Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 4 (1931)
Heft: V

Artikel: Über die Abhängigkeit des Scheinwiderstandes eines symmetrischen Vierpols von der Belastung

Autor: König, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110041

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Abhängigkeit des Scheinwiderstandes eines symmetrischen Vierpols von der Belastung

von **Hans König** (Bern).

(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht.)

(3. VI. 31.)

Zusammenfassung: Es wird auf die hohe Übersichtlichkeit in der Darstellung des Zusammenhanges zwischen Eingangs- und Endwiderstand eines symmetrischen Übertragers hingewiesen, welche durch konforme Abbildung und stereographische Projektion im Verein mit möglichster Anpassung der analytischen an die geometrische Beschreibung erzielt werden kann.

Die *Eigenschaften* eines als Übertrager zwischen eine Energiequelle (primär, p) und einen Verbraucher (sekundär, s) geschalteten *Vierpols* werden durch das lineare Gleichungspaar

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_p &= a_{11}\,\mathfrak{V}_s + a_{12}\,\mathfrak{J}_s \\ \mathfrak{J}_p &= a_{21}\,\mathfrak{V}_s + a_{22}\,\mathfrak{J}_s \end{aligned} \tag{1}$$

beschrieben, worin $\mathfrak{V}_p, \mathfrak{J}_p, \mathfrak{V}_s, \mathfrak{J}_s$ sinusförmig (also als komplexe Grössen), a_{ik} amplitudenunabhängig vorausgesetzt werden[1]). Sie kommen zum Teil zum Ausdruck im Zusammenhang zwischen dem Eingangswiderstand $\mathfrak{U}$ und dem Belastungswiderstand $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{R}) = \frac{a_{11}\,\mathfrak{R} + a_{12}}{a_{21}\,\mathfrak{R} + a_{22}}\,. \tag{2}$$

Die Untersuchung der gebrochen-linearen Funktion nach den Methoden der geometrischen Funktionentheorie (konforme Abbildung) führt bekanntlich[2]) auf eine Reihe schöner formaler und geometrischer Beziehungen. Ihre Anwendung auf vorliegenden Fall ist verschiedentlich mit Erfolg versucht worden[3])[4])[5])[6]). Für

[1]) Allgemeines über den Vierpol: Handwörterbuch des elektrischen Fernmeldewesens II, S. 769, Berlin 1929; Handbuch der Experimentalphysik, Bd. II, 3. Teil, S. 363ff.

[2]) S. z. B. Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, S. 273. Berlin 1922.

[3]) Pflieger-Härtel, Archiv für Elektrotechnik **12**, 486, 1923; Feldtkeller, Tel. und Fernsprechtechnik **14**, 189, 1925.

[4]) Breisig, El.-technische Zeitschrift **1899**, S. 385.

[5]) Feldtkeller, Tel. und Fernsprechtechnik **14**, 189, 1925.

[6]) Strecker und Feldtkeller, Wiss. Veröff. aus dem Siemens-Konzern **8**, 70, 1930.

die punktweise Konstruktion bedient man sich des Umstandes, dass sich der Abbildung (2) die Form einer einfachen Inversion geben lässt[1]). Will man den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{R}$ als Ganzes überblicken, so transformiert man, da die Abbildung winkel- und kreistreu ist, zweckmässig zwei orthogonale Kreisbüschel[2])[3]). Einen wesentlichen Fortschritt bedeutet die Beiziehung des Doppelverhältnisses: Die Invarianz des letzteren gibt u. a. unmittelbar den Satz über die Anpassungsfehler[3])[4]).

