Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 4 (1931)
Heft: V

Artikel: Der Vierpol und seine speziellen Schaltungen
Autor: König, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110043

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Der Vierpol und seine speziellen Schaltungen[1])

von **Hans König** (Bern).

(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht).

(14. VII. 31.)

Zusammenfassung: Ein Vierpol kann auf 33 verschiedene Arten als Übertrager zwischen 2 Zweipole geschaltet werden. Diese Schaltungsarten werden angegeben und auf die zwischen denselben bestehenden Beziehungen hin untersucht. Als Anwendung wird der Einfluss der einpoligen Erdung der Sekundärwicklung eines Transformators auf dessen Eigenschaften behandelt.

Unter einem Vierpol (abgekürzt VP) verstehen wir ein elektrisches Netzwerk mit vier Klemmen (1, 2, 3, 4, allgemein $\mu, \nu, \varrho, \ldots$), welches folgenden Bedingungen genügt: 1) Das System wird durch lineare Gleichungen beschrieben. 2) Das Verhalten des VP in bezug auf Stromzufuhr und -abgabe sei quasistationär. 3) Im nichtangeschlossenen Zustande sollen sämtliche Klemmenspannungen verschwinden. 4) Im Innern des VP befinde sich keine Stromquelle oder -senke.

Die allgemeine Beschreibung erfolgt für eine bestimmte Frequenz durch ein System von drei Gleichungen,

$$\mathfrak{J}_\mu = \sum_\nu^{(3)} K^\varrho_{\mu\nu} \mathfrak{V}_{\nu\varrho} \qquad \mu, \nu \neq \varrho \tag{1}$$

(ϱ = einer der Werte 1, 2, 3, 4; die Anzahl der Addenden ist über Σ angegeben) bzw. seine Auflösung

$$\mathfrak{V}_{\nu\varrho} = \sum_\mu^{(3)} k^\varrho_{\nu\mu} \mathfrak{J}_\mu \tag{2}$$

(alle Grössen komplex). Die übrigen Spannungen sowie der vierte Strom $\mathfrak{J}_\varrho$ sind durch die Kirchhoff'schen Gleichungen und Voraussetzung 4) bestimmt.

Gewöhnlich wird der VP als Übertrager zwischen zwei Zweipolen, einer Energiequelle (primär, p) und einem Verbraucher (sekundär, s) benutzt. Ein Zweipol ist hierbei ein amplitudenunabhängiger, komplexer Widerstand, wenn nötig mit einer innern EMK. Der Zusammenhang zwischen Primär- und Sekundär-

[1]) Aus einer Berner Habilitationsschrift.

grössen ist dann wegen der freien Wählbarkeit von zwei Grössen durch zwei Gleichungen gegeben. Eine solche, und zwar die gebräuchlichste, spezielle Vierpolschaltung (abgekürzt s. VPS.), die wir im folgenden mit s. VPS. a bezeichnen wollen, zeigt Fig. 1: a (p: 14, s: 23). Für diese gilt speziell

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_{14} &= \mathfrak{V}_p & \mathfrak{J}_1 &= \mathfrak{J}_p = -\mathfrak{J}_4 \\ \mathfrak{V}_{23} &= \mathfrak{V}_s & -\mathfrak{J}_2 &= \mathfrak{J}_s = \mathfrak{J}_3 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_p &= a_{11}\,\mathfrak{V}_s + a_{12}\,\mathfrak{J}_s \\ \mathfrak{J}_p &= a_{21}\,\mathfrak{V}_s + a_{22}\,\mathfrak{J}_s \end{aligned} \qquad \Delta a = |\,a_{ik}\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Gewisse Probleme (s. den letzten Abschnitt und eine spätere Veröffentlichung) legen nun nahe, auch nach den anderen möglichen s. VPS., deren es im ganzen 33 gibt, zu fragen. Eine solche ist z. B. a_A (p: 14, s: 23; $\overline{12}$) mit den vier Konstanten a_{Aik}. Sie unterscheidet sich von a dadurch, dass 1 und 2 durch einen widerstandsfreien Bügel verbunden sind. Man kann sich fragen, ob

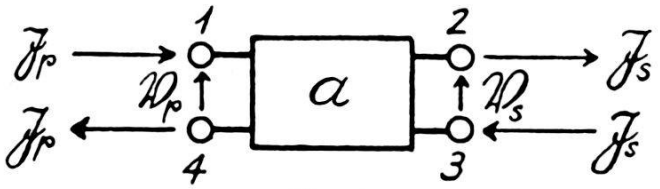


Fig. 1.

zwischen den acht Konstanten a_{ik} und a_{Aik} eine Beziehung bestehe. Dies ist nicht ohne weiteres zu erwarten, da das System (1) neun unabhängige Konstanten besitzt. Oder man kann allgemeiner fragen, ob es überhaupt zwei s. VPS. gebe, zwischen deren Koeffizienten es *keine* Beziehung gebe. In erster Linie solchen allgemeinen Fragen, die zum Teil mit praktischen Problemen in nahem Zusammenhang stehen, sind nachstehende Ausführungen gewidmet.

Mathematisch lässt sich das Problem auch so auffassen: (4) ist die spezielle zu den Randbedingungen (3) gehörige Form der allgemeinen Lösung (1) oder (2); gesucht sind analog die zu allen möglichen Randbedingungen von der Art (3) gehörigen speziellen Lösungen und die Beziehungen zwischen denselben.

Wenn im folgenden versucht wird, die Fülle der zu erwartenden Beziehungen von einem höhern Gesichtspunkte aus, als welchen sich ganz natürlich die *Theorie der Gruppe* $\mathfrak{S}$ *der Permutationen von vier Elementen*, geometrisch gesprochen der Bewegungen und Spiegelungen eines Tetraeders bietet, in Angriff zu nehmen, so hat dies einen tieferen Grund. Man sieht leicht ein, dass eine systematische Ordnung der Beziehungen unausweichlich zu einer solchen Behandlung führen muss, denn der erste Schritt

der Ordnung besteht in der Zusammenstellung gleich gebauter, d. h. eben durch Permutation gewisser Grössen aus einander ableitbarer Gleichungen. Zahl der Gleichungen eines solchen Systems und Zusammenhang mit andern Systemen sind ein unmittelbares Abbild der entsprechenden Eigenschaften der Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Insbesondere liegt die Gewähr für Vollständigkeit eines solchen Systems in der Gruppeneigenschaft einer gewissen engern Auswahl von Permutationen. Es ist daher natürlich, die vorhandene Ordnung nicht schrittweise aufzusuchen und zu *konstatieren*, sondern sie *vorauszusetzen* und von ihr auszugehen.

Um einem Missverständnis vorzubeugen, sei bemerkt, dass die Gruppentheorie wohl die Ordnung der Schaltungen und ihrer Beziehungen zu geben vermag, nicht aber die Form der letzteren. Diese muss intuitiv gefunden werden.

Die Zahl der Arbeiten über den VP ist sehr gross, und es werden sich gelegentlich Berührungspunkte finden. Das Problem in der oben skizzierten Form ist in der Literatur m. W. jedoch nicht behandelt worden.

Die 33 verschiedenen speziellen Schaltungsmöglichkeiten.

Einiges über die Tetraedergruppe[1]).

Ein System von Elementen bildet eine *Gruppe*, wenn folgende vier Postulate erfüllt sind:

1. Es existiert ein Gruppengesetz, durch welches zwei geordneten Elementen ξ, η des Systems eindeutig ein Element $\chi = \eta\,\xi$ desselben Systems zugeordnet wird. χ heisst das Produkt von ξ und η. Im allgemeinen ist $\eta\,\xi \neq \xi\,\eta$.

2. Für die Produktbildung gilt das Assoziativgesetz $\zeta \cdot \eta\,\xi = \zeta\,\eta \cdot \xi$.

3. Es existiert ein Einheitselement E, so dass $\xi E = E\xi = \xi$, wobei ξ ein beliebiges Element des Systems darstellt.

4. Es existiert zu jedem Element ξ das inverse Element ξ^{-1}, so dass $\xi\,\xi^{-1} = \xi^{-1}\,\xi = E$.

Für das System der $4! = 24$ Permutationen von vier Zahlen, welches fortan mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet sei, ist dies offenbar der Fall. Das Verknüpfungsgesetz liegt in der Aufeinanderfolge zweier Permutationen. Z. B. sei

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1342 \end{pmatrix}, \qquad Z_3 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix}.$$

[1]) Gonseth, Vorlesung über Gruppentheorie, Bern W.S. 1924/25.

Dann ist

$$Z_3 Z_1 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1234 \\ 1342 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2314 \end{pmatrix} \quad (\neq Z_1 Z_3) .$$

Die Produkte sind stets von rechts nach links zu lesen.

Eine engere Auswahl von Elementen von $\mathfrak{G}$ mit Gruppeneigenschaft heisst *Untergruppe*. $\mathfrak{U} = \xi + \eta + \zeta$ (d. h. $\mathfrak{U}$ bestehend aus den Elementen ξ, η, ζ) sei eine solche. Multiplikation mit einem nicht in $\mathfrak{U}$ enthaltenen Element σ gibt die *Nebengruppe*

$$\mathfrak{U}\sigma = \xi\sigma + \eta\sigma + \zeta\sigma .$$

Man zeigt leicht, dass die Elemente der Nebengruppe unter sich und von den Elementen von $\mathfrak{U}$ verschieden sind. Die Nebengruppe ist *keine* Gruppe.

$\mathfrak{G}$ kann geometrisch interpretiert werden als die *Gruppe der Bewegungen und Spiegelungen eines Tetraeders*, daher der Name. Die geraden Permutationen entsprechen der Untergruppe $\mathfrak{G}_+$ der zwölf Bewegungen, die ungeraden Permutationen der Nebengruppe $\mathfrak{G}_-$ der zwölf Spiegelungen. Es ist $\mathfrak{G}_- = S\,\mathfrak{G}_+$, wo S irgend eine Spiegelung bedeutet.

An Hand von Fig. 2 seien die zwölf *Bewegungen*, welche das Tetraeder 1, 2, 3, 4 in sich überführen, ein für allemal ausführlich hingeschrieben. (Das Einheitselement E ist nur einmal zu zählen.)

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{lll}
E = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix} & & \text{Identität, Ruhe.} \\
\mathfrak{Z}_1\colon E, Z_1 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1342 \end{pmatrix}, & Z_1^2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1423 \end{pmatrix}, \; Z_1^3 = E & \left.\begin{array}{l} \text{Die Gruppen } \mathfrak{Z}_i \\ \text{der Rechts-} \\ \text{drehungen um} \\ \text{die} \\ \text{Dreierachsen} \\ \text{durch Ecke } i. \end{array}\right. \\
\mathfrak{Z}_2\colon E, Z_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4213 \end{pmatrix}, & Z_2^2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3241 \end{pmatrix}, \; Z_2^3 = E & \\
\mathfrak{Z}_3\colon E, Z_3 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix}, & Z_3^2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4132 \end{pmatrix}, \; Z_3^3 = E & \\
\mathfrak{Z}_4\colon E, Z_4 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix}, & Z_4^2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2314 \end{pmatrix}, \; Z_4^3 = E & \\
\mathfrak{D}_2\colon E, D_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix}, & D_2^2 = E & \left.\begin{array}{l} \text{Die Gruppen } \mathfrak{D}_k \text{ der Dreh-} \\ \text{ungen um die Zweierachsen,} \\ \text{welche durch die Mitten} \\ \text{gegenüberliegender Kanten,} \\ \text{deren eine die Kante } 1\,k \\ \text{ist, gehen.} \end{array}\right. \\
\mathfrak{D}_3\colon E, D_3 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}, & D_3^2 = E & \\
\mathfrak{D}_4\colon E, D_4 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix}, & D_4^2 = E &
\end{array}\right.$$

Die Existenz von Untergruppen von $\mathfrak{G}_+$ gestattet die *Zerlegung* von $\mathfrak{G}_+$. Zweck der Zerlegung ist für uns die Angabe eines

Rezeptes, wie aus einer engeren Auswahl von Elementen (der sog. Faktorgruppe) durch Multiplikation mit einer einfach gebauten Untergruppe leicht die ganze Gruppe erzeugt werden kann. Eine mögliche Zerlegung ist

$$\mathfrak{G}_+ = \mathfrak{Z}_1 \cdot \mathfrak{D} = (E+Z_1+Z_1^2)\ (E+D_2+D_3+D_4)\,. \tag{6}$$

$\mathfrak{D}$ ist ebenfalls eine Gruppe, da $D_2D_3 = D_4, \ldots$ ist, sogar eine kommutative: $D_kD_l = D_lD_k$. (6) trägt dem Umstand, dass wir

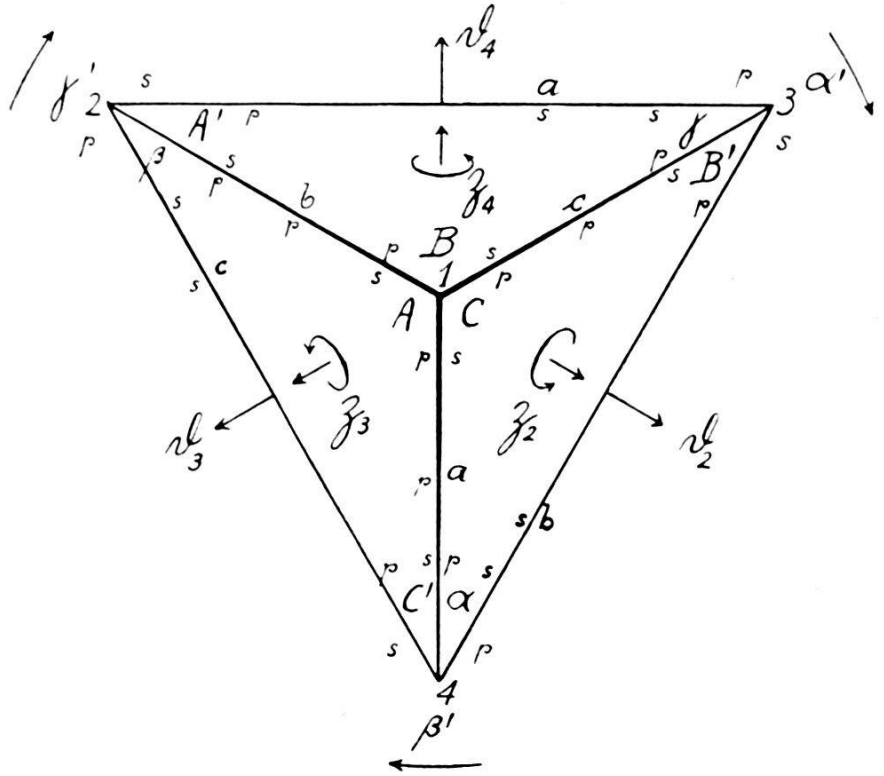


Fig. 2. p: Primärseite; s: Sekundärseite.

