

<b>Zeitschrift:</b>	Helvetica Physica Acta
<b>Band:</b>	2 (1929)
<b>Heft:</b>	VII
<b>Artikel:</b>	Contribution expérimentale à l'étude énergétique des phénomènes d'imbibition
<b>Autor:</b>	Guye, C.E. / Saini, Hugo
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-109456">https://doi.org/10.5169/seals-109456</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Contribution expérimentale à l'étude énergétique des phénomènes d'imbibition

par C. E. Guye et Hugo Saini.

(21. IX. 1929.)

*Sommaire.* Etude expérimentale comparative des conditions de propagation d'un liquide (pétrole, vaseline, eau) dans des bandes poreuses (papier buvard) disposées soit verticalement soit horizontalement.

### Introduction.

Dans trois notes publiées précédemment<sup>1)</sup>, l'un de nous a recherché, par des considérations d'énergétique, quelles pourraient être les limites possibles d'ascension de la sève dans les végétaux de grande hauteur. Les considérations et les formules développées dans ces notes étaient relatives à un cas limite; celui où l'énergie rendue disponible par les phénomènes qui déterminent l'ascension (concentration osmotique, imbibition, reconstitution de la couche capillaire superficielle d'équilibre, etc.) est totalement utilisée à vaincre la pesanteur et les forces de viscosité développées par le mouvement même du liquide. Les formules développées supposaient en outre que le mouvement du liquide était suffisamment lent pour qu'on pût à chaque instant négliger les forces d'inertie; enfin elles supposaient que la progression du liquide était telle qu'on pût considérer en arrière du front de propagation l'état de saturation finale comme pratiquement atteint. On voit par ce qui précède qu'il s'agit là d'un cas limite théorique très particulier dans lequel on suppose qu'il existe une force de succion localisée à chaque instant sur le front de propagation et qui détermine ainsi l'ascension d'une colonne liquide que l'on peut considérer approximativement comme cylindrique et dont le déplacement introduit une force résistante proportionnelle à la vitesse de ce déplacement.

<sup>1)</sup> C. E. GUYE. Quelques problèmes d'énergétique en relation avec le problème de l'ascension de la sève. (1ère note) Arch. Sc. phys. et nat., 5me période, vol. 7, 1925, suppl. p. 39, séance du 6 mars 1925. (2me note) Arch. Sc. phys. et nat. (5), vol. 7, 1925, suppl. p. 63, séance du 16 avril 1925. — Ascension spontanée d'un liquide le long de la paroi qu'il mouille. Arch. Sc. phys. et nat. (5), vol. 7, 1925, suppl. p. 78, séance du 7 mai 1925.

Appliquées au cas de l'ascension spontanée d'un liquide le long de la paroi qu'il mouille ces hypothèses conduisaient aux relations suivantes<sup>1)</sup>:

$$E_0 = \varrho gh + A \eta hv \quad (1)$$

$$t = \frac{A \eta}{(\varrho g)^2} \left\{ E_0 \log \frac{E_0}{E_0 - \varrho gh} - \varrho gh \right\} \quad (2)$$

et par développement du logarithme en série à une expression de la forme:

$$t = Mh^2 + Nh^3 + Ph^4 + \dots \quad (3)$$

Les coefficients  $M$ ,  $N$ ,  $P$  étant:

$$M = \frac{A \eta}{2 E_0}; \quad N = \frac{A \eta}{3 E_0^2} \varrho g; \quad P = \frac{A \eta}{4 E_0^3} (\varrho g)^2.$$

Dans ces relations  $E_0$  représentait l'énergie maximum libérée lors de l'imbibition de l'unité de volume,  $\varrho$  la densité du liquide;  $g$  l'accélération de la pesanteur;  $h$  la hauteur atteinte par le liquide à l'instant  $t$  considéré;  $A$  un coefficient dépendant des unités choisies;  $\eta$  le coefficient de viscosité du liquide et  $v$  la vitesse d'ascension. Nous reviendrons sur ces diverses relations au cours de notre exposé théorique.

Le but de ce travail était donc de rechercher d'abord dans quelles limites les considérations précédentes qui ont l'avantage de conduire à des formules très simples sont satisfaites par l'expérience.