Wir werden nachstehend diese Zusammenhänge kurz zusammenfassend darstellen und zugleich zu zeigen versuchen, dass einerseits durch Einführung einer Koordinate g nicht nur für den Übertrager, sondern auch für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$ merkliche rechnerische Vereinfachungen, andererseits durch Beiziehung der stereographischen Projektion erhöhte Anschaulichkeit erreicht werden kann. Durch die Beschränkung auf symmetrische Vierpole, d. h. auf Vierpole, die beim Betrieb von der p- und der s-Seite aus dieselben Eigenschaften aufweisen und für welche

$$a_{11} = a_{22} = a' \tag{3}$$

gilt, erspart man sich die Umrechnung von s- auf p-Seite durch Multiplikation mit a_{11}/a_{22} bzw. geometrisch einen Wechsel der Bezugsebene und des Masstabes. Diese an sich unwesentliche Beschränkung wird im folgenden vorgenommen, um dasjenige, worauf es uns hier ankommt, in möglichst einfacher Form hervortreten zu lassen.

Wegen (3) erniedrigt sich die Zahl der in (2) wesentlichen Konstanten auf 2, so dass man für (2) setzen kann:

$$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}} = \frac{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{Z}} + Th\, g_{\ddot{u}}}{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{Z}} \cdot Th\, g_{\ddot{u}} + 1} \tag{4}$$

mit

$$\mathfrak{Z}^2 = \frac{a_{12}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a'} \cdot \frac{a'}{a_{21}} = \mathfrak{U}_k \cdot \mathfrak{U}_l \tag{5}$$

und

$$Th\, g_{\ddot{u}} = \frac{e^{g_{\ddot{u}}} - e^{-g_{\ddot{u}}}}{e^{g_{\ddot{u}}} + e^{-g_{\ddot{u}}}} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a'} \cdot \frac{a_{21}}{a'}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{U}_k}{\mathfrak{U}_l}} \cdot \tag{5a}$$

[1]) Pflieger-Härtel, Archiv für Elektrotechnik **12**, 486, 1923; Feldtkeller, Tel. und Fernsprechtechnik **14**, 189, 1925.

[2]) Breisig, El.-technische Zeitschrift **1899**, S. 385.

[3]) Feldtkeller, Tel. und Fernsprechtechnik **14**, 189, 1925.

[4]) Strecker und Feldtkeller, Wiss. Veröff. aus dem Siemens-Konzern **8**, 70, 1930.

In Anlehnung an die in der Theorie der Leitungen geübte Bezeichnungsweise nennt man $\mathfrak{Z}$ den *Wellenwiderstand*, $g_{\ddot{u}} = b_{\ddot{u}} + i a_{\ddot{u}}$ das *Übertragungsmass* oder die *Fortpflanzungsgrösse* des Übertragers, den Realteil $b_{\ddot{u}}$ die *Dämpfung* und den Imaginärteil $a_{\ddot{u}}$ das *Winkelmass*. Die Bedeutung von $\mathfrak{U}_l$ und $\mathfrak{U}_k$ als *Leerlauf-* und *Kurzschlusswiderstand* ist ohne weiteres aus (2) und (3) ersichtlich. Es ist

$$\frac{\mathfrak{U}_k}{\mathfrak{Z}} = Th\, g_{\ddot{u}}\,, \qquad \frac{\mathfrak{U}_l}{\mathfrak{Z}} = Cth\, g_{\ddot{u}}\,. \tag{6}$$

Nun ordnen wir jedem Widerstandswert $\mathfrak{W}$ *einen Punkt der „g-Ebene" zu gemäss*

$$\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}} = Th\, g_{\mathfrak{W}}\,. \tag{7}$$

Dann folgt aus (4) nach dem Additionstheorem der hyperbolischen Tangenten

$$Th\, g_{\mathfrak{U}} = Th(g_{\mathfrak{R}} + g_{\ddot{u}}), \quad g_{\mathfrak{U}} = g_{\mathfrak{R}} + g_{\ddot{u}}(\pm i\pi). \tag{8}$$

Die „Bewegung" $\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{U}$ ist damit auf eine *Verschiebung* der g-Ebene abgebildet. Aus (8) sind die bekannten Gesetze der

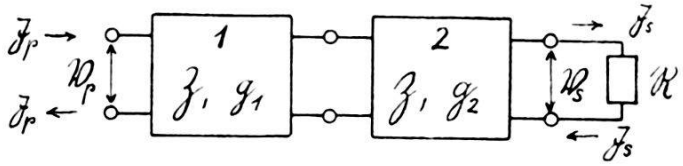

Fig. 1.