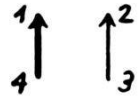
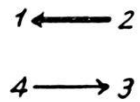
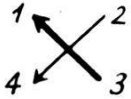
gezwungen sein werden, bei der Darstellung eine Klemme, z. B. 1, zu bevorzugen, bereits Rechnung.

Eine andere Art der Erzeugung von $\mathfrak{G}$ ist diejenige durch wiederholte Vertauschung zweier Zahlen. Hiervon macht folgender trivialer Satz Gebrauch: Wenn eine Grösse gegenüber einer der erwähnten Vertauschungen unveränderlich ist, so ist sie eine Invariante von $\mathfrak{G}$.

Die 33 s. VPS.

Die abgekürzte schematische Andeutung der verschiedenen Schaltungen in Tab. 1 ist folgendermassen zu verstehen: Der fette Pfeil bedeutet die p-Seite, der dünne die s-Seite. $\mathfrak{J}_p$ tritt stets *positiv* bei der *Spitze* des fetten Pfeiles *ein* und an dessen Ende wie-

Tabelle 1.

$\underline{a} = Ea = D_4 a$  $\begin{pmatrix} 44 & -(43-42) \\ 34-24 & -(22+33-23-32) \end{pmatrix}_{k^1}$	$\underline{A} = EA$ $\begin{pmatrix} 44 & -42 \\ 24 & -22 \end{pmatrix}_{k^1}$	$A' = D_2 A$ $\begin{pmatrix} 33+22-32-23 & -(22-32) \\ 22-23 & -22 \end{pmatrix}_{k^1}$	$\alpha' = D_3 A$ $\begin{pmatrix} 22+33-23-32 & -(24+33-23-34) \\ 42+33-43-32 & -(44+33-43-34) \end{pmatrix}_{k^1}$	$\alpha = D_4 A$ $\begin{pmatrix} 44 & -(44-43) \\ 44-34 & -(33+44-34-43) \end{pmatrix}_{k^1}$
$b = Z_1 a = Z_3 a$  $\begin{pmatrix} 22 & -(24-23) \\ 42-32 & -(33+44-34-43) \end{pmatrix}_{k^1}$	$B = Z_1 A$ $\begin{pmatrix} 22 & -23 \\ 32 & -33 \end{pmatrix}_{k^1}$	$B' = Z_4 A$ $\begin{pmatrix} 44+33-43-34 & -(33-43) \\ 33-34 & -33 \end{pmatrix}_{k^1}$	$\beta' = Z_2 A$ $\begin{pmatrix} 33+44-34-43 & -(32+44-34-42) \\ 23+44-24-43 & -(22+44-24-42) \end{pmatrix}_{k^1}$	$\beta = Z_3 A$ $\begin{pmatrix} 22 & -(22-24) \\ 22-42 & -(44+22-42-24) \end{pmatrix}_{k^1}$
$c = Z_1^2 a = Z_2^2 a$  $\begin{pmatrix} 33 & -(32-34) \\ 23-43 & -(44+22-42-24) \end{pmatrix}_{k^1}$	$C = Z_1^2 A$ $\begin{pmatrix} 33 & -34 \\ 43 & -44 \end{pmatrix}_{k^1}$	$C' = Z_3^2 A$ $\begin{pmatrix} 22+14-24-42 & -(44-24) \\ 44-42 & -44 \end{pmatrix}_{k^1}$	$\gamma' = Z_4^2 A$ $\begin{pmatrix} 44+22-42-24 & -(43+22-42-23) \\ 34+22-32-24 & -(33+22-32-23) \end{pmatrix}_{k^1}$	$\gamma = Z_2^2 A$ $\begin{pmatrix} 33 & -(33-32) \\ 33-23 & -(22+33-23-32) \end{pmatrix}_{k^1}$

Es bedeutet:
(Formeln (10), (12))

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{k^1} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}_{v(x)} = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & -\frac{\Delta}{21} \\ \frac{1}{21} & -\frac{22}{21} \end{pmatrix}_{x} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{pl}(x) & \cdot \\ \cdot & -\mathfrak{U}_{sl}(x) \end{pmatrix} ; \text{ ferner: } -(qr-qs)_{k^1} \equiv -k^1_{qr} + k^1_{qs}$$

Tabelle 1 (Fortsetzung).

$\underline{a_A} = Ea_A$ $\begin{pmatrix} 44 & 43 \\ -34 & -33 \end{pmatrix}_K$	$a_\alpha = D_4 a_A$ $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -21 & -22 \end{pmatrix}_K$	$\underline{A_a} = EA_a$ $\begin{pmatrix} 44 & -(44+41) \\ 44+14 & -(11+44+14+41) \end{pmatrix}_K$	$A'_{a*} = D_2 A_a$ $\begin{pmatrix} 33 & -(33+32) \\ 33+23 & -(22+33+23+32) \end{pmatrix}_K$	$\alpha'_{a*} = D_3 A_a$ $\begin{pmatrix} 22 & -(22+23) \\ 22+32 & -(33+22+32+23) \end{pmatrix}_K$	$\alpha_a = D_4 A_a$ $\begin{pmatrix} 11 & -(11+14) \\ 11+41 & -(44+11+41+14) \end{pmatrix}_K$
$b_B = Z_1 a_A$ $\begin{pmatrix} 22 & 24 \\ -42 & -44 \end{pmatrix}_K$	$b_\beta = Z_3 a_A$ $\begin{pmatrix} 11 & 13 \\ -31 & -33 \end{pmatrix}_K$	$B_b = Z_1 A_a$ $\begin{pmatrix} 22 & -(22+21) \\ 22+12 & -(11+22+12+21) \end{pmatrix}_K$	$B'_{b*} = Z_4 A_a$ $\begin{pmatrix} 44 & -(44+43) \\ 44+34 & -(33+44+34+43) \end{pmatrix}_K$	$\beta'_{b*} = Z_2 A_a$ $\begin{pmatrix} 33 & -(33+34) \\ 33+43 & -(44+33+43+34) \end{pmatrix}_K$	$\beta_b = Z_3 A_a$ $\begin{pmatrix} 11 & -(11+12) \\ 11+21 & -(22+11+21+12) \end{pmatrix}_K$
$c_C = Z_1^2 a_A$ $\begin{pmatrix} 33 & 32 \\ -23 & -22 \end{pmatrix}_K$	$c_\gamma = Z_2^2 a_A$ $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ -41 & -44 \end{pmatrix}_K$	$C_c = Z_1^2 A_a$ $\begin{pmatrix} 33 & -(33+31) \\ 33+13 & -(11+33+13+31) \end{pmatrix}_K$	$C'_{c*} = Z_3^2 A_a$ $\begin{pmatrix} 22 & -(22+24) \\ 22+42 & -(44+22+42+24) \end{pmatrix}_K$	$\gamma'_{c*} = Z_4^2 A_a$ $\begin{pmatrix} 44 & -(44+42) \\ 44+24 & -(22+44+24+42) \end{pmatrix}_K$	$\gamma_c = Z_2^2 A_a$ $\begin{pmatrix} 11 & -(11+13) \\ 11+31 & -(33+11+31+13) \end{pmatrix}_K$

Es bedeutet:
(Formeln (11), (13))

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}_K = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}_{i(x)} = \begin{pmatrix} \frac{22}{12} & -\frac{\Delta}{12} \\ \frac{1}{12} & -\frac{11}{12} \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{pk}(x) & \cdot \\ \cdot & -\mathcal{L}_{sk}(x) \end{pmatrix} \; ; \text{ ferner: } -(rr+qr)_K \equiv -(K_{rr}+K_{qr})$$

der aus; $\mathfrak{J}_s$ tritt umgekehrt *positiv* beim *Ende* des dünnen Pfeiles *ein* und bei dessen Spitze aus (vergl. Fig. 1). Ein Bogen bedeutet widerstandsfreie Verbindung zweier Klemmen. Um die Tabelle nicht unnötig zu beschweren, sind die Klemmen nur bei den s. VPS. a, b, c bezeichnet. Dieselbe Bezifferung hat man sich bei allen s. VPS. angegeben zu denken. Die Bezifferung ist also *fest*; nur die Art des Anschlusses wird der Permutation unterworfen. Tab. 1 ist zugleich als Definition für die Bezeichnungen A', A'_{ik}; a_a, a_{aik} usw. anzusehen. Die Matrizen unter den Schaltbildern werden später erklärt.

Eine s. VPS. x^*, welche aus der s. VPS. x durch Vertauschung der p-Seite mit der s-Seite hervorgeht, ist aus x umkehrbar eindeutig berechenbar, wie unten kurz angegeben ist. Solche zwei s. VPS. wollen wir im folgenden nicht als wesentlich verschieden ansehen und sie in Tab. 1 nicht gesondert aufführen, desgleichen nicht Schaltungen, die aus in Tab. 1 vorhandenen durch Richtungsumkehrung *eines* Pfeiles (Vorzeichenwechsel der x_{ik}, symbolisch mit $-x$ bezeichnet) hervorgehen. Dies hat den Vorteil, dass man mit $\mathfrak{G}_+$ allein schon alle 33 s. VPS. erhält.

Es gibt *vier Typen* von s. VPS., die gesondert betrachtet werden müssen, weil sie nicht durch Anwendung von $\mathfrak{G}$ ineinander überführbar sind.

Typus a:	Untergruppe $\mathfrak{D}$:	E	D_2	D_3	D_4
	liefert aus a :	$Ea = a$	$D_2 a = a^*$	$D_3 a = a^*$	$D_4 a = a$,

also nichts Neues. $\mathfrak{G}_+ \cdot a$ wird also nach (6) aus $\mathfrak{Z}_1\, a$: a, b, c bestehen.

Typus A:	Untergruppe $\mathfrak{D}$:	E	D_2	D_3	D_4
	liefert aus A :	A	A'	α'	α
und durch Multiplikation					
	mit Z_1 :	B	B'	β'	β
	bzw. Z_1^2 :	C	C'	γ'	γ
Typus a_A:	$\mathfrak{D}$:	E	D_2	D_3	D_4
	liefert aus a_A :	a_A	$a^*_{A'} = (a_A)^*$	$a^*_{a'} = (a_a{}^*)$	a_a,

also im wesentlichen zwei und mit $\mathfrak{Z}_1$ sechs verschiedene s. VPS. Die Bezeichnungen sind leicht zu behalten; a_A bedeutet: Wie a, aber hinsichtlich A im Kurzschlusszustand usw.

Typus A_a: Analog Typus A gibt es zwölf s. VPS.

Die letzten beiden Typen muss man neben den ersten beiden als gleichberechtigt betrachten, so wie man den Kurzschlussversuch neben dem Leerlaufversuch beizieht; das Verhältnis ist ein analoges, wenn auch nicht das gleiche. Die Schaltungen von

Typus a sind allein eigentliche Vierpolschaltungen. Alle übrigen sind streng genommen spezielle Dreipolschaltungen und sollen auch im folgenden so bezeichnet werden, wenn es typische Unterschiede gegenüber Typus a hervorzuheben gilt. Bei A ist eine Klemme ständig unbenutzt, bei a_A und A_a werden zwei Klemmen zu einer vereinigt.

Die verschiedenen Arten der Beschreibung des Vierpols.

Wir stellen nachstehend von diesen bekannten Dingen das Nötigste kurz zusammen.

Die einzelne s. VPS. Eine beliebige s. VPS. x ist durch ein Gleichungspaar (4) mit der Matrix

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}_x : \quad \begin{aligned} \mathfrak{V}_p &= x_{11}\,\mathfrak{V}_s + x_{12}\,\mathfrak{J}_s \\ \mathfrak{J}_p &= x_{21}\,\mathfrak{V}_s + x_{22}\,\mathfrak{J}_s \end{aligned} \tag{7}$$

gegeben. Man beachte die in (7) eingeführte, später oft benutzte abgekürzte Schreibweise.

Durch Auflösung von (7) nach $\mathfrak{V}_s$ und $\mathfrak{J}_s$, Vertauschung der Indices p und s und Umkehrung der Vorzeichen von $\mathfrak{J}_p$ und $\mathfrak{J}_s$ (beachte Fig. 1) erhält man für den Betrieb von der s-Seite von x aus:

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{22}{\Delta} & \frac{12}{\Delta} \\ \frac{21}{\Delta} & \frac{11}{\Delta} \end{pmatrix}_x , \quad \Delta x \cdot \Delta x^* = 1 . \tag{8}$$

Die gebräuchlichste Art der Verbindung zweier VP (x und y) zu einem neuen VP (z) ist die *Kettenschaltung*, bei welcher die s-Klemmen von x mit den p-Klemmen von y verbunden werden. Der Übergang von den s-Grössen von y zu den p-Grössen von x besteht in zwei aufeinanderfolgenden linearen Substitutionen, also in der Multiplikation der Matrizen von x und y:

$$z = x\,y = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}_x \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} & x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} \\ x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21} & x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Dies ist der Grund, weshalb man das Gleichungspaar in der nach den p-Grössen aufgelösten Form angibt. Im allgemeinen ist $x \cdot y \neq y \cdot x$.

