Considérations théoriques sur la mesure des débits d'eau par la méthode d'Allen

Autor(en): **Haller, P. de**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **3 (1930)**

Heft I

PDF erstellt am: **10.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-109796

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Considérations théoriques sur la mesure des débits d'eau par la méthode d'Allen

par **P. de Haller**, Zürich.

(6. I. 30.)

Sommaire. Les mesures de débit effectuées par la méthode d'Allen sont affectées d'erreurs provenant du principe même de la méthode. On a cherché, en se basant sur la théorie de l'écoulement turbulent, l'importance respective des différentes causes d'erreur et les moyens d'en atténuer les effets.

On a depuis quelques années fréquemment utilisé une nouvelle méthode pour la détermination des débits d'eau, méthode imaginée par l'ingénieur américain Ch. M. Allen. Elle s'applique avant tout aux mesures dans les canaux et les conduites forcées; la mesure est simple et rapide et ne nécessite aucun étalonnage préalable ni coefficient expérimental. Elle n'est toutefois pas absolument exempte d'erreurs provenant de son principe même; le but de ce travail est l'étude purement théorique de la méthode, en vue d'évaluer les erreurs possibles, indépendamment des erreurs de lectures et de celles provenant d'imperfection des appareils. Il paraît possible, par une modification de l'appareillage, de réduire sensiblement ces erreurs, ce qui serait fort désirable, étant donnés les nombreux avantages d'ordre pratique de la méthode.

Le principe en est le suivant[1] [2]: On injecte pendant un court instant, à l'extrémité supérieure de la conduite, une solution salée concentrée. Cette solution modifie la conductibilité électrique de l'eau. En plaçant, en deux points quelconques de la conduite, deux électrodes reliées à une source de courant et à un galvanomètre enregistreur, on pourra déceler le passage de cette solution devant l'une et l'autre des électrodes. On mesure alors le temps T séparant ces passages, ainsi que le volume V du tronçon de conduite situé entre les électrodes. Le débit est évidemment:

$$Q = V/T\,.$$

[1]) The Salt-Velocity Method of Water-Measurement, by Ch. M. Allen and Ed. A. Taylor, paper presented at the annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, New York, dec. 1923.

[2]) Müller: Die Salzgeschwindigkeits-Methode von Allen. Schw. Bauzeitung, 23. Jan. 1926.

Or la solution forme dans la conduite un nuage qui occupe un certain volume. La déviation du galvanomètre ne sera pas instantanée, mais durera un certain temps, et la détermination de T présente une incertitude.

Allen lève la difficulté de la façon suivante: Soit (fig. 1) A, la courbe enregistrée par le galvanomètre lors du passage de la

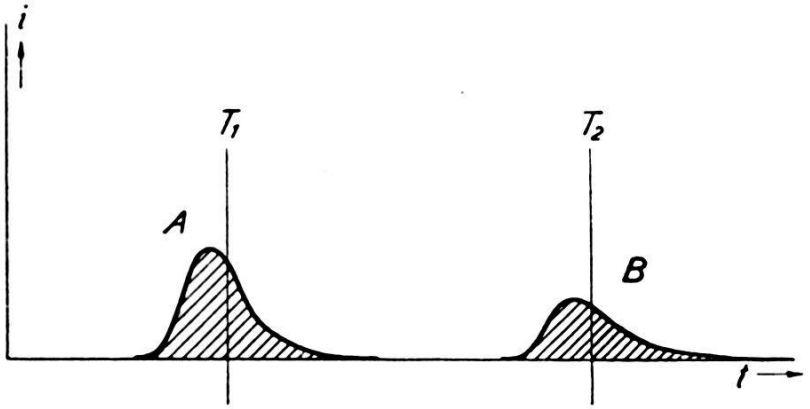

Fig. 1.

solution devant la première électrode, et B, la courbe relative à la deuxième électrode. On détermine les centres de gravité T_1 et T_2 des deux surfaces hachurées et le temps séparant ces deux points sera le temps T à introduire dans la formule.

Cette manière de procéder se justifie. En effet, déterminer le débit, cela revient à déterminer la vitesse moyenne de l'eau. Or la vitesse moyenne d'un corps déformable est égale à la vitesse de son centre de gravité géométrique. Il suffira donc de dé-

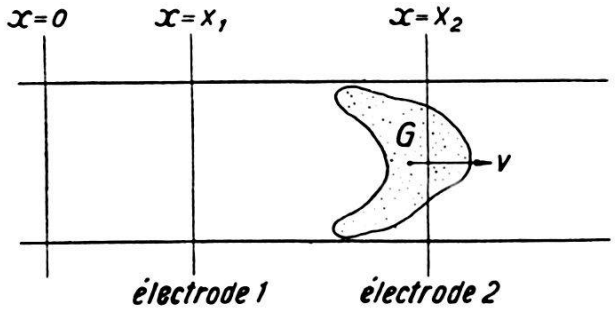

Fig. 2.

terminer les instants de passage du centre de gravité du nuage formé par la solution devant les électrodes 1 et 2, fig. 2.

Supposons maintenant qu'on ait placé au point d'abcisse X_1 une électrode idéale, occupant toute la section de la conduite, et de conductibilité constante en tous points. On peut la concevoir formée par exemple de deux treillis conducteurs, très fins

et très voisins l'un de l'autre, ne gênant en aucune façon le libre écoulement du fluide. Ces deux treillis, isolés électriquement l'un de l'autre, sont soumis à une différence de potentiel constante. Au passage du nuage formé par la solution, un courant va circuler au travers de l'électrode. Si la concentration, et par conséquent la conductibilité de la solution est constante, ce courant sera simplement proportionnel à la section S du nuage par le plan de l'électrode:

$$i = a \cdot S .$$

Supposons en outre que durant son passage devant l'électrode, le nuage ne se déforme pas, c'est-à-dire que la vitesse v de tous ses points est la même. On peut alors pour simplifier le raisonnement admettre que le nuage est immobile et que l'électrode se déplace avec la vitesse v. On aura:

$$x - X_1 = v\,(t - T_1) \qquad\qquad dx = v \cdot dt .$$

X_1 doit être l'abcisse du centre de gravité du nuage:

$$\int (x - X_1)\, S\, dx = 0$$

en remplaçant:

$$\frac{1}{a} \int (x - X_1)\, i\, dx = 0 = \frac{v^2}{a} \int i\,(t - T_1)\, dt$$

$$\int i\,(t - T_1)\, dt = 0 ,$$

ce qui exprime bien que T_1 est l'abcisse du centre de gravité de la courbe relevée par le galvanomètre.

Le même raisonnement s'applique à la seconde électrode d'abcisse X_2. Le procédé est donc correct lorsque les trois conditions sont réalisées:

1° La vitesse de passage devant l'électrode doit être la même pour toute particule constituant le nuage. Par contre, le nuage peut se déformer entre les deux électrodes.

2° Les électrodes doivent occuper toute la section de la conduite, sans entraver le mouvement de l'eau, et avoir une conductibilité constante en chaque point.

3° La concentration doit être constante en chaque point du nuage.

Pratiquement aucune de ces trois conditions n'est réalisée. La première, parce que les particules au voisinage des parois de la conduite sont ralenties et que par suite la vitesse d'écoule-

ment dans cette région est différente de celle qui régne au centre de la conduite.

La deuxième se heurte à une impossibilité d'exécution pratique. Une telle électrode présenterait à l'écoulement une résistance considérable.

Enfin, si par un dispositif approprié on peut obtenir que la concentration du nuage au moment de l'injection soit à peu de chose près constante, la diffusion aura vite fait de modifier cet état de chose.