Kettenschaltung gemäss Fig. 1 von zwei Vierpolen mit gleichem $\mathfrak{Z}$ abzulesen: 1) Die Konstanten des resultierenden Vierpols sind $g_1 + g_2, \mathfrak{Z}$. 2) Wegen der Kommutativität der Addition sind die einzelnen Vierpole in der Kette beliebig vertauschbar[1]).

Man kann (4) auf die Form bringen:

$$(\mathfrak{U}_l - \mathfrak{U})(\mathfrak{U}_l + \mathfrak{R}) = (\mathfrak{U}_l - \mathfrak{U}_k)\mathfrak{U}_l = \mathfrak{e}^2. \tag{9}$$

Hieraus fliesst für die *Konstruktion einzelner Punkte* die Regel: Die Transformation $\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{U}$ ist eine Inversion der Punkte $-\mathfrak{R}$ in bezug auf den Kreis E um $\mathfrak{U}_l$ mit dem Radius $\mathfrak{e} = \pm\sqrt{(\mathfrak{U}_l - \mathfrak{U}_k)\mathfrak{U}_l}$. Diese Konstruktion ist in Fig. 2 einschliesslich der Konstruktion von $\mathfrak{e}$ für einen Punkt vollständig durchgeführt.

[1]) Allgemein gilt: Die Zusammensetzung der Elemente einer einparametrigen kontinuierlichen Gruppe ist kommutativ.

Die *geometrische Struktur der Abbildung* $\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{U}$ geht am besten aus einer Betrachtung desjenigen orthogonalen Kurvennetzes hervor, welches bei der Transformation in sich übergeht und demnach das Abbild eines kartesischen Koordinatennetzes der g-Ebene ist. Dasselbe bilden nun offenbar die orthogonalen Kreisbüschel mit den Fixpunkten der Abbildung (4) als Büschelpunkten, denn letztere ist winkeltreu und führt als Inversion (9) Kreise in Kreise über. Fixpunkte $\mathfrak{U} = \mathfrak{R}$ sind nach (4)

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{R} = \pm \mathfrak{Z}. \tag{10}$$

Die Büschel der Kreise K durch $+\mathfrak{Z}$ und $-\mathfrak{Z}$ und der Kreise K'

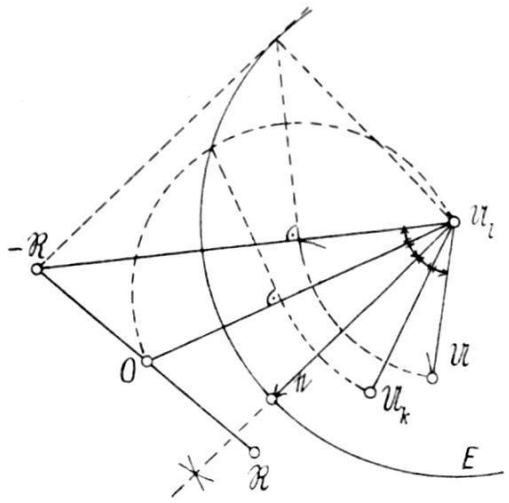

Fig. 2.

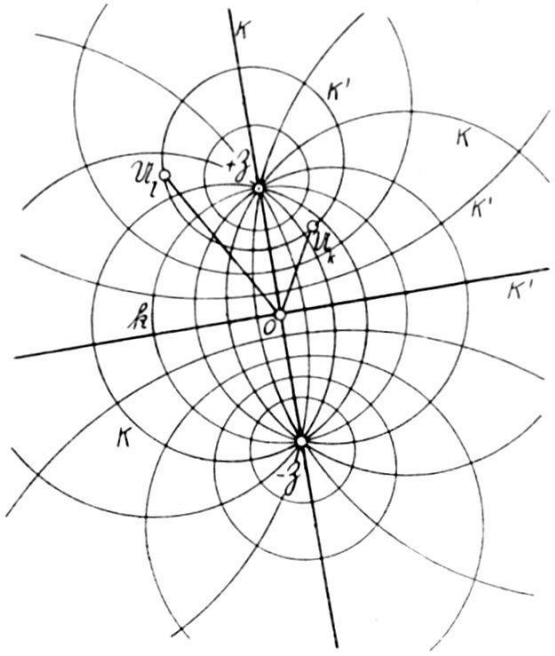

Fig. 3.