Um später (7) mit (2) bzw. (1) vergleichen zu können, lösen wir (7) nach den $\mathfrak{V}$ bzw. den $\mathfrak{J}$ auf:

$$v(x) = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}_{v(x)} : \begin{matrix} \mathfrak{V}_p = v_{11}(x)\,\mathfrak{J}_p + v_{12}(x)\,\mathfrak{J}_s = \dfrac{x_{11}}{x_{21}}\,\mathfrak{J}_p - \dfrac{\Delta x}{x_{21}}\,\mathfrak{J}_s \\ \mathfrak{V}_s = v_{21}(x)\,\mathfrak{J}_p + v_{22}(x)\,\mathfrak{J}_s = \dfrac{1}{x_{21}}\,\mathfrak{J}_p - \dfrac{x_{22}}{x_{21}}\,\mathfrak{J}_s \end{matrix} \tag{10}$$

bzw.

$$i(x) = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}_{i(x)} : \begin{matrix} \mathfrak{J}_p = i_{11}(x)\,\mathfrak{V}_p + i_{12}(x)\,\mathfrak{V}_s = \dfrac{x_{22}}{x_{12}}\,\mathfrak{V}_p - \dfrac{\Delta x}{x_{12}}\,\mathfrak{V}_s \\ \mathfrak{J}_s = i_{21}(x)\,\mathfrak{V}_p + i_{21}(x)\,\mathfrak{V}_s = \dfrac{1}{x_{12}}\,\mathfrak{V}_p - \dfrac{x_{11}}{x_{12}}\,\mathfrak{V}_s \end{matrix}. \tag{11}$$

Die *Diagonalglieder* $v_{kk}(x)$ und $i_{kk}(x)$ haben eine *einfache physikalische Bedeutung*; es ist

$$\begin{cases} v_{11} = \dfrac{x_{11}}{x_{21}} = p\text{-Leerlaufwiderstand} \\ -v_{22} = \dfrac{x_{22}}{x_{21}} = s\text{-Leerlaufwiderstand} \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} i_{11} = \dfrac{x_{22}}{x_{12}} = p\text{-Kurzschlussleitfähigkeit} \\ -i_{22} = \dfrac{x_{11}}{x_{12}} = s\text{-Kurzschlussleitfähigkeit.} \end{cases} \tag{13}$$

(10) bis (13) sind in Tab. 1 unten eingetragen.

Die allgemeine Beschreibung durch (1) und (2)[1]. Die Zusammenhänge zwischen den s. VPS. lassen sich teilweise direkt, i. a. aber leichter auf dem Umweg über die allgemeine Beschreibung des Vierpols gewinnen.

Es sei $\mathfrak{V}_{\mu\nu} = P_\mu - P_\nu$ die Potentialdifferenz zwischen μ und ν, $\mathfrak{J}_\mu$ der bei μ positiv zugeführte Strom.

Wir setzen

$$\mathfrak{J}_\mu = \sum_\nu^{(4)} K_{\mu\nu} P_\nu \quad \mu = 1 \ldots 4. \tag{14}$$

Hieraus wird mit $\nu \neq \varrho$ (ϱ fest)

$$\mathfrak{J}_\mu = \sum_\nu^{(3)} K_{\mu\nu} P_\nu + K_{\mu\varrho} P_\varrho = \sum_\nu^{(3)} K_{\mu\nu} \mathfrak{V}_{\nu\varrho} + P_\varrho \sum_\sigma^{(4)} K_{\mu\sigma}.$$

Unser System ist isoliert, ein Potential also beliebig wählbar. D. H.:

$$\sum_\sigma^{(4)} K_{\mu\sigma} = 0 \qquad \mu = 1 \ldots 4. \tag{15}$$

---

[1]) Maxwell, Lehrbuch d. Elektrizität u. d. Magnetismus I, S. 420ff.

Voraussetzung 4) gibt aus (14):

$$\sum_{\mu}^{(4)} K_{\mu\nu} = 0 \qquad \nu = 1 \ldots 4. \tag{16}$$

(15) und (16) stellen zusammen sieben unabhängige Gleichungen dar. Aus beiden Gleichungsgruppen folgt nämlich:

$$\sum_{\mu}^{(4)} \sum_{\nu}^{(4)} K_{\mu\nu} = 0\,. \tag{17}$$

Je nach der Wahl der bleibenden neun unabhängigen $K_{\mu\nu}$ durch Weglassen einer Zeile und der entsprechenden Kolonne im quadratischen Koeffizientensystem

$$\begin{matrix} K_{11} & \cdots & K_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{41} & \cdots & K_{44} \end{matrix} \tag{18}$$

erhält man die vier Möglichkeiten der Beschreibung gemäss (1), $\varrho = 1, 2, 3$ oder 4. Wo sich die Koeffizientensysteme $K^{\varrho}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu \neq \varrho)$ als Diagonalausschnitte von (18) überdecken, ist natürlich

$$K^{\alpha}_{\mu\nu} = K^{\beta}_{\mu\nu} \qquad \mu, \nu \neq \alpha, \beta\,,$$

weshalb der obere Index keine Bedeutung hat, ausser etwa derjenigen der Angabe, welche Klemme ausgezeichnet werden soll. Dies bedeutet einen grossen rechnerischen Vorzug, den man im Gegensatz dazu bei den durch (2) definierten reziproken Koeffizientensystemen $k^{\varrho}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu \neq \varrho,\ \varrho = 1, 2, 3$ oder 4) nicht wieder findet, wie (22) zeigen wird.

Zwischen den $K^{(\varrho)}_{\mu\nu}$ und den $k^{\varrho}_{\mu\nu}$ eines Systems ϱ gelten die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\sigma}^{(3)} k^{\varrho}_{\mu\sigma} K_{\sigma\nu} &= \delta_{\mu\nu} \\ \sum_{\sigma}^{(3)} K_{\nu\sigma} k^{\varrho}_{\sigma\mu} &= \delta_{\nu\mu} \end{aligned}\right\} \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{matrix} 0 \;..\; \mu \neq \nu \\ 1 \;..\; \mu = \nu \end{matrix} \quad (\mu, \nu, \sigma \neq \varrho) \tag{19a}$$

$$k^{\varrho}_{\mu\nu} = \frac{U^{\varrho}(K_{\nu\mu})}{\Delta^{\varrho} K}\,, \quad K_{\nu\mu} = \frac{U(k^{\varrho}_{\mu\nu})}{\Delta k^{\varrho}} \quad (\mu, \nu \neq \varrho) \tag{19b}$$

$$\Delta^{\varrho} K \cdot \Delta k^{\varrho} = 1\,, \tag{19c}$$

worin $U^{\varrho}(K_{\nu\mu})$ die im System ϱ zu $K_{\nu\mu}$ gehörige Unterdeterminante $(= \mathrm{Minor}_{\nu\mu} \cdot (-1)^{\nu+\mu})$, $\Delta^{\varrho} K$ die entsprechende Hauptdeterminante (20) (s. unten) bedeuten usw.

Satz über die Determinanten dritter Ordnung. Für

$$\Delta^{\varrho} K = \begin{vmatrix} K_{\mu\mu} & K_{\mu\nu} & K_{\mu\sigma} \\ K_{\nu\mu} & K_{\nu\nu} & K_{\nu\sigma} \\ K_{\sigma\mu} & K_{\sigma\nu} & K_{\sigma\sigma} \end{vmatrix} \quad (\mu, \nu, \sigma \neq \varrho) \tag{20}$$

beweist man mit Hilfe von (15) und (16) leicht, dass

$$\Delta^{\alpha} K = \Delta^{\beta} K \quad \text{bzw. nach (19c)} \quad \Delta k^{\alpha} = \Delta k^{\beta}, \tag{21}$$

also unabhängig von der Darstellung. Da ausserdem $\Delta^{\varrho} K$ gegenüber irgend einer Vertauschung von zwei der Indices $\mu\,\nu\,\sigma$ invariant ist, folgt der *Satz*: *Es gibt nur eine charakteristische Determinante* $\Delta K = 1/\Delta k$; *sie ist eine Invariante von* $\mathfrak{G}$.

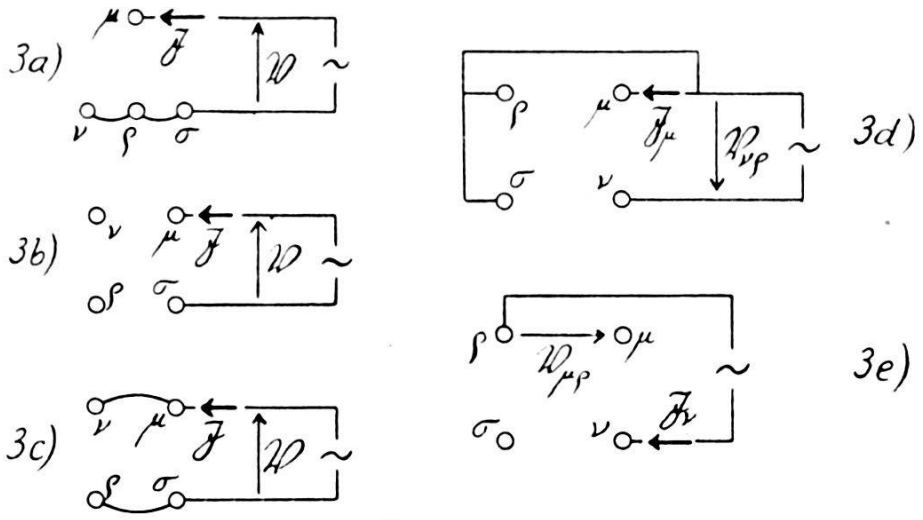


Fig. 3a—e.

Die $k^{\varrho}_{\mu\nu}$ für verschiedene Werte von ϱ sind, wie man mit Hilfe von (19b) und (21) zeigt, verknüpft durch

$$k^{\alpha}_{\nu\mu} = k^{\beta}_{\nu\mu} + k^{\beta}_{\alpha\alpha} - k^{\beta}_{\nu\alpha} - k^{\beta}_{\alpha\mu} \quad \mu, \nu = 1 \ldots 4. \tag{22}$$

Speziell ist

$$k^{\alpha}_{\beta\beta} = k^{\beta}_{\alpha\alpha}, \quad k^{\alpha}_{\nu\alpha} = k^{\alpha}_{\alpha\nu} = 0. \tag{22a}$$

Um die späteren Ausführungen über die $K_{\mu\nu}$ und $k^{\varrho}_{\mu\nu}$ stets mit konkreten Vorstellungen begleiten zu können, wollen wir uns kurz an die *physikalische Bedeutung* dieser Grössen erinnern.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{U}$ einen Widerstand, mit $\mathfrak{L} = 1/\mathfrak{U}$ eine Leitfähigkeit. Dann gilt nach (1) und (2) (in der Klammer sind rechts und links vom Komma die Klemmen angegeben, zwischen denen gemessen wird; der Strich bedeutet Verbindung der Klemmen; μ, ν, σ, ϱ bezeichnen stets verschiedene Klemmen):

$$K_{\mu\mu} = \mathfrak{L}\,(\mu, \overline{\nu\,\sigma\,\varrho}) \quad \text{vergl. Fig. 3a,} \tag{23a}$$

$$k^{\sigma}_{\mu\mu} = k^{\mu}_{\sigma\sigma} = \mathfrak{U}\,(\mu, \sigma;\ \nu\,\varrho \text{ frei}) \quad \text{vergl. Fig. 3b;} \tag{23b}$$

ferner mit (15), (16):

$$K_{\mu\mu} + K_{\nu\nu} + K_{\mu\nu} + K_{\nu\mu} = K_{\sigma\sigma} + K_{\varrho\varrho} + K_{\sigma\varrho} + K_{\varrho\sigma} = \mathfrak{L}\,(\overline{\mu\,\nu}, \overline{\sigma\,\varrho})$$

3 Gleichungen, vergl. Fig. 3c. (24)

Von den sieben erwähnten $\mathfrak{L}$ sind nur sechs unabhängig, denn:

$$\mathfrak{L}\,(\overline{23}, \overline{14}) + \mathfrak{L}\,(\overline{34}, \overline{12}) + \mathfrak{L}\,(\overline{42}, \overline{13}) = \sum_{\mu}^{(4)} K\mu\mu = \sum_{\mu}^{(4)} \mathfrak{L}\,(\mu, \overline{\nu\,\varrho\,\sigma}).$$

Sämtliche $\mu\nu$ und $\nu\mu$ sind in den beteiligten Indices oder Indicesgruppen *symmetrisch*.

Auch die oben erwähnte Invariante von $\mathfrak{G}$, $\Delta\, K$ bzw. $\Delta\, k$, und ihre Unterdeterminanten haben eine einfache physikalische Bedeutung.

Nach (19b) und (23a) ist

$$\Delta\, k = \mathfrak{U}\,(\sigma, \overline{\mu\,\nu\,\varrho}) \cdot U\,(k^{\varrho}_{\sigma\sigma})\,.$$

$$U\,(k^{\varrho}_{\sigma\sigma}) = \begin{vmatrix} k^{\varrho}_{\mu\mu} & k^{\varrho}_{\mu\nu} \\ k^{\varrho}_{\nu\mu} & k^{\varrho}_{\nu\nu} \end{vmatrix} \tag{25}$$

spielt in bezug auf den *Dreipol*, den man nach (2) aus dem Vierpol ableitet, indem man $\mathfrak{J}_{\sigma} = 0$ setzt und die Gleichung (2) für $\mathfrak{V}_{\sigma\varrho}$ weglässt, also m. a. W. die Klemme σ als nicht vorhanden betrachtet, dieselbe Rolle wie $\Delta\, k$ in bezug auf den Vierpol. U ist also invariant gegen $\mathfrak{J}_{\sigma}$, was man übrigens auch mit (22) bestätigen kann. Indem man auf diesen Dreipol den gleichen Gedankengang nochmals anwendet und beachtet, dass die Unterdeterminante $\mu\mu$ von $U\,(k^{\varrho}_{\sigma\sigma})$ gleich $k^{\varrho}_{\nu\nu}$ ist, erhält man:

$$\Delta\, k = \mathfrak{U}\,(\sigma, \overline{\mu\,\nu\,\varrho}) \cdot \mathfrak{U}\,(\mu, \overline{\nu\,\varrho};\ \sigma \text{ frei}) \cdot \mathfrak{U}\,(\nu, \varrho;\ \sigma\,\mu \text{ frei}). \tag{26}$$

$\Delta\, k$ erscheint derart als *Produkt dreier Widerstände*. Man erhält dasselbe, wenn man von (19b) für $k^{\varrho}_{\sigma\sigma}$ ausgeht. Der Satz nimmt dann die Form an: Der Leerlaufwiderstand $k^{\varrho}_{\sigma\sigma} = k^{\sigma}_{\varrho\varrho}$ zwischen ϱ und σ ist gleich dem Quotient aus der K-Determinante des Systems nach Verbindung von ϱ mit σ und derjenigen des ursprünglichen Systems. In dieser Form ist er ohne weiteres für n-Pole gültig[1]) und umfasst beim Vierpol ausserdem die in (26) nicht enthaltene Möglichkeit:

$$\Delta\, k = \mathfrak{U}\,(\overline{\nu\,\varrho}, \overline{\sigma\,\mu}) \cdot \mathfrak{U}\,(\sigma, \mu\ ;\ \overline{\nu\,\varrho}).\ \mathfrak{U}\,(\nu, \varrho;\ \sigma\,\mu \text{ frei}). \tag{26a}$$

---

[1]) Feussner, Annalen der Physik, 9, S. 1312, 1902.