Ce sont donc là trois causes d'erreurs, indépendantes les unes des autres, qui peuvent influencer les résultats. Nous allons essayer d'estimer leurs effets.

Admettons tout d'abord que les conditions sous 2° et 3° soient remplies, et cherchons à évaluer l'erreur provenant de la déformation du nuage. Cette déformation provient de ce que la vitesse d'écoulement n'est pas constante sur un diamètre de la conduite. On sait que dans le cas d'un écoulement laminaire, la répartition des vitesses est parabolique, nulle aux parois, maximum au centre. L'écoulement turbulant tel qu'il se produit dans les conduites forcées diffère de l'écoulement laminaire en ce sens que la trajectoire d'une particule fluide n'est plus une droite, mais une ligne irrégulière oscillant de droite et de gauche de cette direction, sans cependant s'en écarter beaucoup. Les phénomènes de diffusion et de viscosité augmentent en intensité; les vitesses d'écoulement que l'on introduit dans les calculs ne sont plus des valeurs instantanées, mais des moyennes pendant un certain intervalle de temps. Les principes généraux de l'écoulement laminaire se retrouvent dans le régime turbulent, seules les lois numériques diffèrent. En particulier, la répartition de la vitesse sur un diamètre de la conduite ne sera plus une parabole; on admet généralement[1]) qu'elle peut être représentée par la formule:

$$v = u_0 \sqrt[n]{1 - r^2/R^2} \qquad (1)$$

où u_0 est la vitesse sur l'axe de la conduite, et n un exposant qui peut varier dans de certaines limites avec les conditions locales et spécialement avec le chiffre de Reynolds $R = UD/\nu$; ν est la viscosité cinématique μ/ϱ .

---

[1]) Handbuch der Physik (Geiger und Scheel), Bd. VII p. 144. J. Springer, Berlin, 1927.

Th. v. Kármán, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. I p. 238. 1921.

Considérons maintenant une conduite cylindrique de diamètre $D = 2R$, dans laquelle on injecte au point $x = 0$ et au temps $t = 0$ (fig. 3), la solution salée, qui forme tout d'abord un nuage de longueur e, limité par deux plans parallèles; soit v la vitesse d'un point quelconque P du front avant de ce nuage, situé à une distance r de l'axe de la conduite. Ce front avant va se déformer par suite de la différence des vitesses qui animent chacun de ses points. A un instant quelconque t, il est représenté

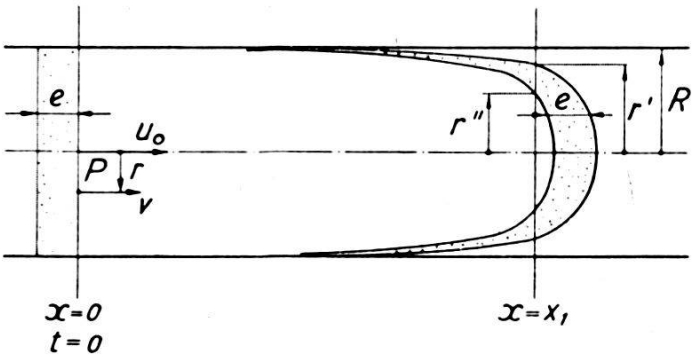

Fig. 3.

par l'équation: $x = v \cdot t$, où v a la valeur indiquée éq. 1); et l'on en tire

$$x = u_0 t \sqrt[n]{1 - r^2/R^2}$$

et le plan X_1 coupe le front avant du nuage suivant un cercle de rayon r':

$$r'^2 = R^2 \left[1 - \left(\frac{X_1}{u_0 t}\right)^n\right]. \tag{2}$$

De même il coupe le front arrière suivant un cercle de rayon r''

$$r''^2 = R^2 \left[1 - \left(\frac{X_1 + e}{u_0 t}\right)^n\right]. \tag{3}$$

Dans les conditions que nous avons admises, le courant passant par l'électrode est simplement proportionnel à la section du nuage par le plan X_1 : $i = a \cdot S$. S est évidemment:

$$S = \pi (r'^2 - r''^2) \ ;$$

on déduit de là l'équation de la courbe enregistrée par le galvanomètre

$$i = A \left[\left(1 - \left(\frac{X_1}{u_0 t}\right)^n\right) - \left(1 - \left(\frac{X_1 + e}{u_0 t}\right)^n\right)\right].$$

Calculons l'abcisse du centre de gravité T_1:

$$T_1 = \frac{\int i\, t\, dt}{\int i\, dt}\ ;$$

$$\int i\, t\, dt = \int_{t=\frac{X_1}{u_0}}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{X_1}{u_0\, t}\right)^n\right) t\, dt - \int_{t=\frac{X_1+e}{u_0}}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{X_1+e}{u_0\, t}\right)^n\right) t\, dt$$

$$= \left(\frac{X_1}{u_0}\right)^2 \left(1/2 + \frac{1}{n-2}\right) - \left(\frac{X_1+e}{u_0}\right)^2 \left(1/2 + \frac{1}{n-2}\right);$$

et

$$\int i\, dt = \int_{t=\frac{X_1}{u_0}}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{X_1}{u_0\, t}\right)^n\right) dt - \int_{t=\frac{X_1+e}{u_0}}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{X_1+e}{u_0\, t}\right)^n\right) dt$$

$$= \left(\frac{X_1}{u_0} - \frac{X_1+e}{u_0}\right)\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = -\frac{e}{u_0}\,\frac{n}{n-1}$$

et enfin

$$T_1 = (X_1 + e/2)\,\frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{1}{u_0}\,. \tag{5}$$

Un calcul analogue pour la seconde électrode d'abcisse X_2 conduit à

$$T_2 = (X_2 + e/2)\,\frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{1}{u_0}\,. \tag{5a}$$

La vitesse d'écoulement moyenne U_a, telle qu'on la déduirait de mesures par la méthode d'Allen, sera:

$$U_a = \frac{X_2 - X_1}{T_2 - T_1} = \frac{n-2}{n-1}\, u_0\,, \tag{6}$$

alors que la vitesse moyenne réelle U, déduite de la loi de répartition des vitesses adoptée, est:

$$U = u_0 \cdot \frac{n}{n+1} \tag{7}$$

l'erreur relative, définie par

$$\varepsilon = \frac{U_a - U}{U}$$

est

$$\varepsilon = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} - 1 = -\frac{2}{n\,(n-1)}\,. \tag{8}$$

Cette erreur est *négative*, c'est-à-dire que la méthode d'ALLEN donnerait des résultats trop faibles. ε tend rapidement vers

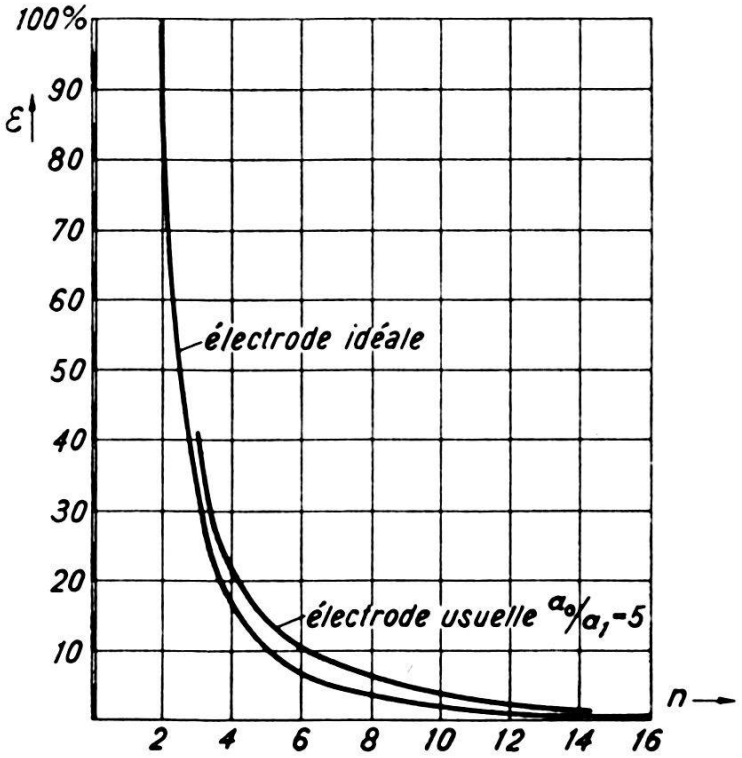

Fig. 4. Erreur en fonction de l'exposant n.

zéro pour des valeurs croissantes de n. Pour $n = 7$, ce qui est une moyenne fréquente, cette erreur est de $-4{,}8\%$ (fig. 4).