orthogonal zu K sind in Fig. 3 angedeutet. Mit $+\mathfrak{Z}$ wird der mit $\mathfrak{U}_k$ und $\mathfrak{U}_l$ auf *derselben* Seite des zur Geraden entarteten Kreises K' bezeichnet. Da insbesondere alle $K' \perp k (= K$ um $O)$ sind, gehen bei einer Inversion an k (Inversionsradius $\mathfrak{Z}$) alle K' in sich selbst über. Zwei in bezug auf $\pm \mathfrak{Z}$ reziproke Punkte $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$, welche durch

$$\mathfrak{W}_1 \cdot \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{Z}^2 \tag{11}$$

definiert sind, wie z. B. $\mathfrak{U}_k$ und $\mathfrak{U}_l$, liegen also *auf demselben* K'.

Die praktische Bedeutung von $\mathfrak{Z}$ beruht wesentlich auf folgendem Umstand. Neben einer von p- zur s-Seite laufenden „Welle" besteht im Vierpol eine durch Reflexion am Abschlusswiderstand $\mathfrak{R}$ verursachte rückläufige, i. a. schädliche (z. B. beim Fernsprechen die Verständlichkeit herabsetzende) Welle, die bei

„Anpassung" ($\mathfrak{R} = \mathfrak{Z}$) verschwindet und für deren Intensität der *Reflexionsfaktor* oder *Anpassungsfehler*

$$p_{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{R}}{\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}}$$

massgebend ist[1]). Für das analog irgend einem $\mathfrak{W}$ zugeordnete $p_{\mathfrak{W}}$ erhält man mit (7):

$$p_{\mathfrak{W}} = \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{W}}{\mathfrak{Z} + \mathfrak{W}} = \frac{1 - Th\, g_{\mathfrak{W}}}{1 + Th\, g_{\mathfrak{W}}} = e^{-2 g_{\mathfrak{W}}} \tag{12}$$

und mit (8)

$$p_{\mathfrak{U}} = p_{\mathfrak{R}} \cdot p_{\ddot{u}} \cdot \tag{13}$$

(13) ist die physikalische Form eines Spezialfalles des Satzes von der Invarianz des Doppelverhältnisses r. In der Tat ist

$$r = p_{\mathfrak{U}} : p_{\mathfrak{U}_k} = p_{\mathfrak{R}} : p_O,$$

weil $p_O = 1$ und wegen (6) $p_{\mathfrak{U}_k} = p_{\ddot{u}}$ ist.

Für im Sinne von (11) reziproke $\mathfrak{W}$ ist nach (12)

$$p_{\mathfrak{W}_1} = -p_{\mathfrak{W}_2}, \quad g_{\mathfrak{W}_1} = g_{\mathfrak{W}_2} \pm i\frac{\pi}{2} \cdot \tag{14}$$

Die Bewegung $\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{U}$ lässt sich in eine *hyperbolische* Komponente, bei welcher nach Definition die K in sich selbst, die K' in einander übergehen, und eine *elliptische* Komponente zerlegen, bei welcher die K' in sich selbst, die K ineinander transformiert werden. Wir haben die zugehörigen Bewegungsrichtungen im oben erwähnten Netz der g-Ebene zu bestimmen. Nach der (11) vorangehenden Bemerkung ist die Bewegung $\mathfrak{W}_1 \longrightarrow \mathfrak{W}_2$ elliptisch; ihr entspricht nach (14) eine rein imaginäre Änderung von g, und folglich der hyperbolischen Komponente eine reelle Änderung von g. Wir haben also für $g_{\ddot{u}}$ und das Doppelverhältnis τ der vier Punkte $\mathfrak{U}, \mathfrak{R}, +\mathfrak{Z}, -\mathfrak{Z}$:

$$g_{\ddot{u}} = b_{\ddot{u}} + i a_{\ddot{u}}, \quad \tau = p_{\mathfrak{U}} : p_{\mathfrak{R}} = e^{-2 b_{\ddot{u}}} \cdot e^{-2 i a_{\ddot{u}}}$$

