

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 4 (1931)  
**Heft:** II

**Artikel:** Die Streuung von Röntgenstrahlen an Metallen  
**Autor:** Rusterholz, Alexander  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-110035>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Die Streuung von Röntgenstrahlen an Metallen

von Alexander Rusterholz

(5. III. 31.)

Inhalt. Aus Debye-Scherrer-Aufnahmen werden die atomaren Streufunktionen von Al, Cu, Ag, Au und Pt bestimmt. Es wird speziell Wert gelegt auf genaue Erfassung der Absorptionsverhältnisse im Präparat. Die gefundene Streufunktion für Al stimmt mit den quantenmechanischen Berechnungen von HARTREE überein, diejenige von Cu mit den Messungen von ARMSTRONG. Die Streufunktionen von Ag, Au, Pt lassen sich nach THOMAS-FERMI genau berechnen.

### Einleitung.

Beim Auftreffen von Röntgenstrahlen der Wellenlänge  $\lambda$  auf Materie entstehen Sekundärstrahlen, die man ihrem Wesen nach in drei Gruppen einteilen kann:

1. Strahlen gleicher Wellenlänge (kohärente Streustrahlung).
2. Strahlen etwas vergrößerter Wellenlänge (Comptonstrahlung).
3. Strahlen, deren Wellenlänge nur von der chemischen Zusammensetzung der bestrahlten Materie, nicht aber von der Art der einfallenden Strahlung abhängt (Fluoreszenzstrahlung).

Von besonderer Bedeutung ist die kohärente Streustrahlung, denn sie ist es, die die theoretisch und praktisch so wichtigen Interferenzen an Kristallen liefert. Deshalb ist es in manchen Fällen notwendig, zu wissen, in welcher Weise sich ein einzelnes von Strahlung getroffenes Atom verhält. Namentlich ist es die Intensität der kohärenten Streustrahlung in Abhängigkeit vom Streuwinkel, die in viele Berechnungen eingeht. Diese sogenannten Streufunktionen müssen bekannt sein bei Bestimmungen von Kristallstrukturen mit Parametern, bei der Erforschung des Molekülbauß vermittels Röntgenstrahlen, bei der Berechnung von Atomformfaktoren für Elektronenstrahlen usw. Die Streuung von Röntgenstrahlen an Materie ist es ja gewesen, die uns ermöglicht hat, die Anzahl der darin befindlichen Elektronen zu bestimmen. Inzwischen ist man einen weiteren Schritt gegangen, bis zur Erforschung des Atombauß mit Röntgenstrahlen. Die Kenntnis der Streufunktionen gibt uns die Möglichkeit, die Ladungsverteilung im Atom zu bestimmen.

Die bis jetzt gemachten Bestimmungen der Streufunktionen sind in der Hauptsache auf leichtere Atome beschränkt. Hier sind die Verhältnisse heutzutage geklärt; unter Voraussetzung kontinuierlicher Ladungsverteilung der Elektronenhülle und unter Heranziehung klassischer Methoden lassen sich die Streufunktionen für diese Fälle in guter Näherung berechnen.

Anders werden jedoch die Verhältnisse bei schweren Metallen, wenn die Frequenz der *K*-Absorptionskante grösser wird als die Frequenz der einfallenden Strahlung. Abweichungen vom klassischen Verhalten lassen sich auf Grund quantenmechanisch durchgeföhrter Berechnungen erwarten und sind auch schon bei Eisen, Kupfer und Nickel (<sup>1, 2</sup>) nachgewiesen. Mit Ausnahme von Wolfram (<sup>3</sup>) sind die Streufunktionen bei keinem schwereren Atom als Kupfer gemessen worden. Absicht der vorliegenden Arbeit ist es, einiges zur Kenntnis der Streuung an Silber, Platin und Gold beizutragen. Zunächst werden die schon bekannten Streufunktionen von Aluminium und von Kupfer bestimmt, um die verwendete Methode auf ihre Brauchbarkeit hin zu prüfen. Die Streufunktion von Al ist von JAMES, BRINDLEY und WOOD und von BEARDEN gemessen worden (<sup>4, 5</sup>), die Streufunktion von Cu von ARMSTRONG (<sup>1</sup>).

Für Silber und Gold liegen nur Messungen der Atomformfaktoren für die Fläche (200) vor, die von BRENTANO (<sup>6</sup>) ausgeführt worden sind.

### Das atomare Streuvermögen.

Es ist schon früh versucht worden, die Streuungsvorgänge mit Hilfe der Ansätze der klassischen Elektrodynamik zu erklären und zu berechnen. Man ging dabei von der Streuung an einem einzelnen freien Elektron aus.

Trifft eine ebene Welle

$$\mathfrak{E}_0 \cdot e^{2\pi i v \left( t - \frac{\mathbf{n}, \mathbf{r}}{c} \right)}$$

$\mathbf{n}$  Normalenrichtung

$c$  Lichtgeschwindigkeit

$v$  Frequenz der einfallenden Lichtwellen

$\mathbf{r}$  Fahrstrahlvektor nach einem bestimmten Aufpunkt

auf ein freies Elektron, so wird dieses zu Schwingungen gleicher Frequenz gezwungen und sendet dann selber eine Sekundärwelle

aus. Das Elektron verhält sich dabei wie ein Dipol mit dem elektrischen Moment

$$-\frac{e^2}{4\pi r^2 m} \cdot \mathfrak{E}_0 e^{2\pi i r t}$$

$e, m$  Ladung und Masse des Elektrons.

Ist das einfallende Licht unpolarisiert, so erhält man für die Intensität  $J_s$  der Sekundärwelle in der Entfernung  $r$  vom Elektron, falls man in einer gegen den Primärstrahl um den Winkel  $\varphi$  geneigten Richtung beobachtet, den Wert

$$J_s = J_{Pr} \cdot \frac{e^4}{2 r^2 m^2 c^4} (1 + \cos^2 \varphi) . \quad (1)$$

$J_{Pr}$  Intensität des Primärstrahls  
 $1 + \cos^2 \varphi$  Thomsonfaktor.

Bei  $n$  unabhängig streuenden Elektronen ist

$$J_s = J_{Pr} \cdot \frac{n e^4}{2 r^2 m^2 c^4} (1 + \cos^2 \varphi) . \quad (2)$$

Eine Integration über eine Kugeloberfläche mit dem Radius  $r$  liefert uns die Energie, die pro sec infolge Streuung an den  $n$  Elektronen aus dem Primärstrahl entfernt wird. Diese Energie  $E$  ist gleich

$$E = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{n e^4}{m^2 c^4} \cdot J_{Pr} . \quad (3)$$

Bedeutet  $n$  die Anzahl Elektronen pro  $\text{cm}^3$ , so ist die auf dem Wege 1 cm pro sec aus dem Primärstrahl entfernte Energie

$$E = \sigma \cdot J_{Pr} = \frac{8\pi n e^4}{3 m^2 c^4} \cdot J_{Pr} . \quad (3')$$

$\sigma$  ist der sog. Streukoeffizient. Die Bestimmung von  $\sigma$  setzt uns in den Stand, die Anzahl der streuenden Elektronen pro  $\text{cm}^3$ , also auch pro Atom, zu bestimmen (7). Andererseits sollte  $\sigma$  nach (3') unabhängig von der Wellenlänge sein. In Wirklichkeit ist dies jedoch nur angenähert erfüllt (8). Auch die Azimutalverteilung der Streuintensität kann nicht durch den Thomsonschen Faktor allein beschrieben werden. Dies kommt daher, dass in Wirklichkeit die Elektronen eines Atoms nicht unabhängig voneinander streuen. Für Strahlung, deren Wellenlänge grösser als

die Atomdimensionen ist, werden die Elektronen eines Atoms als Ganzes streuen. Enthält das Atom  $Z$  Elektronen, so ist

$$J_s = J_{Pr} \frac{Z^2 e^4}{2 r^2 m^2 c^4} (1 + \cos^2 \varphi). \quad (4)$$

Die Annahme unabhängiger Streuung liefert hingegen

$$J_s = J_{Pr} \frac{Z e^4}{2 r^2 m^2 c^4} (1 + \cos^2 \varphi). \quad (5)$$

In Wirklichkeit gilt weder der eine noch der andere Ausdruck genau. Um die Abweichungen von (4) zum Ausdruck zu bringen, schreibt man gewöhnlich

$$J_s = \frac{e^4}{2 r^2 m^2 c^4} |F|^2 \cdot (1 + \cos^2 \varphi) \cdot J_{Pr}. \quad (6)$$

Dabei bezieht sich  $J_s$  nur auf die Intensität der kohärenten Streustrahlung.

$F$  wird als Streuvermögen oder als Atomformfaktor bezeichnet. Das Streuvermögen eines Atoms mit gegebener Elektronenanordnung hängt von  $\lambda$  und von  $\varphi$  ab. Gewöhnlich strebt  $F$  mit abnehmendem Winkel  $\varphi$  gegen den Wert  $Z$ .

$F$  kann aus der Elektronenkonfiguration bestimmt werden. Versuche zur Berechnung von  $F$  aus verschiedenen Elektronenanordnungen in Schalen und auf bestimmten Bahnen haben jedoch keine gute Übereinstimmung mit den experimentell bestimmten Werten von  $F$  gezeigt. Bessere Übereinstimmung liefert die Annahme kontinuierlicher Ladungsverteilung innerhalb des Atoms, wie sie neuerdings nach der Schrödingerschen Wellenmechanik gefordert wird. Bei den Berechnungen wird angenommen, dass jedes einzelne Volumenelement nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik streut. Die von den einzelnen Volumenelementen ausgehenden Wellen sind in bestimmten Phasenbeziehungen zueinander. Die Abweichungen von (6) sind dann als Interferenzeffekt bei der Überlagerung aller dieser Wellen zu deuten.

Hat die Ladungsverteilung Kugelsymmetrie, und ist die radiale Ladungsverteilung  $U(r)$  bekannt, so berechnet sich  $F$  auf Grund dieser Betrachtungsweise zu

$$F = \int_0^\infty U(r) \cdot \frac{\sin \Phi}{\Phi} dr \quad \Phi = 4 \pi r \cdot \frac{\sin \Theta}{\lambda} \quad \Theta = \frac{\varphi}{2}. \quad (7)$$

Danach wäre  $F$  für ein Atom eine Funktion von  $\frac{\sin \Theta}{\lambda}$  allein. Umgekehrt lässt sich  $U(r)$  aus  $F$  folgendermassen berechnen:

$$U(r) = \frac{2r}{\pi} \int_0^{\infty} x F(x) \sin(xr) dx \quad x = 4\pi \frac{\sin \Theta}{\lambda}.$$

Man kann somit aus dem gemessenen Verlauf von  $F$  die radiale Ladungsverteilung  $U(r)$  bestimmen. Leider ist es nicht möglich,  $F$  für genügend viele Werte von  $x$  zu messen, um aus ihnen den Verlauf von  $U(r)$  genau zu berechnen. Es ist in diesen Fällen günstiger, die experimentellen Werte von  $F$  zu vergleichen mit  $F$ -Werten, die aus theoretisch berechneten Ladungsverteilungen abgeleitet worden sind.

Für viele Atome lässt sich  $U(r)$  nach einer von HARTREE<sup>(9)</sup> angegebenen Näherungsmethode bestimmen. Die bisherigen experimentellen Untersuchungen haben gezeigt, dass die auf diese Weise berechneten Streufunktionen die tatsächlichen Verhältnisse gut wiedergeben (4, 10, 11, 12, 13, 49).

Nun haben THOMAS<sup>(14)</sup> und FERMI<sup>(15)</sup> eine neue Näherungsmethode zur Berechnung der radialen Ladungsverteilung vorgeschlagen, die allerdings nur bei schweren Atomen Gültigkeit besitzen soll. Danach wird die Elektronenhülle des Atoms als entartetes Elektronengas aufgefasst und auf Grund dieser Vorstellung mittels statistischer Methoden die radiale Ladungsverteilung  $U(r)$  berechnet. Aus  $U(r)$  lässt sich mit Hilfe von (7) die Streufunktion bestimmen. Die Methode von THOMAS und FERMI gibt zwar die tatsächliche Verteilung der äussersten Elektronen nicht gut wieder; der Unterschied wird sich aber, was die  $F$ -Funktion betrifft, nur bei sehr kleinen Werten von  $\frac{\sin \Theta}{\lambda}$  bemerkbar machen, da für grössere Werte von  $\frac{\sin \Theta}{\lambda}$  der Anteil dieser äusseren Elektronen zur Streuintensität infolge Interferenz auf Null heruntergesetzt wird.

Nach der Methode von THOMAS-FERMI erhält man für den Potentialverlauf in einem Atom der Kernladungszahl  $Z$  in Abhängigkeit von der Entfernung  $r$  vom Kern

$$V(r) = \frac{Ze}{a} \cdot \frac{\varphi(x)}{x},$$

wobei

$$x = \frac{r}{a}$$

$$a = \frac{3^{\frac{2}{3}} h^2}{2^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} m e^2 Z^{\frac{1}{3}}}$$

und  $\varphi(x)$  eine Funktion ist, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

und den Bedingungen

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 1 \\ \varphi(\infty) &= 0\end{aligned}$$

genügt. Diese Funktion ist von FERMI mittels eines numerischen Verfahrens ermittelt worden.

Nach der Poissonschen Gleichung erhält man dann für die Ladungsdichte  $n$

$$n = \frac{Z}{4 \pi a^3} \left[ \frac{\varphi(x)}{x} \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$U(r) = \frac{4 \pi r^2 Z}{4 \pi a^3} \left[ \frac{\varphi(x)}{x} \right]^{\frac{3}{2}}$$

und für den Atomformfaktor (16)

$$F = \int_0^\infty \frac{r^2 Z}{a^3} \left[ \frac{\varphi(x)}{x} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sin \left\{ 4 \pi \frac{r}{\lambda} \sin \Theta \right\}}{4 \pi \frac{r}{\lambda} \sin \Theta} dr$$

$$= Z \cdot \frac{1}{u} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \sin ux dx \quad u = 4 \pi \frac{a}{\lambda} \sin \Theta$$

$$F = Z \cdot \Phi \left( 4 \pi \frac{\sin \Theta}{\lambda} \cdot a \right)$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{u} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \sin ux dx$$

THOMAS hat die  $F_0$ -Werte für Caesium ( $Z_0 = 55$ ) ausgerechnet. Aus seinen Angaben kann man die Streufunktion für ein Atom mit der Kernladungszahl  $Z$  bestimmen. Denn es ist

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\sin \Theta}{\lambda}\right) &= Z \cdot \Phi\left(4 \pi \frac{\sin \Theta}{\lambda} a\right) = Z \cdot \Phi\left(4 \pi \frac{\sin \Theta}{\lambda} a_0 \cdot \frac{Z_0^{\frac{1}{3}}}{Z^{\frac{1}{3}}}\right) \\ &= \frac{Z}{Z_0} \cdot F_0\left(\frac{\sin \Theta}{\lambda} \cdot \frac{Z_0^{\frac{1}{3}}}{Z^{\frac{1}{3}}}\right). \end{aligned}$$

Die auf diese Weise berechneten Streufunktionen geben anscheinend selbst bei leichten Elementen eine gute Näherung (16).

Die Streufunktionen für Silber, Platin und Gold, wie sie sich nach dieser Methode berechnen lassen, sind in Tabelle 1 angegeben.

**Tabelle 1.**  
Streufunktionen von Silber, Platin und Gold nach THOMAS-FERMI.

Silber	Platin	Gold
$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$	$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$	$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$
0	46,0	0
0,094	42,4	0,113
0,188	36,6	0,226
0,282	31,4	0,339
0,377	27,1	0,452
0,471	24,0	0,565
0,565	21,6	0,678
0,659	19,4	0,791
0,753	17,4	0,903
0,847	15,7	1,015
0,942	14,2	1,128
1,035	13,0	
1,130	12,1	

Neuerdings hat WALLER (17) die Streuung von Röntgenstrahlen nach den Methoden der Quantenmechanik behandelt. Für die Streuung an einem Atom mit ruhendem Kern und mit  $N$  Elektronen ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) erhält er folgendes Resultat:

Das Atom befindet sich in einem Zustand  $n$ , dessen Energie  $E_n$  sei. Dieser Zustand sei beschrieben durch die dazugehörige normierte Schrödingersche Eigenfunktion

$$\Phi_n e^{-\frac{2 \pi i}{\hbar} E_n t},$$

die von den  $3N$  Koordinaten  $x_k, y_k, z_k$  der  $N$  Elektronen abhängt.  $n'$  bedeutet irgend einen mit dem Zustand  $n$  kombinierenden Zustand des Atoms.

Auf das Atom falle nun eine ebene Welle

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cdot e^{2\pi i v \left( t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right)}$$

$\mathbf{n}$ : Einheitsvektor in Richtung der Wellennormale

$\mathbf{r}$ : Vektor von einem festen Nullpunkt (Kern) zum Aufpunkt.

Die Emission von Sekundärstrahlung (Comptonstrahlung inbegriffen) in der Richtung  $\mathbf{n}'$  durch das Atom im Zustand  $n$  lässt sich beschreiben durch eine Summe von Dipolmomenten

$$\sum_{n'}^{E_n' < E_n + h v} (d_{nn'} + \tilde{d}_{nn'}) + \sum_{n'}^{E_n' < E_n - h v} (d_{n'n} + \tilde{d}_{n'n})$$

wobei

$$d_{nn'} = -\frac{e^2}{8\pi^2 m v v'} \left\{ \mathfrak{E}_0 \cdot \delta_{nn'} + \frac{h}{4\pi^2 \mu} \sum_s \left[ \frac{(\mathfrak{E}_0 \mathfrak{A}_{sn}) \tilde{\mathfrak{A}}'_{sn'}}{v_{ns} + v} + \frac{(\mathfrak{E}_0 \mathfrak{A}_{n's}) \tilde{\mathfrak{A}}'_{n's}}{v_{n's} - v} \right] \right\} e^{2\pi i v' t}$$

$$v' = v_{nn'} + v = \frac{E_n - E_{n'}}{h} + v$$

$$\delta_{nn'} = \int \tilde{\Phi}_n \Phi_{n'} \sum_{k=1}^N e^{i(z' - z) \mathbf{r}_k} dV$$

$$\mathfrak{A}_{ns} = \int \tilde{\Phi}_s \sum_{k=1}^N e^{-i z \mathbf{r}_k} \operatorname{grad}_k \Phi_n dV$$

$$\mathfrak{A}'_{ns} = \int \tilde{\Phi}_s \sum_{k=1}^N e^{-i z' \mathbf{r}_k} \operatorname{grad}_k \Phi_n dV$$

$$\Phi_n e^{-\frac{2\pi i}{h} E_n t} : \text{normierte Schrödingersche Eigenfunktion}$$

$$z = \frac{2\pi v}{c} \mathbf{n}$$

$$z' = \frac{2\pi v'}{c} \mathbf{n}'$$

$$dV = \prod_{k=1}^N dV_k = \prod_{k=1}^N dx_k dy_k dz_k.$$

Um den Anteil der kohärenten Streustrahlung zu erhalten, hat man  $n' = n$  zu setzen. Nimmt man zunächst an, dass  $\nu$  hoch genug ist, damit nur das erste Glied von  $(d_{nn'})$  in Frage kommt, und ist  $\delta_{nn}$  reell, so ist  $\delta_{nn} = F$ .

$$\delta_{nn} = \int W_n(xyz) e^{\frac{2\pi i}{c}(\nu n' - \nu n)r} dx dy dz$$

$$W_n(xyz) = \sum_k W_{nk}(xyz)$$

$$W_{nk}(x_k, y_k, z_k) = \int \tilde{\Phi}_n \Phi_n dV_k'.$$

$W_n(xyz)$  ist die sämtlichen Elektronen entsprechende Ladungsdichte. Hängt  $W_n$  nur von  $r$  vom Kern ab, so erhält man

$$\delta_{nn} = F \left( \frac{\sin \Theta}{\lambda} \right) = 4\pi \int W_n(r) \cdot \frac{\sin \left( \frac{4\pi r}{\lambda} \cdot \sin \Theta \right)}{\frac{4\pi r}{\lambda} \cdot \sin \Theta} r^2 dr,$$

was der Formel (7) entspricht.

Liegt nun  $\nu$  in der Nähe der  $K$ -Absorptionsfrequenz des bestrahlten Atoms, so darf man das zweite Glied in  $\{ \}$  von  $(d_{nn'})$  nicht vernachlässigen. In diesem Falle tritt anomale Streuung auf. WALLER gibt eine Abschätzung des zweiten Gliedes an; er findet dafür den Ausdruck

$$\sim \mathfrak{E}_0 \cdot n_k \cdot \frac{\nu_K^2}{\nu^2} \cdot \ln \left| 1 - \frac{\nu^2}{\nu_K^2} \right| \quad n_k = 1 \text{ bis } 1,5.$$

Tatsächlich haben neue Messungen des Streuvermögens von Eisen, Kupfer und Nickel (1, 2) gezeigt, dass  $F$  für einen bestimmten Wert von  $\frac{\sin \Theta}{\lambda}$  nicht konstant bleibt, sondern sich von Wellenlänge zu Wellenlänge ändert: die für verschiedene Strahlungen bestimmten Streufunktionen überdecken einander nicht. Dann wäre aber die Anwendbarkeit von (7) im Falle dieser und noch schwererer Atome in Frage gestellt. Die Berechnung von  $F$  nach THOMAS-FERMI stützt sich aber gerade auf Gleichung (7). Eine Entscheidung kann das Experiment bringen. Die einzige Messung der Streufunktion von schweren Metallen, die bisher vorlag, ist von CLAASSEN (3) an Wolfram ausgeführt worden. Seine Resultate zeigen, dass die Winkelabhängigkeit von  $F$  mit dem nach THOMAS-FERMI berechneten Verlauf der Streufunktion gut übereinstimmt. Es ist jedoch wünschenswert, weitere Messungen an anderen schweren Atomen anzustellen.