Die *Nichtdiagonalglieder* $K_{\mu\nu}$ und $k^{\varrho}_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ haben die Bedeutung von Verhältnissen zwischen einem Strom und einer Spannung (bzw. umgekehrt), welche sich nicht wie bei den $K_{\mu\mu}$ bzw. $k^{\varrho}_{\mu\mu}$ auf dieselben Klemmengruppen bzw. Klemmen beziehen, also nicht als Leitfähigkeiten bzw. Widerstände in gewöhnlichem Sinn messbar sind. Die Beschreibung der Schaltungen von Fig. 3d durch (1) bzw. Fig. 3e durch (2) ergibt:

$$\mathfrak{J}_{\mu} = K_{\mu\nu}\,\mathfrak{V}_{\nu\mu} \qquad (\mathfrak{V}_{\nu\varrho} = \mathfrak{V}_{\nu\mu})$$

bzw.

$$\mathfrak{V}_{\mu\varrho} = k^{\varrho}_{\mu\nu}\,\mathfrak{J}_{\nu} \qquad (\mathfrak{J}_{\varrho} = -\,\mathfrak{J}_{\mu})\,.$$

Beschreibung des Vierpols durch die 33 s. VPS. und Beziehungen zwischen je zwei der letzteren.

Der Anschluss zwischen den viermal 33 x_{ik} und den k bzw. K ist durch (1), (2), (10) und (11) gegeben. Die *einfachste Darstellung* erhält man nun, wenn man die s. VPS. vom Typus a und A, deren gemeinsames Merkmal, im Gegensatz zu denjenigen vom Typus a_A und A_a, das Vorhandensein einer für die spezielle Schaltung gleichgültigen Spannung (z. B. $\mathfrak{V}_{21}$ bei a, $\mathfrak{V}_{31}$ bei A usw.) ist, in der Form (10) mit (2), hingegen Typus a_A und A_a in der Form (11) mit (1) vergleicht, wie in Tab. 1 durch Trennung in eine obere und eine untere Hälfte angedeutet worden ist.

Beispiel: Für A folgt aus (2):

$$\mathfrak{V}_{41} = k^1_{44}\,\mathfrak{J}_4 + k^1_{42}\,\mathfrak{J}_2 = -\,\mathfrak{V}_p = k^1_{44}\cdot(-\,\mathfrak{J}_p) + k^1_{42}\,\mathfrak{J}_s$$
$$\mathfrak{V}_{21} = k^1_{24}\,\mathfrak{J}_4 + k^1_{22}\,\mathfrak{J}_2 = -\,\mathfrak{V}_s = k^1_{24}\cdot(-\,\mathfrak{J}_p) + k^1_{22}\,\mathfrak{J}_s\,,$$

woraus

$$\big(v_{ik}(A)\big) = \begin{pmatrix} k^1_{44} & -k^1_{42} \\ k^1_{24} & -k^1_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & -42 \\ 24 & -22 \end{pmatrix}_{k^1}.$$

Diese Matrix ist in Tab. 1 eingetragen. Weiter erhält man z. B. für α' aus A mit $D_3 = \binom{1234}{3412}$:

$$\big(v_{ik}(\alpha')\big) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix} \text{ ausgeübt auf } \begin{pmatrix} 44 & -42 \\ 24 & -22 \end{pmatrix}_{k^1} = \begin{pmatrix} 22 & -24 \\ 42 & -44 \end{pmatrix}_{k^3};$$

mit (22) folgt hieraus die in Tab. 1 angegebene Matrix. Auf diese Art ist Tab. 1 entstanden.

Es gibt *verschiedene Verfahren zur Aufstellung von Beziehungen*; sie seien nachstehend an einfach gewählten Beispielen erläutert.

a) Oft lässt sich direkt aus den Schaltschemata von Tab. 1 für Grössen mit unmittelbar anschaulicher Bedeutung oder allgemeiner durch Beschreibung desselben Zustandes auf zwei verschiedene Arten eine Beziehung ablesen. Gewähr für Vollständigkeit besteht natürlich nicht.

Beispiele: 1. Zwischen a und A: $\mathfrak{U}_{pl}(a) = \mathfrak{U}_{pl}(A) = \mathfrak{U}(1, 4)$, d. h. diese s. VPS. haben gemeinsamen p-Leerlaufwiderstand.

2. a, A und α: Die drei Sekundärspannungen ergänzen sich im Leerlaufzustand zur Primärspannung. Da $1/x_{11}$ das Spannungsübersetzungsverhältnis im Leerlauf ist, gilt:

$$\frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{A_{11}} + \frac{1}{\alpha_{11}} = 1.$$

b) Vergleich der Matrizen in Tab. 1 gibt z. B. für a, A, α:

$$(k_{43}^1 - k_{42}^1) + k_{42}^1 + (k_{44}^1 - k_{43}^1) = k_{44}^1$$

oder

$$\frac{\Delta a}{a_{21}} + \frac{\Delta A}{A_{21}} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha_{21}} = \mathfrak{U}_{pl} \; (= \mathfrak{U}(1, 4)).$$

Diese Betrachtung der Matrizen eignet sich zur Festsetzung der Beziehungen zwischen den s. VPS. der oberen *oder* der unteren Hälfte der Tab. 1, insbesondere zur Bestimmung ihrer *Anzahl* auf Grund des Satzes von Jacobi: Sind n Funktionen f_i von q unabhängigen Variablen t $(n \leqq q)$ funktional abhängig:

$$\vartheta(f_1 \cdots\cdots f_n) = 0,$$

so sind alle Determinanten n-ter Ordnung der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial t_q} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial f_k}{\partial t_l} \right| \quad \text{gleich Null.}$$

Werden die n Funktionen f ganz oder teilweise, z. B. m $(m \leqq n)$ hiervon, durch m unabhängige Funktionen φ der letzteren ersetzt:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = \varphi_1(f_1 \cdots\cdots f_m), & \varphi_{m+1} = f_{m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m = \varphi_m(f_1 \cdots\cdots f_m) & \varphi_n = f_n, \end{array}$$

so bleibt der Satz bestehen, weil

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l}\right| = \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial f_k}\right| \cdot \left|\frac{\partial f_k}{\partial t_l}\right|, \quad \text{wobei} \quad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial f_k}\right| \neq 0 .$$

Man darf also zur Prüfung der Abhängigkeit zweier s. VPS. x und y von einander 1) die x_{ik} und y_{ik} z. B. durch die $v_{ik}(x)$ und $v_{ik}(y)$ und 2) diese letzteren durch lineare Kombinationen hiervon ersetzen. Auf diese Art erhält man den Unabhängigkeitsgrad meistens ohne jegliche Rechnung.

c) Bei gewissen Paaren von s. VPS., deren eines der oberen, das andere der unteren Hälfte von Tab. 1 angehört, versagen die Wege a) und b). Die zugehörige Beziehung wurde durch Probieren aus den Gl. (19) gefunden. Solche zwei s. VPS. u und v nennen wir *korrespondierende VPS.*; sie unterscheiden sich nur durch den Verbindungsbügel. Wir kommen auf diese Paare unten noch zu sprechen; im Verzeichnis der Beziehungen ((39 ff.) bis (42 ff.)) sind sie durch einen Vermerk „(u, v) korresp." gekennzeichnet.

Die *Zahl der Kombinationen* ist sehr gross; allein solche zu 2 gibt es 528. Die Zahl der *einzeln zu untersuchenden* Kombinationen ist kleiner dank der Gruppeneigenschaften der Permutationen, wie man leicht einsieht. Es mögen nämlich die Beziehungen B_i zwischen einer s. VPS. t_0 des Typus t (eines unserer vier Typen) und allen s. VPS. $t_i' = G_i t_0'$ eines andern Typus t' vorliegen:

$$B_i = \{t_0, t_i'\} = \{t_0, G_i t_0'\} .$$

Da die Form der B_i durch Ausübung einer Permutation G_k von $\mathfrak{G}$ nicht verändert wird, können wir schreiben:

$$B_i = \{G_k t_0, G_k t_i'\} .$$

Also kennen wir damit alle Beziehungen zwischen *irgend* einer s. VPS. vom Typus t mit irgend einer s. VPS. des Typus t'. Ist insbesondere $G_k t_i' = G_i^{-1} t_i' = t_0'$, so sind damit die Beziehungen zwischen der ersten s. VPS. von t' und allen s. VPS. von t gegeben:

$$B_i = \{G_i^{-1} t_0, t_0'\} .$$

Die speziellen Dreipolschaltungen (abgekürzt s. DPS.).

Man kann auf zehn Arten aus einem Vierpol einen Dreipol, d. h. ein den in der Einleitung angegebenen Voraussetzungen genügendes Gebilde mit drei Klemmen ableiten: I) durch Weglassung je einer Klemme (vier Möglichkeiten); II) durch Verbindung zweier Klemmen zu einer (sechs Möglichkeiten).

Wenn wir beim VP von einer besonderen Zählung der *-Schaltungen und der durch Richtungsumkehrung eines Pfeiles erhältlichen Schaltungen absehen, so gibt es drei durch die zyklische Gruppe $\mathfrak{Z}: E, Z, Z^2$ zusammenhängende s. VPS. x, y, z (siehe Fig. 4), welche von einander vollständig abhängig sind, da ja

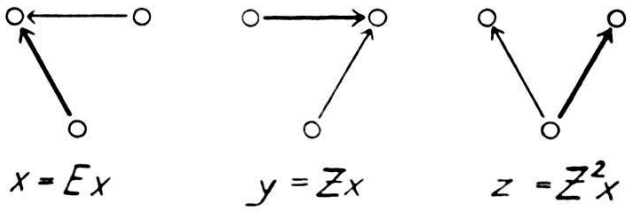


Fig. 4.

auch die allgemeine Beschreibung analog (1) oder (2) wie (7) nur noch vier Konstanten enthält.

Die zwölf zu einem der vier Dreipole I) gehörigen s. VPS. erkennt man aus Fig. 2, in der die s. VPS. von Typus A im Winkel zwischen den den p- und s-Pfeil darstellenden Kanten eingetragen sind; den Dreipolen entsprechen jeweils die auf der Dreieckfläche verzeichneten Buchstaben. Man erhält sie auch systematisch geordnet auf folgende Weise: Es gilt die Zerlegung:

$$\mathfrak{S}_+ = (\mathfrak{Z}_1 E + \mathfrak{Z}_2 D_2 + \mathfrak{Z}_3 D_3 + \mathfrak{Z}_4 D_4) D_3 ,$$

ausführlich:

$$\begin{matrix} \alpha' & \alpha & A & A' \\ \beta' & B' & \beta & B \\ \gamma' & C & C' & \gamma \end{matrix} \tag{27}$$

Die zu einem der sechs Dreipole II) gehörigen s. VPS. mit gemeinsamem Verbindungsbügel sucht man sich aus Tab. 1 zusammen:

$$\begin{array}{lccc|ccc} & a_A & b_B & c_C & a_\alpha & b_\beta & c_\gamma \\ & (B'_{b*})^* & (C'_{c*})^* & (A'_{a*})^* & (\beta_b)^* & (\gamma_c)^* & (\alpha_a)^* \\ & \beta'_{b*} & \gamma'_{c*} & \alpha'_{a*} & B_b & C_c & A_a \\ \text{Verbunden sind:} & \overline{12} & \overline{13} & \overline{14} & \overline{34} & \overline{42} & \overline{23} \\ & \mathfrak{Z}_1 \longrightarrow & & & \mathfrak{Z}_1 \longrightarrow & & \end{array} \tag{28}$$

Um den in Fig. 4 angedeuteten zyklischen Charakter, der bei den Untergruppen in (27) durch die Art der Erzeugung gewährleistet wird, bei denjenigen in (28) zu wahren, wurde dort, wo nötig, die *-Schaltung anstelle der normalen in Tab. 1 vorgesehenen gewählt.

Dem Zusammenhang zwischen x und y $(= Z \cdot x)$ bzw. y^* zur *Berechnung einer s. DPS. aus einer anderen* lässt sich folgende

praktische Form geben (wobei natürlich nur vier der Gleichungen unabhängig sind):

$$\frac{x_{22}-\Delta x}{1}=\frac{1}{y_{11}-\Delta y}=\frac{x_{12}}{y_{12}}=\frac{x_{21}}{y_{21}}=\frac{x_{22}}{y_{11}}=\frac{x_{11}+x_{22}-1}{y_{11}+y_{22}-1}=$$
$$=\frac{x_{11}-1}{y_{22}-1}=\frac{\Delta x}{y_{11}-1}=\frac{x_{22}-1}{\Delta y}=\frac{\Delta x-1}{\Delta y-1}=\frac{x_{11}+x_{22}-\Delta x}{y_{11}+y_{22}-\Delta y}=$$
$$=\frac{x_{11}-\Delta x}{y_{22}-\Delta y}=\ldots \tag{29}$$

und

$$\frac{x_{12}}{y^*_{12}}=\frac{x_{21}}{y^*_{21}}=\frac{x_{22}}{y^*_{22}}=\frac{x_{22}-1}{1}=\frac{1}{y^*_{22}-1}=\ldots \tag{29a}$$

Gegenüber $\mathfrak{Z}$ invariant sind nach (29) die Aggregate:

$$\left(\frac{12}{21}\right),\quad \left(\frac{11+22-1}{12 \text{ bzw. } 21}\right),\quad \left(\frac{\Delta-1}{12 \text{ bzw. } 21}\right).$$

Hiervon ist $\left(\frac{12}{21}\right)$ allein auch gegenüber der Vertauschung von p- und s-Seite invariant (vergl. (8)):

$$\frac{x_{12}}{x_{21}}=\frac{x^*_{12}}{x^*_{21}}=\frac{y_{12}}{y_{21}}=\frac{y^*_{12}}{y^*_{21}}=\frac{z_{12}}{z_{21}}=\frac{z^*_{12}}{z^*_{21}}.$$

Für diese charakteristische Determinante des Dreipols gilt nach (10) ... (13):

$$-\,|\,v_{ik}(x)\,|=\frac{-1}{|i_{ik}(x)\,|}=\frac{x_{12}}{x_{21}}=\mathfrak{U}_{pl}(x)\cdot\mathfrak{U}_{sk}(x)\,. \tag{30}$$

Sie wird, wie wir oben bei (25) und (26) bereits erwähnt haben, und wie man an Hand von (27), (28) und Tab. 1 im einzelnen leicht nachrechnet, für die vier Dreipole I) durch die Diagonalunterdeterminanten (25), für die sechs Dreipole II) durch die analogen sechs Grössen

$$U^{\varrho}(K_{\sigma\sigma})=\begin{vmatrix} K_{\mu\mu} & K_{\mu\nu} \\ K_{\nu\mu} & K_{\nu\nu}\end{vmatrix}\quad(\mu,\nu\neq\varrho,\sigma) \tag{31}$$

gegeben.