Hyperbol. Komp.: $g_{\ddot{u}} = b_{\ddot{u}}$, $\quad \tau =$ reell

Ellipt. Komp.: $g_{\ddot{u}} = i a_{\ddot{u}}$, $\quad |\tau| = 1$.

Die Anschaulichkeit der Abbildung, namentlich obiger Zerlegung, lässt sich m. E. erhöhen, wenn man durch *stereographische Projektion*, d. h. Projektion vom Punkte P normal über O der Kugel mit Radius $|\mathfrak{Z}|$ um O die $\mathfrak{W}$-Ebene auf diese Kugel abbildet. Diese Abbildung ist bekanntlich *kreis-* und *winkeltreu*.

[1]) Allgemeines über den Vierpol: Handwörterbuch des elektrischen Fernmeldewesens II, S. 769, Berlin 1929; Handbuch der Experimentalphysik, Bd. II, 3. Teil, S. 363 ff.

Die Kreise K werden zu den „Meridianen" durch die „Pole" $\pm \mathfrak{Z}$, die Kreise K' demnach zu den „Breitenkreisen". In Fig. 4 sind die Bildpunkte auf der Kugel mit $\mathfrak{w}$ bzw. wie in der darstellenden Geometrie üblich im Grundriss (I), Aufriss (II) und Seitenriss (III) mit $\mathfrak{w}'$, $\mathfrak{w}''$, $\mathfrak{w}'''$ bezeichnet.

Die anschauliche Vereinfachung besteht nun darin, dass der *elliptischen* Bewegung eine gewöhnliche *Drehung der Kugel* um die