### Interferenzen an Kristallen.

Es ist nun nicht möglich, die Streuung an einem einzelnen Atom zu messen. Beim Vorhandensein vieler Atome spielt aber ihre gegenseitige Lage ebenfalls eine wichtige Rolle. Um aus den beobachteten Intensitäten das Streuvermögen eines einzelnen Atomes ableiten zu können, muss die Anordnung der Atome und der Einfluss dieser Anordnung bekannt sein. Danach kann man zwei verschiedene Methoden zur Bestimmung des atomaren Streuvermögens unterscheiden:

1. durch Messungen an einatomigen Gasen;
2. durch Messung der Integralintensität der Interferenzen, und zwar an Kristallen bekannter Struktur.

Die Messungen an Gasen weisen den Vorteil auf, dass man  $F$  in einem kontinuierlichen Wertebereich von  $\frac{\sin \Theta}{\lambda}$  bestimmen kann, während die Messung an Kristallen  $F$  nur für ganz bestimmte diskrete Werte von  $\frac{\sin \Theta}{\lambda}$  liefert. Andererseits wird durch Interferenz die uns allein interessierende kohärente Streustrahlung isoliert, da nur sie allein interferenzfähig ist. Bei Gasen misst man die Comptonstrahlung mit.

Weitaus die grösste Zahl der  $F$ -Bestimmungen ist bis jetzt an Kristallen ausgeführt worden, obwohl bei diesen Messungen sehr viele Faktoren in Betracht gezogen werden müssen. Es hat sich gezeigt, dass es in den meisten Fällen genügt, den Einfluss der Atomanordnung im Kristall nach der vereinfachten wellenkinetischen Theorie von LAUE zu behandeln. Diese Theorie vernachlässigt die Absorption und die Wechselwirkung der von den einzelnen Atomen ausgehenden Streuwellen untereinander. Diese Streuwellen sollen sich danach ohne jede Modifikation in einem bestimmten Aufpunkt zusammensetzen. Die Phasenunterschiede der einzelnen Wellen sind infolge der regelmässigen Anordnung der Atome im Kristallgitter genau bestimmt; man hat infolge der Kohärenz der einzelnen Wellen die Amplituden zu addieren. Auf diese Weise erhält man eine Intensitätsverteilung, die für ganz bestimmte Richtungen und bei bestimmten Lagen des Primärstrahls zum Gitter sehr hohe Werte annehmen kann. Man kann den Vorgang auffassen als Reflexion an bestimmten Netzebenen. Erfolgt die Reflexion an der Netzebene  $(h_1 h_2 h_3)$ , so ist die Lage des Intensitätsmaximums  $\varphi_0$  gegen den Primärstrahl gegeben durch die Bragg'sche Beziehung

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\lambda}{2d} \sqrt{\sum_i h_i^2}$$

$d$ : Gitterkonstante.

Auf beiden Seiten von  $\varphi_0$  fällt die Intensität  $J^*$  schnell auf Null herab. Man bezeichnet  $J = \int J^* d\varphi$  gebildet über die ganze Umgebung des Maximums als Integralintensität der Interferenz  $\varphi_0$ . Sie hängt von den jeweiligen Versuchsbedingungen ab. Erfolgt Reflexion von unpolarisierter monochromatischer Strahlung an Kristallpulver, das sich in einem kleinen Volumenelement  $dV$  befindet, so ist  $J$  gegeben durch den folgenden Ausdruck (18):

$$J_{h_1 h_2 h_3} = J_{Pr} \cdot \text{const } n^2 \cdot |S|^2 \cdot p \cdot \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot dV \quad (9)$$

$$= J_{Pr} \cdot Q \cdot dV.$$

Dabei bedeuten:

$n$  Anzahl Atome pro  $\text{cm}^3$

$\varrho$  Abstand  $dV$  – Aufpunkt

$p$  Häufigkeitsfaktor der Fläche  $h_1 h_2 h_3$

$\varphi$  Winkel zwischen Primärstrahl und reflektiertem Strahl

$S$  ist die sog. Streuamplitude.

Für kubische Kristalle ist

$$|S| = \left| \sum_k F_k \cdot e^{2\pi i (x_k h_1 + y_k h_2 + z_k h_3)} \right|$$

$x_k, y_k, z_k$  Koordinaten der Teilchen innerhalb des Elementarbereiches.

Für ein einfaches kubisches Gitter ist  $|S| = |F|$ .

Für ein flächenzentriertes Gitter ist  $|S| = 4 |F|$  für Flächen mit ungemischten Indizes (entweder alle gerade oder alle ungerade) und  $|S| = 0$  für Flächen mit gemischten Indizes.

$dV$  muss so klein genommen werden, dass die Absorption in  $dV$  vernachlässigt werden kann.

Es zeigt sich aber, dass es Fälle gibt, in denen die Anwendung der Laue'schen Theorie nicht zutreffend ist und zu falschen Resultaten führen kann. Offenbar ist die Vernachlässigung der Wechselwirkung der einzelnen Sekundärwellen untereinander nicht immer erlaubt. DARWIN (19) und EWALD (21) haben das Problem der Streuung an Kristallen ohne diese Vernachlässigung behandelt. Die Aussagen ihrer sog. dynamischen Interferenztheorie der Kristalle weichen in vielen Punkten von denen der Laue'schen Theorie ab. Danach soll die Intensität der Interferenzen nicht mehr dem Quadrat des Absolutwertes der Streuamplitude proportional sein, sondern dem Absolutwert selber. Die Vorgänge lassen sich angenähert darstellen als eine Vergrößerung des Absorptionskoeffizienten bei Reflexionslagen (Extinktion). Dem Primärstrahl wird nicht nur durch gewöhnliche Absorption (durch Auslösung des

photoelektrischen Effektes und durch Streuung) Energie entzogen, sondern auch in Form der reflektierten Strahlen.

Für Kristalle sehr kleiner Dimensionen gehen die Formeln der dynamischen Theorie in die der Laue'schen über. Die genauen Berechnungen der Intensität für grössere Kristalle ergeben jedoch viel kleinere Werte, als wie sie die Beobachtung liefert. Der Grund liegt in Folgendem: bei den Berechnungen wird das Gitter des Kristallstückes als ideal, als ungestört vorausgesetzt. Diese Kristalle erfüllen aber die Bedingung nicht. In Wirklichkeit weisen sie Verwerfungen auf, durch welche sie in kleine Blöcke eingeteilt sind. Diese Blöcke sind nicht genau parallel, sondern gegeneinander ein wenig verdreht (Mosaikkristall). Sind diese Blöcke sehr klein (idealer Mosaikkristall), so kann für sie einzeln die Laue'sche Theorie angewendet werden. Sind sie jedoch grösser, so modifiziert sich nach DARWIN der von der Laue'schen Theorie gegebene Ausdruck

$$J_{h_1 h_2 h_3} = J_{Pr} \cdot Q \cdot dV.$$

Es gilt dann

$$J_{h_1 h_2 h_3} = J_{Pr} \cdot Q \cdot \frac{\mathfrak{T} g m q}{m q} \cdot dV$$

$$q = n F \cdot D_{h_1 h_2 h_3} \cdot \lambda \cdot \frac{e^2}{m c^2} \cdot \frac{1}{\sin \Theta}.$$

*m* Anzahl Netzebenen  $h_1 h_2 h_3$  in jedem idealen Block  
*D* Abstand der Ebenen  $h_1 h_2 h_3$ .

Diese Erscheinung wird als „primary extinction“ bezeichnet.

Durch die abschirmende Wirkung der einzelnen, in Reflexionslage sich befindenden Blöcke auf die hinter ihnen liegenden erfolgt, selbst im Falle, wenn die „primary extinction“ vernachlässigt werden kann, eine merkbare Vergrösserung des Absorptionskoeffizienten (secondary extinction). BRAGG, JAMES und BOSANQUET (20) ist es gelungen, die sekundäre Extinktion bei Steinsalz zu bestimmen durch Messungen an Kristallplatten verschiedener Dicke. So fanden sie als effektiven Absorptionskoeffizienten für die Fläche (200) für  $\lambda = 0,613 \text{ \AA}$  den Wert 16,30, während der gewöhnliche Absorptionskoeffizient von Steinsalz 10,70 ist. Die Kenntnis von  $\mu_{eff}$ , das von Fläche zu Fläche verschieden ist, ist deshalb wichtig, weil diese Grösse bei der Auswertung der Messergebnisse in die Rechnung eingeht. Der Betrag der primären Extinktion kann jedoch mit der Methode von BRAGG, JAMES und BOSANQUET nicht gemessen werden. Er lässt sich auch nicht berechnen, weil die Grösse der einzelnen Blöcke nicht bekannt ist. Alle diese Schwierigkeiten lassen sich jedoch durch Verwendung

von genügend feinem Kristallpulver umgehen (5, 22, 23). In diesem Fall darf man mit dem Ausdruck (9) rechnen. Deshalb ist auch bei dieser Untersuchung Metallpulver, und nicht Einkristalle, gewählt worden.

### Einfluss der Temperaturbewegung.

Die Gitterbestandteile sind in Wirklichkeit nicht in Ruhe, sondern schwingen um bestimmte Gleichgewichtslagen. Gerade aus der Energie dieser Bewegung besteht ja zum grössten Teil der Energieinhalt der festen Körper. Die Amplitude dieser Schwingungen ist beträchtlich und darf den Atomabständen gegenüber nicht vernachlässigt werden. Es ist deshalb von vornherein zu erwarten, dass diese Temperaturbewegung auch einen Einfluss auf die Röntgeninterferenzen haben wird. Die von den einzelnen Atomen ausgehenden Wellen sind bei ruhenden Atomen in ganz bestimmten Phasenbeziehungen zueinander; bei bewegten Atomen werden diese Beziehungen verwischt, was eine Verminderung der Intensität der Interferenzen zur Folge hat. Hingegen werden die Schärfe und die Lage der Interferenzen nicht verändert, wenn man von der Vergrösserung der Gitterkonstanten infolge thermischer Ausdehnung absieht. Die genaue Berechnung der Intensitätsverminderung ist bis jetzt nur für einige wenige Gittertypen gelungen. Bei Strukturuntersuchungen wird dieser Intensitätsabfall überhaupt vernachlässigt. Berechnet man die Streufaktoren aus den Intensitäten, ohne der Temperaturbewegung Rechnung zu tragen, so erhält man zu kleine Werte. Sie sollen im folgenden mit  $F_T$  bezeichnet werden. Um aus ihnen die Streufunktion für die ruhenden Atome ( $F_0$ ) zu erhalten, hat man sie mit einem Faktor zu multiplizieren, der grösser als eins ist.

Für kubische Kristalle mit nur einer Atomart gilt

$$F_T = F_0 \cdot e^{-M} \quad (24)$$

$$M = \frac{8 \pi^2}{3} \cdot \bar{u^2} \cdot \left( \frac{\sin \Theta}{\lambda} \right)^2$$

$\bar{u^2}$  mittleres Verschiebungsquadrat der Atome aus ihrer Ruhelage.

Enthalten kubische Kristalle mehrere Atomarten, und haben die Atomarten verschiedene  $\bar{u^2}$ , so gilt für jede Atomart einzeln

$$F_{1T} = F_{10} \cdot e^{-M_1}$$

$$F_{2T} = F_{20} \cdot e^{-M_2}.$$

$\bar{u^2}$  lässt sich nur dann berechnen, wenn die Gitterkräfte bekannt sind. Bekannt sind diese aber nur für die drei kubischen Translationsgitter, und auch für sie nur dann, wenn sie aus einer einzigen Atomart bestehen. Für alle anderen Gitter kann  $\bar{u^2}$  nicht berechnet werden. Hingegen ermöglicht ein Vergleich der Werte von  $F_T$  mit den theoretisch vorausberechneten Werten von  $F_0$ , die Grösse von  $\bar{u^2}$  experimentell zu bestimmen (11, 13).

Für die drei kubischen Translationsgitter mit nur einer Atomart gilt nun nach WALLER (25)

$$M = \frac{6 h^2}{m \times \Theta_k} \cdot \frac{\sin^2 \Theta}{\lambda^2} \left\{ \frac{\Phi(x)}{x} + \frac{1}{4} \right\} \quad (10)$$

dabei bedeuten

$h$  Planksches Wirkungsquantum

$\times$  Boltzmannsche Konstante

$m$  Atommasse

$\Theta_k$  Charakteristische Temperatur

$$x = \frac{\Theta_k}{T}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Der Ausdruck innerhalb der geschweiften Klammer gilt bei Annahme einer Nullpunktsenergie; im anderen Falle ist der Summand  $\frac{1}{4}$  zu streichen. WALLER hat die Berechnung von  $M$  auch quantenmechanisch durchgeführt (17). Er findet Übereinstimmung mit Formel (10), falls für die in der früheren Berechnung unbestimmt gelassene Nullpunktsenergie der Plancksche Wert gesetzt wird. Versuche von JAMES, BRINDLEY und WOOD (4) an Aluminium haben gezeigt, dass man Übereinstimmung zwischen der theoretisch nach der Hartreeschen Methode vorausberechneten Streufunktion und der experimentell ermittelten erhält, wenn man eine Nullpunktsenergie annimmt. Weitere Versuche von JAMES und BRINDLEY an Sylvin (26) und von JAMES und FIRTH an Steinsalz (27), letztere in Verbindung mit den Berechnungen von JAMES, WALLER und HARTREE (10), haben ergeben, dass die Formel von WALLER auch bei Vorhandensein zweier Atomsorten in einem grossen Temperaturbereich ( $86^\circ$  bis  $600^\circ$  abs.) gültig bleibt, jedoch nur für Reflexionen vom Typus  $F_1 + F_2$ ; bei Reflexionen vom Typus  $F_1 - F_2$  liefert sie zu grosse Werte von  $M$ . Eine Nullpunktsenergie ist auch hier anzunehmen.

Da es sich in der vorliegenden Untersuchung um kubisch-flächenzentriert kristallisierende Elemente handelt, kann die Wallersche Formel ohne Bedenken angewendet werden.

Bei Einführung der Braggschen Beziehung

$$\sin^2 \Theta = \frac{\lambda^2}{4 d^2} \cdot \Sigma h_i^2$$

lässt sich Formel (10) folgendermassen schreiben:

$$M = \frac{3}{2} \frac{h^2}{m \times \Theta_k d^2} \left\{ \frac{\Phi(x)}{x} + \frac{1}{4} \right\} \cdot \Sigma h_i^2 = L \cdot \Sigma h_i^2.$$

Mit Hilfe der von DEBYE (28) angegebenen Werte von  $\Phi$  erhält man für  $T = 290^\circ$  abs. folgende Werte von  $L$

**Tabelle 2.**

	$\Theta_k$	$m$	$d$	$L$
Al	$390^\circ$	$0,448 \cdot 10^{-22}$	$4,05 \cdot 10^{-8}$	0,0128
Cu	$315^\circ$	1,05	3,60	0,0142
Ag	$215^\circ$	1,78	4,06	0,0102
Pt	$225^\circ$	3,22	3,93	0,0055
Au	$190^\circ$	3,25	4,08	0,0070

### Berücksichtigung der Absorption.

Bei der Ableitung von Formel (9) wird vorausgesetzt, dass die Strahlen an einem Volumen von sehr kleinen Ausmassen reflektiert werden, so dass alle Stellen dieses Volumens von Strahlen gleicher Intensität getroffen werden. Hat man es nun mit einem Präparat von grösseren Dimensionen zu tun, so ist es notwendig, die Absorption im Präparat in Betracht zu ziehen.

$J_e$  sei die Intensität des auf das reflektierende Volumenelement  $dV$  fallenden Strahles,  $J_r$  die Intensität des an  $dV$  reflektierten Strahles, letztere gemessen in der Entfernung  $\varrho$  von  $dV$ . Dann ist

$$J_r = J_e \cdot p(\varrho, \varphi) \cdot dV,$$

$p$  bedeutet eine von  $\varrho$  und vom Winkel  $\varphi$ , welchen der einfallende und der reflektierte Strahl miteinander einschliessen, abhängige Funktion. Ist  $s_1$  der Weg, den der Primärstrahl durch das Präparat bis zu  $dV$  zurücklegt, so wird  $J_e = J_{Pr} \cdot e^{-\mu s_1}$ .  $\mu$  bedeutet den linearen Absorptionskoeffizienten,  $J_{Pr}$  die Intensität des Primärstrahls. Analog beobachtet man nicht  $J_r$ , sondern  $J_r \cdot e^{-\mu s_2}$ , wenn mit  $s_2$  der Weg des reflektierten Strahles im Präparat bezeichnet wird. Die gesamte Intensität des am ganzen Volumen  $V$

reflektierten Strahles in der mittleren Entfernung  $\varrho_0$  von  $V$  ergibt sich dann, da die Dimensionen von  $V$  gewöhnlich klein sind gegenüber  $\varrho_0$ , zu

$$\bar{J} = J_{Pr} \cdot p(\varrho_0, \varphi) \cdot \iiint_V e^{-\mu(s_1+s_2)} dV$$

statt  $\bar{J} = J_r \cdot p(\varrho_0, \varphi) \cdot V$ , wenn keine Absorption vorhanden wäre.

$$\iiint_V e^{-\mu(s_1+s_2)} dV$$

ist eine mit  $\varphi$  veränderliche Grösse, die bekannt sein muss, falls man die Winkelabhängigkeit von  $p$  aus den Intensitätsmessungen bestimmen will.

Es ist naheliegend, eine solche Anordnung zu verwenden, bei der diese Integration leicht ausgeführt werden kann. Dies ist z. B. der Fall, wenn man das Kristallpulver in Plättchen presst, nur muss man hier dafür sorgen, dass die reflektierenden Netzebenen entweder parallel oder senkrecht zur Plättchenoberfläche stehen; man muss für jede Reflexion das Präparat in die entsprechende Lage zum Primärstrahl bringen (5, 22). Dies geschieht automatisch bei der fokussierenden Methode von BRENTANO (29, 30) dadurch, dass man sowohl das Präparat als auch eine nur einzelne Stellen des Filmes frei lassende Blende mit bestimmten Geschwindigkeiten rotieren lässt. Diese Methode verlangt aber zeitlich konstante Intensität der Primärstrahlen, da die verschiedenen Interferenzlinien auf dem Film nicht gleichzeitig entstehen. Eine konstante Röntgenlichtquelle stand nicht zur Verfügung; die vorliegende Untersuchung ist nach der Anordnung von DEBYE-SCHERRER ausgeführt worden.

Bei dieser Methode ist das reflektierende Volumen  $V$  ein Zylinder von der Höhe  $h$ , falls man eine rechteckige Blende verwendet und falls die Divergenz nicht zu gross ist. Dabei ist die Höhe  $h$  klein im Verhältnis zum Radius der Kamera. Beobachtet wird in gleicher Höhe mit dem Primärstrahl, also in einer Ebene, die durch den Primärstrahl geht und zur Kameraachse senkrecht steht (Äquator). Dann ist

$$\begin{aligned} \iiint_V e^{-\mu(s_1+s_2)} dV &= h \cdot \iint_F e^{-\mu(s_1+s_2)} df = h \cdot A(\varphi) \\ A(\varphi) &= \iint_F e^{-\mu(s_1+s_2)} df \end{aligned}$$

wobei die Integration nur über den Querschnitt des Stäbchens erstreckt werden muss.

a) Berechnung von  $A(\varphi)$  im Falle verschwindender Divergenz.

Es ist möglich,  $A(\varphi)$  analytisch auszurechnen bei einem Stäbchen mit quadratischem Querschnitt (31). Ein solches Stäbchen aus Kristallpulver lässt sich aber schwer genau herstellen. Bedeutend einfacher ist es, Stäbchen mit kreisförmigem Querschnitt zu pressen; etwelche kleinen Abweichungen von der Kreisform lassen sich noch durch Drehen des Stäbchens während der Aufnahme kompensieren.

Bei kreisförmigem Querschnitt nimmt  $A(\varphi)$  bei Verwendung von Polarkoordinaten  $r, \psi$  (Fig. 1) folgende Gestalt an ( $R =$  Radius des Stäbchens):

$$A(\varphi) = \int_0^{R^2\pi} \int_0^\infty e^{-\mu R} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \sin^2(\psi - \varphi)} + \sqrt{1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \sin^2 \psi - \frac{r}{R} \cos(\psi - \varphi) + \frac{r}{R} \cos \psi} \right] r dr d\psi.$$

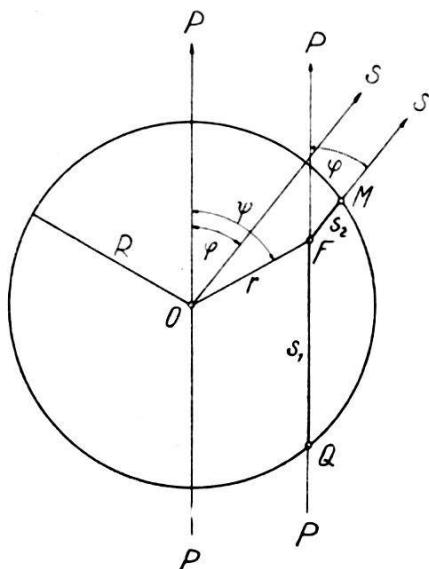


Fig. 1.

Dieses Integral kann im allgemeinen Falle nicht analytisch berechnet werden. Man muss entweder graphische oder numerische Methoden zu Hilfe ziehen. Auf diese Weise haben DEBYE und SCHERRER (32), CLAASSEN (3), GREENWOOD (33) und MÖLLER und REIS (34) diese Integrale für einige Spezialfälle bestimmt.

Zunächst ist es zweckmäßig, die Integration über den Kreis vom Radius  $R$  zurückzuführen auf eine Integration über den Einheitskreis. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} r &= r' \cdot R \\ \mu R &= \mu', \end{aligned}$$

so wird

$$A(\varphi) = R^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-\mu'} [\sqrt{1-r'^2 \sin^2(\varphi-\psi)} + \sqrt{1-r'^2 \sin^2 \psi - r' \cos(\varphi-\psi) + r' \cos \psi}] r' dr' d\psi.$$

Man sieht auch, dass die Veränderlichkeit von  $A(\varphi)$  mit dem Winkel  $\varphi$  nur vom Produkt aus Absorptionskoeffizient und Radius des Stäbchens  $\mu R$  abhängt. Im folgenden soll immer über den Einheitkreis integriert werden, wobei man aber dementsprechend als linearen Absorptionskoeffizienten nicht  $\mu$ , sondern  $\mu R$  zu nehmen hat.