Pour $n < 2$, la formule 8) cesse d'être valable. Ceci provient du fait que la courbe i en fonction de t, présentant l'allure fig. 5

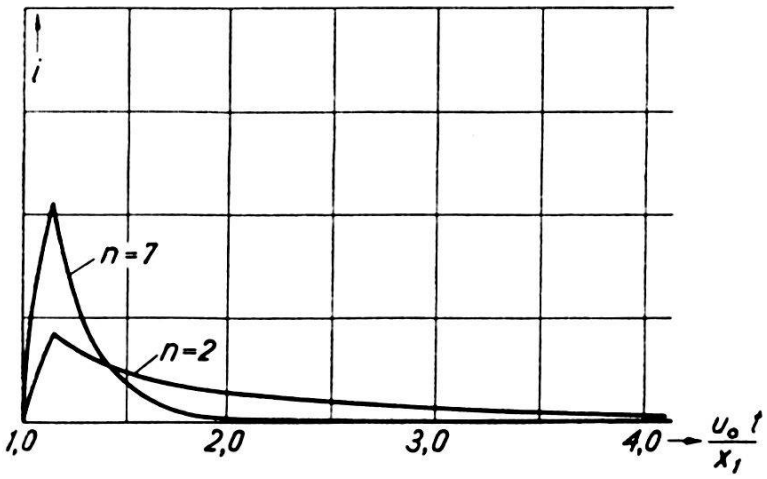

Fig. 5. Courbes de courant en fonction du temps.

pour $n = 7$, s'allonge pour des valeurs plus faibles de n, au point que l'intégrale $\int i\,t\,dt$ cesse d'avoir un sens pour $n < 2$. Il en

résulte ce fait paradoxal que pour un écoulement laminaire, correspondant à $n = 1$, la méthode d'ALLEN ne serait pas applicable sous cette forme. Pratiquement cette difficulté ne se présente pas. On est en effet obligé d'isoler électriquement les électrodes de la paroi de la conduite; ces électrodes n'occupent alors plus tout le diamètre de la conduite et n'enregistrent pas le passage des particules fortement ralenties au voisinage immédiat des parois, et ce sont précisément ces particules qui sont la cause de l'allongement de la courbe de courant pour des petites valeurs de n. Nous étudierons plus loin en détail cette forme d'électrode.

Voyons maintenant le cas où la condition 2⁰ ne serait pas non plus remplie. L'électrode aura une forme quelconque, tout

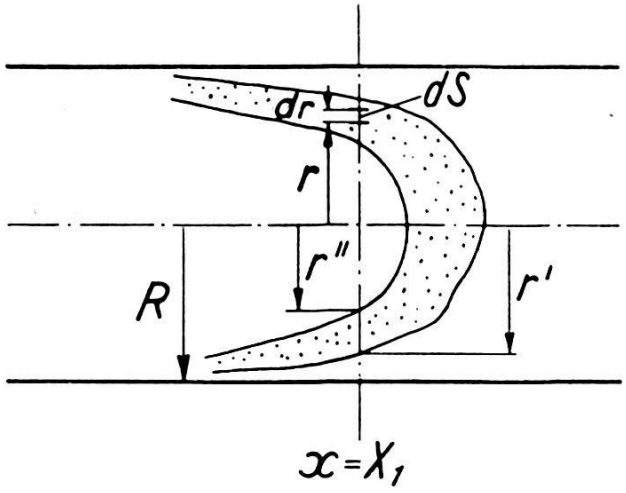

Fig. 6.

en restant symétrique par rapport à l'axe de la conduite. Sa conductibilité est alors une fonction du rayon r.

Soit di le courant passant au travers de l'élément de surface dS de l'électrode. On aura fig. 6:

$$di = a \cdot dS ,$$

a et dS étant tous deux des fonctions de r. Le courant total i sera exprimé par:

$$i = \int_{r''}^{r'} a \, dS = F(r') - F(r''), \tag{9}$$

r' et r'' ont ici la même signification que précédemment. Or, avec la répartition de vitesse admise, r' est une fonction de $X_1/u_0 t$,

et r'' de $(X_1 + e)/u_0 t$ seulement. L'équation de la courbe relevée par le galvanomètre est donc de la forme:

$$i = \psi\left(\frac{X_1}{u_0 t}\right) - \psi\left(\frac{X_1 + e}{u_0 t}\right)$$

i est donc égal à la différence des ordonnées des deux courbes

$$y = \psi\left(\frac{X_1}{u_0 t}\right) \qquad y_1 = \psi\left(\frac{X_1 + e}{u_0 t}\right).$$

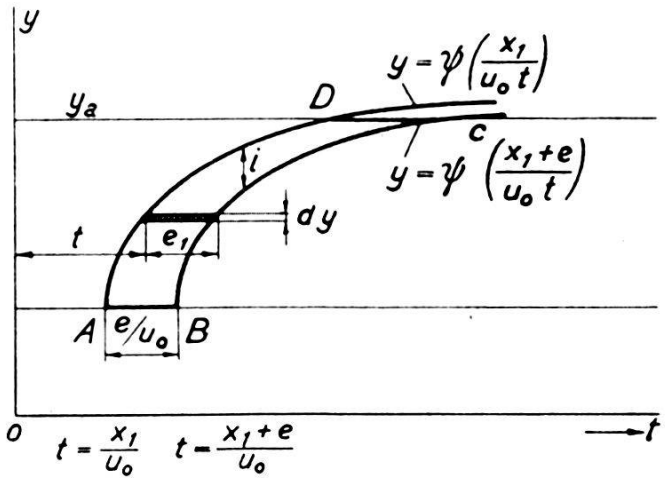

Fig. 7.