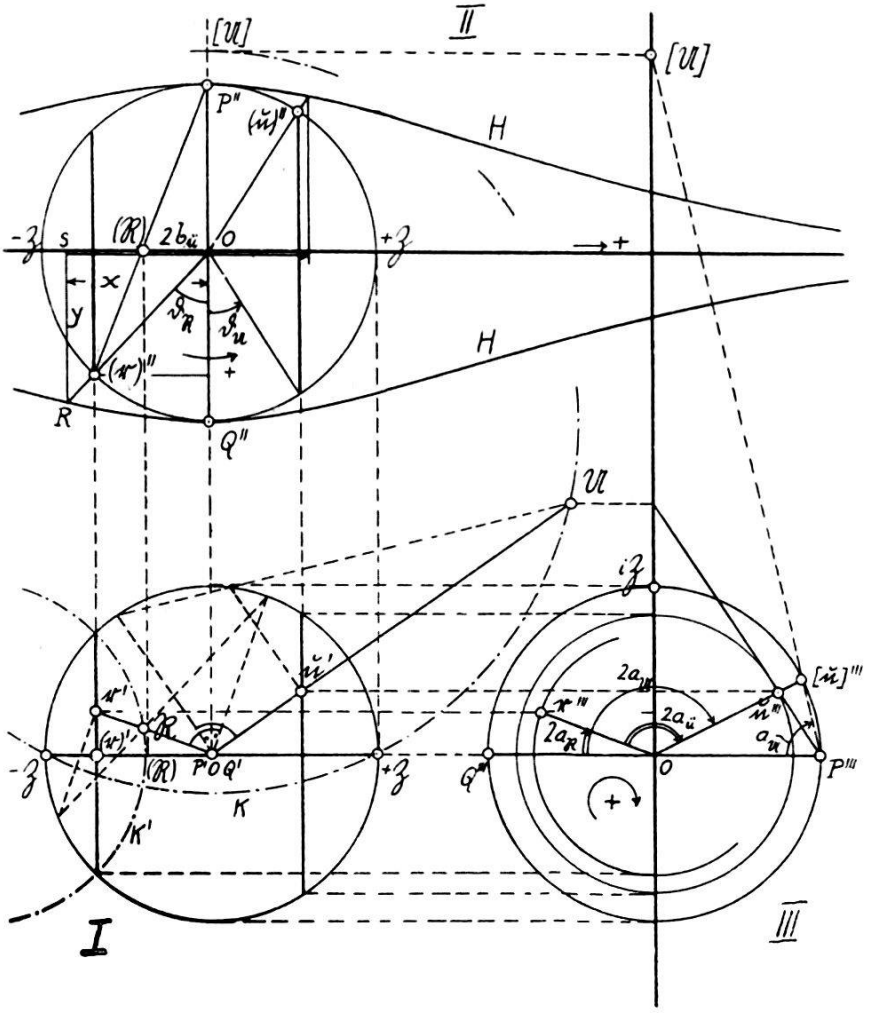

Fig. 4.
P : Projektionspol, Q ($g=0$, $\vartheta=a=0$) Nullpunkt des Kugelkoordinatensystems.

Achse $-\mathfrak{Z}$, $+\mathfrak{Z}$ *um den Winkel* $2\,a_{\ddot{u}}$ entspricht. Wegen der Vertauschbarkeit der Bewegungen braucht der Beweis nur für die Punkte des „Äquators" geführt zu werden. Für diese ist mit $g_{\mathfrak{W}} = i\,a_{\mathfrak{W}}$

$$\frac{\mathfrak{W}}{i\,\mathfrak{Z}} = \text{reell} = \frac{1}{i}\,Th\,i\,a_{\mathfrak{W}} = \text{tg}\,a_{\mathfrak{W}}\,.$$

Damit ist in Fig. 4 III die geometrische Bedeutung z. B. von $a_{\mathfrak{U}}$ bzw. $2\,a_{\mathfrak{U}}$ und damit von $a_{\ddot{u}}$ bzw. $2\,a_{\ddot{u}}$ als Drehwinkel unmittel-

bar gegeben. [u] bedeutet: u längs des Meridians auf den Äquator verschoben; [u] ist das Bild von

$$[\mathfrak{U}] = i\,\mathfrak{Z} \cdot \operatorname{tg} a_{\mathfrak{U}}.$$

Im Sinne von (11) reziproke Punkte $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ unterscheiden sich nach (14) in $2g$ um $\pm\pi$, liegen also auf einem Breitenkreis-*durchmesser*.

Die *hyperbolische* Komponente $g_{\ddot{u}} = b_{\ddot{u}}$ ist konstruktiv etwas weniger leicht zu erfassen. In Fig. 4 II bedeutet $(\mathfrak{r})$: $\mathfrak{r}$ längs eines Breitenkreises auf den Nullmeridian $-\mathfrak{Z}, Q, +\mathfrak{Z}$ gedreht. Wir führen eine Hilfskurve H ein derart, dass der von O durch $(\mathfrak{r})$ nach R auf H gezogene Strahl in der Achsenrichtung eine Komponente $OS = x = \mathfrak{Z} \cdot 2\,b_{\mathfrak{R}}$ hat. Man liest aus Fig. 4 II z. B. für die „Breite" $\vartheta_{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{r}$ ab:

$$\frac{\sin \vartheta_{\mathfrak{R}}}{1 + \cos \vartheta_{\mathfrak{R}}} = \frac{(\mathfrak{R})}{\mathfrak{Z}} = Th\, b_{\mathfrak{R}}\,,$$

woraus

$$\sin \vartheta_{\mathfrak{R}} = Th\, 2\, b_{\mathfrak{R}}. \tag{15}$$

Für die Ordinate y folgt demnach:

$$H: \quad y = \frac{2\,b_{\mathfrak{R}} \cdot \mathfrak{Z}}{\operatorname{tg} \vartheta_{\mathfrak{R}}} = \mathfrak{Z} \cdot \frac{2\,b_{\mathfrak{R}}}{Sh\, 2\,b_{\mathfrak{R}}}\,. \tag{16}$$