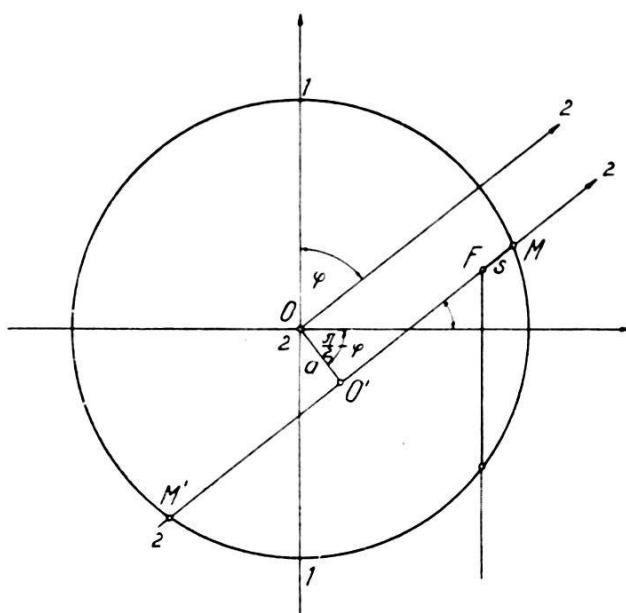


Fig. 2.

Für die numerische Berechnung ist es vorteilhafter, rechtwinklige Koordinaten einzuführen (Fig. 2).

11 sei die Richtung des Primärstrahles (zugleich die positive  $y$ -Richtung), 22 die Richtung des reflektierten Strahles, die mit dem Primärstrahl den Winkel  $\varphi$  einschliesst. Durch den Punkt  $F$ , in dem sich das streuende Volumenelement befinden soll, legen wir eine Parallelle zu 22; sie ist gegen die  $x$ -Achse um den Winkel  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  geneigt; ihr Abstand  $00'$  vom Koordinatennullpunkt sei mit  $a$  bezeichnet. Diese Parallelle schneidet den Kreis im Punkte  $M$  mit den Koordinaten  $X$ ,  $Y$ .  $X$  und  $Y$  berechnen sich zu

$$X = a \cos \varphi + \sqrt{1 - a^2} \sin \varphi$$

$$Y = \sqrt{1 - X^2}.$$

Der Punkt  $F$  habe von  $M$  den Abstand  $s$ . Dann sind die Koordinaten von  $F$

$$x = X - s \cdot \sin \varphi$$

$$y = Y - s \cdot \cos \varphi.$$

Der Weg, den der in  $F$  reflektierte Strahl im Stäbchen zurücklegt, ergibt sich schliesslich zu

$$s_1 + s_2 = y + \sqrt{1 - x^2} + s.$$

Wir integrieren zunächst über alle Flächenelemente, die auf der Geraden  $MF M'$  liegen.

$$A(\varphi) = R^2 \int_{-1}^{+1} da \int_M^{M'} e^{-\mu'(y + \sqrt{1-x^2} + s)} ds = R^2 \int_{-1}^{+1} I(a, \varphi) da.$$

$I(a, \varphi)$  gibt bei konstant gehaltenem  $\varphi$  in Funktion von  $a$  die Intensitätsverteilung innerhalb der Interferenzlinie  $\varphi$  an (bei punktförmigem Brennfleck).

$I(a, \varphi)$  ist numerisch zu bestimmen durch die Approximation

$$I(a, \varphi) = \sum_i e^{-\mu'(y_i + \sqrt{1-x_i^2} + s_i)} \Delta s.$$

$\Delta s$  wurde so klein gewählt, dass der durch den Ersatz des Integrals durch eine Summe entstehende Fehler  $< \frac{1}{2}\%$  ist. Die Massenabsorptionskoeffizienten für CuK $\alpha$ -Strahlung sind für Al zu 51,2 und für Cu zu 50,4 angenommen worden<sup>(35)</sup>. Die Werte von  $\mu R$  ergaben sich dann bei den verwendeten Stäbchen für Al zu 5,24 und für Cu zu 8,56.

$I(a, \varphi)$  ist um so kleiner, je grösser  $\mu'$  ist;  $\mu' \cdot I(a, \varphi)$  strebt mit wachsendem  $\mu'$  gegen einen bestimmten Grenzwert, der weiter unten berechnet werden soll. Um Vergleiche zu ermöglichen, ist nicht  $I(a, \varphi)$ , sondern  $\mu' I(a, \varphi)$  für verschiedene  $a$  und für die bei Al und Cu auftretenden Reflexionen in Tabelle (3) und (4) angegeben. Mit diesen Werten lassen sich nun die Funktionen  $\mu' I(a, \varphi)$  für verschiedene  $\varphi$  zeichnen (Fig. 3 und 4). Die von diesen Kurven eingeschlossenen Flächen ergeben die Werte von  $\frac{\mu'}{R^2} A(\varphi)$ , welche in Tabelle (5) und (6) zusammengestellt sind.

**Tabelle 3.**  $\mu R = 5,24$ .

$a \backslash \varphi$	38° 22'	44° 36'	64° 55'	78° 0'	82° 11'
0,99	0,774	0,731	0,741		
0,97	0,798	0,797	0,832		
0,95	0,750	0,768	0,818		
0,9	0,588	0,635	0,735	0,750	0,752
0,8	0,344	0,401	0,573	0,598	0,618
0,7	0,124	0,190	0,435		
0,6	0,039	0,085	0,340	0,434	0,452
0,5	0,013	0,029	0,232		
0,4	0,002	0,010	0,112	0,284	0,318
0,3			0,065		
0,2			0,030	0,139	0,179
0,1				0,074	
0,0			0,004	0,031	0,055
-0,2				0,004	0,009

$a \backslash \varphi$	98° 45'	111° 36'	116° 7'	136° 44'	160° 47'
0,95					0,690
0,9	0,775	0,767	0,761	0,738	0,631
0,8	0,661	0,672	0,662	0,640	0,585
0,6	0,524	0,552	0,546	0,572	0,547
0,4	0,423	0,473	0,484	0,520	0,523
0,2	0,326	0,399	0,416	0,480	0,504
0,0	0,221	0,323	0,346	0,440	0,488
-0,2	0,084	0,228	0,264	0,393	0,472
-0,4	0,017	0,095	0,151	0,332	0,450
-0,6		0,016	0,034	0,242	0,419
-0,8				0,060	0,359
-0,9					0,280

**Tabelle 4.**  $\mu R = 8,56$ .

$a \setminus \varphi$	$43^{\circ} 24'$	$50^{\circ} 33'$	$74^{\circ} 17'$	$90^{\circ} 9'$
0,99	0,840	0,855	0,868	0,864
0,97	0,793	0,818	0,860	0,866
0,95	0,715	0,750	0,811	0,821
0,9	0,530	0,600	0,702	0,725
0,8	0,300	0,395	0,563	0,612
0,7	0,075	0,231		0,532
0,6	0,017	0,080	0,375	
0,5		0,017		
0,4			0,213	0,350
0,2			0,040	0,228
0,0				0,083
-0,2				0,006

$a \setminus \varphi$	$95^{\circ} 22'$	$117^{\circ} 16'$	$137^{\circ} 2'$	$145^{\circ} 22'$
0,95	0,816	0,816		0,757
0,9	0,727	0,736	0,713	0,687
0,8	0,623	0,648	0,638	0,620
0,6	0,489	0,547	0,564	0,558
0,4	0,378	0,478	0,518	0,521
0,2	0,274	0,411	0,477	0,487
0,0	0,161	0,341	0,431	0,454
-0,2	0,023	0,252	0,385	0,419
-0,4		0,130	0,322	0,372
-0,6		0,011	0,226	0,300
-0,8			0,023	0,145
-0,9				0,014

**Tabelle 5.**

Aluminium  $\mu R = 5,24$ .

$\varphi$	$A(\varphi)$
38° 22'	0,144
44 36	0,174
64 55	0,297
78 0	0,382
82 11	0,406
98 45	0,532
111 36	0,635
116 7	0,659
136 44	0,815
160 47	0,948
180 0	1,000

**Tabelle 6.**

Kupfer  $\mu R = 8,56$ .

$\varphi$	$A(\varphi)$
43° 24'	0,133
50 33'	0,172
74 17	0,319
90 9	0,427
95 22	0,469
117 16	0,646
137 2	0,802
145 22	0,857
180 0	1,000

Im Grenzfalle grosser Werte von  $\mu R$  vereinfachen sich jedoch die Verhältnisse derart, dass es möglich ist, die angegebenen Integrale streng zu berechnen.

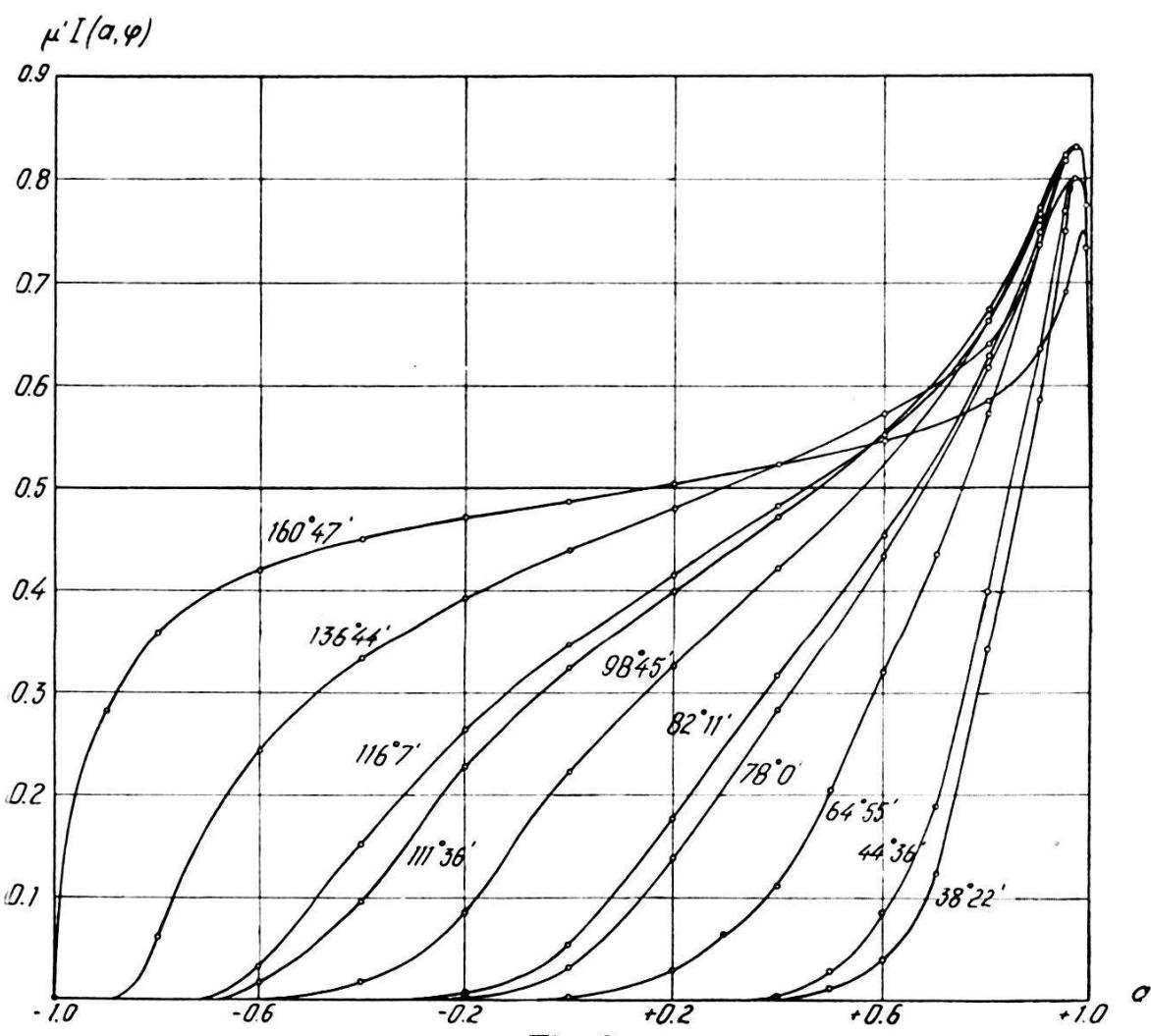


Fig. 3.

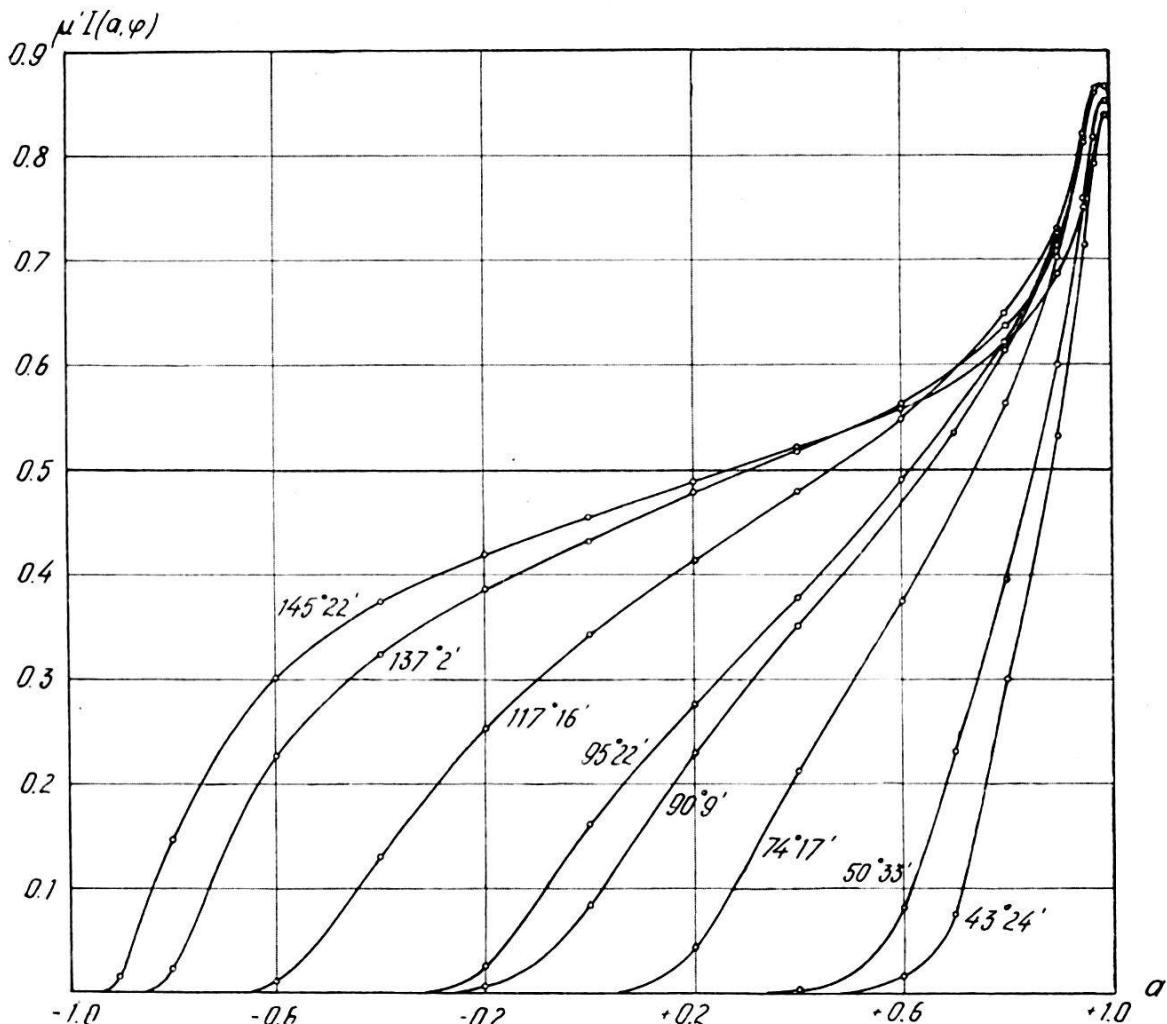


Fig. 4.

In Fig. 5 bedeutet  $POP$  die Richtung des Primärstrahles,  $OR$  die Richtung des reflektierten Strahles. Durch einen Punkt  $F$  des Flächenelementes  $df$  legen wir eine Parallele zu  $OR$ , die die Peripherie des Kreises in  $M$  und  $M'$  schneidet und von  $O$  den Abstand  $a$  hat. Der Abstand  $FM$  sei mit  $s$  bezeichnet. Man integriert zunächst über alle  $df$ , die auf der Sehne  $MM'$  liegen. Zu diesem Integral tragen wegen der grossen Absorption nur solche  $df$  bei, für welche  $s$  klein ist; dann lässt sich die Kreisperipherie durch die Tangente an den Kreis in  $M$  ersetzen und die Integration über  $s$  statt bis  $s = MM'$  bis  $s = \infty$  erstrecken. Aus  $\angle F M Q'$  ( $\alpha = \arccos a$ ,  $\angle F M Q' = \alpha$ ,  $\angle Q' F M = \pi - \varphi$ ,  $\angle M Q' F = \varphi - \alpha$ ,  $F Q' = s'$ ) folgt

$$\frac{s'}{s} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\varphi - \alpha)}$$

$$s + s' = s \left\{ 1 + \frac{\sin \alpha}{\sin (\varphi - \alpha)} \right\}.$$

Es folgt dann

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-\mu'(s+s')} ds = \int_0^\infty e^{-\mu' s} \left\{ 1 + \frac{\sin a}{\sin(\varphi - a)} \right\}$$

$$I(a) = \frac{1}{\mu'} \cdot \left\{ \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha} \right\} \quad \text{für } \cos \varphi \leq a \leq +1 . \quad (11)$$

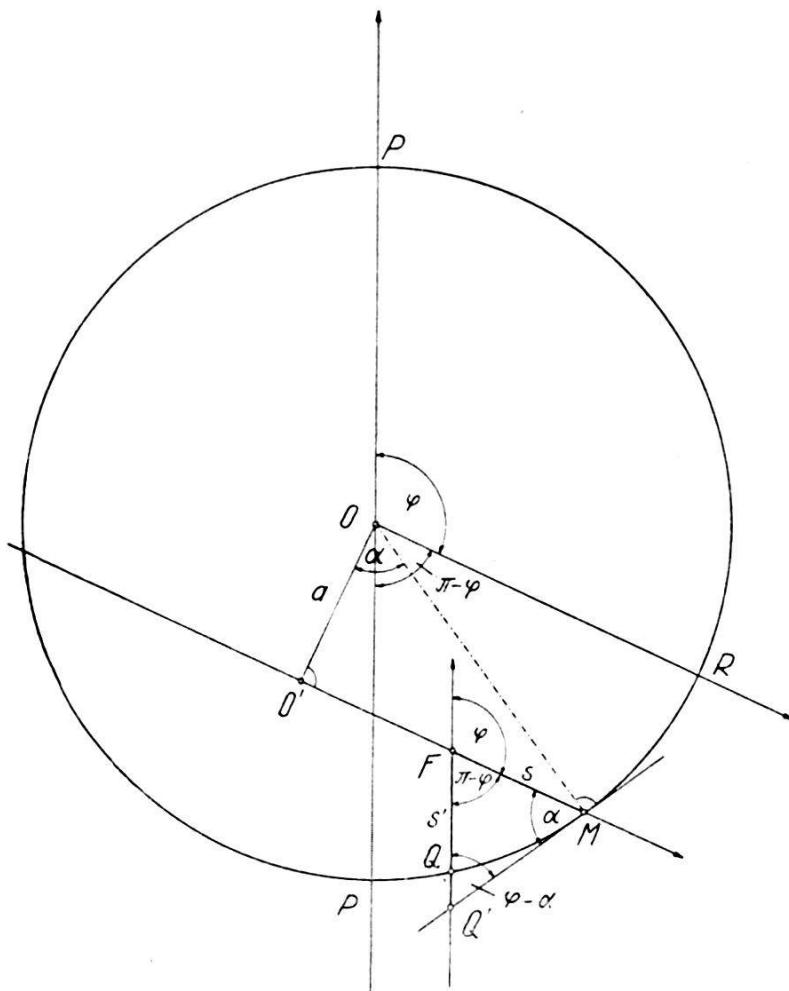


Fig. 5.

(11) gilt nur für solche Werte von  $a$ , für welche der Punkt  $M$  im den von den Strahlen getroffenen Bereich der Peripherie fällt, oder, wie man sich leicht überzeugt, nur im Intervall  $\cos \varphi \leq a \leq +1$ . Für  $a \leq \cos \varphi$  ist  $I(a) \equiv 0$ . Fig. 6 stellt die auf diese Weise berechneten Funktionen  $\mu' \cdot I(a, \varphi)$  dar für  $\varphi$  gleich 30, 45, 60, 90, 120, 150 und 180 Grad.

Man erhält schliesslich

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= R^2 \int_{\cos \varphi}^{+1} I(a) da = \frac{R^2}{\mu'} \int_{\cos \varphi}^{+1} \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha} da \\ A(\varphi) &= \frac{R^2}{\mu'} \int_0^\varphi \frac{\sin(\varphi - \alpha) \sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

Der Ausdruck (12) ist der gleiche, wie ihn CLAASSEN auf anderem Wege abgeleitet hat. CLAASSEN gibt an, dass man dieses Integral graphisch oder numerisch bestimmen müsse. Das Integral ist aber streng lösbar.