L'abcisse du centre de gravité de cette courbe peut se mettre sous la forme:

$$T_1 = \frac{\int\left(t + \frac{e_1}{2}\right) e_1 \, d\,y}{\int e_1 \, d\,y} \; ; \qquad \text{où} \qquad y = \psi\left(\frac{X_1}{u_0 t}\right) ;$$

e_1, comme il est facile de s'en rendre compte, est proportionnel à t:

$$e_1 = e \cdot t / X_1 ,$$

d'où:

$$\int\left(t + \frac{e_1}{2}\right) e_1 \, d\,y = \frac{e}{X_1}\left[1 + \frac{e}{2\,X_1}\right]\int t^2 \, d\,y$$

et

$$\int e_1 \, d\,y = \frac{e}{X_1}\int t \, d\,y \; ;$$

par conséquent:

$$T_1 = \left[1 + \frac{e}{2\,X_1}\right]\frac{\int t^2 \, d\,y}{\int t \, d\,y} .$$

Les deux intégrales sont à étendre aux limites $t = X_1/u_0$ et $t = \infty$, lorsque l'électrode occupe tout le diamètre de la conduite. Comme:

$$y = \psi\left(\frac{X_1}{u_0\, t}\right),$$

on peut faire le changement de variable:

$$X_1/u_0 t = Z\,.$$

Alors:

$$T_1 = \left(X_1 + \frac{e}{2}\right)\frac{1}{u_0}\,\frac{\int_1^0 \frac{1}{Z^2}\,\psi'(Z)\,d\,Z}{\int_1^0 \frac{1}{Z}\,\psi'(Z)\,d\,Z}\,. \tag{10}$$

Le même calcul donne pour T_2: avec $Z = X_2/u_0 t$

$$T_2 = \left[X_2 + \frac{e}{2}\right]\frac{1}{u_0}\,\frac{\int_1^0 \frac{1}{Z^2}\,\psi'(Z)\,d\,Z}{\int_1^0 \frac{1}{Z}\,\psi'(Z)\,d\,Z}\,. \tag{10a}$$

Comme les limites des intégrales sous 10) et 10a) sont les mêmes, on peut poser

$$K = \frac{\int_1^0 \frac{1}{Z^2}\,\psi'(Z)\,d\,Z}{\int_1^0 \frac{1}{Z}\,\psi'(Z)\,d\,Z} \tag{11}$$

et on aura $T_2 - T_1 = (X_2 - X_1)\cdot K/u_0$.

La vitesse moyenne U_a s'écrit alors:

$$U_a = \frac{X_2 - X_1}{T_2 - T_1} = \frac{u_0}{K}\,. \tag{12}$$

Cette vitesse moyenne ne dépend donc que de la forme de l'électrode et de la répartition des vitesses, éléments tous deux contenus dans le facteur K, mais pas de l'emplacement des électrodes dans la conduite.

Un type d'électrode fréquemment utilisé se présente sous la forme suivante (fig. 8): deux fers plats de largeur b sont placés à une faible distance l'un de l'autre suivant un diamètre de la con-

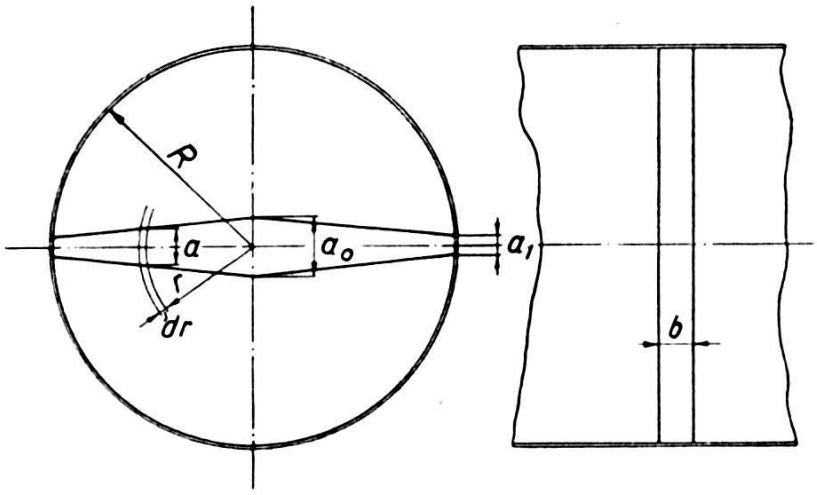

Fig. 8. Electrode usuelle.

duite, leur écartement diminuant linéairement du centre vers les parois.

L'élément de courant di est ici approximativement

$$di = \alpha \cdot b/a \cdot dr$$

et comme

$$a = a_0 - \beta\, r \qquad \beta = \frac{a_0 - a_1}{R}$$

$$i = \alpha \int_{r''}^{r'} b \frac{dr}{a_0 - \beta\, r} = - A \Big/ \lg (a_0 - \beta\, r) \Big/_{r''}^{r'}$$

en faisant les mêmes hypothèses que précédemment sur la répartition des vitesses

$$r' = R \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{u_0\, t}\right)^n}$$

et

$$i \sim \lg \left[\frac{a_0}{a_0 - a_1} - \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{u_0\, t}\right)^n}\right] - \lg \left[\frac{a_0}{a_0 - a_1} - \sqrt{1 - \left(\frac{X_1 + e}{u_0\, t}\right)^n}\right] \tag{13}$$

la fonction $\psi\,(Z)$ est dans ce cas:

$$\psi\,(Z) = \lg \left[\frac{a_0}{a_0 - a_1} - \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{u_0\, t}\right)^n}\right]$$

et en calculant le coefficient K défini plus haut, on aura:

$$\varepsilon = \frac{U_a - U}{U} = \frac{n+1}{K\,n} - 1\,. \tag{14}$$

Nous avons déterminé graphiquement ce coefficient K et l'erreur correspondante pour différentes valeurs de n, pour $a_0/a_1 = 5$. Cette erreur est encore négative et constamment supérieure à celle résultant de l'emploi de l'électrode idéale définie par la condition 2°) (fig. 4). Par contre, pour de petites valeurs du rapport a_0/a_1, cette erreur diminue. Elle augmente pour des valeurs

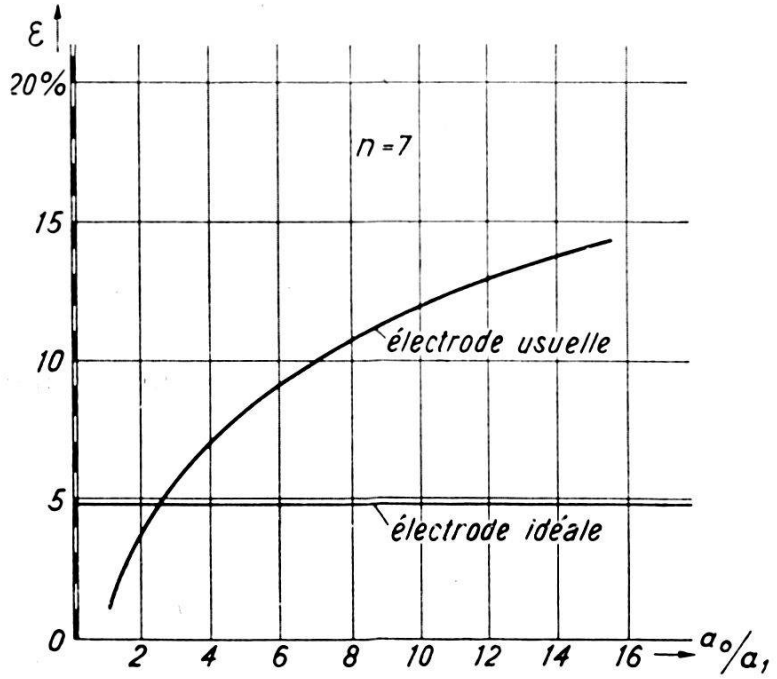

Fig. 9. Erreur pour différentes formes d'électrode.

croissantes de a_0/a_1, comme le montre la courbe fig. 9, établie pour $n = 7$.

Prenons maintenant le cas général où les électrodes n'occupent pas tout le diamètre de la conduite. Ceci revient à dire que pour des rayons r plus grands qu'un certain rayon r_a la conductibilité des électrodes est nulle.

L'intégrale 9) donnant la valeur du courant i aura donc comme limites:

$$\begin{array}{lll} r'' \text{ et } r' & \text{si} & r' < r_a \\ r'' \text{ et } r_a & \text{si} & r' \geqq r_a\,. \end{array}$$

Dans la représentation de la figure 7, ceci se traduit par le fait que les courbes y et y_1 ne dépassent pas l'ordonnée y_a. Il faut déterminer le centre de gravité de la surface $ABCD$.