Besonderes Interesse beanspruchen noch die Grössen $\mathfrak{U}_{ps}(x)$ und $L_{p+s}(x)$

$$\mathfrak{U}_{ps}(x)=\left(\frac{11+22-1-\Delta}{21}\right)_x=\left(\frac{22}{21}\right)_y=\left(\frac{11}{21}\right)_z=\mathfrak{U}_{sl}(y)=\mathfrak{U}_{pl}(z),$$

$$L_{p+s}(x)=\left(\frac{11+22-1-\Delta}{12}\right)_x=\left(\frac{22}{12}\right)_y=\left(\frac{11}{12}\right)_z=$$
$$=L_{pk}(y)=L_{sk}(z)\,. \tag{32}$$

Die Indices sind folgendermassen zu verstehen: $\mathfrak{U}_{ps}(x)$ ist der (Leerlauf-)Widerstand zwischen den nichtgemeinsamen p- und s-Klemmen von x, $L_{p+s}(x)$ die (Kurzschluss-)Leitfähigkeit, wenn genannte Klemmen verbunden sind. Diese beiden Grössen gehören streng genommen *nicht* zur s. DPS. bzw. s. VPS. x. Ihre Bedeutung für x wird unten (Gl. (54), (56), (56a)) zur Sprache kommen.

Aus (29) lassen sich weitere übersichtliche Beziehungen ablesen; z. B. aus

$$\left(\frac{22}{21}\right)_x = \left(\frac{11}{21}\right)_y$$

und den mit $\mathfrak{Z}$ hieraus ableitbaren Gleichungen folgt

$$x_{11}\, y_{11}\, z_{11} = x_{22}\, y_{22}\, z_{22}\,.$$

Verzeichnis der Beziehungen zwischen zwei s. VPS.

Wir geben nachstehend in möglichst gedrängter Form das Verzeichnis der Beziehungen zwischen zwei s. VPS. Sie sind als solche zwischen irgend einer s. VPS. und der ersten dem Typus den Namen gebenden s. VPS. angegeben.

Die Aufstellung der Beziehungen zwischen irgend zwei vorgegebenen s. VPS. im Sinne der oben im Anschluss an die drei Verfahren gemachten Bemerkungen sei an einem *Beispiel* ausführlich erläutert. Gesucht sei der Zusammenhang zwischen B' und γ. Es ist nach Tab. 1 $B' = Z_4 \cdot A$, $\gamma = Z_2^2 \cdot A$. Wir setzen $\gamma = Z_4\, X \cdot A$, woraus $X = Z_4^{-1} Z_2^2$, und nach (5): $X = Z_1$. Folglich $X \cdot A = Z_1 \cdot A = B$, und es wird $\gamma = Z_4 \cdot B$. Die gesuchte Gleichung $\{B', \gamma\}$ ist demnach diejenige zwischen A und B behandelt mit Z_4:

$$\{B', \gamma\} = \{Z_4 \cdot A, Z_4 \cdot B\} = Z_4 \cdot \{A, B\},$$

also nach Teilverzeichnis II):

$$\mathfrak{U}_{sl}(B') = \mathfrak{U}_{pl}(\gamma)\,.$$

Der Vollständigkeit halber seien noch die benutzten *Abkürzungen* zusammengestellt: p: primär; s: sekundär; l: Leerlauf; k: Kurzschluss; $\mathfrak{L}$: Leitfähigkeit; $\mathfrak{U}$: Widerstand; L_{p+s} und $\mathfrak{U}_{ps}$: siehe (32); „s. DPS." weist auf das Bestehen von vier unabhängigen Beziehungen hin; „(u, v) korresp.": siehe oben Verfahren c), mathematische Form des Korrespondierens: siehe unten Gl. (44), (44a); $-x$: Schaltung mit Koeffizienten $-x_{ik}$, die aus x durch Richtungsumkehrung eines Pfeiles hervorgeht; x^*: x von s-Seite aus betrieben.

I) *Beziehungen zwischen zwei s. VPS. vom Typus a.*

$$\left(\frac{11+22-1-\Delta}{21}\right)_a = \left(\frac{11+22+1+\Delta}{21}\right)_b$$

$$\left(\frac{11+22+1+\Delta}{21}\right)_a = \left(\frac{11+22-1-\Delta}{21}\right)_c. \qquad (33\text{ff.})$$

Diese Grössen haben keine unmittelbare physikalische Bedeutung.

II) *Beziehungen zwischen zwei s. VPS. vom Typus A.*

$$\begin{array}{lll} & & \alpha', A: \mathfrak{U}_{ps}(\alpha') = \mathfrak{U}_{ps}(A) \\ B, A: \mathfrak{U}_{pl}(B) = \mathfrak{U}_{sl}(A) & & \beta', A: \mathfrak{U}_{sl}(\beta') = \mathfrak{U}_{ps}(A) \\ C, A: \mathfrak{U}_{sl}(C) = \mathfrak{U}_{pl}(A) & & \gamma', A: \mathfrak{U}_{pl}(\gamma') = \mathfrak{U}_{ps}(A) \\ A', A: \mathfrak{U}_{sl}(A') = \mathfrak{U}_{sl}(A) & & \alpha, A: \mathfrak{U}_{pl}(\alpha) = \mathfrak{U}_{pl}(A) \\ B', A: \mathfrak{U}_{ps}(B') = \mathfrak{U}_{sl}(A) & & \beta, A: \text{s. DPS.} \\ C', A: \text{s .DPS.} & & \gamma, A: \mathfrak{U}_{ps}(\gamma) = \mathfrak{U}_{sl}(A) \quad (34\text{ff.}) \end{array}$$

Lauter Beziehungen zwischen Leerlaufwiderständen, ausgenommen bei dem engeren Dreipolzusammenhang.

III) *Beziehungen zwischen zwei s. VPS. vom Typus a_A.*

$$\begin{array}{lll} & & a_a, a_A: \mathfrak{L}_{p+s}(a_a) = \mathfrak{L}_{p+s}(a_A) \\ b_B, a_A: \mathfrak{L}_{sk}(b_B) = \mathfrak{L}_{pk}(a_A) & & b_\beta, a_A: \mathfrak{L}_{sk}(b_\beta) = \mathfrak{L}_{sk}(a_A) \\ c_C, a_A: \mathfrak{L}_{pk}(c_C) = \mathfrak{L}_{sk}(a_A) & & c_\gamma, a_A: \mathfrak{L}_{sk}(c_\gamma) = \mathfrak{L}_{pk}(a_A) \quad (35\text{ff.}) \end{array}$$

Lauter Beziehungen zwischen Kurzschlussleitfähigkeiten.

IV) *Beziehungen zwischen zwei s. VPS. vom Typus A_a.*

$$\begin{array}{lll} & & \alpha'_{a*}, A_a: \mathfrak{L}_{sk}(\alpha'_{a*}) = \mathfrak{L}_{sk}(A_a) \quad (36\text{ff.}) \\ B_b, A_a: \mathfrak{L}_{p+s}(B_b) = \mathfrak{L}_{p+s}(A_a) & & \beta'_{b*}, A_a: \mathfrak{L}_{p+s}(\beta'_{b*}) = \mathfrak{L}_{pk}(A_a) \\ C_c, A_a: \mathfrak{L}_{p+s}(C_c) = \mathfrak{L}_{p+s}(A_a) & & \gamma'_{c*}, A_a: \mathfrak{L}_{pk}(\gamma'_{c*}) = \mathfrak{L}_{pk}(A_a) \\ A'_{a*}, A_a: \mathfrak{L}_{sk}(A'_{a*}) = \mathfrak{L}_{sk}(A_a) & & \alpha_a, A_a: \text{s. DPS.} \\ B'_{b*}, A_a: \mathfrak{L}_{pk}(B'_{b*}) = \mathfrak{L}_{pk}(A_a) & & \beta_b, A_a: \mathfrak{L}_{pk}(\beta_b) = \mathfrak{L}_{p+s}(A_a) \\ C'_{c*}, A_a: \mathfrak{L}_{p+s}(C'_{c*}) = \mathfrak{L}_{pk}(A_a) & & \gamma_c, A_a: \mathfrak{L}_{pk}(\gamma_c) = \mathfrak{L}_{p+s}(A_a) \end{array}$$

V) *Beziehungen zwischen einer s. VPS. vom Typus a und einer solchen vom Typus A.*

Man hat, wie wir sahen, die Wahl, den Zusammenhang von a mit allen s. VPS. vom Typus A *oder* von A mit allen s. VPS. vom Typus a anzugeben. Wir schlagen den letzteren Weg als den einfacheren ein.

$$\begin{array}{l} a, A: \mathfrak{U}_{pl}(a) = \mathfrak{U}_{pl}(A) \\ b, A: \mathfrak{U}_{pl}(b) = \mathfrak{U}_{sl}(A) \\ c, A: \mathfrak{U}_{sl}(c) = \mathfrak{U}_{ps}(A) \qquad (37\text{ff.}) \end{array}$$

VI) *Beziehungen zwischen den Typen a_A und A_a.*

a_A, A_a: $\mathfrak{L}_{pk}(a_A) = \mathfrak{L}_{pk}(A_a)$ $\quad a_a, A_a$: $\mathfrak{L}_{pk}(a_a) = \mathfrak{L}_{p+s}(A_a)$
b_B, A_a: $\mathfrak{L}_{sk}(b_B) = \mathfrak{L}_{pk}(A_a)$ $\quad b_\beta, A_a$: $\mathfrak{L}_{pk}(b_\beta) = \mathfrak{L}_{p+s}(A_a)$
c_C, A_a: $\mathfrak{L}_{p+s}(c_C) = \mathfrak{L}_{sk}(A_a)$ $\quad c_\gamma, A_a$: s. DPS. (38ff.)

VII) *Beziehungen zwischen den Typen a und a_A.*

a, a_A: korresp. (39ff.)
b, a_A: $\mathfrak{L}_{sk}(b) = \mathfrak{U}_{ps}^{-1}(a_A) = \mathfrak{L}_{ps}(a_A)$
c, a_A: $(-c^*, a_A)$ korresp.

VIII) *Beziehungen zwischen den Typen a und A_a.*

a, A_a: $\mathfrak{L}_{pk}(a) = \mathfrak{L}_{pl}(A_a)$ (40ff.)
b, A_a: $(b, -c_\gamma)$ korresp., (A_a, c_γ) s. DPS.
c, A_a: (c, c_γ) korresp., (A_a, c_γ) s. DPS.

Ein Beispiel hierzu wird unten gegeben: s. Gl. (45).

IX) *Beziehungen zwischen den Typen A und a_A.*

a_A, A: $\mathfrak{L}_{pl}(a_A) = \mathfrak{L}_{pk}(A)$ (41ff.)
b_B, A: (b_B, A^*) korresp.
c_C, A: $\mathfrak{L}_{sl}(c_C) = \mathfrak{L}_{sk}(A)$
a_a, A: (a_a, C'^*) korresp., (C', A) s. DPS.
b_β, A: $\mathfrak{L}_{pl}(b_\beta) = \mathfrak{L}_{p+s}(A)$
c_γ, A: (c_γ, β) korresp., (A, β) s. DPS.

X) *Beziehungen zwischen den Typen A und A_a.*

A_a, A: (A_a, A) korresp.
B_b, A: (B_b, A^*) korresp. (42ff.)
C_c, A: $\mathfrak{L}_{sl}(C_c) = \mathfrak{L}_{p+s}(A)$
A'_{a*}, A: $\mathfrak{L}_{sl}(A'_{a*}) = \mathfrak{L}_{sk}(A)$
B'_{b*}, A: $\mathfrak{U}_{ps}^{1}(B'_{b*}) = \mathfrak{L}_{ps}(B'_{b*}) = \mathfrak{L}_{pk}(A)$
C'_{c*}, A: (C'_{c*}, C') korresp., (C', A) s. DPS.
α'_{a*}, A: $\mathfrak{L}_{ps}(\alpha'_{a*}) = \mathfrak{L}_{sk}(A)$
β'_{b*}, A: $\mathfrak{L}_{sl}(\beta'_{b*}) = \mathfrak{L}_{pk}(A)$
γ'_{c*}, A: (γ'_{c*}, β^*) korresp., (A, β) s. DPS.
α_a, A: (α_a, C'^*) korresp., (C', A) s. DPS.
β_b, A: (β_b, β) korresp., (A, β) s. DPS.
γ_c, A: $\mathfrak{L}_{ps}(\gamma_c) = \mathfrak{L}_{p+s}(A)$.

Bei den Beziehungssystemen (VII) bis (X) handelt es sich durchgehend entweder um eine Gleichung zwischen einer Kurzschlussleitfähigkeit (bzw. Widerstand) der s. VPS. der obern Hälfte der Tab. 1 und einer entsprechenden Leerlaufgrösse der untern Hälfte, oder dann um ein Korrespondieren.

Korrespondierende Vierpolschaltungen. Es wurden solche zwei s. VPS. korrespondierend genannt, welche durch Einfügen bzw.