Setzt man

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha \\ dx &= -\sin \alpha d\alpha \\ \sqrt{1-x^2} &= \sin \alpha \end{aligned}$$

so wird

$$\int_0^\varphi \frac{\sin(\varphi - \alpha) \sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha} d\alpha = \int_{\cos \varphi}^{+1} \frac{x \cdot \sin \varphi - \sqrt{1-x^2} \cdot \cos \varphi}{x \cdot \sin \varphi + \sqrt{1-x^2} \cdot (1-\cos \varphi)} dx.$$

Der Integrand lässt sich auf folgende Weise umschreiben:

$$\begin{aligned} &\left( \psi = \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\frac{x \cdot \sin \varphi - \sqrt{1-x^2} \cdot \cos \varphi}{x \cdot \sin \varphi + \sqrt{1-x^2} \cdot (1-\cos \varphi)} \\ &= \frac{x^2(1-\cos \varphi) + \cos \varphi(1-\cos \varphi) - x\sqrt{1-x^2} \cdot \sin \varphi}{(1-\cos \varphi)[2x^2 - (1-\cos \varphi)]} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos^2 \psi}{2} \cdot \frac{1}{x^2 - \sin^2 \psi} - \frac{\sin \varphi}{2(1-\cos \varphi)} \left\{ \frac{x}{(x^2 - \sin^2 \psi)\sqrt{1-x^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^3}{(x^2 - \sin^2 \psi)\sqrt{1-x^2}} \right\} = \frac{1}{2} + \frac{\cos^2 \psi}{4 \sin \psi} \left\{ \frac{1}{x - \sin \psi} - \frac{1}{x + \sin \psi} \right\} \\ &\quad - \frac{\cos \psi}{2 \sin \psi} \cdot \left\{ \frac{x \cdot \cos^2 \psi}{(x^2 - \sin^2 \psi)\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu'}{R^2} \cdot A(\varphi) = & \frac{1}{2} \int_{\cos \varphi}^{+1} dx + \frac{\cos^2 \psi}{4 \sin \psi} \int_{\cos \varphi}^{+1} \frac{dx}{x - \sin \psi} - \frac{\cos^2 \psi}{4 \sin \psi} \int_{\cos \varphi}^{+1} \frac{dx}{x + \sin \psi} \\ & - \frac{\cos^3 \psi}{4 \sin \psi} \int_{\cos \varphi}^{+1} \frac{dx}{(x - \sin \psi) \sqrt{1-x^2}} - \frac{\cos^3 \psi}{4 \sin \psi} \int_{\cos \varphi}^{+1} \frac{dx}{(x + \sin \psi) \sqrt{1-x^2}} \\ & + \frac{\cos \psi}{2 \sin \psi} \int_{\cos \varphi}^{+1} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Substituiert man noch im vierten Integral  $x - \sin \psi = \frac{1}{y}$  und im fünften  $x + \sin \psi = \frac{1}{z}$ , so gelangt man zu Ausdrücken, die sich leicht integrieren lassen. Das unbestimmte Integral wird

$$\begin{aligned} & \int \frac{x \cdot \sin \varphi - \sqrt{1-x^2} \cdot \cos \varphi}{x \cdot \sin \varphi + \sqrt{1-x^2} \cdot (1-\cos \varphi)} dx \\ = & \frac{1}{2} x - \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \ln \left[ \frac{\sqrt{1-x^2} + \cos \frac{\varphi}{2}}{x + \sin \frac{\varphi}{2}} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Für  $A(\varphi)$  erhält man dann, falls man noch für  $\mu'$  seinen Wert  $\mu R$  einsetzt

$$A(\varphi) = \frac{R}{\mu} \left\{ 1 + \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \ln \left[ \frac{\cos \varphi + \sin \frac{\varphi}{2}}{\left(1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right) \left(1 + 2 \sin \frac{\varphi}{2}\right)} \right] \right\} \quad (14)$$

$$A(180^\circ) = \frac{R}{\mu}.$$

Die folgende Tabelle enthält die Werte von  $\frac{\mu}{R} \cdot A(\varphi)$  von zehn zu zehn Grad; daneben stehen die Werte von  $A(\varphi)$ , bezogen auf  $A(180^\circ) = 1$ , die von MÖLLER und REIS für den Fall  $\mu R = 100$  und  $\mu R = 1000$  angegeben worden sind.

Tabelle 7.

$\varphi$	$\frac{\mu}{R} \cdot A(\varphi)$	$A(\varphi) : A(180^\circ) \cdot \text{M. n. R.}$	$\varphi$	$\frac{\mu}{R} \cdot A(\varphi)$	$A(\varphi) : A(180^\circ) \cdot \text{M. n. R.}$
0	0,0000		100	0,4549	
10	0,0071		110	0,5365	
20	0,0201		120	0,6198	0,618
30	0,0457	0,0486	130	0,7032	
40	0,0801		140	0,7840	
50	0,1235		150	0,8594	0,852
60	0,1760	0,185	160	0,9254	
70	0,2362		170	0,9761	
80	0,3033		180	1,0000	1,000
90	0,3768	0,365			

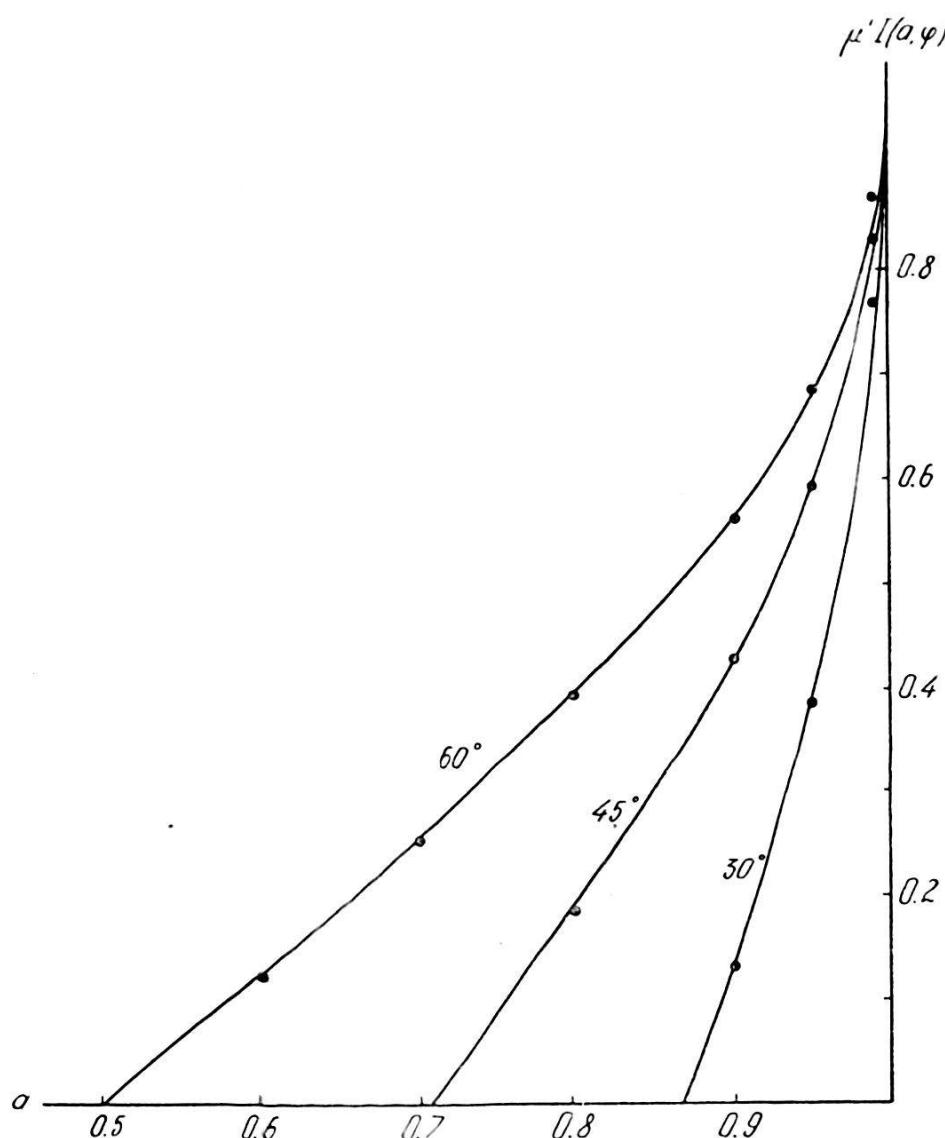


Fig. 6a.

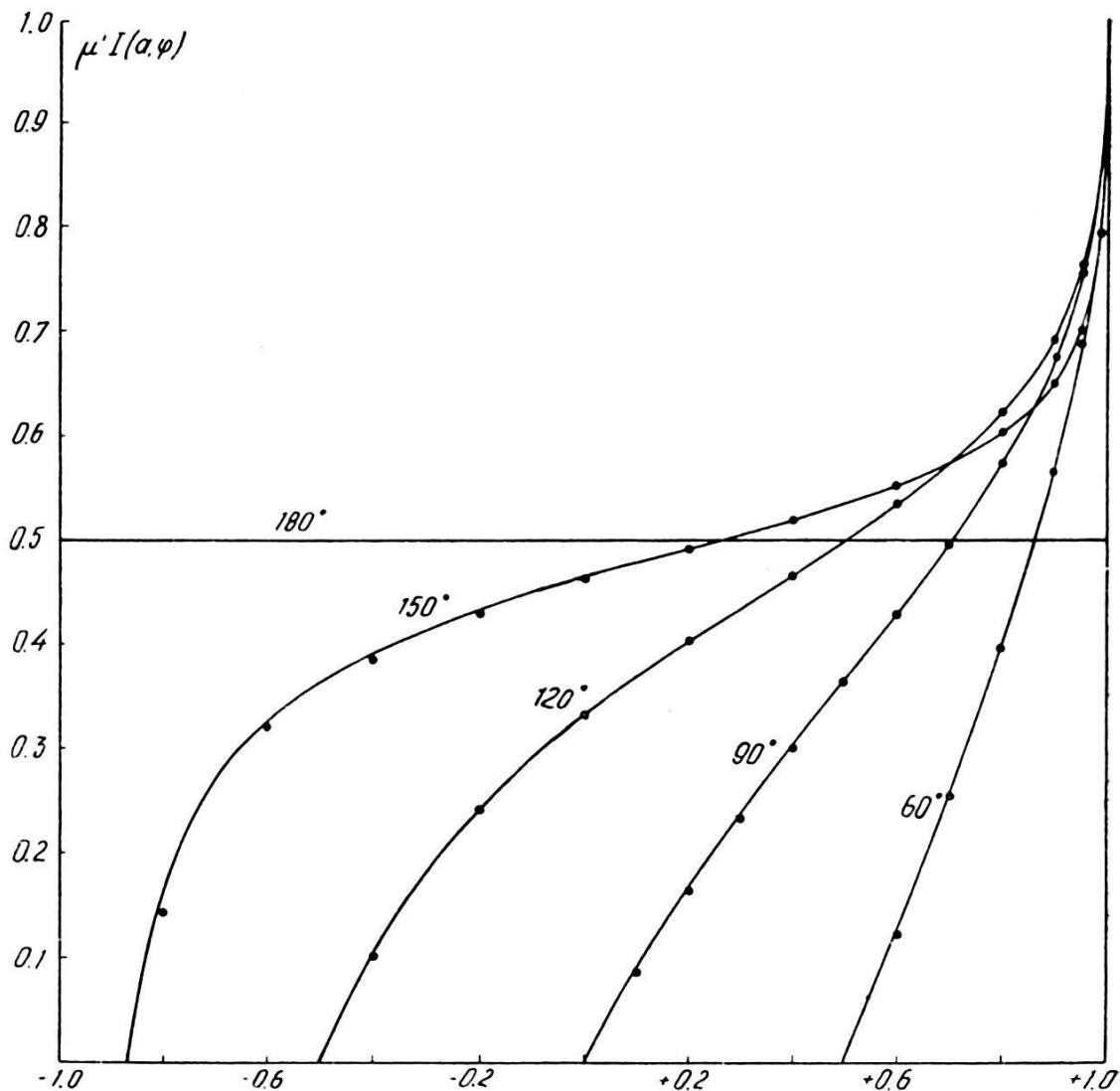


Fig. 6b.

Fig. 7 stellt die Funktion

$$1 + \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \cdot \ln \left[ \frac{\cos \varphi + \sin \frac{\varphi}{2}}{(1 + \sin \frac{\varphi}{2})(1 + 2 \sin \frac{\varphi}{2})} \right]$$

dar; daneben ist noch der Verlauf von  $\frac{\mu}{R} \cdot A(\varphi)$  für die Fälle  $\mu R = 5,24$  und  $\mu R = 8,56$  eingezeichnet. Wie man sieht, ist der Verlauf von  $A(\varphi)$  bei  $\mu R = 8,56$  schon sehr ähnlich dem Verlauf von  $A(\varphi)$  bei  $\mu R = \infty$ . Für die Werte von  $\mu R > 50$  wird die Funktion  $A(\varphi)$  praktisch mit der angegebenen Funktion (14) übereinstimmen, so dass der Gebrauch von Formel (14) in allen diesen Fällen die langwierigen numerischen Berechnungen bedeutend abkürzen kann. Für Silber, Platin und Gold ist  $A(\varphi)$  mit Hilfe dieser Formel berechnet worden.

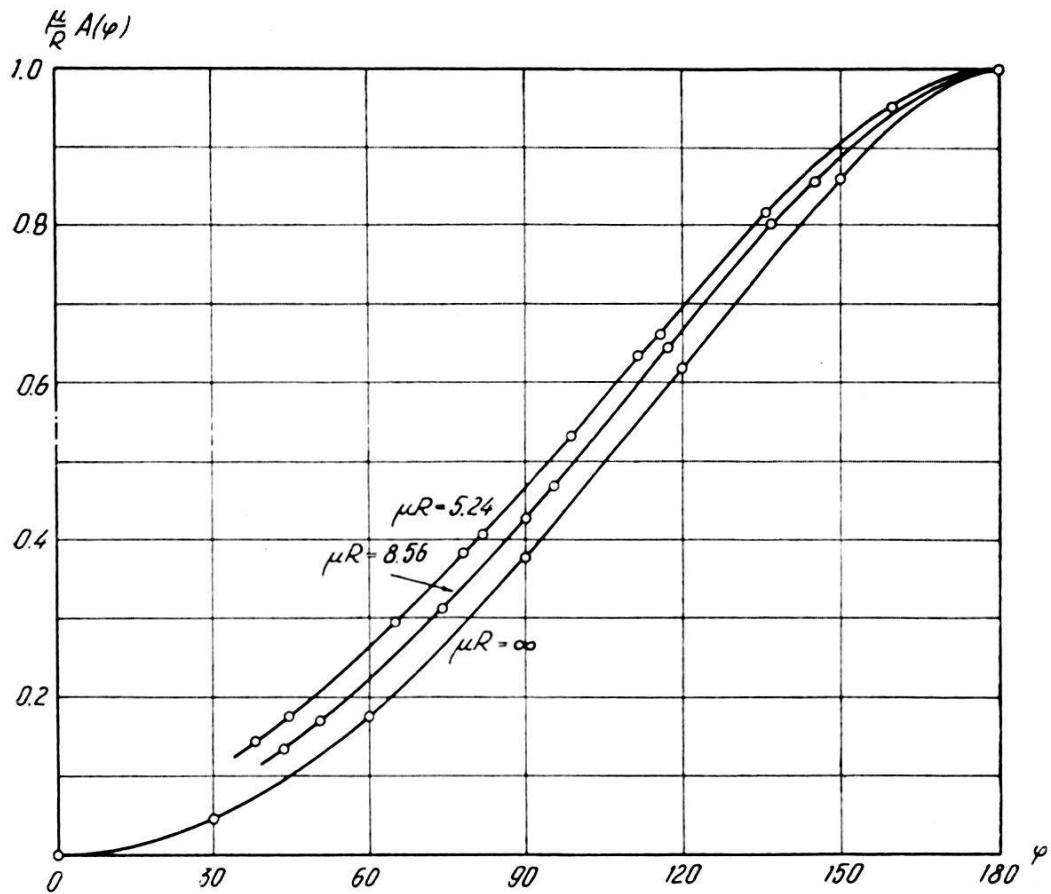


Fig. 7.

Die von GREENWOOD für seinen Fall ( $\mu R = 9$ ) erhaltenen Werte von  $A(\varphi)$  fallen mit abnehmendem  $\varphi$  viel langsamer ab, als die vom Verfasser erhaltenen Werte von  $A(\varphi)$  bei  $\mu R = 5,24$ . Es ist wohl bei seinen Berechnungen irgend ein Fehler unterlaufen, weshalb auch seine Resultate für die Streufunktion von Aluminium mit den Messungen von BEARDEN und von JAMES, BRINDLEY u. WOOD nicht übereinstimmen.

### b) Berücksichtigung der Divergenz.

Die angeführten Berechnungen sind unter der Annahme von parallelem Licht gemacht worden. In Wirklichkeit ist jedoch immer eine gewisse Divergenz vorhanden. Es soll nun die Berechnung von  $A(\varphi)$  im Falle grosser Absorption bei Berücksichtigung dieser Divergenz durchgeführt werden.

Die geometrischen Verhältnisse sind in Fig. 8 dargestellt.  $B$  sei der (zunächst als unendlich klein angenommene) Brennfleck,  $O$  der Mittelpunkt des kreisförmigen Querschnittes,  $F$  der Ort des streuenden Elementes  $df$ . Wir ziehen, wie zuvor, durch  $F$  eine parallele Gerade zu  $OR$ , die von  $O$  den Abstand  $a$  haben und die

Peripherie in den Punkten  $M$  und  $M'$  schneiden soll. Wir integrieren wieder über alle Flächenelemente, die auf dieser Geraden liegen und können dabei die Peripherie durch die Tangente in  $M$

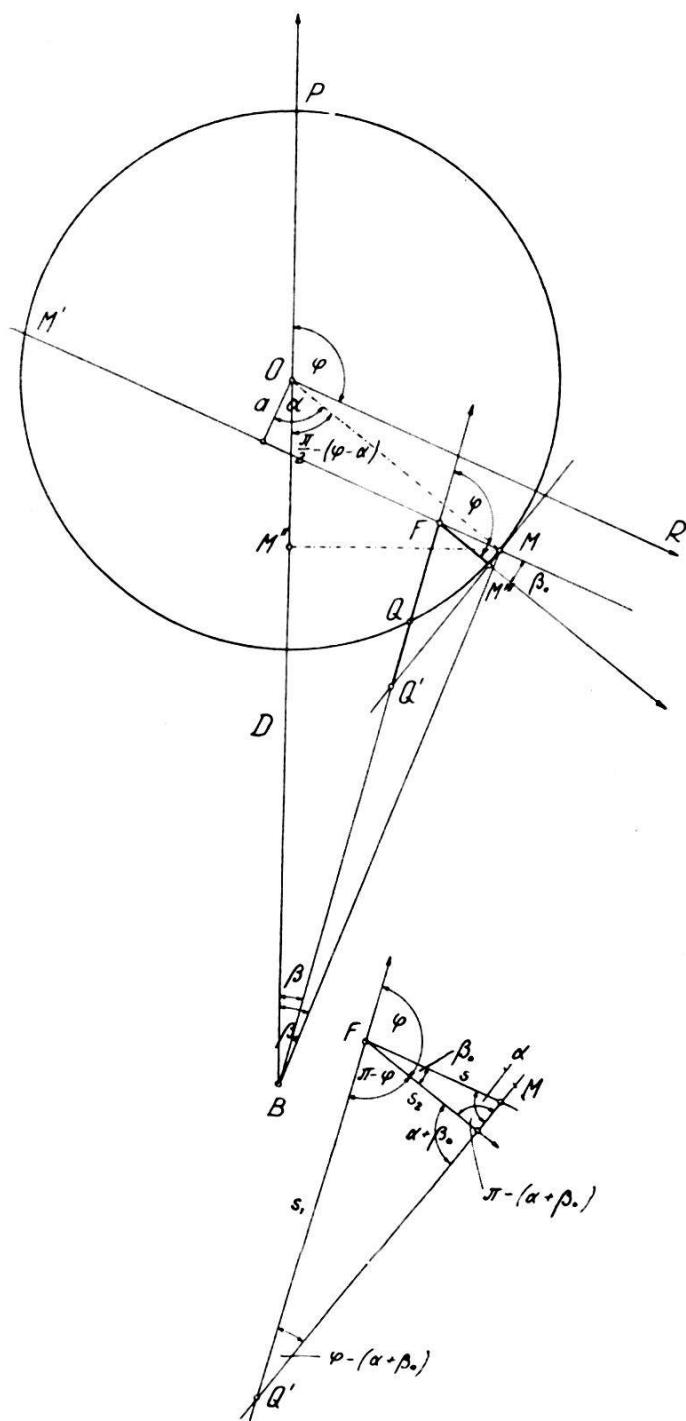


Fig. 8.

ersetzen. Der in  $df$  reflektierte Strahl wird aber nicht mehr in der Richtung  $FM$  austreten, denn er muss mit der Richtung  $BF$ , und nicht mit der Richtung  $BO$  den Winkel  $\varphi$  einschliessen. Die Strecke  $FM$  kann als sehr klein angesehen werden, wir können dann

$\angle OBF = \beta$  durch  $\angle OBM = \beta_0$  ersetzen, wobei  $\beta_0$  sich mit Hilfe des Winkels  $MOB = \frac{\pi}{2} - (\varphi - \alpha)$  berechnet zu

$$\beta_0 = \frac{MM''}{D} = \frac{R}{D} \cos(\varphi - \alpha).$$

$D$  bedeutet den Abstand  $BF - BO$ .

Der in  $F$  reflektierte Strahl ist dann zur Richtung  $FM$  ebenfalls um den Winkel  $\beta_0$  geneigt, und wir können jetzt die Wege  $s_1$  und  $s_2$  berechnen (Fig. 8a).