Le calcul est en tous points semblable à celui qui a été fait plus haut. Le coefficient K est alors défini par

$$K = \frac{\int_1^{Z_a} \frac{1}{Z^2} \psi'(Z)\, dZ}{\int_1^{Z_a} \frac{1}{Z} \psi'(Z)\, dZ} \tag{15}$$

où Z_a s'obtient par la relation

$$Z_a = \sqrt[n]{1 - \left(\frac{r_a}{R}\right)^2}.$$

Appliquons ceci à l'électrode idéale, pour laquelle

$$\psi(Z) = 1 - Z^n \qquad \psi'(Z) = -n\, Z^{n-1}$$

$$K = \frac{n-1}{n-2} \frac{1 - Z_a^{n-2}}{1 - Z_a^{n-1}} \tag{16}$$

pour $r_a = R \quad Z_a = 0$

$$K = \frac{n-1}{n-2}$$

on retrouve bien la valeur calculée précédemment.

Pour $r_a = 0 \quad Z_a = 1 \quad K = 1$ et $U_a = u_0$.

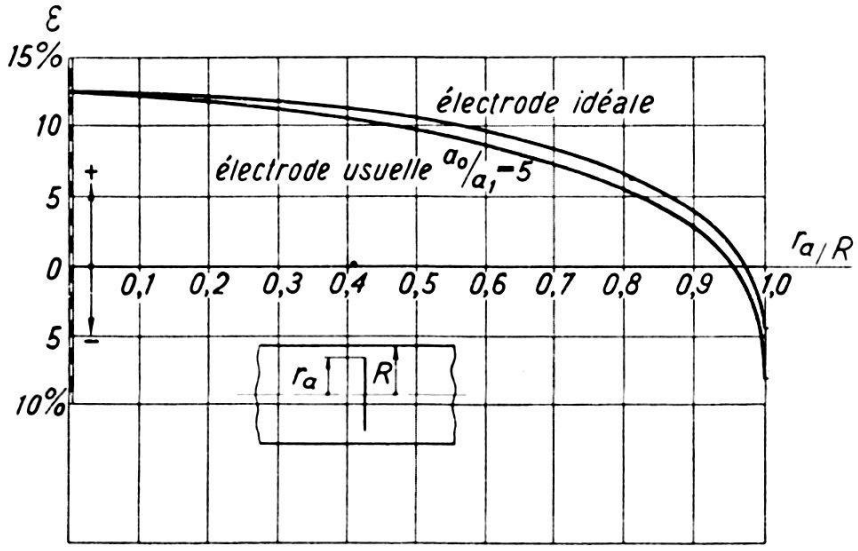

Fig. 10. Erreur pour des électrodes n'occupant pas tout le diamètre de la conduite.

La fig. 10 représente l'erreur ε en fonction de r_a pour $n = 7$, pour l'électrode idéale et pour l'électrode usuelle avec $a_0/a_1 = 5$.

On voit que lorsque r_a décroit, l'erreur diminue rapidement, passe par zéro pour $r_a = \sim 0{,}96\ R$, devient positive et atteint son maximum pour $r_a = 0$. L'électrode se réduit alors à un point

et la vitesse obtenue est évidemment celle qui règne en ce point, c'est-à-dire u_0.

Ceci nous conduit à étudier le cas où cette électrode ponctuelle, au lieu de se trouver au centre de la conduite, est placée à une distance r_p de l'axe. Cherchons en particulier quelle doit être cette distance r_p pour que l'erreur soit nulle.

Le caractère de la courbe relevée par le galvanomètre est ici différent. Au moment où le front avant du nuage atteint l'électrode, le courant passe brusquement à une certaine valeur, reste constant pendant le passage et retombe brusquement à zéro. On

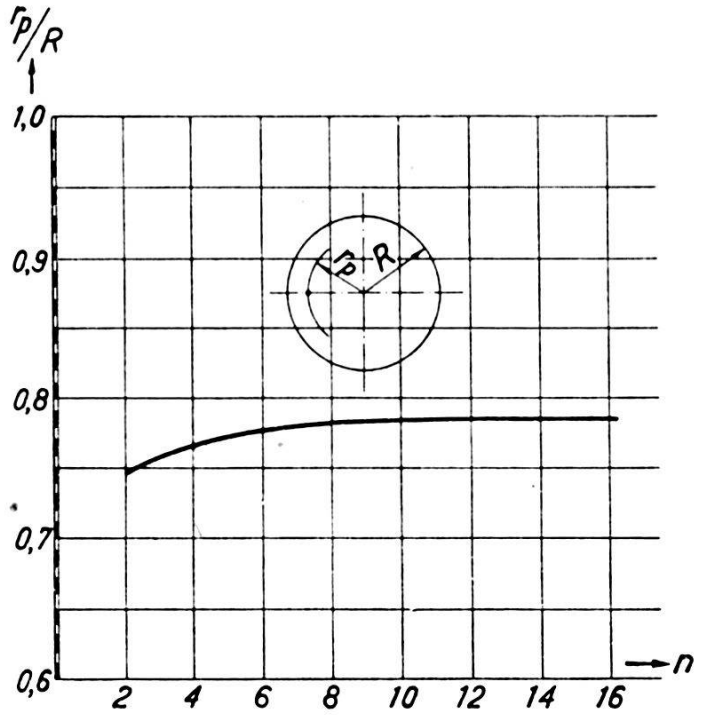

Fig. 11. Emplacement de l'électrode ponctuelle pour une erreur nulle.

n'obtient donc plus la branche asymptotique qui rend difficile la détermination du centre de gravité (fig. 14). On a simplement, à condition évidemment que r_p soit le même pour les deux électrodes :

$$v\,(T_2 - T_1) = X_2 - X_1, \qquad \text{d'où} \quad U_a = v$$

et comme

$$U = \frac{n}{n+1} \cdot u_0 \qquad v = u_0 \sqrt[n]{1 - \frac{r^2}{R^2}}$$

pour que l'erreur soit nulle, il faut que $U_a = U$

$$U_a = v = \frac{n}{n+1}\, u_0 = u_0 \sqrt[n]{1 - \frac{r^2}{R^2}} \quad \frac{r_p}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n}. \qquad (17)$$

Cette distance r_p varie relativement peu avec n (fig. 11). On peut donc s'attendre à ce que, pour une valeur de r_p donnant

une erreur nulle pour $n = 7$ par exemple, l'erreur reste faible si la répartition des vitesses est différente de celle définie par $n = 7$. La fig. 12 montre en effet que cette erreur est $< 1\%$ pour toutes valeurs de n supérieures à $n = 4$; elle est insignifiante pour des valeurs de n supérieures à 7.

Nous avons admis jusqu'ici que la concentration était la même en tous points du nuage formé par la solution.

