}{h} \dot{\boldsymbol{q}}_{ns}$$

und (75) geht in die von DIRAC abgeleitete Strahlungsformel über. Da allgemein $\dot{\boldsymbol{q}}_{ns} = 2\pi i \nu_{ns} \cdot \boldsymbol{q}_{ns}$ gilt, folgt unter Benützung der Auswahlregeln für die $\boldsymbol{q}_{ns}$ (§ 4), dass die Summe in (75) sich auf ein Glied reduziert. Für $n' = n-4$ $s = n-2$, also für das Auftreten eines Ramaneffektes

$$\nu' = 2\nu_0 + \nu$$

wird (75) im Fall langer Wellen:

$$\mathfrak{A}^*_{n,n-4} \sim \left[ \frac{(\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{q}_{n-2,n}) \tilde{\boldsymbol{q}}_{n-2,n-4}}{\nu_{n,n-2} + \nu} + \frac{(\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{q}_{n-4,n-2}) \tilde{\boldsymbol{q}}_{n,n-2}}{\nu_{n-4,n-2} - \nu} \right] e^{2\pi i(2\nu_0+\nu)t} \quad (77)$$

berücksichtigt man, dass nach (52)

$$\nu_{n-4,n-2} = -\nu_{n,n-2} = -\nu_0$$

und nach (54)

$$q^y = e^{-i\frac{\pi}{2}} q^x$$

so ist ersichtlich, dass die eckige Klammer in (77) verschwindet und also ein Ramaneffekt, wie im Fall des Oszillators, nicht möglich ist.

## § 7.

Anders liegen die Verhältnisse bei Berücksichtigung der Retardierung. Aus demselben Grund wie in § 5 beschränken wir uns auf den Fall: Einfalls- und Beobachtungsrichtung parallel zum Magnetfeld ($\mathfrak{n}_x = \mathfrak{n}_y = \mathfrak{n}_x' = \mathfrak{n}_y' = 0$). Die $X$-Komponente von $\boldsymbol{B}_{ns}$ Gleichung (76) lautet mit dem Wert $\mathfrak{A}_x = -\frac{1}{2} H_y$:

$$\boldsymbol{B}^x_{ns} = \frac{2\pi i}{h} \int \tilde{v}_s \frac{e}{m} \left[ \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} v_n - \frac{e}{c} \left( -\frac{1}{2} H y v_n \right) \right] e^{-\frac{2\pi i \nu}{c} z} dz\, dx\, dy$$

analog die andern $\boldsymbol{B}'s$.

Setzt man diese Ausdrücke in (75) ein unter gleichzeitiger Einführung von Zylinderkoordinaten, so erkennt man bei Verwendung der Eigenfunktionen (36) folgendes:

Die Integration über $z$ liefert den Impulssatz:

$$p_z + \mathfrak{n}_z \frac{h\nu}{c} = p_z' + \mathfrak{n}_z' \frac{h\nu'}{c} \tag{78}$$

die Integration über $r$ und $\varphi$ liefert, da die Funktionen von $r$ und $\varphi$ durch die spezielle Wahl der Retardierung nicht geändert werden, dieselben Auswahlregeln, wie im nicht-retardierten Fall,

$$s = n \pm 2.$$

Damit gibt die Zeitabhängigkeit den Energiesatz in der Form (vgl. (76)):

$$\nu' = \frac{1}{h}(E_{n\,l} - E_{n'l'}) + \frac{1}{h} \frac{1}{2m} (p_z^2 - p_z'^2) + \nu = 2\nu_0 + \frac{1}{h \cdot 2m} (p_z^2 - p_z'^2). \tag{79}$$

Es ist nun ohne weiteres ersichtlich, dass der Klammerausdruck in (75) für diesen Fall nicht verschwindet, da die Nenner nicht gleich mit entgegengesetzten Vorzeichen sind, wie im Falle langer Wellen. Dagegen verschwindet auch bei dieser speziellen Retardierung das Glied $\gamma_{nn'}$ für nichtkohärente Strahlung. Der Nenner des Bruches heisst:

$$\nu_0 + \frac{1}{2mh} (p_z^2 - p_z''^2) + \nu$$

während der des zweiten Bruches:

$$-\nu_0 + \frac{1}{2mh} (p_z'^2 - p_z''^2) - \nu$$

lautet. Wir stellen also das Auftreten eines Ramaneffektes zwischen Magneteffekt und Comptoneffekt fest. Mit Einführung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ lässt sich (78) mit (79) wie in § 5 kombinieren. Für die Beobachtung in Richtung des einfallenden Strahles ($\mathfrak{n}_z' = -\mathfrak{n}_z$) wird

$$\nu' = \nu + 2\,\nu_0 \frac{1}{1 - \frac{\bar{v}}{c}} \cdot \tag{80}$$

Dagegen für die Vorwärtsbeobachtung ($\mathfrak{n}_z' = -\mathfrak{n}_z$)

$$\nu' = 2\,\nu_0 \frac{1}{1 + \frac{\bar{v}}{c}} + \nu \frac{\left(1 - \frac{\bar{v}}{c}\right)}{1 + \frac{\bar{v}}{c}} \cdot \tag{81}$$

Charakteristisch ist das Auftreten des Faktors 2 vor $\nu_0$ gegenüber (70). Neben der inkohärenten Strahlung tritt natürlich auch wie (75) lehrt, die kohärente auf, nämlich für $n' = n$.