Aus  $\triangle FMM'''$  folgt

$$\frac{s_2}{s} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta_0)} \quad \alpha = \arccos a$$

ebenfalls aus Dreieck  $FMQ'$

$$\frac{s_1}{s} = \frac{\sin \alpha}{\sin[\varphi - (\alpha + \beta_0)]}$$

$$s_1 + s_2 = s \cdot \sin \alpha \cdot \left[ \frac{1}{\sin(\alpha + \beta_0)} + \frac{1}{\sin[\varphi - (\alpha + \beta_0)]} \right].$$

Wir integrieren über alle  $df$  auf  $MM'$ :

$$I^*(a, \varphi) = \int_0^\infty e^{-\mu'(s_1 + s_2)} ds = \int_0^\infty e^{-\mu' s \cdot \sin \alpha} \left\{ \frac{1}{\sin(a + \beta_0)} + \frac{1}{\sin[\varphi - (a + \beta_0)]} \right\} ds$$

$$\mu' \cdot I^*(a, \varphi) = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{\sin(\alpha + \beta_0) \sin[\varphi - (\alpha + \beta_0)]}{\sin[\varphi - (\alpha + \beta_0)] + \sin(\alpha + \beta_0)} \right\}.$$

Ist  $\beta_0$  klein, so kann man

$$\cos \beta_0 = 1$$

$$\sin \beta_0 = \beta_0$$

setzen, und erhält

$$\mu' \cdot I^*(a, \varphi) = \frac{\{1 + \beta_0 \cot \alpha\} \{\sin(\varphi - \alpha) - \beta_0 \cos(\varphi - \alpha)\}}{\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha - \beta_0 \cos(\varphi - \alpha) + \beta_0 \cos \alpha}.$$

$I^*(a, \varphi)$  in Funktion von  $a$  gibt jetzt nicht mehr die Intensitätsverteilung innerhalb einer Debye-Scherrer-Linie; für die gesamte Intensität ist dies aber ebenso belanglos, wie die endliche Ausdehnung des Brennfleckes.

$D$  betrug bei den Versuchen ca. 12 cm,  $R$  0,09 cm. Die Berechnung mit Berücksichtigung der Divergenz ist nun für die Werte  $D = 12$  cm,  $R = 0,09$  cm für die Winkel 30, 45, 60, 90, 120 und

150 Grad durchgeführt worden; die erhaltenen Werte sind in Fig. 6 als schwarze Kreise eingetragen. Wie man sieht, sind die Abweichungen, die durch die Divergenz verursacht werden, sehr klein, so dass die Vernachlässigung der Divergenz in unserem Falle berechtigt ist.

c) *Absorptionseinfluss in Pulvern.*

In einem Kristallpulver sind die einzelnen Teilchen durch Zwischenräume getrennt. Die Absorption ist dann kleiner als in kompaktem Metall. Dies wird dadurch berücksichtigt, dass man als linearen Absorptionskoeffizienten nicht den Absorptionskoeffizienten des Metalles, sondern  $\bar{\mu} = \mu \cdot \frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$  in die Rechnung

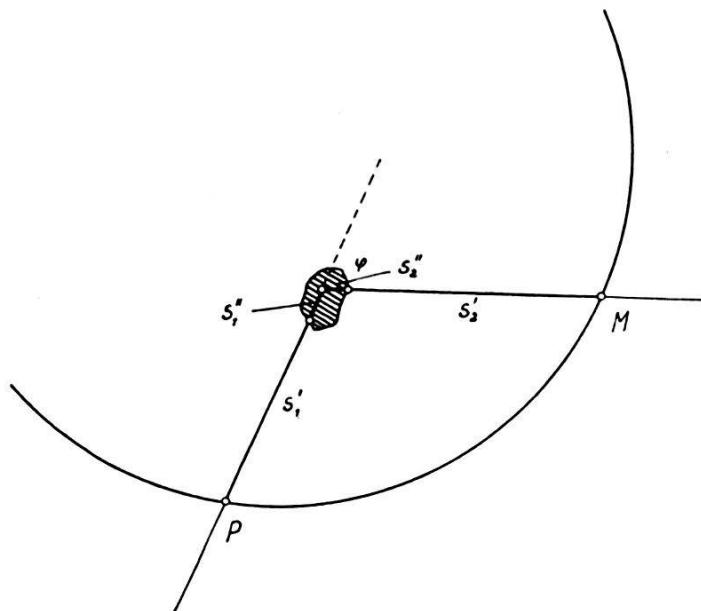


Fig. 9.

einführt. ( $\varrho$ : Dichte des Metalles,  $\bar{\varrho}$  mittlere Dichte des Metallpulvers inkl. Zwischenräume.) Die Anzahl der streuenden Teilchen  $n$  pro  $\text{cm}^3$  ist dann ebenfalls im Verhältnis  $\frac{\bar{\varrho}}{\varrho}$  kleiner. Den auf diese Weise berechneten Absorptionsfaktor wollen wir mit  $\bar{A}(\varphi)$  bezeichnen.

Die Volumenelemente  $dV$  müssen so klein gewählt werden, dass sie an allen Stellen von gleicher Intensität getroffen werden. Damit aber die oben gegebene Berechnungsart richtig ist, müssen sie zugleich viele Pulverteilchen enthalten. Ist die Absorption nun so gross, dass sie sich schon beim Durchgang durch ein einzelnes Pulverkorn bemerkbar macht, so muss  $dV$  auch kleiner als ein Pulverteilchen sein. Die Verhältnisse für diesen Fall sind in Fig. 9 dargestellt.

Statt

$$A(\varphi) = \iiint e^{-\bar{\mu}(s_1+s_2)} dV$$

hat man nun zu setzen

$$A(\varphi) = \iiint e^{-\bar{\mu}(s_1'+s_2') - \mu(s_1''+s_2'')} dV,$$

was auch folgendermassen geschrieben werden kann

$$A(\varphi) = \iiint e^{-\bar{\mu}(s_1'+s_1''+s_2'+s_2'')} \cdot e^{-(\mu-\bar{\mu})(s_1''-s_2'')} dV.$$

Der Unterschied gegen früher äussert sich im Faktor

$$e^{-(\mu-\bar{\mu})(s_1''+s_2'')}.$$

Ist das Produkt aus Dimension  $D$  der Teilchen und  $(\mu - \bar{\mu})$  klein, so kann dieser Faktor gleich 1 gesetzt werden. Im anderen Falle wird er kleiner als 1 sein; er hängt von Grösse und Lage der Teilchen ab. Dann wird auch

$$A(\varphi) = a \cdot \bar{A}(\varphi), \quad \text{wobei } a \leq 1.$$

Man kann nun folgende Fälle unterscheiden:

1. Einzelkristalle,  $(\mu - \bar{\mu})$ .  $D$  klein . . . . .  $a = 1$ .
2. Einzelkristalle,  $(\mu - \bar{\mu})$ .  $D$  gross . . . . .  $a < 1$ .

verschieden für die verschiedenen Reflexionen.  
Hängt von Habitus ab.

3. Kristalle klein, enthalten in Teilchen, für welche  $(\mu - \bar{\mu})$ .  $D$  gross

a) Kristalle in Teilchen unregelmässig angeordnet . . . .  $a < 1$   
gleich für die verschiedenen Reflexionen.

b) Kristalle im Teilchen gerichtet . . . .  $a < 1$   
verschieden für die verschiedenen Reflexionen.  
Hängt von Lage der reflektierenden Flächen  
in bezug auf die äussere Begrenzung ab.

Bei einem Präparat aus zwei Pulvern wird zwar  $\bar{A}(\varphi)$  für beide Substanzen gleich sein,  $a$  im allgemeinen aber nicht. Vielleicht ist dies der Grund, warum BRENTANO für  $F_{200}$ <sup>(6)</sup> von Gold einen um über 25% zu kleinen Wert erhalten hat; er verwendete ein Gemisch von Nickeloxyd und Goldpulver, das aus  $10^{-6}$  dicker Folie hergestellt war. Die Kristalle sind dann sehr klein, die Pulverteilchen jedoch nicht (Fall 3a).

Bei der Messung der Winkelabhängigkeit von  $F$  sind nur solche Präparate brauchbar, bei denen entweder Fall 1 oder Fall 3 vorliegt. Bei Absolutbestimmungen muss Fall 1 vorliegen.

Die Integralintensität berechnet sich zu

$$J = \int J \cdot d\varphi = h J_{Pr} \cdot \int A(\varphi) \cdot p(\varrho_0, \varphi) d\varphi.$$

Da nun  $p(\varrho_0, \varphi)$  nur in einem kleinen Bereich um den durch die Braggsche Beziehung gegebenen Winkel  $\varphi_0$  von Null verschieden ist, und da  $A(\varphi)$  sich langsam und meistens linear ändert, so kann man schreiben

$$J = h \cdot A(\varphi_0) \cdot J_{Pr} \cdot \int p(\varrho_0, \varphi) d\varphi.$$

$\int p(\varrho_0, \varphi) d\varphi$  ist aber nach Definition der Faktor von  $dV$  in Formel (9).

Somit erhalten wir als Grundlage für die Auswertung der Messergebnisse

---


$$J_{h_1 h_2 h_3} = J_{Pr} \cdot \text{const } n^2 \cdot (F_0 e^{-M})^2 \cdot p \cdot A(\varphi) \cdot \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (15)$$

### Bestimmung der Absolutwerte von $F$ .

Bei der vorliegenden Untersuchung wurde auch versucht, für Cu und Au den Absolutwert von  $F$  für eine Fläche zu bestimmen, denn dann lässt sich die ganze Streufunktion in absolutem Massen angeben. Zu diesem Zwecke wurden Aufnahmen hergestellt an Gemischen von Al- und Cu-, bzw. Cu- und Au-Pulver (Gewichtsverhältnis  $G_1 : G_2$ ). Aufnahmen an einem Gemisch aus Al- und Au-Pulver können nicht verwendet werden, da wegen der nur kleinen Differenz in den Gitterkonstanten die Linien beider Metalle auf die gleichen Stellen fallen und sich nicht trennen lassen. Die Linien Al (220), Cu (220) und Al (311) bzw. Cu (220), Au (311) und Cu (311) fallen mit keiner anderen Linie zusammen. Man bestimmt ihre Integralintensitäten  $J$  und berechnet  $J' = \frac{J}{p}$ . Dann kann man z. B. aus  $J'$  (Al 220) und  $J'$  (Al 311),  $J'$  (Al) für den gleichen Wert von  $\frac{\sin \Theta}{\lambda}$  berechnen, wie er der Fläche Cu (220) zukommt (durch lineare Interpolation). Analog für Cu und Au.

Nach (9) besteht nun für einen bestimmten Wert von  $\frac{\sin \Theta}{\lambda}$  die Beziehung

$$\frac{J_2'}{J_1'} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot \frac{(F_2 e^{-M_2})^2}{(F_1 e^{-M_1})^2} \cdot \frac{dV_2}{dV_1}.$$

Der Absorptionsfaktor ist für beide Stoffe der gleiche, falls das Pulver so fein ist, dass man die Absorption in einem einzelnen Pulverkorn vernachlässigen kann.

Die Gitter der in Frage kommenden Metalle sind sämtlich flächenzentriert. Dann gilt

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1^3}{d_2^3}.$$

Ferner ist, falls  $\gamma$  das spezifische Gewicht bedeutet:

$$\frac{dV_2}{dV_1} = \frac{G_2}{\gamma_2} : \frac{G_1}{\gamma_1}$$
$$\frac{J_2'}{J_1'} = \left( \frac{d_1^3}{d_2^3} \right)^2 \cdot \frac{(F_2 e^{-M_2})^2}{(F_1 e^{-M_1})^2} \cdot \frac{G_2 \gamma_1}{G_1 \gamma_2}.$$

Kennt man nun den Wert von  $F_1 e^{-M_1}$ , so berechnet sich  $F_2 e^{-M_2}$  zu

$$F_2 e^{-M_2} = F_1 e^{-M_1} \cdot \sqrt{\frac{J_2'}{J_1'}} \cdot \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^3 \cdot \sqrt{\frac{G_1 \gamma_2}{G_2 \gamma_1}}. \quad (16)$$

Der Wert  $F$  für Aluminium ist aus den Angaben von JAMES, BRINDLEY u. WOOD bestimmt worden.

### Die Apparatur.

Als Röntgenstrahlenquelle diente eine Haddingröhre aus Metall, deren Antikathode mit Wasser und deren Kathode mit Petroleum gekühlt wurden. Die von der Cu-antikathode ausgehende  $\text{CuK}\alpha$ -Strahlung ist unpolarisiert<sup>(36)</sup>. Die angelegte Spannung betrug 45 KV, die Stromstärke 7 bis 8 mA. Die Expositionsduer war bei Verwendung von beidseitig begossenem Agfa-Laue-Film für Aluminium, Kupfer und Silber acht Minuten, bei Platin und Gold 12 Minuten.

Der Aufbau der verwendeten Kamera ist aus Fig. 10 und Fig. 11 ersichtlich. Die Kamera ist in Messing ausgeführt. Der Primärstrahl tritt durch eine rechteckige Blende in die Kamera. Vor der Blende ist ein Filter aus Nickelfolie (Dicke 0,014 mm) angebracht, um die  $\text{CuK}\beta$ -Strahlung und die langwelligeren Strahlen des Bremspektrums zu unterdrücken. Eine viereckige Blende wurde gewählt, um die bei der Berechnung des Absorptionseinflusses vorausgesetzten Verhältnisse zu verwirklichen. Die Blende (Fig. 12) besteht aus einem Messingrörchen, in dem zwei Scheibchen mit Öffnungen angebracht sind. Die Öffnungen sind recht-

eckig und haben eine Grösse von  $1,5 \times 2,0$  mm. Hinter der zweiten Scheibe ist die Blende verbreitert. Dies soll dazu dienen, um die in der Blende entstehende Streustrahlung auf einen engen Strahlen-

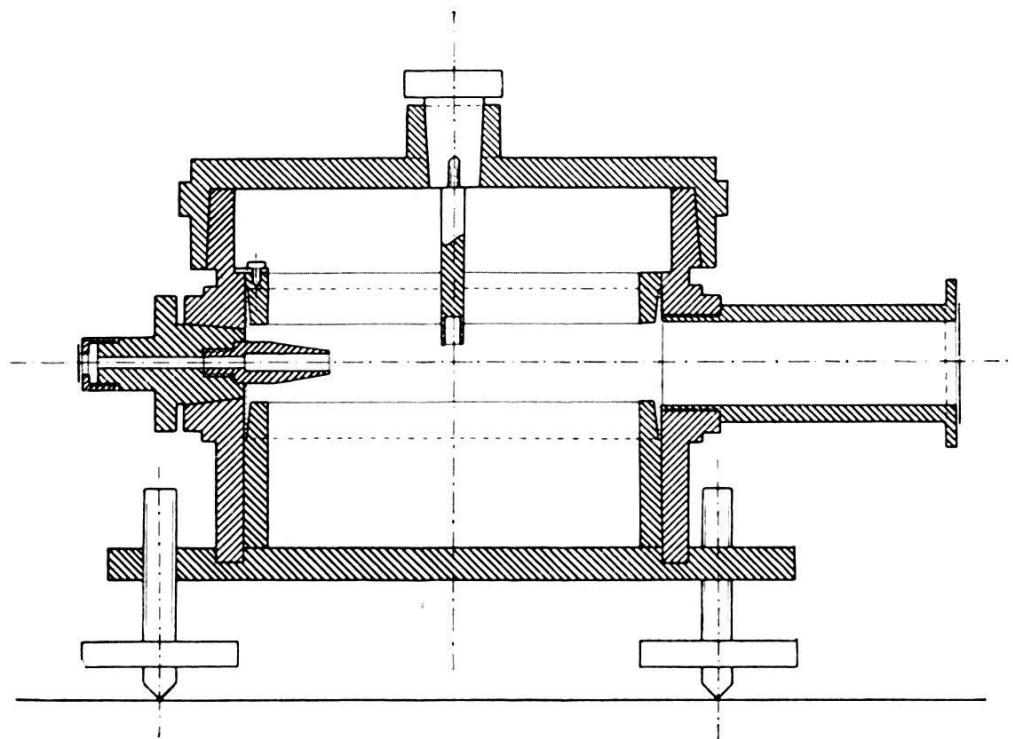


Fig. 10.

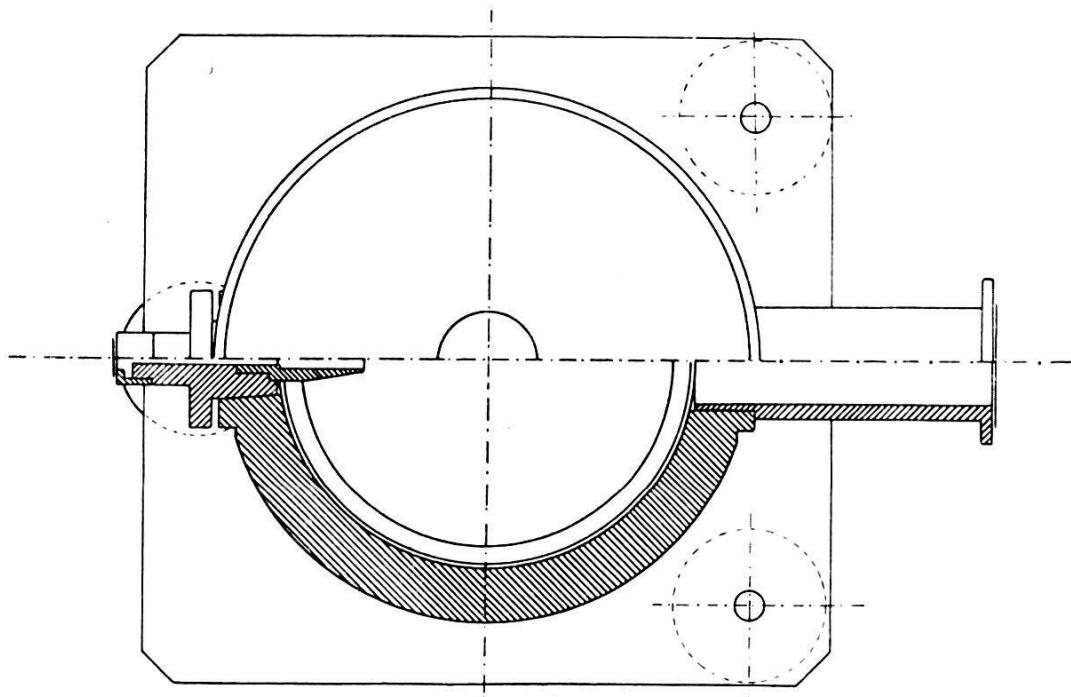


Fig. 11.

kegel zu begrenzen. Die Kamera selbst besitzt einen Durchmesser von 80 mm; er wurde deshalb grösser gewählt, damit der Radius des Präparatstäbchens im Vergleich zum Kameraradius als klein

betrachtet, und die Entfernung streuendes Volumenelement-Film gleich dem Kameraradius gesetzt werden kann. Der Deckel (*A*), der Stäbchenhalter (*B*) und die Blende sind mit Schliffen versehen, so dass die Kamera auch als Vakuumkamera dienen kann. Grosse

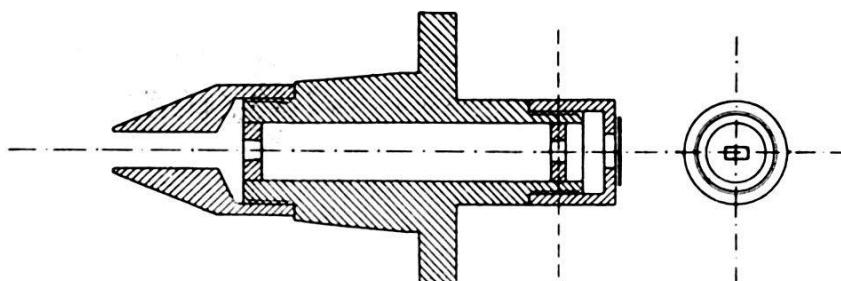


Fig. 12.

Sorgfalt wurde verwendet auf genaue Zentrierung des Stäbchenhalters. Es wurde auch eine neue Befestigungsart für den Film gewählt, da bei der gewöhnlichen Befestigung durch Federn der Film leicht beschädigt wird. Statt dessen ist in der Kamera ein Zylinder (Fig. 13 C) aufgestellt, der der Wand dicht anliegt. Oben ist der Zylinder konisch abgedreht, so dass zwischen ihm und der

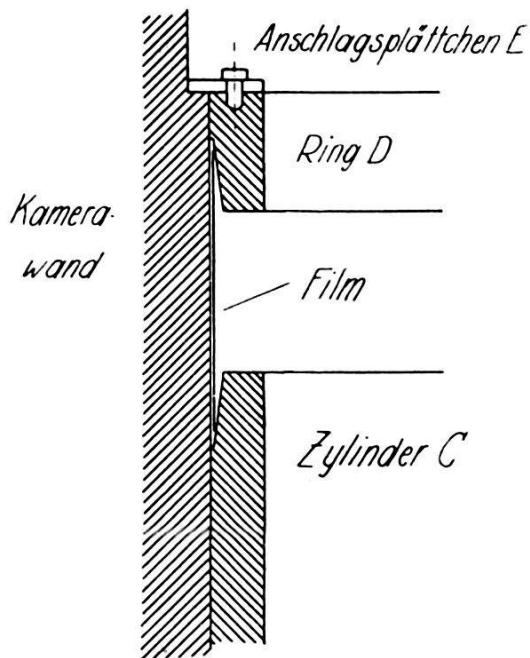


Fig. 13.

Wand eine Rille entsteht. In diese Rille wird der Film hineingestellt. Ein analog abgedrehter Ring (*D*) mit drei Anschlagsplättchen (*E*) hält den Film von oben fest. Der Primärstrahl verlässt die Kamera durch ein mit schwarzem Papier abgeschlossenes Austrittsrohr.