En fait, alors même que cette constance de la concentration serait réalisée au moment de l'injection de la solution, la diffusion tendra à disperser le nuage, dont les limites seront de moins en

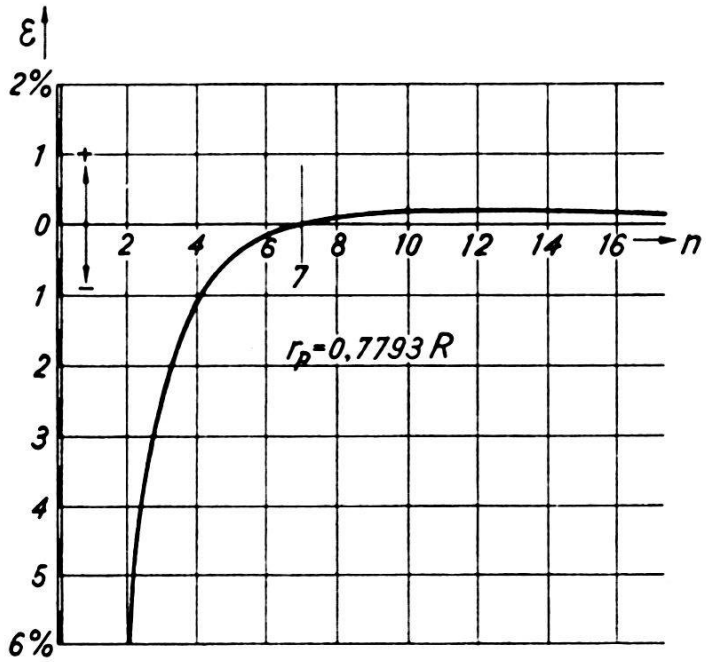

Fig. 12. Erreur en fonction de l'exposant n pour l'électrode ponctuelle.

moins bien définies. On peut prévoir qu'un premier effet de cette diffusion sera d'arrondir les angles vifs que présente théoriquement la courbe enregistrée par le galvanomètre, se rapprochant ainsi davantage des courbes relevées expérimentalement.

La diffusion dans un régime d'écoulement turbulent n'est plus un phénomène purement moléculaire, comme dans un fluide au repos. Les particules de matière sont transportées par des mouvements irréguliers (tourbillons) d'amplitude considérable à coté des mouvements moléculaires. Avec ces particules sont transportées également leurs propriétés particulières, conductibilité électrique, température, quantité de mouvement, etc. C'est donc le même mécanisme qui régit la diffusion proprement dite, la conductibilité thermique, la viscosité, etc.[1])

[1]) Handbuch der Physik, Bd. VII p. 138.

Imaginons maintenant une grandeur G quelconque attachée à chaque particule, et dont la valeur varie d'un point à l'autre.

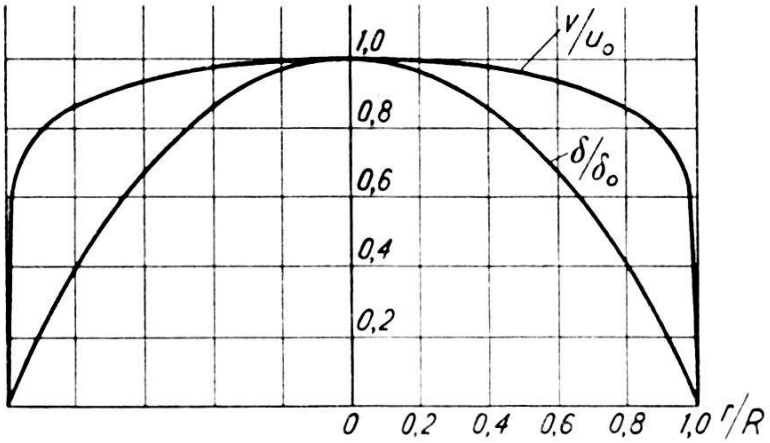

Fig. 13. Répartition des vitesses et du coefficient de diffusion.

La quantité de la grandeur G passant par unité de temps au travers de l'unité de surface sera

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \delta \frac{\partial G}{\partial \varkappa}$$

$\frac{\partial G}{\partial \varkappa}$ étant le gradient de variation de G suivant la normale à l'élément de surface, et le coefficient de diffusion δ étant le même quelle que soit la nature de G.

Si G est la quantité de mouvement ϱv, $\frac{\partial (\varrho v)}{\partial t}$ est l'effort tangentiel τ égal par définition à $\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial \varkappa}$ où η est le coefficient de viscosité. On tire de là:

$$\varrho \delta = \eta; \qquad \delta = \frac{\eta}{\varrho}.$$

On arrive donc à ce résultat important que le coefficient de diffusion est égal au quotient du coefficient de viscosité par la densité du fluide. Le coefficient de viscosité η n'est pas ici celui que l'on déduirait de mesures au viscosimètre, c'est un coefficient apparent, analogue à la „turbulence", introduite par Boussinesq, et qui peut être plusieurs milliers de fois supérieur au précédent.

Dans un tuyau cylindrique, l'effort tangentiel τ n'est pas constant en chaque point d'une section transversale; on montre aisément qu'il est proportionnel au rayon; c'est une conséquence du fait que la pression doit être constante sur tout plan perpendiculaire à l'axe de la conduite. On a:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{R} = \eta \frac{\partial v}{\partial r}$$

en admettant pour la répartition des vitesses la loi

$$v = u_0 \sqrt[7]{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

on a

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2}{7} u_0 \frac{r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-6/7}$$

d'où l'on tire

$$\eta = \frac{7}{2} \frac{\tau_0 R}{u_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{6/7}.$$

La perte de charge par unité de longueur est $\Delta p = \lambda \frac{\varrho U^2}{2D}$ ou encore $\Delta p = \tau_0 \frac{4}{D}$ où U est la vitesse d'écoulement moyenne et D le diamètre de la conduite. Blasius[1]) donne pour λ l'expression

$$\lambda = 0{,}316 \sqrt[4]{\frac{1}{\mathcal{R}}} \qquad \mathcal{R} = \text{chiffre de Reynolds.}$$

Tous calculs faits, on obtient pour le coefficient de diffusion δ:

$$\delta = 0{,}0605 \cdot \nu \cdot \mathcal{R}^{3/4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{6/7}. \tag{18}$$

Le chiffre de Reynolds est couramment de l'ordre de grandeur 10^6, alors

$$\delta = \sim 1910\, \nu \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{6/7}$$

donc près de 2000 fois plus grand que le coefficient de diffusion en eau calme.

Le fait que δ est une fonction de r/R rend impossible la solution générale du problème. Pour avoir cependant une idée de l'importance de cette diffusion, nous admettrons qu'elle n'agit que suivant l'axe de la conduite, négligeant ainsi la diffusion suivant le rayon. Cette diffusion radiale est d'ailleurs probablement faible, car au centre de la conduite où le coefficient de diffusion est élevé, le gradient de variation de la concentration est faible, par suite de la symétrie, et inversément, au voisinage de la paroi où le gradient est élevé, c'est le coefficient de diffusion qui est faible.

---

[1]) Handbuch der Physik, Bd. VII, p. 140.

Dans l'hypothèse d'une diffusion purement axiale, l'équation du problème est:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{19}$$

et sa solution générale peut s'écrire sous la forme[1])

$$c = \frac{1}{2\sqrt{\delta}\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(s) \left[e^{\frac{-(x-s)^2}{4\delta t}} + e^{\frac{-(x+s)^2}{4\delta t}} \right] ds \tag{20}$$

$c = f(x)$ étant la répartition de la concentration au temps $t = 0$, au moment de l'injection. A cet instant le nuage est limité par deux plans parallèles distants de e. Cette fonction $f(x)$ est donc la suivante:

$$\text{pour } -e/2 < x < +e/2 \qquad f(x) = c_0$$
$$x < -e/2\,;\ x > +e/2 \qquad f(x) = 0$$

et l'équation 20 devient:

$$c = \frac{c_0}{2} \left[\Phi\left[\frac{\frac{e}{2} - x}{2\sqrt{\delta t}}\right] + \Phi\left[\frac{\frac{e}{2} + x}{2\sqrt{\delta t}}\right] \right] \tag{21}$$

où Φ représente l'intégrale d'erreur de Gauss[2])

$$\Phi(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z e^{-Z^2} dZ\,.$$

En introduisant dans cette équation la valeur de δ calculée plus haut, et en posant $x = vt$ pour tenir compte de la déformation du nuage, on peut calculer la concentration en chaque point de la conduite et à chaque instant, et de là il est facile de déterminer en fonction du temps le courant passant par l'électrode.