Die Konstruktion der hyperbolischen Komponente ist nun einfach: $(\mathfrak{r})$ von O auf H projiziert, Lot auf Achse gefällt, vom Fusspunkt aus $2\,b_{\ddot{u}}$ (mit $|\mathfrak{Z}|$ als Masstabeinheit) auf Achse abgetragen, und analog rückwärts $(\mathfrak{u})$ bestimmt. Auf diese Weise wurde in Fig. 4 bei gegebenem $\mathfrak{Z}$ und $g_{\ddot{u}}$ $\mathfrak{U}$ aus $\mathfrak{R}$ konstruiert. Für die praktische Konstruktion sind natürlich nur ein Teil der in Fig. 4 gezeichneten Linien notwendig.

Kontinuierliche Wiederholung einer infinitesimalen Bewegung führt in der g-Ebene zu einer Geraden, auf der Kugel zu einer Loxodrome, daher auch der Name „loxodromische Bewegung" für die Resultante aus elliptischer und hyperbolischer Bewegung. Physikalisch entspricht sie dem Eingangswiderstand einer Leitung mit gleichmässig verteilter Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand von variabler Länge. Dass alle Loxodromen in $\mathfrak{Z}$ münden, besagt: $\mathfrak{Z}$ ist der Eingangswiderstand einer unendlich langen Leitung bei beliebiger Belastung, sofern $b_{\ddot{u}} \neq O$. Für verschwindende Dämpfung $b_{\ddot{u}}$ entartet die Loxodrome zu einem Breitenkreis; letzterer gibt uns also das Verhalten einer *dämpfungsfreien Leitung*. Für eine solche ist $\mathfrak{Z}$ reell $(= \sqrt{\frac{L}{C}}$, L Selbst-

induktion, C Kapazität pro cm Leitungslänge). Für $\mathfrak{R} = \infty$ ist der *Äquator* die Bildkurve, und zwar das stereographische Bild der imaginären Achse der $\mathfrak{W}$-Ebene. Dann zeigt Fig. 4 III unmittelbar, dass mit wachsender Länge die Leitung zuerst wie ein Kondensator, dann wie ein Kurzschluss, dann wie eine Spule und schliesslich wieder wie $\mathfrak{U} = \infty$ usw. wirkt.

Zum Schluss sei noch ein *Beispiel* für das Rechnen mit den g angeführt; es soll zugleich zeigen, dass auch gewisse Probleme, die sich auf nur nahezu symmetrische Vierpole beziehen, auf die obige vereinfachte Darstellung zurückführbar sind.

Die *Berechnung des Wellenwiderstandes einer homogenen Leitung mit einer kleinen Ungleichmässigkeit* auf Grund von (1) ist etwas umständlich[1]). Wir werden daher von (7) und (8) ausgehen.

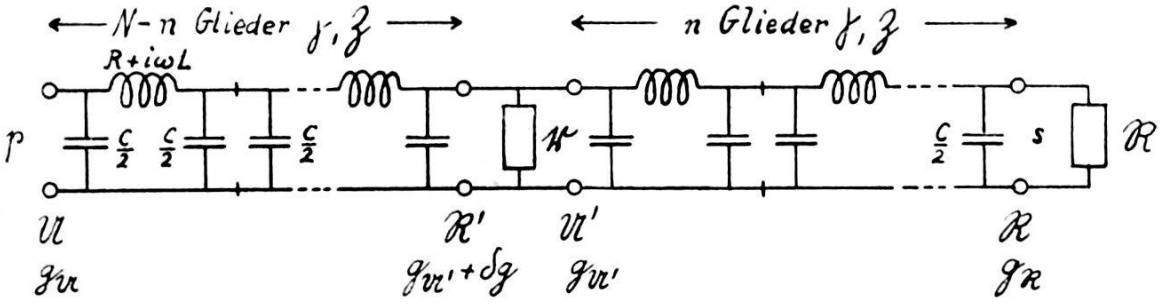

Fig. 5.