Das Kupferpulver wurde durch Fällung mit Zink aus Kupfersulfatlösung gewonnen. Teilchengröße 2—3  $\mu$ ; die einzelnen Kristallblöcke werden wohl kleiner sein. Die Teilchengröße bei Silber betrug 3  $\mu$ . Für Aufnahmen an Platin wurde Platinmoor verwendet. Das Goldpulver war aus sehr dünner Folie hergestellt. In den beiden letzteren Fällen war es möglich, die mittlere Kristallgröße zu bestimmen; und zwar durch Messung der Halbwertsbreite

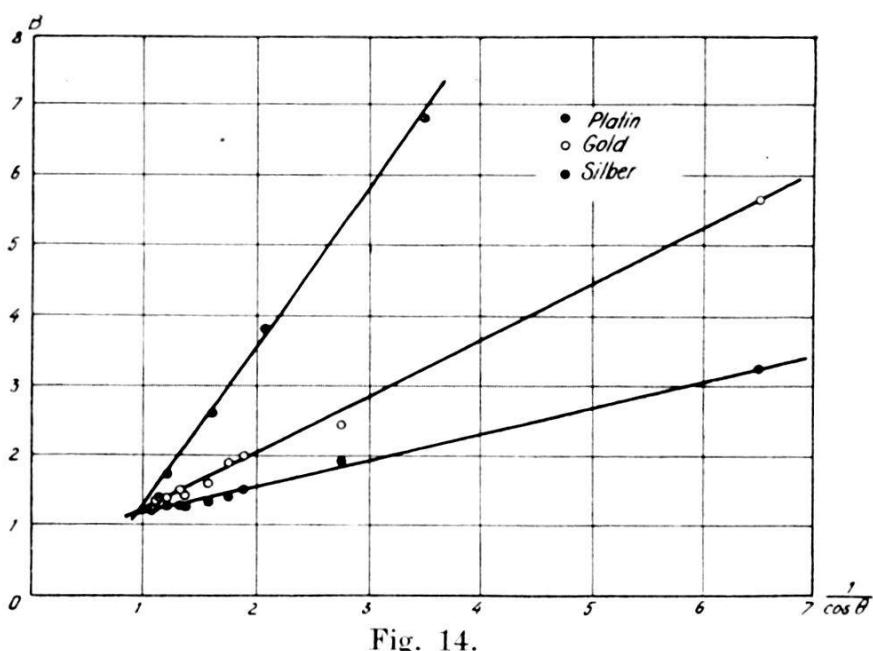


Fig. 14.

der Interferenzlinien. In Fig. 14 sind die Halbwertsbreiten (in cm Film bei 14facher Vergrösserung) für Silber, Gold und Platin aufgetragen in Funktion von  $\frac{1}{\cos \Theta}$ . Der Verlauf der so erhaltenen Kurven ist gerade. Nun besteht nach SCHERRER (37) zwischen der Halbwertsbreite  $B$  und der Kantenlänge  $W$  der würzelförmig gedachten Teilchen (unter Voraussetzung parallelen Lichtes und bei fehlender Absorption) folgende Beziehung:

$$B = B_0 + 2 \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{W} \cdot \frac{1}{\cos \Theta}. \quad (17)$$

Diese Beziehung wird durch eine Gerade dargestellt, deren Neigung

$$2 \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{W}$$

ist. Nun ist in Wirklichkeit das Licht ein wenig divergent,

und auch das Material ist stark absorbierend, was eine neue Winkelveränderlichkeit von  $B$  verursacht. Die Aufnahmen an Silber, Gold und Platin sind jedoch unter gleichen Verhältnissen (gleiche Divergenz) hergestellt worden. Auch die Absorptionsverhältnisse sind, wie schon oben gezeigt, für alle drei Substanzen gleich. Nimmt man nun an, dass das Silber keine Linienvbreiterung infolge verkleinerten Auflösungsvermögens aufweist, so stellt die Neigung der zu Silber gehörenden Geraden den Absorptions- und Divergenzeinfluss dar, der sich nun bei Gold und bei Platin berücksichtigen lässt. Man subtrahiert die Neigung der Geraden von Silber von den Neigungen der Geraden von Gold und Platin und kann nun aus diesen „reduzierten Neigungen“ mit Formel (17) den mittleren Wert der Teilchengröße von Gold und Platin bestimmen. Er ergab sich auf diese Weise bei Gold zu  $2 \cdot 10^{-6}$ , bei Pt zu  $7 \cdot 10^{-7}$  cm.

Die Pulverstäbchen wurden durch Pressen durch Glaskapillaren hergestellt, bei Cu und Ag ohne Hinzufügung von Bindemittel, bei Al, Pt und Au mit Beimischung von stark mit Äther verdünntem Kolloidum. Aussen wurden die Stäbchen mit einer feinen Kolloidumhaut umgeben. Der Durchmesser wurde unter dem Mikroskop einer Teilmaschine gemessen und erwies sich als genügend konstant.

Zur Messung der Intensitäten wurden die Filme mit einem Moll'schen Registriermikrophotometer längs des Äquators ausphotometriert, die Platinaufnahmen im Verhältnis 1:7, alle übrigen im Verhältnis 1:14. Um die Schwankungen infolge des photographischen Kornes zu vermindern, wurden immer je zwei Filme genau aufeinandergelegt und miteinander photometriert. Auf der Registrieraufnahme wurden zugleich Schwärzungsmarken angebracht, auf Grund deren man den Zusammenhang zwischen Ausschlag des Galvanometers und der Schwärzung bestimmen kann. Somit war es möglich, die Registrierkurve auf Schwärzungskurve umzurechnen.

Gemessen wurde im Äquator, wo die Strahlen senkrecht auf den Film eingefallen, also gleich stark absorbiert werden und bei gleicher Intensität gleiche Schwärzung erzeugen. Fallen nämlich die Strahlen verschieden schief auf den Film, so verursachen sie bei gleicher Intensität verschiedene Schwärzungen (38), ein Umstand, der leider bei vielen Untersuchungen unberücksichtigt gelassen wird.

Die Schwärzungen waren (beim doppeltbegossenen Film) überall kleiner als 0,6, so dass man Proportionalität zwischen Schwärzung und Intensität annehmen darf (39, 40, 41).

Der Intensitätsverlauf in der Umgebung einer Interferenzlinie ist in Fig. 15 schematisch wiedergegeben. Die Linie macht sich als Zacke über dem allgemeinen Verlauf bemerkbar. Der Flächeninhalt dieser Zacke ist proportional der Integralintensität dieser Linie.

Bei den Platinaufnahmen wirkte die Pt-Eigenstrahlung störend, indem sie eine stärkere Hintergrundschwärzung erzeugte. Diese Eigenstrahlung wird angeregt durch den kurzweligen Teil des Bremspektrums, der sich durch Filterung nicht unterdrücken lässt. Es wurde deshalb versucht, Aufnahmen mit monochromatischer Strahlung herzustellen. Die CuK $\alpha$ -Strahlung wurde durch

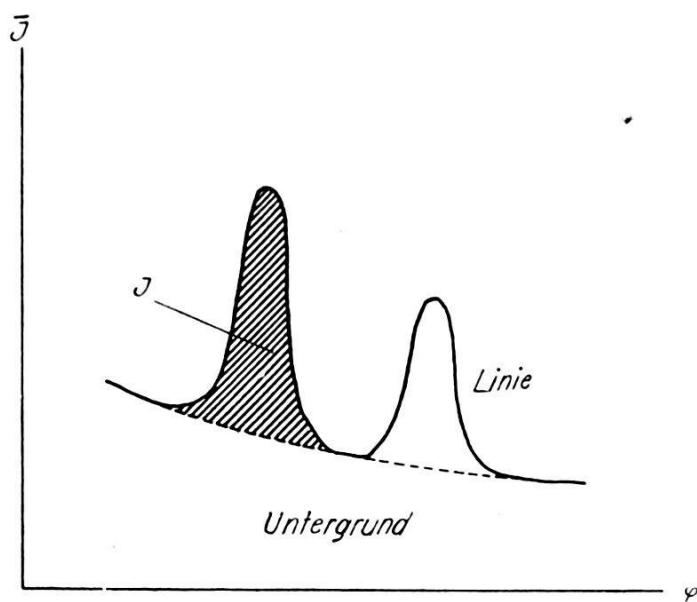


Fig. 15.

Reflexion an einem Kristall aus der Primärstrahlung isoliert. Die zwei Forderungen, die man an einen Monochromator stellen muss, sind erstens grosse Intensität und zweitens leichte Einstellbarkeit. In Fig. 16—19 ist ein Monochromator dargestellt, wie er für die vorliegende Untersuchung gebaut wurde. Er lässt sich für beliebige Wellenlängen einstellen. Als Kristall wurde Zucker verwendet, da Zucker eine grosse Intensität liefert. Der ganze Apparat ist in möglichst kleinen Dimensionen gehalten, damit der Abstand Brennfleck-Präparat nicht zu sehr vergrössert wird. Der Apparat ist direkt an der Kamerablende befestigt. (A) ist das im Träger (B) drehbare Kristalltischchen mit dem Kristallhalter (C). Die Drehachse des Kristalltischchens steht senkrecht zur Blendenachse. Das Tischchen besteht aus zwei Teilen, die durch eine auf der Rückseite angebrachte breite Stahlfeder miteinander verbunden sind. Der Kristall ist an der oberen Platte befestigt.

Durch Verstellen der Feder (*D*) lässt sich die gegenseitige Neigung der beiden Teile so lange verändern, bis die reflektierende Fläche parallel zur Drehachse steht. Die Kontrolle darauf erfolgt optisch: ein durch die Blende geschickter Lichtstrahl muss sich in diesem

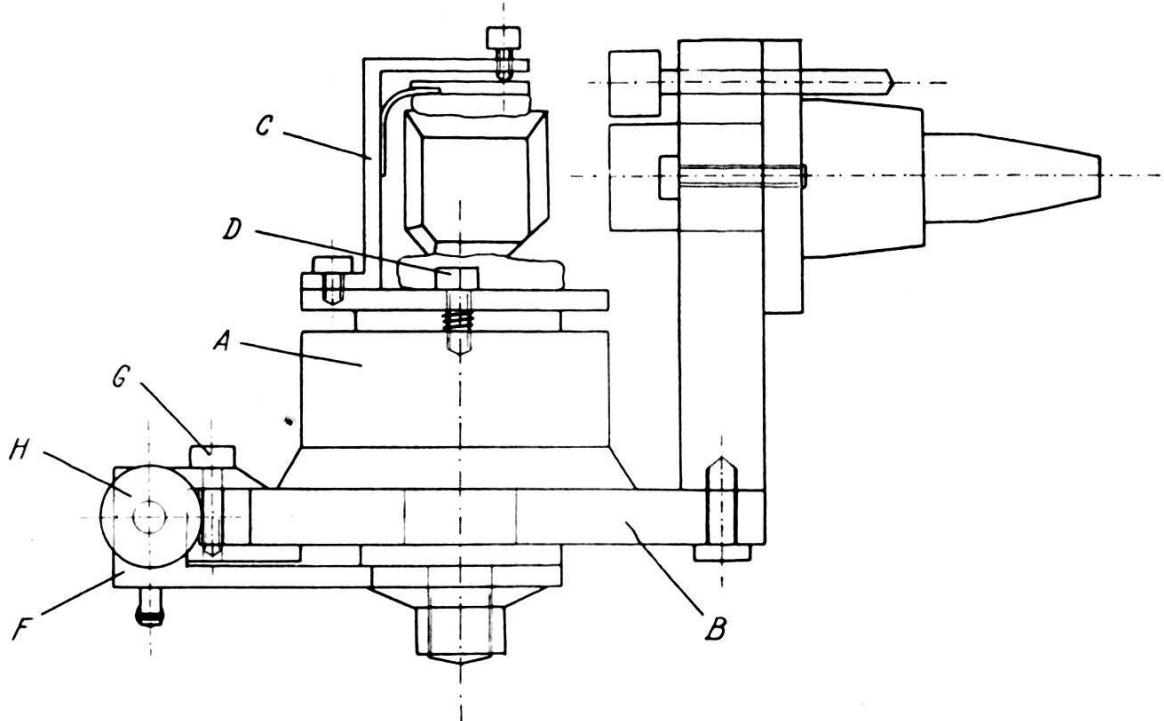


Fig. 16.

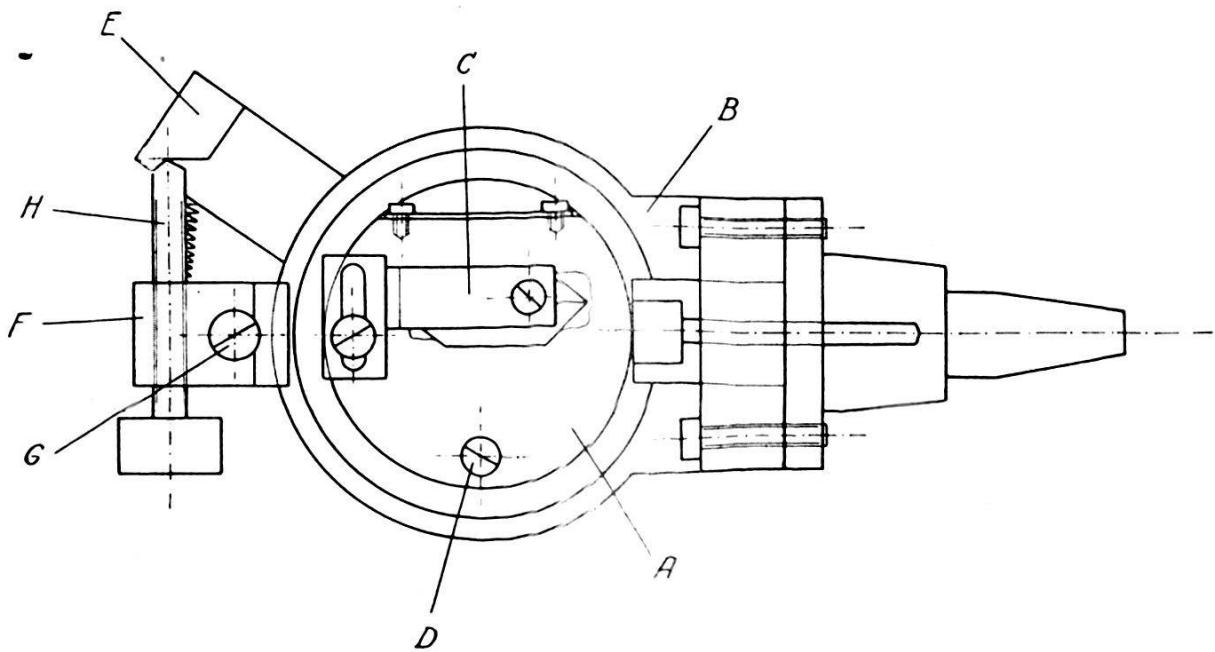


Fig. 17.

Fall an der Kristallfläche durch die Blende zurückreflektieren lassen. Der Arm (*E*) ist mit dem Kristalltisch fest verbunden, der Arm (*F*) ist frei und kann mittels Schraube (*G*) am Träger

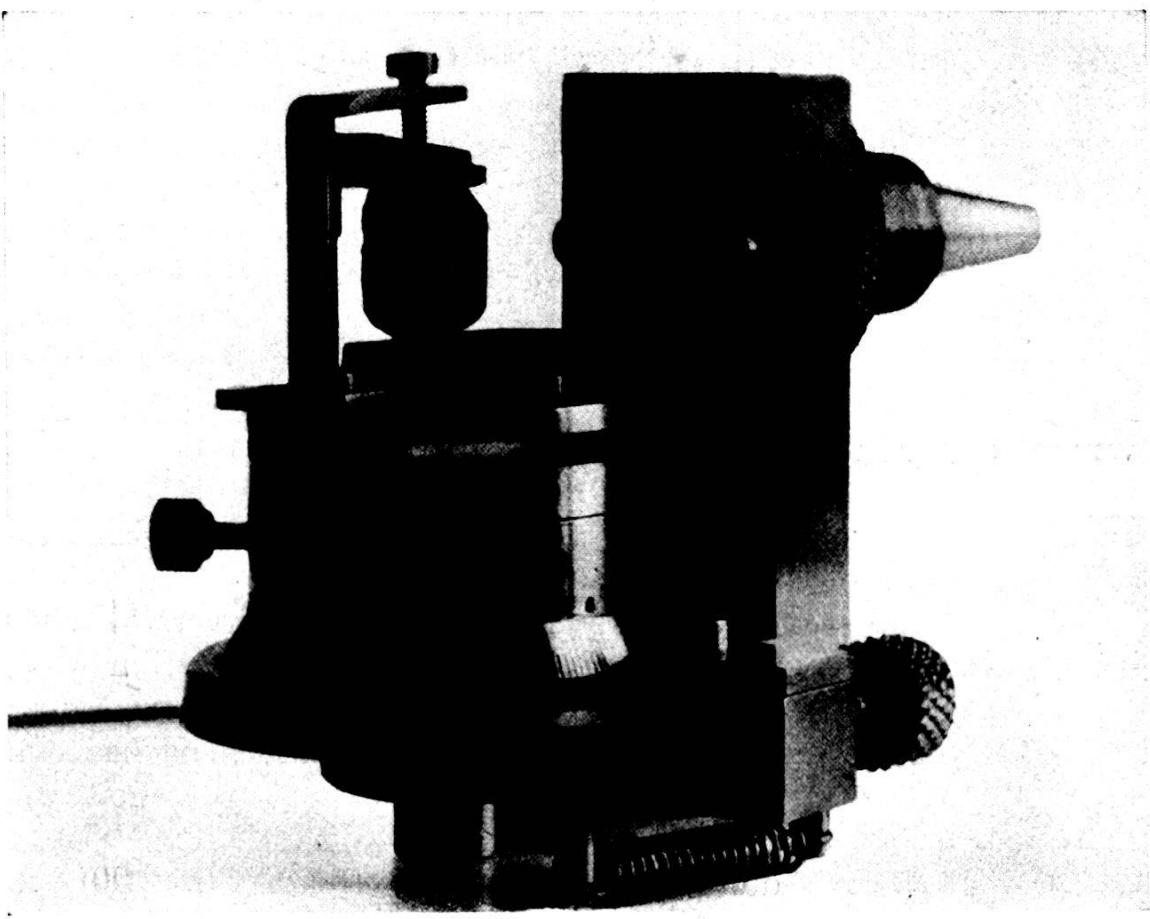


Fig. 18.

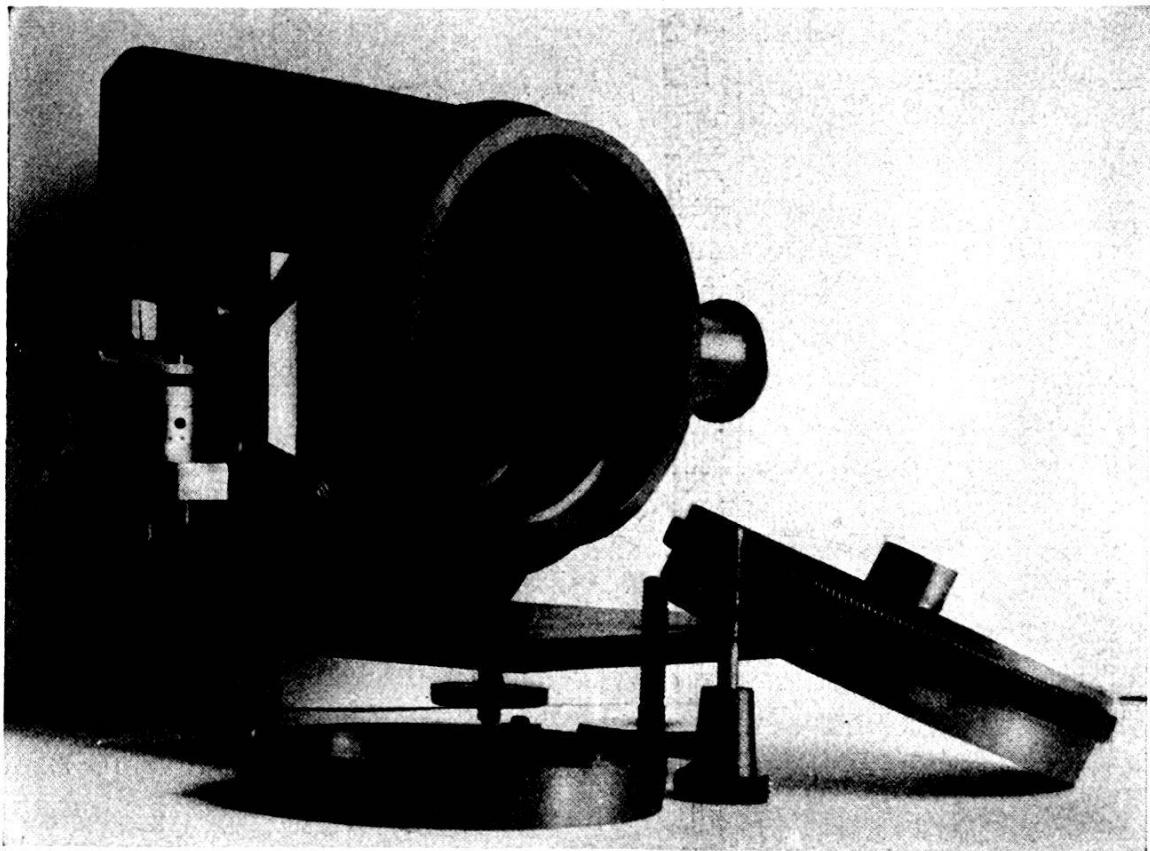


Fig. 19.

festgeklemmt werden. Arm (*F*) trägt eine lange Schraube (*H*), die durch eine Spiralfeder gegen Arm (*E*) gedrückt wird; durch Verstellen dieser Schraube erfolgt Feineinstellung des Kristalltischchens. Die Lage desselben kann an einer  $2^\circ$ -Teilung auf ca.  $\frac{1}{3}^\circ$  genau abgelesen werden.

Zur Einstellung des Reflexionswinkels wird ein Röntgenstrahl durch die Blende geschickt und der Kristalltisch so lange verdreht, bis Reflexion eintritt. Dann wird die Blende in die Kamera eingesetzt und nun die Kamera mit Kristall so lange verstellt, bis die Röntgenstrahlen auf den Kristall unter dem richtigen Winkel einfallen und in die Kamera reflektiert werden. Diese Einstellungen erfolgen visuell; der reflektierte Strahl lässt sich auch nach seinem Durchgang durch die Kamera mit einem Fluoreszenzschirm gut sichtbar machen.

Damit die Peripherie eines Querschnittes des Pulverstäbchens in allen Punkten von Strahlen gleicher Intensität getroffen wird, muss die Drehachse senkrecht zur Kameraachse gestellt werden; dann fällt die „Spektrallinie“ senkrecht zur Stäbchenachse ein. Es ist dann bequem, die Kameraachse horizontal zu stellen, wie man aus Fig. 19 ersieht.

Die Reflexion der CuK $\alpha$ -Strahlung erfolgte an (100) in dritter Ordnung. Der Abstand der Netzebenen (100) beträgt 10,57 Å (42). Für den Glanzwinkel findet man somit den Wert  $12^\circ 36'$ , während er mit der  $2^\circ$ -Teilung zu  $13,0^\circ$  bestimmt worden ist.