Il n'est guère possible ici de tirer des conclusions générales. Nous nous sommes bornés à calculer complètement un exemple numérique sur les données suivantes:

Diamètre de la conduite $D = 5{,}5$ m
Vitesse moyenne $U = 3{,}1$ m/sec.
Durée d'injection 0,97 sec. Longueur du nuage $e = 3$ m.

La première électrode se trouve à 17 m, la seconde à 54 m. de la section d'injection.

---

[1]) Courant und Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I, p. 61. J. Springer, Berlin.

[2]) Jahnke und Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. B. G. Teubner, Leipzig, 1928.

Le coefficient de diffusion est:

$$\delta = \delta_0 (1 - r^2/R^2)^{6/7} \quad \delta_0 = 0{,}0605 \cdot \nu \cdot \mathcal{R}^{3/4} \quad \nu = 0{,}01 \quad \mathcal{R} = 1{,}705 \cdot 10^7$$
$$\delta_0 = 160{,}5 \text{ cm}^2/\text{sec.}$$

La fig. 14 montre la courbe de courant telle qu'elle serait enregistrée par une électrode ponctuelle placée à une distance

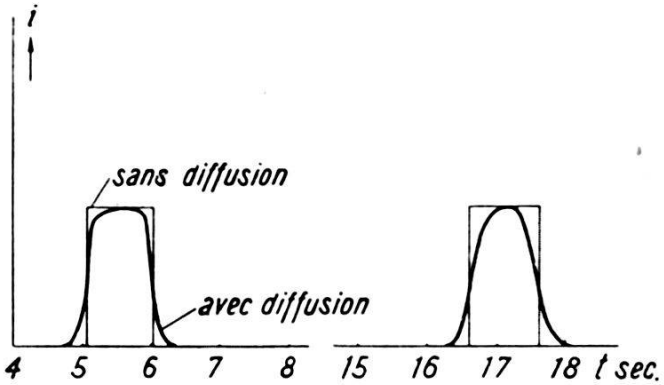

Fig. 14. Courbe de courant pour une électrode ponctuelle.

$r_p = 0{,}8\ R$ de l'axe de la conduite. On voit que la diffusion a pour effet d'arrondir les angles et d'allonger cette courbe, sans cependant en déplacer sensiblement le centre de gravité.

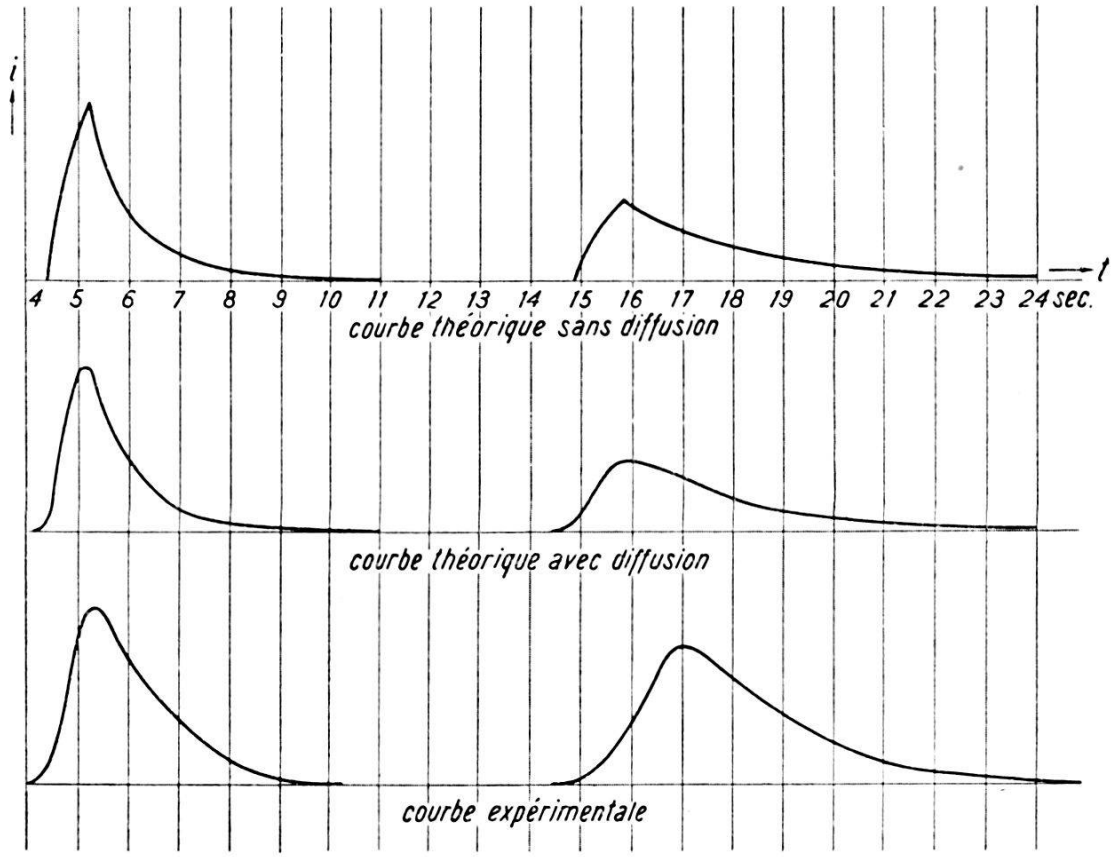

Fig. 15. Courbes de courant pour électrode usuelle.

Dans la fig. 15 on a porté cette même courbe telle qu'elle serait enregistrée par une électrode occupant toute la section de

la conduite. Ici encore la diffusion n'a pas grande influence. Des deux courbes calculées en tenant compte de la diffusion, on déduit une vitesse d'écoulement moyenne de 2,96 m/sec., diffèrant de 0,2% de celle que la théorie élémentaire laisse prévoir, et cette différence est d'ailleurs inférieure à la précision du calcul.

Malgré la valeur élevée du coefficient de diffusion dans ce cas particulier, cette diffusion ne modifie pas sensiblement les résultats numériques obtenus précédemment. Par contre elle permet de représenter beaucoup plus exactement le phénomène réel, ainsi que le montre la troisième courbe de la fig. 15, tirée d'une bande d'enregistrement dont la fig. 16 est le fac-simile. Cette bande