Weglassen eines Kurzschlussbügels aus einander hervorgehen. Für a und A z. B. sind folgende korrespondierende Paare möglich (siehe Fig. 5):

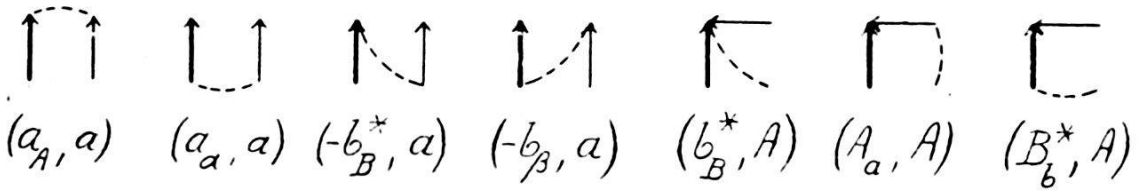


Fig. 5.

Es scheint nicht möglich, anschaulich zu erkennen, welcher Art die Beziehung, ja ob überhaupt eine solche vorhanden sei. Durch Probieren kann man nun aus (19a) und (19b) folgendes finden:

$$\begin{aligned}
&\alpha) \quad k_{42}^1 K_{24} + k_{43}^1 K_{34} + k_{44}^1 K_{44} = 1 \\
&\beta) \quad k_{22}^1 K_{22} + k_{23}^1 K_{32} + k_{24}^1 K_{42} = 1 \\
&\gamma) \quad k_{23}^1 K_{32} + k_{33}^1 K_{33} + k_{43}^1 K_{34} = 1 \\
&\delta) \quad k_{33}^1 K_{33} = (K_{22} K_{44} - K_{24} K_{42}) \cdot (k_{22}^1 k_{44}^1 - k_{24}^1 k_{42}^1) \,.
\end{aligned}$$

Bildet man $\alpha) + \beta) - \gamma)$ unter Berücksichtigung von $\delta)$, so erhält man eine Gleichung, die ausschliesslich Grössen enthält, die in den Matrizen A und b_B oder b_B^* von Tab. 1 vorkommen. Nach Ersetzen derselben durch die Vierpolkonstanten A_{ik} und $b_{B_{ik}}^*$ lautet die erwähnte Gleichung.

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} \cdot \frac{b_{B_{22}}^*}{b_{B_{12}}^*} + \frac{A_{22}}{A_{21}} \cdot \frac{b_{B_{11}}^*}{b_{B_{12}}^*} - \frac{1}{A_{21}} \cdot \frac{\Delta b_B^*}{b_{B_{12}}^*} - \frac{\Delta A}{A_{21}} \cdot \frac{1}{b_{B_{12}}^*} - \frac{A_{12}}{A_{21}} \cdot \frac{b_{B_{21}}^*}{b_{B_{12}}^*} = 1 \,. \quad (43)$$

Eine etwas längere Rechnung führt auch für die Paare (b, b_B) und (A, B_b^*) zu *derselben* Form (43). Da von den sieben Fällen der Fig. 5 die vier noch nicht betrachteten auf obige drei direkt zurückführbar sind, haben wir das *Resultat*: Zwei korrespondierende, d. h. nur durch einen irgendwie (aber nicht gerade so, dass z. B. bei A Klemmen 2 und 4 verbunden werden) zwischen zwei Klemmen angebrachten Kurzschlussbügel $\varkappa$ sich unterscheidende Schaltungen X und $X^\varkappa$ erfüllen mit ihren Konstanten X_{ik} und $X_{ik}^\varkappa$ die Beziehung:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{11}{21}\right)_x \cdot \left(\frac{22}{12}\right)_{x^\varkappa} + \left(\frac{22}{21}\right)_x \cdot \left(\frac{11}{12}\right)_{x^\varkappa} \\
&- \left(\frac{1}{21}\right)_x \cdot \left(\frac{\Delta}{12}\right)_{x^\varkappa} - \left(\frac{\Delta}{21}\right)_x \cdot \left(\frac{1}{12}\right)_{x^\varkappa} - \left(\frac{12}{21}\right)_x \cdot \left(\frac{21}{12}\right)_{x^\varkappa} = 1 \quad (44)
\end{aligned}$$

oder

$$X_{11} \cdot X_{22}^\varkappa - X_{12} X_{21}^\varkappa - X_{21} X_{12}^\varkappa + X_{22} X_{11}^\varkappa = \Delta X + \Delta X^\varkappa. \quad (44a)$$

Beispiel zu Teilverzeichnis VIII. Z. B. b und A_a in (40ff.) sind nicht direkt korrespondierend, hingegen b und $-c_\gamma$ (mit den

Konstanten $-c_{\gamma ik}$), wobei A_a zu c_γ im gleichen (Dreipol-)Verhältnis steht wie x zu y nach Fig. 4. Durch sukzessives Ersetzen erhält man mit (29) für (44):

$$\left(\frac{22}{21}\right)_b\left(\frac{22}{12}\right)_{A_a} + \left(\frac{11}{21}\right)_b \cdot \left(\frac{11+22-1-\Delta}{12}\right)_{A_a}$$

$$+\left(\frac{\Delta}{11}\right)_b \cdot \left(\frac{22-\Delta}{12}\right)_{A_a} + \left(\frac{1}{21}\right)_b \cdot \left(\frac{22-1}{12}\right)_{A_a} - \left(\frac{12}{21}\right)_b \cdot \left(\frac{21}{12}\right)_{A_a} = 1 \quad (45)$$

eine erheblich unübersichtlichere Beziehung als (44).

Der Hauptsatz.

Nachdem nunmehr zwischen irgend zwei s. VPS. eine Beziehung nachgewiesen worden ist, erhebt sich die Frage, ob unser Verzeichnis auch vollständig sei. Als wichtigstes Resultat der systematischen Behandlung des Vierpols möchten wir folgenden die Verteilung der Beziehungen regulierenden und obige Frage beantwortenden Hauptsatz ansehen:

Zwischen den 2 . 4 Konstanten zweier s. VPS. besteht eine und nur eine Beziehung, sofern die beiden s. VPS. nicht einem der zehn aus dem Vierpol ableitbaren Dreipole angehören. Im letzteren Fall sind sie vollständig von einander abhängig.

Der Zusatz „nur eine" ist zu beweisen. Sofern die beiden s. VPS. der oberen oder unteren Hälfte der Tab. 1 entnommen sind, ist der Beweis mit Hilfe des früher angeführten Satzes von Jacobi leicht zu erbringen. Teilverzeichnisse I) bis IV) sind also vollständig. Ferner sind nach demselben Satz je drei s. DPS. für den Unabhängigkeitsnachweis gleichwertig, also beliebig durch einander ersetzbar. Es braucht demnach nur für a, b, c und je einen Repräsentanten der zehn Dreipole nachgewiesen zu werden, dass mindestens eine Jacobi'sche Funktional-Unterdeterminante siebter Ordnung von 0 verschieden ist. Wie nun nicht näher ausgeführt sei, lässt sich die Zahl der noch zu untersuchenden Kombinationen gruppentheoretisch und durch geeignete wiederholte Ersetzung vollständig abhängiger s. VPS. durch einander auf vier reduzieren; z. B. (A, B_b), (A, a_A), (a, a_A), (b, a_A). Für (a, a_A) z. B. ist die Funktionaldeterminante (vergl. Tab. 1):

$$\frac{\partial\,(K_{33}, K_{34}, K_{43}, K_{44}, k^1_{44}, k^1_{43}-k^1_{42}, k^1_{34}-k^1_{24})}{\partial\,(K_{33}, K_{34}, K_{43}, K_{44}, K_{22}, K_{23}, K_{32})}$$

$$= 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\,.\,\frac{\partial\,(k^1_{44}, k^1_{43}-k^1_{42}, k^1_{34}-k^1_{24})}{\partial\,(K_{22}, K_{23}, K_{32})} = \ldots \neq 0\,.$$

Analog die drei übrigen Fälle, womit die Vollständigkeit des Verzeichnisses nachgewiesen ist. Wie man sieht, wird die zunächst wenig ermunternd aussehende Aufgabe auf die Ausrechnung von vier Determinanten dritter Ordnung zurückgeführt.

Hinsichtlich der *Beziehungen zwischen mehr als zwei s. VPS.* wie oben Vollständigkeit anzustreben, wollen wir hier, trotzdem z. T. recht Interessantes dabei herauskommt, unterlassen, da das Bedürfnis hierzu nicht besteht und ausserdem die Zahl der Kombinationen viel zu gross ist. Wir werden uns hier mit zwei charakteristischen theoretischen Beispielen für Beziehungen zwischen drei s. VPS. begnügen; für solche zwischen mehr als drei s. VPS. wird im letzten Abschnitt ein praktisches Problem den Ausgangspunkt bilden.

Allgemein steht fest, dass zwischen drei s. VPS., von denen keine zwei demselben Dreipol angehören, zunächst gemäss Hauptsatz drei Beziehungen bestehen; diese sind unabhängig, wenn es zwischen den drei s. VPS. keine weiteren Beziehungen gibt, da die Zahl der unabhängigen Grössen neun ist. Das *Beispiel* a, b, c entspricht einem solchen Fall; (33ff.) stellen den ganzen Zusammenhang dar. Mit a, b, c sind also sämtliche Eigenschaften des Vierpols bekannt. Es ist noch zu bemerken, dass man die unabhängigen neun Grössen aus den zwölf Konstanten von a, b, c nicht beliebig auswählen darf. Aus (33) und den durch Permutation $(\mathfrak{Z}_1)$ hieraus ableitbaren Gleichungen folgt nämlich durch Addition:

$$\frac{1+\Delta a}{a_{21}} + \frac{1+\Delta b}{b_{21}} + \frac{1+\Delta c}{c_{21}} = \sum_{x=a,b,c} \left(\frac{1+\Delta}{21}\right)_x = 0 \qquad (46)$$

und durch Multiplikation:

$$\prod_{x=a,b,c} (11 + 22 - 1 - \Delta)_x = \prod_{x=a,b,c} (11 + 22 + 1 + \Delta)_x \,. \qquad (47)$$

So sind z. B. nach (46) weder die $(\Delta, 21, 11)$ von a, b, c, noch die $(\Delta, 21, 22)_{a,b,c}$, usw. als unabhängige Konstanten brauchbar, hingegen z. B. die $(11, 21, 22)_{a,b,c}$, $(21, 12, 22)_{a,b,c}$ u. a. m.

Bestehen ausser denjenigen des Verzeichnisses noch andere Beziehungen, so lässt sich allgemein weiter nichts sagen. Im *Beispiel* a, A, α sind die vom Hauptsatz geforderten Beziehungen abhängig:

$$\mathfrak{U}_{pl}(a) = \mathfrak{U}_{pl}(A) = \mathfrak{U}_{pl}(\alpha) \qquad (= \mathfrak{U}_{pl}) \,.$$

Daneben gelten:

$$\sum_{x=a,A,\alpha}\left(\frac{1}{21}\right)_x = \mathfrak{U}_{pl}\,, \quad \sum_{x=a,A,\alpha}\left(\frac{\Delta}{21}\right)_x = \mathfrak{U}_{pl}\,,$$

was die Zahl der unabhängigen Konstanten auf acht erniedrigt. Mit a, A, α ist der Vierpol also noch nicht vollständig gegeben.

Fragen, welche die Übertragungsdeterminante Δx betreffen.

Für elektrische Systeme, welche ausschliesslich aus ohmischen Widerständen, Selbstinduktionen, Kapazitäten und Gegeninduktivitäten, für welche $M_{\mu\nu} = M_{\nu\mu}$ gilt, aufgebaut sind, sind die Koeffizienten in den Kirchhoff'schen Gleichungen in den Indices *symmetrisch*:

$$\mathfrak{V}_\alpha = \sum_\beta^{(n)} d_{\alpha\beta}\,\mathfrak{J}_\beta\,, \quad \underline{d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha}} \quad (\alpha, \beta = 1 \ldots n)\,. \tag{48}$$

Auflösung von (48) und sinngemässe Spezialisierung auf den Fall einer s. VPS. x führt zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_p &= D_{11}\,\mathfrak{V}_p + D_{12}\,\mathfrak{V}_s \\ -\mathfrak{J}_s &= D_{21}\,\mathfrak{V}_p + D_{22}\,\mathfrak{V}_s\,, \qquad D_{12} = D_{21} \end{aligned}$$

woraus nach (11):

$$\Delta\, x = x_{11}\,x_{22} - x_{12}\,x_{21} = 1\,. \tag{49}$$

Für einen Übertrager, welcher eine arbeitende Verstärkerröhre enthält, ist im allgemeinen $\Delta\, x \neq 1$[1]).

Für die mathematische Darstellung der Eigenschaften solcher Übertrager eignet sich die Einführung von gesteuerten Strom- oder Spannungsquellen[2]). Mit dem Vorhandensein von *Energie*quellen im Übertrager hat die Abweichung von Δ von 1 nichts zu tun[3]). Man sieht das ohne weiteres daraus, dass es für den Beweis von (49) gleichgültig ist, ob ein Teil der Wirkwiderstände negativ ist. Δ ist vielmehr ein *Mass für die Einseitigkeit der Durchlässigkeit gegenüber Energie.* Es gilt nämlich[4]):

$$\frac{\mathfrak{S}_p\,(x)}{\mathfrak{S}_s\,(x)} : \frac{\mathfrak{S}_p\,(x^*)}{\mathfrak{S}_s\,(x^*)} = (\Delta\, x)^2\,,$$

---

[1]) Breisig, Theoretische Telegraphie, S. 393 (Braunschweig 1924).

[2]) Strecker und Feldtkeller, Elektr. Nachrichtentechnik 6, 93, 1929.

[3]) Diese ungenaue Darstellung findet sich z. B. in Carson, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung, deutsch von Ollendorff und Pohlhausen, S. 141 (Berlin 1929).

[4]) Strecker und Feldtkeller, Wiss. Veröff. aus dem Siemens-Konzern 8, H. 2, S. 70, 1929; Feldtkeller, Tel. und Fernsprechtechnik 14, 274, 1925.

worin $\mathfrak{S}_p(x)$, $\mathfrak{S}_s(x)$ die Eingangs- bzw. Ausgangsleistung für x, $\mathfrak{S}_p(x^*)$, $\mathfrak{S}_s(x^*)$ dasselbe für x^* bedeuten und die Belastung sekundär reflexionsfrei, d. h. durch den Wellenwiderstand

$$\mathfrak{Z}_s(x) = \sqrt{\frac{x_{12}}{x_{21}} \cdot \frac{x_{22}}{x_{11}}} \text{ bzw. } \mathfrak{Z}_s(x^*)$$

erfolgt.