Die Expositionszeit für Platin betrug 60 Stunden. Die Verwendung von monochromatischem Licht hatte nun zur Folge, dass das Auftreten von Eigenstrahlung unterblieb, und die Interferenzlinien sich bedeutend deutlicher aus dem noch bleibenden Hintergrund (Wärmestreustrahlung) hervorhoben.

Bei Verwendung eines Monochromators ist es erforderlich, die Polarisationsverhältnisse in Betracht zu ziehen, denn die ursprünglich unpolarisierte Strahlung wird nach der Reflexion teilweise polarisiert sein. Im folgenden sollen die Elektronen als isotrop gebunden betrachtet werden, sowohl in den leichten Atomen des Zuckers, als auch in den Pt-Atomen. Letzteres ist nach Versuchen von MARK und SZILARD (43) sicherlich berechtigt. Die Rechnung soll anhand von Fig. 20 durchgeführt werden.

*PP* sei die Richtung des Primärstrahls (in der Zeichnungsebene). Wir denken uns die Lichtschwingungen zerlegt in zwei Schwingungskomponenten, welche senkrecht aufeinander stehen (*a* in Zeichnungsebene, *b* senkrecht zu derselben), inkohärent sind und gleiche Amplitude haben. Massgebend für die Schwingungsamplitude nach der Reflexion ist die Projektion des Schwingungs-

vektors vor der Reflexion auf die zum reflektierten Strahl senkrecht stehende Ebene. Die Amplituden der beiden Schwingungskomponenten sind somit nach Reflexion

$$a' \sim \cos \chi \\ b' \sim 1.$$

$\chi$  Winkel zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl.

Die Richtung des reflektierten Strahles sei nun in die  $x$ -Achse eines Koordinatensystems  $xyz$  gelegt.  $z$  sei die Achse der Debye-Scherrer-Kamera (in der Zeichnungsebene). Der reflektierte

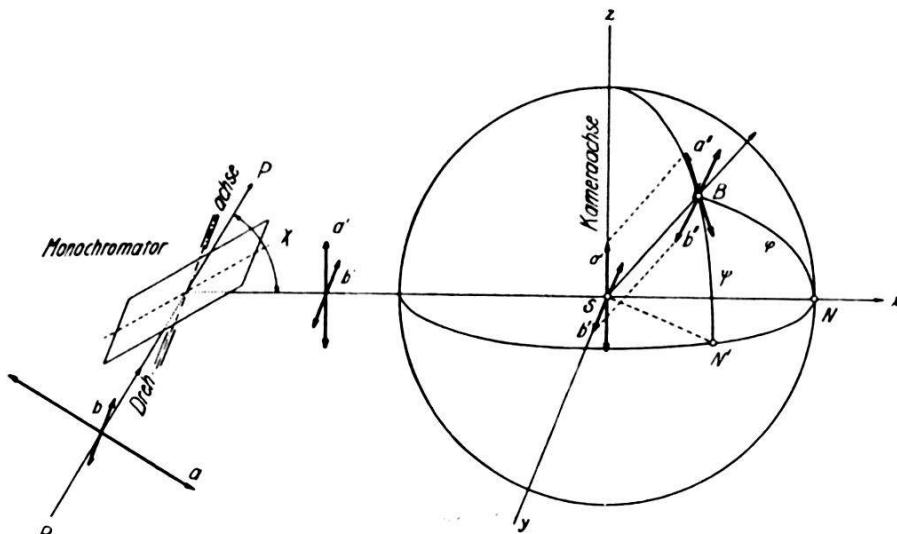


Fig. 20.

Strahl wird in  $S$  nochmals reflektiert, so dass er in der Richtung  $SB$  weitergeht ( $\angle BSN' = \psi$ ,  $\angle BSN = \varphi$ ). Den beiden Schwingungskomponenten des in  $S$  einfallenden Strahles entsprechen zwei linear polarisierte Wellen des in  $S$  reflektierten Strahles, deren Amplituden

$$a'' \sim \cos \chi \cos \psi \\ b'' \sim \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \psi}$$

sind. Da beide inkohärent sind, ist die Gesamtintensität des Strahles  $SB$  gleich der Summe der Einzelintensitäten, also

$$J \sim \cos^2 \chi \cos^2 \psi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \psi.$$

Ist  $\psi$  klein, so gilt

$$J \sim \cos^2 \chi + \cos^2 \varphi + \psi^2,$$

falls längs des Äquators photometriert wird:

$$J \sim \cos^2 \chi + \cos^2 \varphi. \quad (18)$$

Im Ausdruck (15) für die Integralintensität hat man demnach den Faktor  $1 + \cos^2 \varphi$  durch  $\cos^2 \chi + \cos^2 \varphi$  zu ersetzen. Dies gilt

natürlich nur für den Fall, dass die Drehachse des Monochromators senkrecht zur Kameraachse steht. Sind beide parallel, so ist

$$J \sim 1 + \cos^2 \chi \cos^2 \varphi.$$

### Die Ergebnisse.

Die Ergebnisse der Messungen sind in den folgenden Tabellen 8 bis 14 zusammengestellt. Die aus den Intensitäten berechneten Streufunktionen für Al, Cu, Ag, Pt und Au sind in den Figuren 21 bis 25 dargestellt. ● bedeuten die Werte von  $F_{e^{-M}}$ , ○ die Werte von  $F$ ; bei Pt sind die Werte, die aus monochromatischen Aufnahmen hergeleitet worden sind, durch ⊕ bezeichnet. In die Figuren sind auch die Streufunktionen von Silber, Gold und Platin eingezeichnet, wie sie sich auf Grund der Thomas-Fermischen Ladungsverteilung berechnen lassen. Die theoretischen Werte von  $F$  für Aluminium sind nach der Hartreeschen Methode von JAMES, BRINDLEY und WOOD (4) berechnet worden. Für Kupfer lag eine theoretische Berechnung der Streufunktion nicht vor. Hier sind zum Vergleich die experimentellen Werte von  $F_T$ , die von ARMSTRONG (1) angegeben worden sind, herangezogen. Diese sind mit + bezeichnet.

**Tabelle 8.**

#### Aluminium.

$d = 4,05 \text{ \AA}$ (44)
$\mu = 51,2$
$\mu R = 5,24$
$T = 290^\circ \text{ abs.}$ Mittel aus 4 Aufnahmen.
$\Theta_k = 390^\circ \text{ abs.}$
$\Phi = 0,715$
$L = 0,0128$

Fläche	$\Theta$	$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$	$J_{\text{rel}}$	$p$	$A(\varphi)$	$F_{T\text{ rel}}$	$e^M$	$F_{0\text{ rel}}$
111	19° 11'	0,214	100	8	0,144	33,1	1,039	34,5
200	22 18	0,247	61,0	6	0,174	32,1	1,053	33,8
220	32 28	0,349	65,7	12	0,297	27,6	1,108	30,6
311	39 0	0,409	83,0	24	0,382	23,1	1,151	26,6
222	41 6	0,428	30,0	8	0,406	24,3	1,166	28,4
400	49 23	0,494	14,0	6	0,532	17,9	1,227	22,0
331	55 48	0,538	54,4	24	0,635	15,5	1,275	19,8
420	58 4	0,552	62,3	24	0,659	15,7	1,307	20,5
422	68 22	0,605	79,0	24	0,815	13,0	1,360	17,7
333	80 24	0,641	257	8	0,948	12,1	1,413	17,1
511				24				

**Tabelle 9.**

Kupfer.

$d = 3,60 \text{ \AA}$  (<sup>45</sup>)  
 $\mu = 50,4$   
 $\mu R = 8,56$   
 $T = 290^\circ \text{ abs.}$  Mittel aus 4 Aufnahmen.  
 $\Theta_k = 315^\circ \text{ abs.}$   
 $\Phi = 0,762$   
 $L = 0,0142$

Fläche	$\Theta$	$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$	$J_{\text{rel}}$	$p$	$A(\varphi)$	$F_{T \text{ rel}}$	$e^M$	$F_{0 \text{ rel}}$
111	21° 42'	0,241	100	8	0,133	39,5	1,044	41,3
200	25 17	0,278	54,4	6	0,172	35,2	1,058	37,2
220	37 8	0,393	55,2	12	0,319	27,9	1,120	31,3
311	45 5	0,461	70,7	24	0,427	22,1	1,169	25,8
222	47 41	0,481	23,4	8	0,469	21,3	1,186	25,3
331	68 31	0,605	82,5	24	0,802	13,3	1,310	17,4
420	72 41	0,621	106	24	0,857	12,9	1,329	17,1

**Tabelle 10.**

Silber.

$d = 4,06 \text{ \AA}$  (<sup>46</sup>)  
 $\mu R > 50$   
 $T = 290^\circ \text{ abs.}$  Mittel aus 6 Aufnahmen.  
 $\Theta_k = 215^\circ \text{ abs.}$   
 $\Phi = 0,831$   
 $L = 0,0102$

Fläche	$\Theta$	$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$	$J_{\text{rel}}$	$p$	$A(\varphi)$	$F_{T \text{ rel}}$	$e^M$	$F_{0 \text{ rel}}$
111	19° 9'	0,213	100	8	0,0736	41,3	1,031	42,5
200	22 15	0,246	60,2	6	0,0988	37,9	1,042	39,4
220	32 22	0,348	72,4	12	0,204	31,0	1,085	33,8
311	38 53	0,408	112	24	0,288	27,6	1,119	30,9
222	40 59	0,427	37,1	8	0,318	27,3	1,130	30,8
400	49 13	0,493	22,5	6	0,442	22,3	1,177	26,3
331	55 36	0,537	122	24	0,546	22,6	1,214	27,4
420	57 50	0,551	135	24	0,584	21,9	1,226	27,0
422	68 1	0,603	215	24	0,752	20,0	1,277	25,6
333	79 35	0,640	622	8	0,920	17,8	1,317	23,5
511				24				

Tabelle 11.

Gold.

$d = 4,08 \text{ \AA}$  (47)  
 $\mu R > 50$   
 $T = 290^\circ \text{ abs.}$  Mittel aus 6 Aufnahmen.  
 $\Theta_k = 190^\circ \text{ abs.}$   
 $\Phi = 0,848$   
 $L = 0,0070$

Fläche	$\Theta$	$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$	$J_{\text{rel}}$	$p$	$A(\varphi)$	$F_{T\text{rel}}$	$e^M$	$F_{0\text{rel}}$
111	19° 3'	0,212	56,6	8	0,0727	37,9	1,021	38,7 ?
200	22 8	0,245	62,5	6	0,0976	46,8	1,028	48,2 ?
220	32 12	0,347	57,2	12	0,202	33,7	1,058	35,7
311	38 40	0,406	100	24	0,285	31,7	1,080	34,2
222	40 44	0,425	26,8	8	0,314	28,5	1,088	31,0
400	48 54	0,490	21,5	6	0,438	25,6	1,119	28,7
331	55 12	0,534	106	24	0,540	25,8	1,142	29,5
420	57 24	0,548	113	24	0,576	25,0	1,150	28,8
422	67 20	0,600	150	24	0,741	23,3	1,183	27,6

Tabelle 12.

Platin.

$d = 3,93 \text{ \AA}$  (18)  
 $\mu R > 50$   
 $T = 290^\circ \text{ abs.}$  Mittel aus 6 Aufnahmen.  
 $\Theta_k = 225^\circ \text{ abs.}$   
 $\Phi = 0,824$   
 $L = 0,0055$

Fläche	$\Theta$	$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$	$J_{\text{rel}}$	$p$	$A(\varphi)$	$F_{T\text{rel}}$	$e^M$	$F_{0\text{rel}}$
111	19° 48'	0,220	100	8	0,0784	44,1	1,017	44,8
200	23 2	0,254	57,6	6	0,106	39,4	1,022	40,2
220	33 35	0,360	76,2	12	0,219	34,1	1,045	35,6
311	40 26	0,422	135	24	0,310	31,8	1,062	33,8
222	42 39	0,441	45,0	8	0,342	31,5	1,068	33,6
331	58 28	0,555	193	24	0,594	27,6	1,110	30,7
420	60 59	0,569	213	24	0,636	26,9	1,116	30,0

mit monochromatischer Strahlung,  $\chi = 25^{\circ} 12'$ ,  
Mittel aus 2 Aufnahmen.

Fläche		$J_{\text{rel}}$		$F_{T \text{ rel}}$		$F_{0 \text{ rel}}$
111		100		41,4		42,0
200		65,6		39,4		40,2
220		90,5		35,4		37,0
311		141		31,6		33,6
222		47,0		30,8		32,8
331		196		26,7		29,6
420		217		25,8		28,8
.						

Tabelle 13.  
Aluminium-Kupfer.

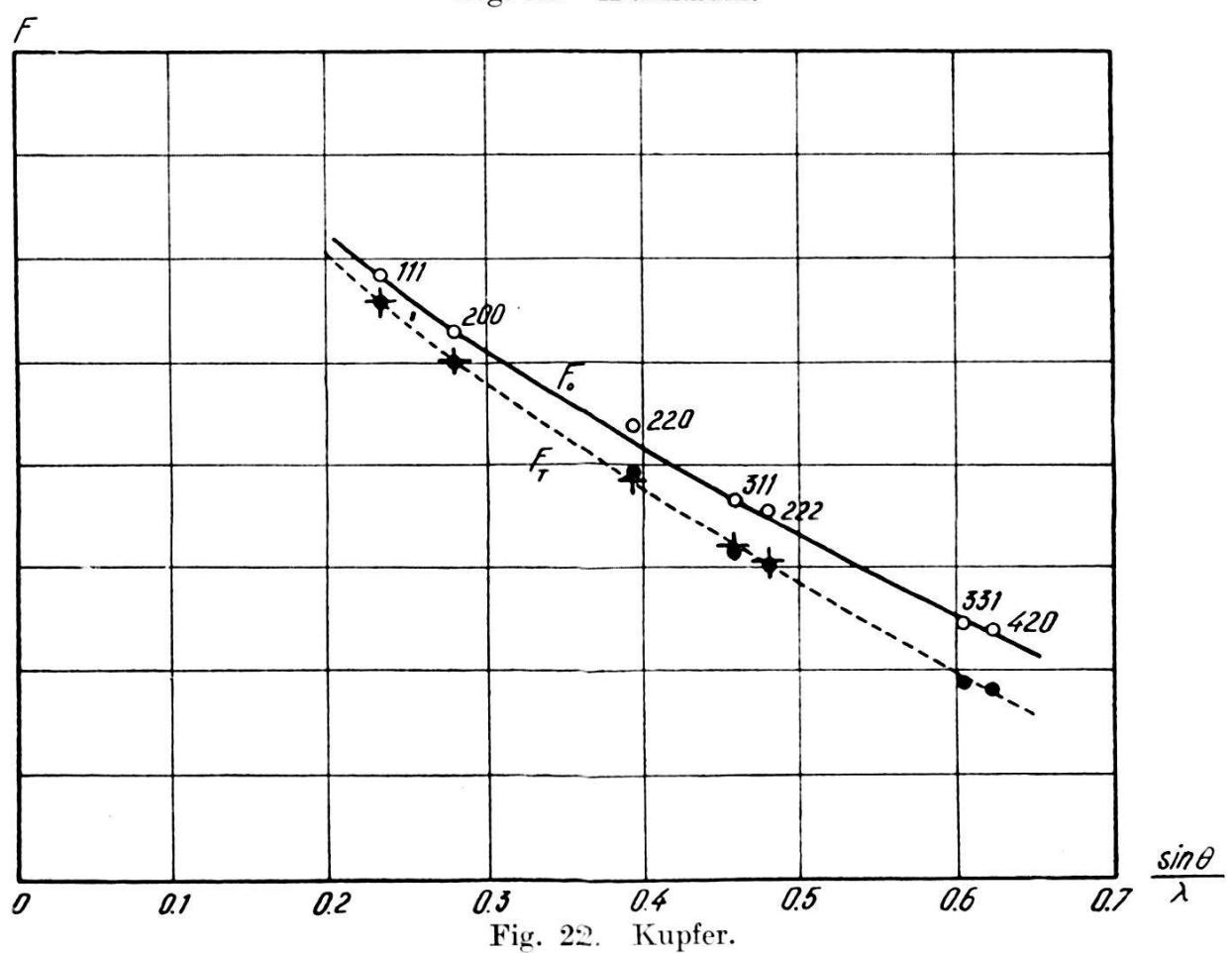
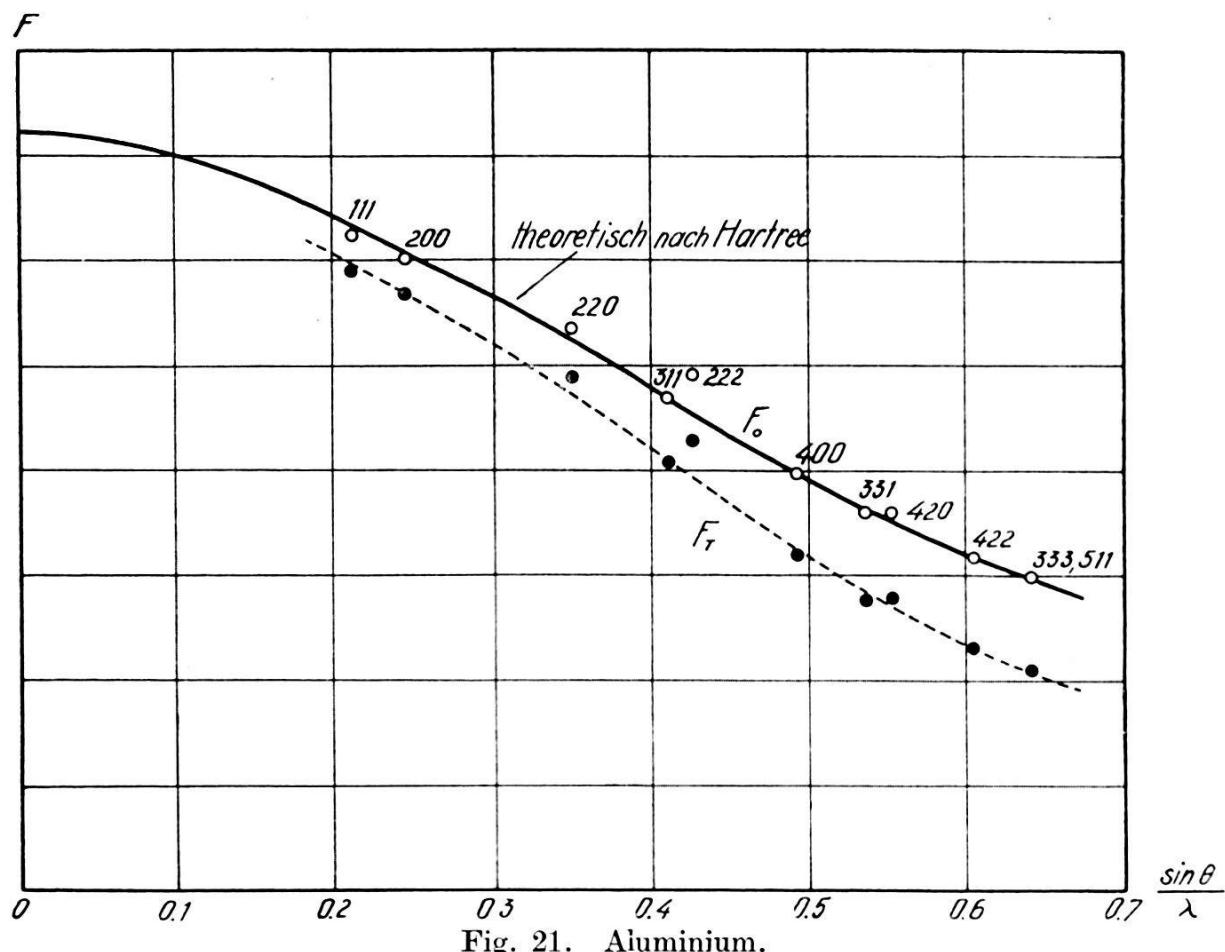
$$\begin{aligned}d_1 &= 4,05 \text{ \AA} \\d_2 &= 3,60 \text{ \AA} \\G_1 : G_2 &= 1000 : 732 \\ \gamma_1 &= 2,60 \\ \gamma_2 &= 8,92 \\F_{10} &= 6,65 \\F_{1T} &= 5,88\end{aligned}$$

Fläche	$\Theta$	$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$	$J_{\text{rel}}$	$p$	$J'_{\text{Al}}$	$J'_{\text{Cu}}$	$F_{1T}$	$F_{2T}$
Al 220	$32^{\circ} 28'$	0,349	73,3	12	61,0			
Cu 220	37 8	0,393	78,0	12	43,8	65,0	5,88	<b>10,9</b>
Al 311	39 0	0,409	90,0	24	37,5			

Tabelle 14.  
Kupfer-Gold.

$$\begin{aligned}d_1 &= 3,60 \text{ \AA} \\d_2 &= 4,08 \text{ \AA} \\G_1 : G_2 &= 1000 : 314 \\ \gamma_1 &= 8,92 \\ \gamma_2 &= 21,5 \\F_{1T} &= 10,9\end{aligned}$$

Fläche	$\Theta$	$\frac{\sin \Theta}{\lambda}$	$J_{\text{rel}}$	$p$	$J'_{\text{Cu}}$	$J'_{\text{Au}}$	$F_{1T}$	$F_{2T}$
Cu 220	$37^{\circ} 8'$	0,393	73,5	12	73,5			
Au 311	38 40	0,406	90,4	24	69,0	45,2	10,8	<b>36,1</b>
Cu 311	45 5	0,461	100	24	50,0			



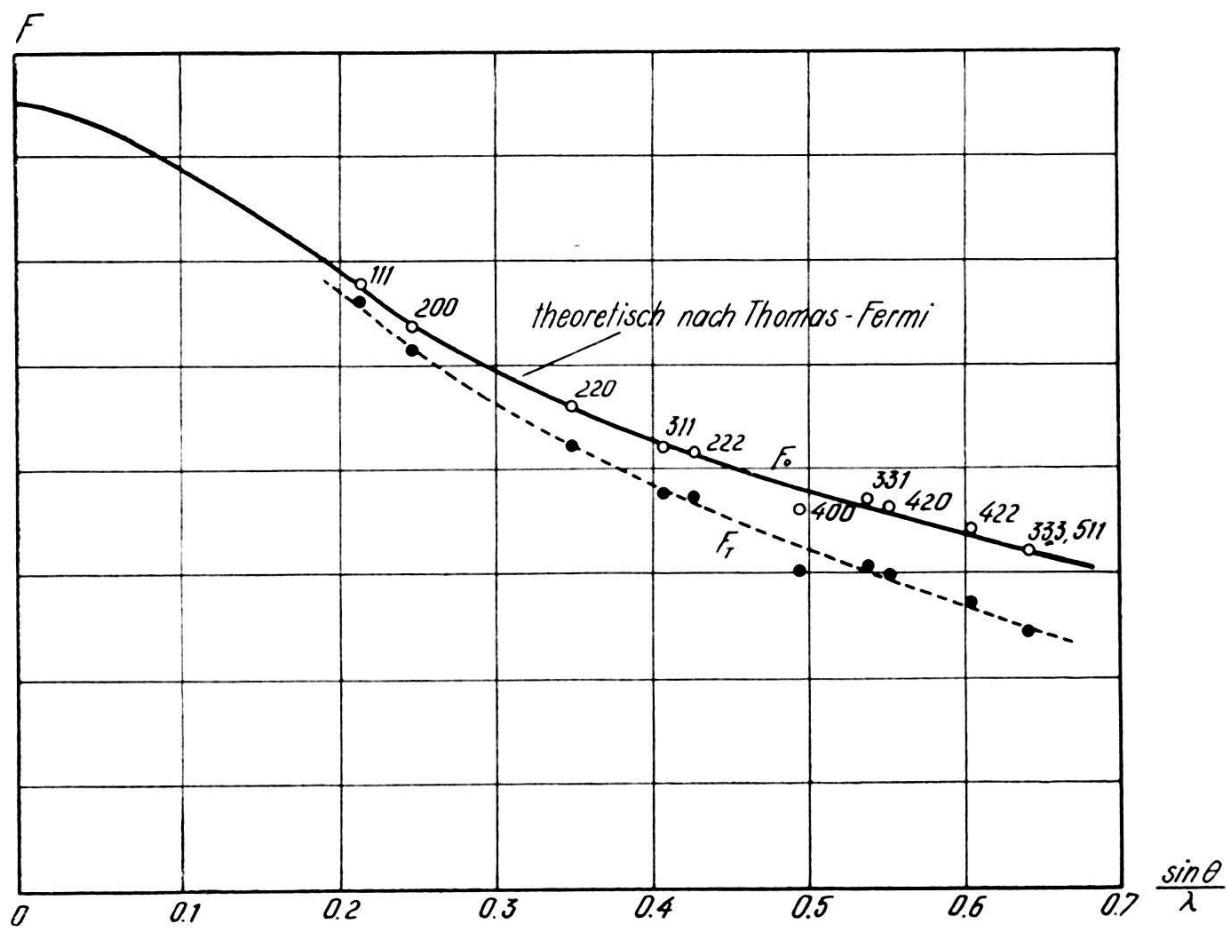


Fig. 23. Silber.