Für verschwindendes Magnetfeld wird $\nu_0 = 0$ nach (53), und die Frequenzen gehen in diejenigen der Comptonstreuung über:

$$\nu' = \nu \quad \text{für} \quad \mathfrak{n}_z' = \mathfrak{n}_z \tag{80'}$$

$$\nu' = \nu\left(1 - 2\frac{\bar{v}}{c}\right) \quad \text{für} \quad \mathfrak{n}_z' = -\mathfrak{n}_z \tag{81'}$$

(hierbei ist in (81) der Nenner nach Potenzen von $\frac{\bar{v}}{c}$ entwickelt und Glieder mit höheren Potenzen von $\frac{\bar{v}}{c}$ vernachlässigt; (81′) ist die Darstellung der Comptonfrequenz in der Schrödinger'schen Deutung als Dopplereffekt). Natürlich gehen für verschwindendes Magnetfeld die Intensitäten in (75) auch in diejenigen des Comptoneffektes über, was man daran erkennt, dass die Eigenfunktionen $v$, die in die $\boldsymbol{B}_{ns}$ eingehen, für verschwindendes Magnetfeld in diejenigen des freien Elektrons übergehen; allerdings ist die Darstellung in Zylinderkoordinaten gegeben, aber mit Hilfe von Besselfunktionen lassen sich die Eigenfunktionen in die bekannten, von Kartesischen Koordinaten abhängigen:

$$\Psi_{\text{freies Elektron}} = e^{\frac{2\pi i}{h}(E + mc^2)t}\; e^{\frac{2\pi i}{h}(p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z z)}$$

überführen.

Es wäre noch der Fall schiefer Inzidenz der Welle gegenüber dem Magnetfeld, sowie die Untersuchung der gestreuten Welle in

beliebig geneigter Richtung (was prinzipiell auf dasselbe herauskommt) zu diskutieren. Doch ist wegen den hierbei auftretenden mathematischen Komplikationen und den geringen Aussichten, diese Effekte infolge der grossen experimentellen Schwierigkeiten festzustellen, die Mühe nicht lohnend.

Eines kann man jedoch mit einiger Bestimmtheit auch in diesem Falle sagen: Infolge der auftretenden $x$- und $y$-Abhängigkeit des Retardierungsfaktors in (76) werden die einfachen Auswahlregeln für die $\boldsymbol{B}_{ns}$ durchbrochen und das Linienbild des Ramaneffektes wird mannigfaltiger als für Beobachtung und Inzidenz parallel zum Magnetfeld. Der Impulssatz für die $x$- und $y$-Richtung hat dann nicht mehr die einfache Form (78), sondern es kommt eine Unbestimmtheit in der Weise hinein, dass das Magnetfeld selbst Impuls an das Elektron abgeben kann.

## Zusammenfassung.

Das Problem des freien Elektrons im homogenen Magnetfeld wird auf wellenmechanischer Grundlage für beliebig grosse Feldstärken gelöst. Es sind dafür in (35) und (36) die Eigenwerte und die Eigenfunktionen berechnet. Auf Grund der Matrizenberechnung werden die Auswahlregeln für beide Quantenzahlen $n$ und $l$ in (45) und (51) gegeben, und es wird als Erweiterung dieses Falles die Strahlungsfrequenz (70) unter Berücksichtigung des Impulses des ausgestrahlten Lichtquants berechnet. Der Elektronenspin kann ohne weiteres mitberücksichtigt werden und führt zu den gleichen Resultaten wie die Behandlung durch Rabi nach der Dirac'schen Theorie. Der Comptoneffekt im homogenen Magnetfeld wird als Störungseffekt durch eine einfallende, ebene elektromagnetische Welle (Lichtquant) in erster Näherung berechnet, für den Fall, dass diese Welle in Richtung der magnetischen Kraftlinien einfällt. Es werden die gestörten Eigenfunktionen in (73) und (74) gegeben und daraus im Anschluss an J. Waller das retardierte, gestörte Vektorpotential $\mathfrak{A}^*$ in (75) berechnet.

Es gelten für die in Richtung der Kraftlinien gestreute Welle die gleichen Auswahlregeln für $n$ und $l$ wie für das freie Elektron im homogenen Magnetfeld. Die veränderte Frequenz ist durch (80) resp. (81) gegeben. Es treten also Kombinationslinien zwischen Comptoneffekt und Magneteffekt auf (Ramaneffekt). Übergang zu kleinen Frequenzen (Vernachlässigung des Impulses des primären und sekundären Lichtquants) führt einerseits zur Dispersionsformel von Born-Heisenberg-Jordan, und zeigt, dass für

lange Wellen ein Ramaneffekt *nicht* auftritt. Andererseits führt der Übergang zu verschwindendem Magnetfeld auf den Comptoneffekt. Am Ende von § 6 werden einige kurze Bemerkungen über den Fall schiefer Beobachtungsrichtung (oder Inzidenz) gemacht, welche zeigen, dass für diesen Fall die einfachen Auswahlregeln für $n$ und $l$ (45) und (51) durchbrochen werden.

Zum Schluss möchte ich Herrn Prof. P. Gruner und Herrn Prof. F. Gonseth in Bern, sowie Herrn Dr. G. Beck in Leipzig aufs wärmste danken für mancherlei Ratschläge und kritische Bemerkungen.

Physikalisches Institut der Universität Bern
(theoretische Abteilung).