Wie die Symmetrie der Koeffizienten im einzelnen dazu beiträgt, dass $\Delta x = 1$ wird, ist aus Tab. 1 klar ersichtlich. Man hat:

Für Typus a_A: $\Delta = \frac{K_{\mu\nu}}{K_{\nu\mu}}$, für Typus A_a: $\Delta = \frac{K_{\mu\mu} + K_{\mu\nu}}{K_{\mu\mu} + K_{\nu\mu}}$,

und für Typus A: $\Delta = \frac{k^{\varrho}_{\mu\nu}}{k^{\varrho}_{\nu\mu}}$, wenn man ϱ geeignet wählt (s. (22)).

Bei Typus a mit $\Delta = \frac{k^1_{\mu\nu} - k^1_{\mu\sigma}}{k^1_{\nu\mu} - k^1_{\sigma\mu}}$

verwischt sich der Einfluss der paarweisen Symmetrie in den $k^{\varrho}_{\mu\nu}$ auf die Δ ein wenig. Der ebenfalls nicht ganz einfache Zusammenhang der Symmetrie der k mit derjenigen der K ist durch (19b) gegeben.

Wir erwähnen noch eine Gattung von Gleichungen, der wir bis jetzt noch nicht begegnet sind; es sind *Beziehungen ausschliesslich zwischen den* Δ. Man kann solche folgendermassen konstruieren: Man beweist zunächst an Hand von Tab. 1, z. B. für A und β, dass für zwei s. DPS. x und y

$$\frac{1}{x_{22}} = \frac{\Delta y - 1}{\Delta x \, \Delta y - 1}$$

gilt, nach (28) z. B.

$$\frac{1}{a_{\alpha_{22}}} = \frac{\Delta \beta_b^* - 1}{\Delta \beta_b^* \cdot \Delta a_\alpha - 1} = \frac{1 - \Delta \beta_b}{\Delta a_\alpha - \Delta \beta_b}, \ldots \tag{50}$$

Für $\mathfrak{Z}_1 a_\alpha$: a_α, b_β, c_γ gibt die Tabelle im Verein mit (15), (16):

$$\sum_{x = \mathfrak{Z}_1 a_\alpha} \left(\frac{1}{22}\right)_x = 1, \qquad \sum_{x = \mathfrak{Z}_1 a_\alpha} \left(\frac{\Delta}{22}\right)_x = 1. \tag{51a, b}$$

(50) eingesetzt ergibt:

$$\frac{1 - \Delta \beta_b}{\Delta a_\alpha - \Delta \beta_b} + \frac{1 - \Delta \gamma_c}{\Delta b_\beta - \Delta \gamma_c} + \frac{1 - \Delta \alpha_a}{\Delta c_\gamma - \Delta \alpha_a} = 1 \tag{52a}$$

und analog (52b). Es sind dies nicht die einzigen Gleichungen dieser Art.

$$\textit{Alle } \Delta = 1,\ k^{\varrho}_{\mu\nu} = k^{\varrho}_{\nu\mu},\ K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}\,.$$

Sind alle $\Delta x = 1$, so kann man in Umkehrung des oben angedeuteten Beweises den Vierpol als ausschliesslich aus komplexen Widerständen aufgebaut denken. Die Zahl der unabhängigen Konstanten ist sechs. Ein *Modell* für diesen in der Praxis am meisten vorkommenden Fall ist das „*Widerstandstetraeder*" von Fig. 6a, bestehend aus sechs Widerständen, die je zwei Klem-

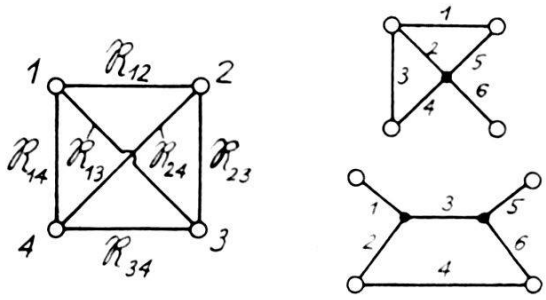


Fig. 6a. Fig. 6b.

men verbinden. Der Zusammenhang mit den $K_{\mu\nu}$ ist besonders einfach:

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu} = -\frac{1}{\mathfrak{R}_{\mu\nu}}$$

$$K_{\mu\mu} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{\mu\lambda}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\mu\sigma}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\mu\varrho}}\ (\lambda, \sigma, \varrho \neq \mu)\,.$$

Es sei nebenbei bemerkt, dass Fig. 6a nicht das einzige Modell darstellt; auch für die Modelle Fig. 6b sind die sechs aufbauenden Widerstände unabhängige Funktionen der sechs unabhängigen $K_{\mu\nu}$.

Die Frage der *Beziehungen zwischen zwei s. VPS.* lässt sich allgemein erledigen. Bei der Durchsicht der Formelverzeichnisse bzw. der jeweils am Ende derselben gemachten Bemerkungen erkennt man, dass keine jener Gleichungen so beschaffen ist, dass sie, wie es am ausgesprochensten bei (52a) der Fall ist, für $\Delta = 1$ nichtssagend wird. *Der Hauptsatz hält daher seine volle Gültigkeit.* Es ist also nicht möglich, das gesamte Verhalten des Vierpols durch zwei s. VPS., deren jede drei unabhängige Konstanten hat, zu beschreiben. Die zweite s. VPS. ist 2 oder 0 Konstanten gleichwertig; die sechste Konstante muss mindestens einer dritten s. VPS. angehören.

Als *unabhängige Grössen* kann man irgend sechs passende unabhängige Widerstände oder Leitfähigkeiten wählen, z. B. wie bereits erwähnt die sechs Widerstände des Modells Fig. 6a oder

6b, oder die sechs Leerlaufwiderstände $\mathfrak{U}(\mu, \varrho)$ (definiert durch Fig. 3b, Formel (23b)), oder sechs von den sieben in (23a) und (24) aufgeführten $\mathfrak{L}$. Denn sowohl die $\mathfrak{U}$ wie die $\mathfrak{L}$ gehen in die $k^{\varrho}_{\mu\nu}$ bzw. $K_{\mu\nu}$ unabhängig ein; es ist mit (22):

$$\begin{aligned} k^{\varrho}_{\mu\mu} &= \mathfrak{U}(\mu, \varrho) \\ 2\, k^{\varrho}_{\mu\nu} &= \mathfrak{U}(\varrho, \mu) + \mathfrak{U}(\varrho, \nu) - \mathfrak{U}(\mu, \nu)\,; \end{aligned} \tag{53}$$

ferner

$$\begin{aligned} K_{\mu\mu} &= \mathfrak{L}(\mu, \overline{\nu\sigma\varrho}) \\ 2\, K_{\mu\nu} &= \mathfrak{L}(\overline{\mu\nu}, \overline{\sigma\varrho}) - \mathfrak{L}(\mu, \overline{\nu\sigma\varrho}) - \mathfrak{L}(\nu, \overline{\mu\sigma\varrho})\,. \end{aligned} \tag{53a}$$

Diese vollständige Charakterisierbarkeit der Eigenschaften des Vierpols mit symmetrischem Koeffizientenschema durch symmetrische Funktionen dieser Koeffizienten (d. s. die $\mathfrak{U}$ bzw. die $\mathfrak{L}$) lässt nun folgende Frage auftauchen:

Kann man durch reine Scheinwiderstands- bzw. reine Leitfähigkeitsmessungen an einem Vierpol alles über denselben erfahren?

Tatsache ist, dass man aus den vier Grössen (12), (13) den Wert von Δ nicht ableiten kann (vergl. (30)). Es hat den Anschein, als ob es notwendig sei, dass man ausser den reinen auch „gegenseitige" Grössen von der Art eines Quotienten aus p-Strom und s-Spannung zur Entscheidung heranziehen müsse. Nachstehend wird gezeigt, dass bis auf eine gewisse Zweideutigkeit $\mathfrak{U}$- und $\mathfrak{L}$-Messungen alle Bestimmungsstücke des Vierpols festzulegen gestatten[1]).

Bei der s. VPS. x genügt z. B. die Beiziehung des durch (32) definierten, eigentlich nicht zu x gehörigen Widerstandes $\mathfrak{U}_{ps}(x)$ zur Aufstellung folgender Gleichungen (vergl. (12), (30), (32)):

$$\mathfrak{U}_{pl}(x) + \mathfrak{U}_{sl}(x) - \mathfrak{U}_{ps}(x) = \left(\frac{1 + \Delta}{2\mathfrak{l}}\right)_x \tag{54}$$

$$\mathfrak{U}_{pl}(x) \cdot \mathfrak{U}_{sl}(x) - \mathfrak{U}_{pk}(x) \cdot \mathfrak{U}_{sl}(x) = \left(\frac{\Delta}{2\mathfrak{l}}\right)_x, \tag{55}$$

[1]) Vergl. H. König, H. P. A. III, 459, 1930. Dort steht die Bemerkung, dass man aus Widerstandsmessungen allein nicht erfahren könne, ob die Δ des Vierpols = 1 oder von 1 verschieden seien. Die Schlussfolgerung ist in dieser Allgemeinheit falsch und sei hiermit widerrufen. Es wurde übersehen, dass sich aus symmetrischen Funktionen verschiedenen Grades die $k^{\varrho}_{\mu\nu}$ bzw. $K_{\mu\nu}$ einzeln berechnen lassen. Siehe auch die Notiz des Verf.: „Drei Bemerkungen zur Theorie des Vierpols" in Elektr. Nachrichtentechnik 1931.

woraus (unter Weglassung der x):

$$\left(\frac{1+\Delta}{2\Delta}\right)^2 = \frac{(\mathfrak{U}_{pl} + \mathfrak{U}_{sl} - \mathfrak{U}_{ps})^2}{\mathfrak{U}_{sl}(\mathfrak{U}_{pl} - \mathfrak{U}_{pk})} = \varepsilon \tag{56}$$

$$\Delta_{+,-} = \frac{\varepsilon}{2} - 1 \pm \sqrt{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{4} - 1\right)}, \quad \Delta_+ \cdot \Delta_- = 1 . \tag{57}$$

Damit ist Δ *bis auf die Zweideutigkeit* festgelegt; das skizzierte Bestimmungsverfahren gestattet also nicht, zwischen Δ und Δ^* (vergl. (8) und (57)) zu unterscheiden. In Funktion der $\mathfrak{L}$ ist analog (56):

$$\varepsilon = \frac{(\mathfrak{L}_{pk} + \mathfrak{L}_{sk} - \mathfrak{L}_{p+s})^2}{\mathfrak{L}_{sk}(\mathfrak{L}_{pk} - \mathfrak{L}_{pl})} . \tag{56a}$$

In der allgemeinen Darstellung lauten (54) und (55) für die $k^{\varrho}_{\mu\nu}$ mit (26) (vergl. (53)):

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{U}(\varrho, \mu) + \mathfrak{U}(\varrho, \nu) - \mathfrak{U}(\mu, \nu) = k^{\varrho}_{\mu\nu} + k^{\varrho}_{\nu\mu} = p^{\varrho}_{\sigma} \\ &\mathfrak{U}(\varrho, \mu) \cdot \mathfrak{U}(\varrho, \nu) - \mathfrak{L}(\sigma, \overline{\mu\nu\varrho}) \cdot \Delta k = k^{\varrho}_{\mu\nu} \cdot k^{\varrho}_{\nu\mu} = q^{\varrho}_{\sigma} \end{aligned}\right\} \mu \neq \nu \neq \sigma \neq \varrho$$

woraus

$$k^{\varrho}_{\mu\nu},\ k^{\varrho}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} p^{\varrho}_{\sigma} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(p^{\varrho}_{\sigma})^2 - q^{\varrho}_{\sigma}} . \tag{58}$$

Analog gilt für die $K_{\mu\nu}$ (vergl. (53a)):

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}(\overline{\mu\nu}, \overline{\sigma\varrho}) - \mathfrak{L}(\mu, \overline{\nu\sigma\varrho}) - \mathfrak{L}(\nu, \overline{\mu\sigma\varrho}) = K_{\mu\nu} + K_{\nu\mu} = P^{\varrho}_{\sigma} \\ &\mathfrak{L}(\mu, \overline{\nu\sigma\varrho}) \cdot \mathfrak{L}(\nu, \overline{\mu\sigma\varrho}) - \mathfrak{U}(\sigma, \varrho) \cdot \Delta K = K_{\mu\nu} \cdot K_{\nu\mu} = Q^{\varrho}_{\sigma} \end{aligned}$$

$$K_{\mu\nu},\ K_{\nu\mu} = \frac{1}{2} P^{\varrho}_{\sigma} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(P^{\varrho}_{\sigma})^2 - Q^{\varrho}_{\sigma}} . \tag{59}$$

Bevor wir auf die Reduktion der Zahl der Zweideutigkeiten eingehen, sei auf einen interessanten Zusammenhang zwischen gleichnamigen Konstanten des k- und K-Systems hingewiesen. Es ist nämlich möglich

$$\frac{K_{\mu\sigma}}{k^{\varrho}_{\mu\sigma}} \cdot \Delta k$$

und, wegen der Bedeutung von Δk, auch den Quotienten $K_{\mu\sigma}/k^{\varrho}_{\mu\sigma}$ durch eine einfache Widerstandsmessung zu bestimmen. Wir betrachten zum Beweis die beiden Schaltungen Q (p: $\nu\varrho$, s: $\sigma\varrho$, μ frei) und Q' (p: $\nu\varrho$, s: $\sigma\varrho$, $\overline{\mu\varrho}$). Die Belastung sei nun so gewählt, dass der Eingangswiderstand bei Q und Q' *gleich* ausfällt,

beim Anlegen des Bügels $\overline{\mu\varrho}$ sich also nicht ändert. Dann ist $\mathfrak{J}_\mu = 0$ und nach (2):

$$\mathfrak{W}_{\nu\varrho} = \frac{\mathfrak{V}_{\nu\varrho}}{\mathfrak{J}_\nu} = k^\varrho_{\nu\nu} - k^\varrho_{\nu\sigma} \cdot \frac{k^\varrho_{\mu\nu}}{k^\varrho_{\mu\sigma}} = -\frac{K_{\mu\sigma}}{k^\varrho_{\mu\sigma}} \cdot \Delta k, \quad q.e.d.$$

Misst man an den s. VPS. R (p: $\varrho\nu$, s: $\sigma\nu$, μ frei) bzw. R' (p: $\varrho\nu$, s: $\sigma\nu$, $\overline{\mu\nu}$) analog $\mathfrak{W}_{\varrho\nu}$, so gilt:

$$\frac{\mathfrak{W}_{\nu\varrho}}{\mathfrak{W}_{\varrho\nu}} = \frac{k^\varrho_{\mu\sigma}}{k^\nu_{\mu\sigma}} \quad (\nu \neq \mu \neq \sigma \neq \varrho).$$

Die dreifache Zweideutigkeit in der Bestimmung der K gemäss (59) überträgt sich also auf dem Umweg über reine Widerstandsmessungen *eindeutig* auf die verschiedenen k^ϱ-Systeme (s. (58)).