Die Ungleichmässigkeit in der gemäss Fig. 5 aus N symmetrischen Kettengliedern mit den Konstanten $\gamma, \mathfrak{Z}$ aufgebauten Leitung bestehe in einem Nebenschluss $\mathfrak{r} = \frac{1}{\mathfrak{g}}$ nach dem $(N-n)$ten Glied, wie er z. B. bei falscher Abgleichung eines Kondensators zustande kommt. Der Wellenwiderstand $\sqrt{\mathfrak{U}_k \cdot \mathfrak{U}_l}$ weicht von $\mathfrak{Z}$ etwas ab:

$$\sqrt{\mathfrak{U}_k \cdot \mathfrak{U}_l} = \lambda(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{Z}.$$

Wir berechnen $\lambda(g)$ in erster Näherung. In Fig. 5 sind unter den verschiedenen Klemmenpaaren jeweils die Widerstände und g-Werte des rechts vom betreffenden Klemmenpaar liegenden Teiles des Systems angegeben.

Nach (8) ist:

$$g_{\mathfrak{U}} = g_{\mathfrak{R}} + n\gamma + \delta g + (N-n)\gamma$$

und nach (7) für $\mathfrak{R} = O$: $g_{\mathfrak{U}_k} = N\gamma + \delta_k g \qquad = z + \eta$

für $\mathfrak{R} = \infty$: $g_{\mathfrak{U}_l} = N\gamma + \delta_l g \pm i\frac{\pi}{2} = z + i\frac{\pi}{2}$

[1]) Wagner und Küpfmüller, Archiv für Elektrotechnik **9**, 461, 1921. Dort sind auch die Folgerungen für Bau und Betrieb von Pupin- und Krarupkabeln zu finden.

mit $\eta = \delta_k g - \delta_l g$ und $z = N\gamma + \delta_l g$. Also:

$$\lambda(\mathfrak{g}) = \sqrt{Th\, g_{\mathfrak{u}_k} \cdot Th\, g_{\mathfrak{u}_l}} = \sqrt{\frac{Th\,(z+\eta)}{Th\, z}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,\eta}{Sh\, 2\,N\gamma} + \ldots .$$

Für die Berechnung der Störungen δg berücksichtigt man, dass $\mathfrak{R}'$ aus der Parallelschaltung von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{U}'$ besteht:

$$\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{Z}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}} \cdot \frac{\mathfrak{U}'\,\mathfrak{r}}{\mathfrak{r} + \mathfrak{U}'} = \frac{\mathfrak{U}'}{\mathfrak{Z}}\,(1 - \mathfrak{g}\,\mathfrak{U}') + \ldots$$

Andererseits ist

$$\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{Z}} = Th\,(g_{\mathfrak{u}'} + \delta g) = Th\, g_{\mathfrak{u}'} \cdot \left(1 + \frac{2\,\delta g}{Sh\, 2\, g_{\mathfrak{u}'}}\right) + \ldots$$

Wegen

$$Sh\, 2\, g_{\mathfrak{u}_l'} = Sh\,(2\,n\gamma + i\pi) = -\,Sh\, 2\,n\gamma = -\,Sh\, 2\, g_{\mathfrak{u}_k'}$$

ergibt der Vergleich:

$$\eta = -\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{Z} \cdot \frac{Sh\, 2\,n\gamma}{2}\left(\frac{\mathfrak{U}_k'}{\mathfrak{Z}} + \frac{\mathfrak{U}_l'}{\mathfrak{Z}}\right) = -\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{Z} \cdot Ch\, 2\,n\gamma\,,$$

weil die Klammer gleich

$$Th\, n\gamma + Cth\, n\gamma = 2 \cdot \frac{Ch\, 2\,n\gamma}{Sh\, 2\,n\gamma}$$

ist. Folglich beträgt der gesuchte Korrektionsfaktor

$$\lambda(\mathfrak{g}) = 1 - \mathfrak{g}\,\mathfrak{Z} \cdot \frac{Ch\, 2\,n\gamma}{Sh\, 2\,N\gamma} + \ldots .$$