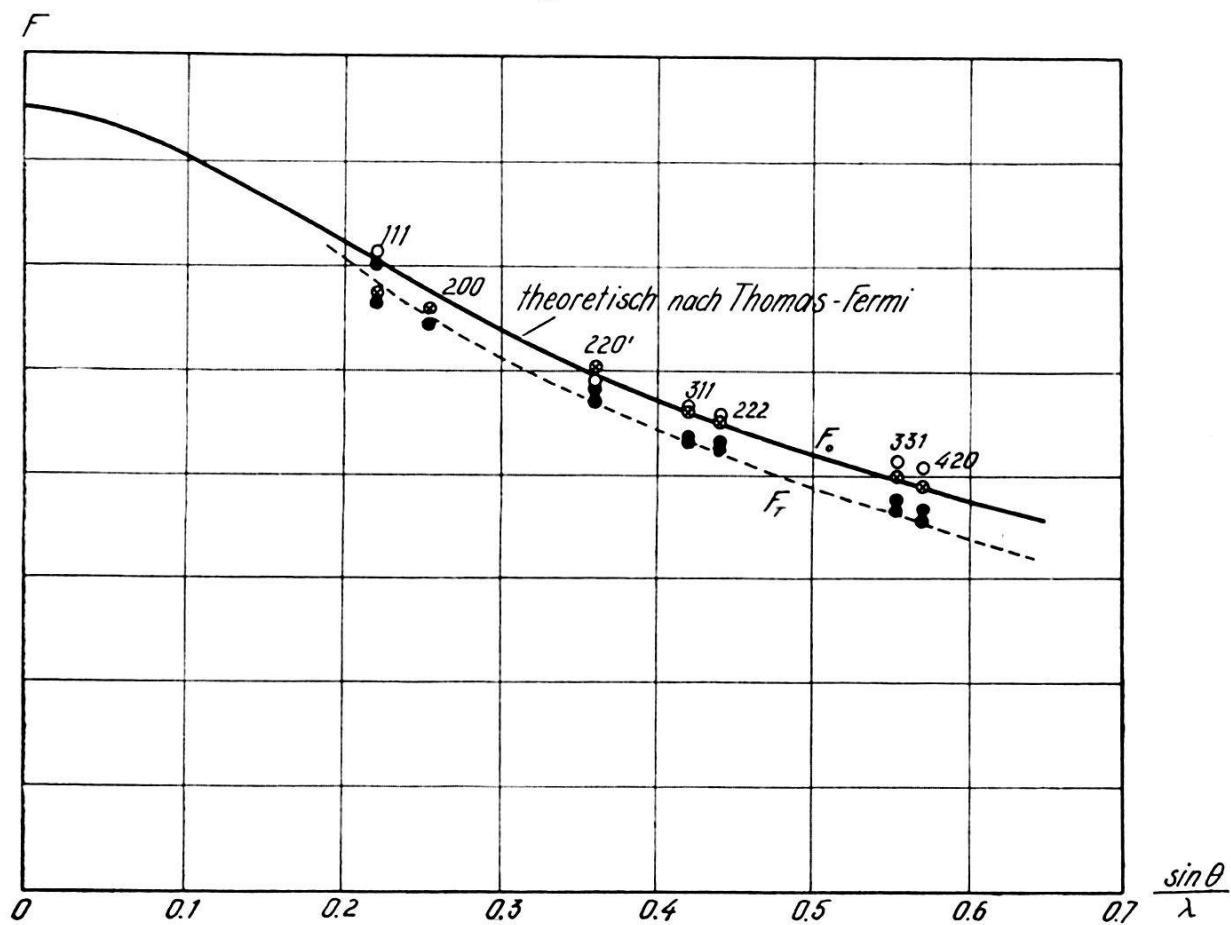


Fig. 24. Platin.

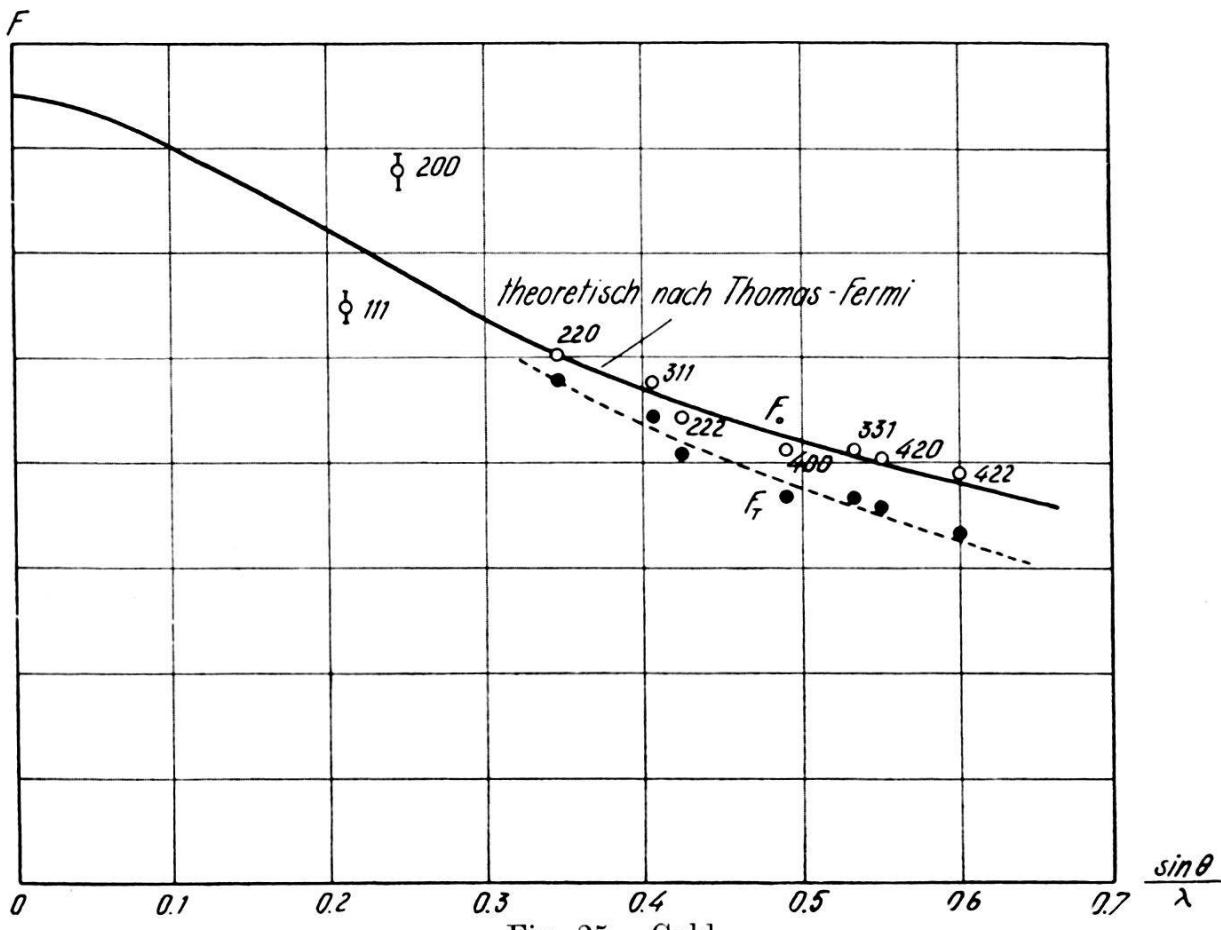


Fig. 25. Gold.

Wie man sieht, haben die experimentell ermittelten Streufunktionen den gleichen Verlauf wie die theoretisch berechneten. Grössere Abweichungen kommen nur bei den Flächen 222 und 400 vor; die Intensitäten dieser zwei Linien sind die schwächsten von allen und lassen sich schwer genau messen.

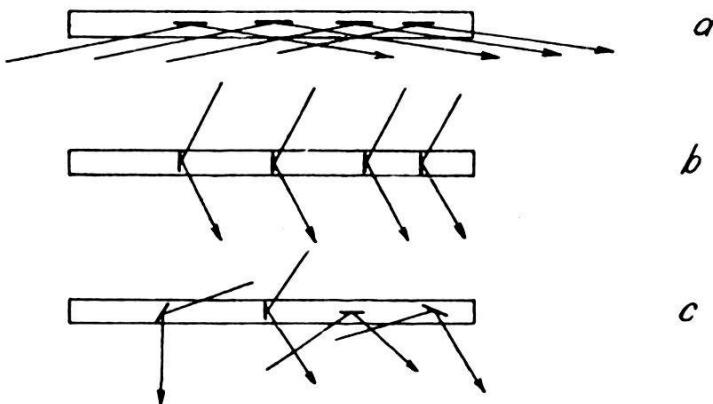


Fig. 26.

Bei Platin stimmen die mit monochromatischer Strahlung und die mit nichtmonochromatischer Strahlung gewonnenen Werte innerhalb der Messungsfehler überein.

Bei Gold zeigen jedoch die zwei ersten Werte von  $F$  Abweichungen, die bedeutend grösser sind als die grössten Abwei-

chungen vom Mittelwert (welche nach beiden Seiten abgetragen sind. Fig. 25). Offenbar liegt hier der in Abschnitt „Absorptions-einfluss in Pulvern“ erwähnte Fall 3b vor. Infolge der Bearbeitung der Folie haben die Flächen (111) und (200) bestimmte vorherrschende Lagen innerhalb der einzelnen Goldplättchen. Die ungefähren Verhältnisse sind in Fig. 26 skizziert.  $a$  würde der Fläche (111),  $b$  der Fläche (200) entsprechen, während  $c$  (keine vorherrschende Lage) allen anderen Flächen entspricht.

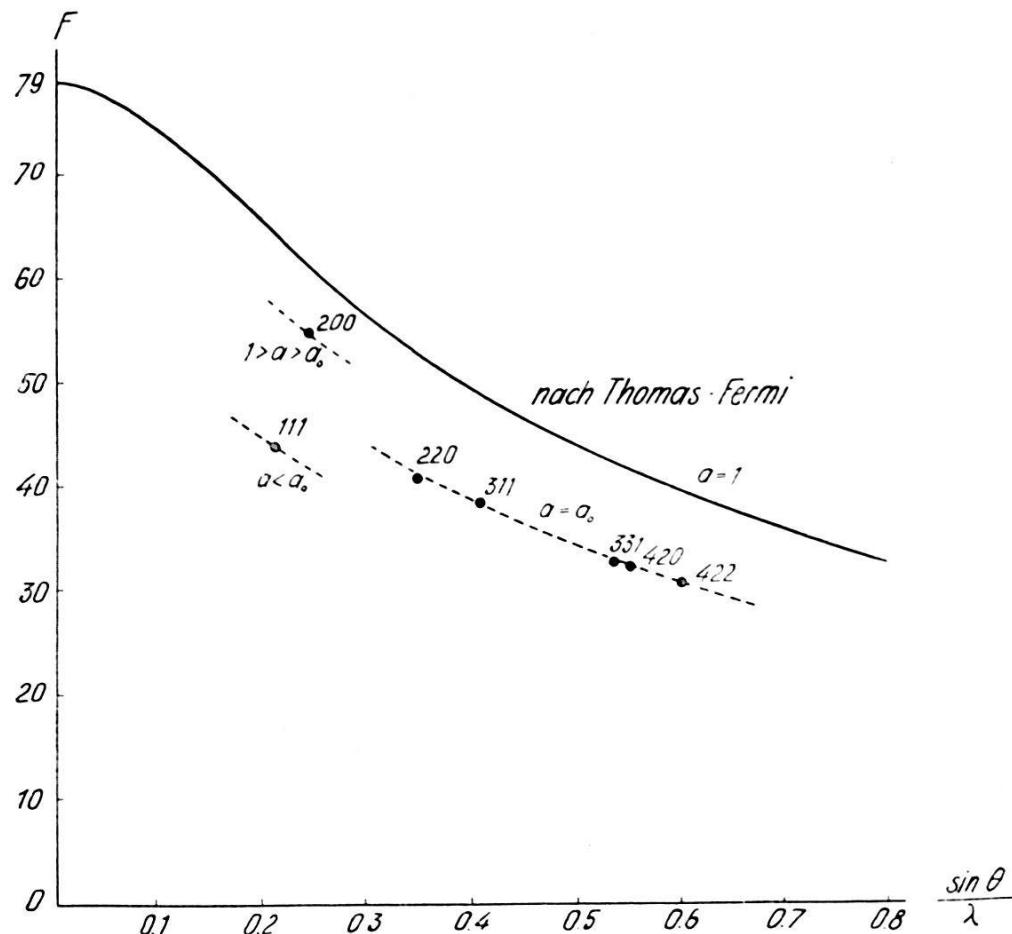


Fig. 27. Gold.

Damit steht auch in Einklang, dass für  $F$  (311) von Gold ein zu kleiner Wert (39,0 statt 49,0) erhalten worden ist. Rechnet man alle anderen Werte von  $F$  danach in absolute Werte um, so erhält man folgendes Bild (Fig. 27). Infolge ihrer Lage haben (111) und (200) andere  $a$  als die übrigen Flächen, (111) ein kleineres und (200) ein grösseres. In keinem Falle liegt jedoch eine Übersteigung der theoretischen Werte vor, d. h.  $a$  ist ständig kleiner als 1. Selbstverständlich soll nicht gesagt sein, dass kein anderer Einfluss die Abweichungen verursacht; ihn anzunehmen liegt jedoch kein Grund vor.

Hingegen bestimmt sich  $F_T$  (220) von Kupfer zu 10,9, während ARMSTRONG dafür den Wert 11,15 angibt, was als gute Übereinstimmung bezeichnet werden muss, und für die Brauchbarkeit der verwendeten Methode spricht.

Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, auf dessen Anregung hin die vorliegende Untersuchung vorgenommen wurde, meinen herzlichsten Dank auszusprechen für seine vielen Ratschläge, die die Ausführung der Arbeit förderten, und für sein Interesse, das er ihr ständig entgegengebracht hat.

Besten Dank auch Herrn Dipl. Fachlehrer R. SIEGRIST für Überlassung von mehreren schön gewachsenen Zuckerkristallen.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H

### Literatur.

1. A. H. ARMSTRONG, Phys. Rev. **34**, 931, 1929.
2. R. W. G. WYCKOFF, Phys. Rev. **35**, 215, 1930; Phys. Rev. **35**, 583, 1930.
3. A. CLAASSEN, Phil. Mag. **9**, 57, 1930.
4. R. W. JAMES, G. W. BRINDLEY and R. G. WOOD, Proc. Roy. Soc. London (A) **125**, 401, 1929.
5. J. A. BEARDEN, Phys. Rev. **29**, 20, 1927.
6. J. BRENTANO, Phil. Mag. **6**, 178, 1928.
7. C. W. HEWLETT, Phys. Rev. **19**, 266, 1922; Phys. Rev. **20**, 688, 1922.
8. C. W. HEWLETT, Phys. Rev. **17**, 284, 1921.
9. D. R. HARTREE, Proc. Camb. Phil. Soc. **24**, 89 u. 111, 1928.
10. R. W. JAMES, I. WALLER and D. R. HARTREE, Proc. Roy. Soc. London (A) **118**, 334, 1928.
11. G. W. BRINDLEY, Phil. Mag. **9**, 193, 1930.
12. G. W. BRINDLEY, Phil. Mag. **9**, 204, 1930.
13. G. W. BRINDLEY, Phil. Mag. **9**, 1081, 1930.
14. L. H. THOMAS, Proc. Camb. Phil. Soc. **23**, 542, 1927.
15. E. FERMI, Zeitschr. f. Phys. **48**, 73, 1928.
16. P. DEBYE, Phys. Zeitschr. **31**, 419, 1930.
17. I. WALLER, Phil. Mag. **4**, 1228, 1927; Zeitschr. f. Phys. **51**, 223, 1928.
18. A. H. COMPTON, X-Rays and Electrons, S. 121—130.
19. C. G. DARWIN, Phil. Mag. **27**, 315 u. 675, 1914; Phil. Mag. **43**, 800, 1922.
20. W. L. BRAGG, R. W. JAMES and C. H. BOSANQUET, Phil. Mag. **42**, 1, 1921.
21. P. P. EWALD, Phys. Zeitschr. **26**, 29, 1925.
22. R. J. HAVIGHURST, Phys. Rev. **27**, 243, 1926; Phys. Rev. **28**, 869, 1926; Proc. Nat. Acad. Amer. **12**, 375, 1926.
23. J. BRENTANO, Phil. Mag. **4**, 620, 1927.
24. I. WALLER and R. W. JAMES, Proc. Roy. Soc. London (A) **117**, 214, 1927.
25. I. WALLER, Dissertation Upsala 1925; Ann. d. Phys. **83**, 153, 1927.
26. R. W. JAMES and G. W. BRINDLEY, Proc. Roy. Soc. London (A) **121**, 155, 1928.
27. R. W. JAMES and E. M. FIRTH, Proc. Roy. Soc. London (A) **117**, 62, 1928.
28. P. Debye, Ann. d. Phys. **43**, 49, 1914.

29. J. BRENTANO, Proc. Phys. Soc. London **37**, 184, 1925.
  30. W. H. BRAGG, Proc. Phys. Soc. London **33**, 222, 1921.
  31. H. MARK, Verwendung der Röntgenstrahlen in Chemie und Technik, S. 424.
  32. P. DEBYE und P. SCHERRER, Phys. Zeitschr. **19**, 474, 1918.
  33. G. GREENWOOD, Phil. Mag. **1**, 963, 1927.
  34. H. MÖLLER und A. REIS, Zeitschr. f. phys. Chem. (A) **139**, 425, 1928.
  35. A. JÖNSSON, Diss. Upsala, 1928.
  36. H. MARK und K. WOLF, Zeitschr. f. Phys. **52**, 1, 1928.
  37. P. SCHERRER, in Zsigmondy, Kolloidchemie 1920.
  38. E. G. COX and W. F. B. SHAW, Proc. Roy. Soc. London (A) **127**, 71, 1930.
  39. R. GLOCKER und W. TRAUB, Phys. Zeitschr. **22**, 345, 1921.
  40. A. BOUWERS, Zeitschr. f. Phys. **14**, 374, 1923.
  41. W. BUSSE, Zeitschr. f. Phys. **34**, 11, 1925.
  42. M. SIEGBAHN, Spektroskopie der Röntgenstrahlen, S. 237.
  43. H. MARK und L. SZILARD, Zeitschr. f. Phys. **35**, 743, 1926.
  44. A. W. HULL, Phys. Rev. **10**, 661, 1917; P. SCHERRER, Phys. Zeitschr. **19**, 23, 1918.
  45. W. L. BRAGG, Phil. Mag. **28**, 355, 1914.
  46. L. VEGARD, Phil. Mag. **31**, 86, 1916.
  47. L. VEGARD, Phil. Mag. **32**, 65, 1916.
  48. A. W. HULL, Phys. Rev. **17**, 571, 1921.
  49. B. ARAKATZU und P. SCHERRER, Helv. Phys. Acta **3**, 428, 1930.
-