Verbindet man die Ergebnisse (58) bzw. (59) mit (57), so lässt sich die dreifache Zweideutigkeit auf eine *einfache* reduzieren. Dies folgt aus der Bauart der Δ der s. VPS. vom Typus A_a, für welche Tab. 1 und (15), (16) ergeben:

$$\Delta A_a = \frac{K_{42} + K_{43}}{K_{24} + K_{34}}, \quad \Delta B_b = \frac{K_{23} + K_{24}}{K_{32} + K_{42}}, \quad \Delta C_c = \frac{K_{34} + K_{32}}{K_{43} = K_{23}}.$$

Zu einer *beliebigen* Zuordnung der beiden Wurzeln (59) zu K_{24}, K_{42} gehört eine *bestimmte* Zuordnung zu K_{43}, K_{34}, da für ΔA_a nur ein bestimmter Wert oder sein reziproker herauskommen darf usw. Die Willkür beschränkt sich also schliesslich auf eine Spiegelung der Koeffizientensysteme $K_{\mu\nu}$ bzw. $k^\varrho_{\mu\nu}$ an der Hauptdiagonale dieser Systeme, bzw. die Ersetzung aller Δx durch die reziproken Werte. Diese letzte Zweideutigkeit durch weitere Widerstandsmessungen zu beseitigen, ist uns nicht gelungen; es ist wahrscheinlich überhaupt nicht möglich. Wir können sagen: *Gewisse Kombinationen von Widerstands- bzw. Leitfähigkeitsmessungen im Verein mit einer Ungleichung von der Form $\Delta x > 1$ (oder < 1) (x eine beliebige s. VPS.) reichen jedenfalls aus zur Festlegung aller Bestimmungsstücke eines beliebigen Vierpols.*

Ist Δx gegeben, so sind aus Widerstandswerten weiter alle x_{ik} einzeln berechenbar. Die Frage der Ableitbarkeit der Übersetzungsverhältnisse aus Widerstandsmessungen ist damit auf die oben behandelte zurückgeführt.

Die Frage der praktischen Bedeutung der gefundenen Resultate sei offen gelassen. Uns interessiert hier nur ihre prinzipielle Seite.

Der Einfluss der einpoligen Erdung der Sekundärwicklung eines Transformators auf dessen Eigenschaften.

Dieses Problem diene uns als Ausgangspunkt. Bei einem Hochspannungstransformator ist häufig die p-Seite einpolig geerdet, die s-Seite ebenfalls *oder* sie wird sich selbst überlassen, d. h. die Potentialverteilung wird durch die i. a. verteilte Kapazität von s-Seite gegen p-Seite, Eisenkern und Erde bestimmt. Zum Vierpol gehört gemäss Fig. 7 die gesamte mit dem Transformator irgendwie gekoppelte Umgebung. Eine sekundär angeschlossene Fernleitung mit Kapazität gegen Erde wäre auch zum Vierpol zu rechnen.

Wir behandeln die Aufgabe hier allgemein als *Beispiel für den Zusammenhang zwischen sechs s. VPS.*, ohne Berücksichtigung

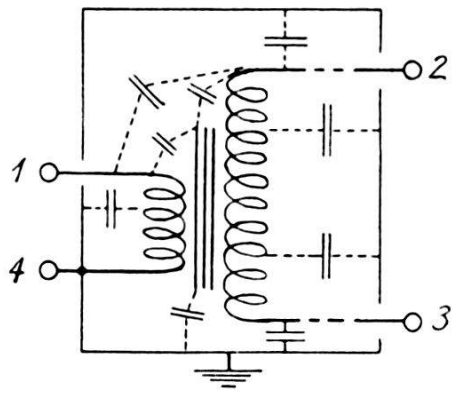


Fig. 7.

des Umstandes, dass für den Transformator alle $\Delta = 1$ sind. Gesucht sind also möglichst einfache Zusammenhänge zwischen den korrespondierenden Schaltungen a und a_A zum Beispiel und irgendwelchen weiteren s. VPS. Wir können sie nach dem früher angegebenen Verfahren a) bestimmen durch Beschreibung desselben Zustandes auf verschiedene Arten.

Die Ableitung sei angedeutet für das Spannungs-Übersetzungsverhältnis $1/a_{A_{11}}$. Der Leerlaufzustand von a_A: $\mathfrak{V}_p = a_{A_{11}} \cdot \mathfrak{V}_s(a_A)$, werde gedeutet als Überlagerung zweier Zustände:

1) Leerlaufzust. von a und A: $\mathfrak{V}_p = a_{11}\,\mathfrak{V}_s(a) = A_{11}\,\mathfrak{V}_s(A) = A_{11}\,{}^1\mathfrak{V}_{12}$;
2) Leerlaufzust. von $(A'_{a*})^*$: ${}^2\mathfrak{V}_{21} = (A'_{a*})^* \cdot \delta\,\mathfrak{V}_s(a)$ $(\delta\,\mathfrak{V}_s(a) = {}^2\mathfrak{V}_{23})$.

Die Wirkung des Bügels $\overline{12}$ (d. i. $\mathfrak{V}_{12} = {}^1\mathfrak{V}_{12} + {}^2\mathfrak{V}_{12} = 0$) wird dadurch erreicht, dass die p-Spannung des zweiten Zustandes ${}^2\mathfrak{V}_{21}$ der s-Spannung $\mathfrak{V}_s(A)$ des ersten Zustandes (bei gleicher Zählrichtung!) entgegengesetzt gleich gewählt wird: ${}^2\mathfrak{V}_{21} = \mathfrak{V}_s(A)$.

Der zweite Zustand bestimmt die Veränderung $\delta\,\mathfrak{V}_s(a)$; der Bügel $\overline{14}$ sorgt für Konstanz von $\mathfrak{V}_p$. Es folgt:

$$\frac{\mathfrak{V}_p}{a_{A_{11}}} = \mathfrak{V}_s(a_A) = \mathfrak{V}_s(a) + \delta\,\mathfrak{V}_s(a) = \frac{\mathfrak{V}_p}{a_{11}} + \frac{1}{(A'_{a*})^*_{11}} \cdot \frac{\mathfrak{V}_p}{A_{11}},$$

also mit (42ff.):

$$\frac{1}{a_{A_{11}}} = \frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{A_{11} \cdot (A'_{a*})^*_{11}} = \frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{A_{12} \cdot (A'_{a*})^*_{21}}. \tag{60}$$

Zur Berechnung des Strom-Übersetzungsverhältnisses $1/a_{A_{22}}$ muss man die Schaltungen a_A, a und A'^* im Kurzschluss-, A_a im Leerlaufzustand betrachten usw. Die Resultate sind für alle übrigen $a_{A_{ik}}$ ohne Beweis nachstehend angegeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a_{A_{11}}} &= \frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{A_{1m} \cdot (A'_{a*})^*_{m1}}, & \frac{1}{a_{A_{12}}} &= \frac{1}{a_{12}} + \frac{1}{A_{a1m} \cdot (A'_{a*})^*_{m2}} \\ \frac{1}{a_{A_{21}}} &= \frac{1}{a_{21}} + \frac{1}{A_{2m} \cdot A'^*_{m1}}, & \frac{1}{a_{A_{22}}} &= \frac{1}{a_{22}} + \frac{1}{A_{a2m} \cdot A'^*_{m2}} \end{aligned}\right\} m = 1{,}2. \tag{60ff.}$$

Damit und mit der Bedeutung der Konstanten ist eine Messvorschrift[1]) zur Bestimmung der im allgemeinen kleinen Korrektionsglieder $[A_{1m}(A'_{a*})^*_{m1}]^{-1}, \ldots$ gegeben. Man bemerkt, dass den beiden Werten von m entsprechend durchweg *zwei* Wege hierzu bestehen.

Anwendung von Permutation D_2 auf (60ff.) gibt

$$\frac{\Delta a_A}{a_{A_{22}}} = \frac{\Delta a}{a_{22}} + \frac{\Delta A_a \cdot \Delta A'^*}{A_{a2m} \cdot A'^*_{m2}}, \ldots \qquad m = 1{,}2. \tag{61ff.}$$

Es sind nicht alle vier Gleichungen angegeben, da wir sie weiter nicht mehr brauchen.

Es liegt nahe, über die eben gestellte Aufgabe hinausgehend den Zusammenhang zwischen A_a und A zu untersuchen und zwar nach der gleichen Methode. Man wird derart zu (62ff.) und nach Anwendung von D_2 zu (63ff.) geführt:

$$\frac{1}{A_{a_{11}}} = \frac{1}{A_{11}} + \frac{1}{a_{1m} \cdot A'_{a*m1}}, \quad \frac{1}{A_{a_{12}}} = \frac{1}{A_{12}} + \frac{1}{a_{A_{1m}} \cdot A'_{a*m2}}$$

$$\frac{1}{A_{a_{21}}} = \frac{1}{A_{21}} + \frac{1}{a_{2m} \cdot A'_{m1}}, \quad \frac{1}{A_{a_{22}}} = \frac{1}{A_{22}} + \frac{1}{a_{A_{2m}} \cdot A'_{m2}}; \tag{62ff.}$$

$$\frac{1}{A'_{a*_{11}}} = \frac{1}{A'_{11}} + \frac{1}{a^*_{1m} \cdot A_{a_{m1}}}, \ldots \quad m = 1{,}2. \tag{63ff.}$$

[1]) Natürlich sind alle Messungen bei derselben Frequenz auszuführen.

Das Gemeinschaftliche an den 16 Gleichungen (60) bis (63) ist der Umstand, dass sie sich alle auf die sechs s. VPS. a; A, A'; a_A; A_a, A'_{a*} beziehen und jedenfalls im Verein mit den dem Hauptsatz entspringenden, durch die zwei Möglichkeiten $m = 1, 2$ angedeuteten Beziehungen ausreichen, um die $6 \times 4 = 24$ Konstanten auf die neun unabhängigen zurückzuführen.

Schliesslich sei noch kurz ein *Beispiel* für ein vollständiges Verzeichnis von *Beziehungen zwischen vier s. VPS.* gegeben. Zwischen a, A, A' und A_a müssen $16 - 9 = 7$ Gleichungen bestehen, nach dem Hauptsatz die sechs zwischen je zwei s. VPS.

$$\left| \begin{array}{l} (a, A) \quad (a, A') \quad (a, A_a) \quad (A, A') \quad (A, A_a) \quad (A', A_a), \\ \qquad\qquad \dfrac{1}{A_{a_{21}}} = \dfrac{1}{A_{21}} + \dfrac{1}{a_{21} A'_{11}} \end{array} \right. \tag{64ff.}$$

die letztere nach (62ff.). Zu diesen, wie man zeigen kann, unabhängigen Gleichungen kann man systematischer auf folgende Weise gelangen: Der allgemeine (beliebige) Zustand des Vierpols (drei Spannungen oder drei Ströme frei gewählt) lässt sich einerseits durch (2) beschreiben, andererseits darstellen als Überlagerung eines Zustandes gemäss s. VPS. a mit einem Leerlaufzustand gemäss A^*. Dieses erfordert Beiziehung von A' und A_a neben a und A. Identifizierung beider Darstellungen führt dann nach einiger Rechnung zu (64ff.).

Zusammenfassung.

Das linearen Gleichungen gehorchende elektrische Netzwerk mit vier Anschlussklemmen, Vierpol genannt, wird aufgefasst als Verband von 33 speziellen Vierpolschaltungen (s. VPS.) (Tab. 1), deren jede eine spezielle Möglichkeit, den Vierpol als Übertrager zwischen zwei zweipolige elektrische Systeme zu schalten, darstellt.

Es gibt vier nicht durch Vertauschung der Klemmen ineinander überführbare Typen von s. VPS. Die geordnete Erzeugung der s. VPS. *eines* Typus erfolgt durch Anwendung der Gruppe der Permutationen von vier Elementen auf einen Vertreter dieses Typus.

Da der Vierpol nur neun unabhängige Konstanten hat, müssen zwischen den durch je vier Konstanten charakterisierten s. VPS. eine Fülle von Beziehungen bestehen. Die erwähnte geordnete Art der Erzeugung des Verbandes von s. VPS. ermöglicht eine sehr gedrängte Darstellung der Gesamtheit aller Beziehungen zwischen je zwei s. VPS. (Formeln (33ff.) bis (42ff.)).

Die Frage der Anzahl und Verteilung dieser Beziehungen beantwortet der *Hauptsatz*: Zwischen den zweimal vier Konstanten zweier s. VPS. besteht eine und nur eine Beziehung, sofern die beiden s. VPS. nicht einem der zehn aus dem Vierpol ableitbaren Dreipole angehören.

Die Koeffizienten der Strom- und Spannungsgleichungen (1) und (2) sind für einen ausschliesslich aus Wechselstromwiderständen aufgebauten Vierpol in den Indices symmetrisch. Die Untersuchung der Frage, inwieweit sich beim allgemeinen Vierpol mit unsymmetrischen Koeffizienten durch Widerstandsmessungen, welche unmittelbar stets nur in den Indices symmetrische Grössen liefern, die Abweichungen von der Symmetrie bzw. die Richtverstärkungen in den verschiedenen s. VPS. bestimmen lassen, ergibt, dass dies jedenfalls unter Beiziehung einer Ungleichung möglich ist.

Eine praktische Anwendung finden die soweit rein theoretischen Erörterungen im letzten Abschnitt.