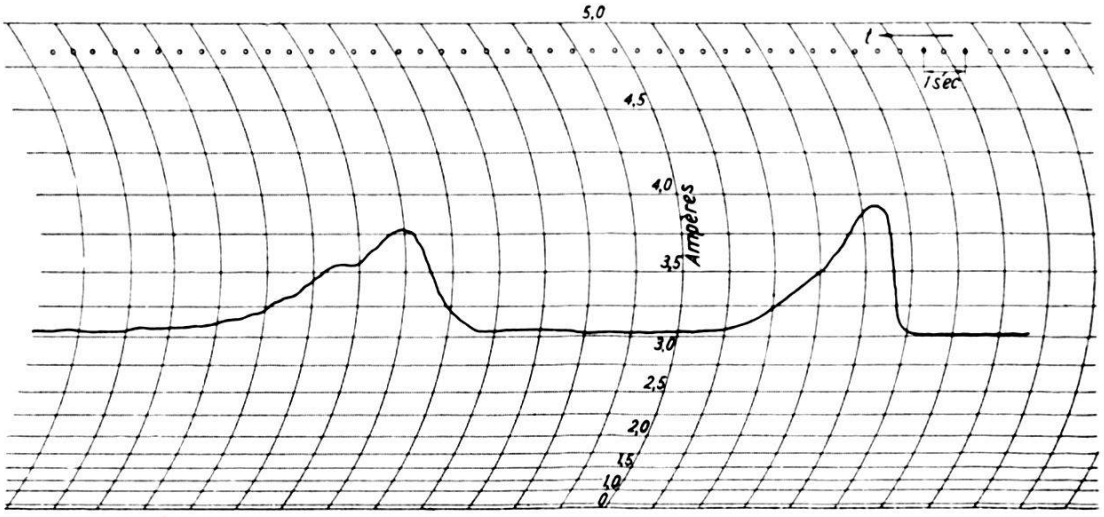

Fig. 16. Fac-simile d'une bande de galvanomètre enregistreur.

a été obtenue au cours d'essais sur une conduite satisfaisant à peu de chose près aux conditions que nous avons admises; elle présente par rapport à la courbe théorique, sinon une identité absolue à laquelle on ne pouvait s'attendre, tout au moins une similitude de caractère qui permet de penser que nos raisonnements sont justifiés.

Conclusions. Nous avons, à la base de cette étude, fait l'hypothèse que les divers appareils nécessaires à l'application de la méthode d'Allen fonctionnaient de façon irréprochable et théoriquement parfaite. Ceci étant admis, nous avons montré que les diverses erreurs qui peuvent se produire dépendent essentiellement de la répartition des vitesses d'écoulement suivant le diamètre de la conduite, et de la forme des électrodes. Il est possible théoriquement, pour une loi de répartition donnée, de choisir une forme d'électrode telle que l'erreur soit nulle. Mais si la répartition attendue n'est pas réalisée, l'erreur réapparait. On arrive donc à la conclusion que pour faire une mesure avec quelque certitude, il est nécessaire de connaitre cette répartition des vitesses.

La forme d'électrode qui donne théoriquement les meilleurs résultats, est l'électrode ponctuelle placée à une distance 0,75—0,8 R de l'axe de la conduite; comme on l'a vu, de fortes différences dans la loi de répartition des vitesses n'occasionnent qu'une erreur minime, à condition toutefois que l'écoulement soit parfaitement symétrique.

Des mesures très soignées, effectuées sur la conduite d'une grande usine, ont montré que ce n'est généralement pas le cas. La section de mesure se trouvait au milieu d'un tronçon rectiligne de 220 m de longueur, par conséquent très favorablement située; la mesure a été faite au moulinet système Dufour, et comportait 38 points répartis sur deux diamètres perpendiculaires. La répartition s'est trouvée être parfaitement dissymétrique, aussi bien sur le diamètre horizontal que vertical. Les résultats de 4 mesures effectuées sur les deux diamètres à une même distance de l'axe diffèrent entre eux de plus de 4%; par contre leur moyenne est assez exactement représentée par la formule 1) que nous avons admise

$$v = u_0 \sqrt[n]{1 - \frac{r^2}{R^2}}$$

où n aurait les valeurs suivantes correspondant aux vitesses d'écoulement au centre de la conduite u_0:

u_0	n	R
0,81 m/sec.	5,65	$1{,}51.10^6$
1,39 ,,	5,80	$2{,}61.10^6$
2,22 ,,	6,50	$4{,}23.10^6$
2,56 ,,	6,75	$4{,}91.10^6$

Avec une telle dissymétrie dans la répartition des vitesses, la méthode d'Allen utilisant une seule électrode ponctuelle donnerait des résultats tout à fait incertains. Il serait préférable d'utiliser une électrode annulaire de rayon 0,77 R (fig. 17). La vitesse que l'on mesurerait ainsi serait non pas exactement la moyenne des vitesses régnant en chaque point de cette électrode, mais une valeur voisine, qui dans ce cas particulier n'en diffère que de 0,3%.

Nous avons montré que même en se plaçant dans les conditions les plus favorables au point de vue de la régularité de l'écoulement, du fonctionnement parfait des appareils, etc., la méthode conduisait à des résultats entachés d'erreurs, dont il n'est guère possible de prévoir la grandeur, mais qui peuvent atteindre plusieurs pour cent. En ce qui concerne les phénomènes

d'écoulement, nous avons fait le minimum d'hypothèses arbitraires. Tout au plus pourrait-on objecter que la forme initiale du nuage n'est pas aussi simple que nous l'avons admis; dans ce cas nos raisonnements conduiraient d'ailleurs aux mêmes résultats généraux. Les calculs numériques que nous avons faits n'ont de valeur qu'à titre d'exemple; il serait parfaitement illusoire de vouloir s'en servir pour corriger des résultats expérimentaux.

Des essais de laboratoire à petite échelle ont montré quelquefois une assez bonne concordance entre la méthode d'Allen et des mesures au déversoir. Il est donc probable que les causes

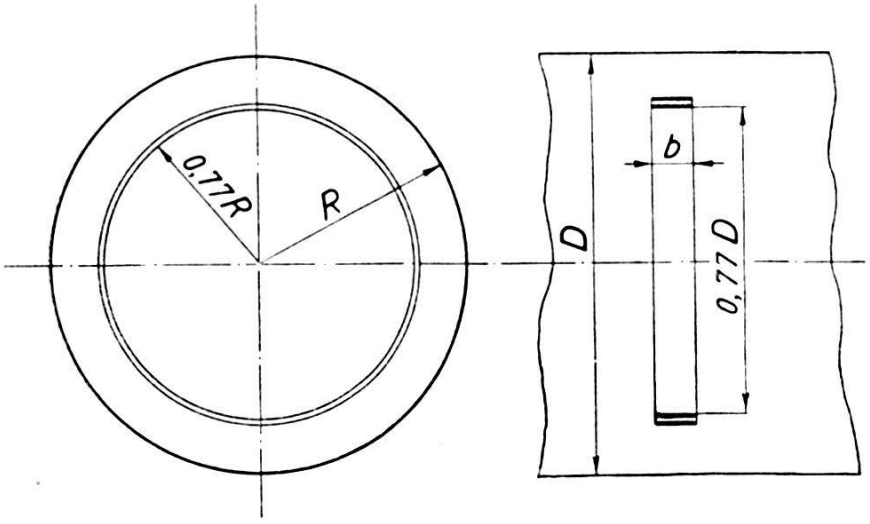

Fig. 17. Projet d'électrode réduisant les erreurs.

d'erreur que nous avons signalées ne sont pas les seules, et il peut se produire une neutralisation entre les différentes erreurs.

Quoiqu'il en soit, cette méthode ne parait pas encore à l'abri de toute critique. Il sera certainement possible de trouver des dispositifs et des formes d'électrode tels que l'erreur soit réduite au minimum. De même l'appareillage actuellement en usage est susceptible d'être considérablement amélioré. La méthode présente d'autre part tant d'avantages essentiels — au premier rang desquels nous mettrons la possibilité d'effectuer un grand nombre de mesures en peu de temps — que même dans sa forme actuelle elle rendra de grands services chaque fois qu'il suffira de connaître le débit à quelques pour cent près. Mais seuls des essais comparatifs très nombreux et très variés permettront de juger si elle est applicable également aux cas où une haute précision est nécessaire.

Qu'il nous soit permis d'exprimer ici à M. l'ingénieur en chef Ackeret notre reconnaissance pour les nombreux conseils qu'il nous a donné au cours de l'élaboration de ce travail.