Nous avons choisi pour ces démonstrations non pas l'ascension par étalement d'un liquide sur une surface mouillée par le liquide, mais *l'ascension par imbibition* dans des bandes poreuses. Dans ce dernier cas, les énergies en jeu sont généralement plus considérables, et il est relativement aisé de se placer dans de bonnes conditions expérimentales. On sait en effet que l'étalement d'un liquide sur une surface dépend dans une large mesure du degré de propreté de cette surface et qu'il est très délicat de la maintenir dans cet état. D'ailleurs la théorie énergétique et les formules développées antérieurement conservent la même forme générale dans un cas comme dans l'autre.

Nos expériences ont porté sur la propagation de l'imbibition dans des bandes poreuses (papier et papier buvard) immergées par l'une de leurs extrémités dans un liquide.

<sup>1)</sup> Afin de rendre plus aisée la comparaison de ces relations avec celles que nous avons déduites de nos expériences, nous avons, dans ce travail, unifié autant que possible les notations.

PREMIÈRE PARTIE.

**Considérations théoriques sur l'imbibition et le mouvement des liquides dans les corps poreux.**

**1. Hypothèses fondamentales.**

Il convient de montrer d'abord comment les hypothèses énoncées ci-dessus doivent être précisées dans le cas particulier de l'imbibition.

*a) Corps poreux.*

Rappelons d'abord que l'on désigne sous le nom de corps poreux, des corps tels que les éponges, la pierre ponce, la craie, le bois, les tissus, le buvard, etc.; c'est-à-dire des corps pourvus de lacunes intérieures plus ou moins grandes, naturelles ou accidentielles.

Un corps poreux possède donc un volume  $\varphi$  accessible au liquide imbibant, volume pouvant d'ailleurs varier d'un liquide à l'autre pour un même corps poreux. Conformément à nos hypothèses de début, nous supposerons que l'imbibition, sinon totalement du moins pratiquement, est complète, en arrière du front de propagation du liquide, et qu'elle est nulle en avant de ce front, de sorte qu'à chaque instant le corps poreux se trouve divisé en deux parties, l'une pratiquement entièrement imbibée, l'autre totalement sèche. Nous verrons dans la suite que cette hypothèse et les conséquences qui en résultent ne sont applicables que dans des limites assez étroites de propagation; elle constitue néanmoins une première approximation qui simplifie considérablement la théorie pour le début de l'ascension.

*b) Energie disponible.*

Nous avons admis en outre que l'énergie  $E_0$  libérée par l'imbibition d'un  $\text{cm}^3$  de liquide est proportionnelle au volume accessible au liquide, c'est-à-dire au volume de liquide imbibant, lequel peut être déterminé par des pesées avant et après imbibition. De plus, on peut admettre que cette énergie libérée est une fonction croissante de l'état de dessication de la substance envisagée lorsque l'imbibition n'est que partielle; que c'est une fonction de la nature du corps poreux, de sa structure, de la nature du liquide, ainsi que de la température.

L'énergie  $E_0$  ainsi libérée par l'imbibition d'un  $\text{cm}^3$  de liquide pourra, dans le cas le plus général, être utilisée: *a)* à produire une variation d'énergie cinétique du liquide en mouvement

$(W_1 - W_0)$ ; b) à accomplir un travail  $\mathcal{T}$  contre les forces extérieures (par exemple contre la pesanteur et les forces de viscosité développées par le mouvement du liquide). En outre, une partie  $Jq$  de cette énergie pourra se transformer directement en chaleur; c'est-à-dire qu'elle sera libérée en pure perte.

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie, on aura donc:

$$E_0 = (W_1 - W_0) + \mathcal{T} + Jq_1. \quad (4)$$

Il est clair que, suivant les dispositifs expérimentaux adoptés, nous pourrons faire en sorte que les unes ou les autres de ces énergies soient nulles ou négligeables. Si, par exemple, il n'y a pas entre l'état initial et l'état final de variation de force vive et si le travail contre les forces extérieures est nul, on aura:

$$W_1 - W_0 = 0 \quad \mathcal{T} = 0.$$

Dans ces conditions, la totalité de l'énergie disponible se transforme en chaleur et l'on a:

$$E_0 = Jq_0.$$

C'est ce qui se produit lorsque l'imbibition a lieu au sein d'un calorimètre, sans ascension appréciable du liquide.

Cette détermination calorimétrique de  $E_0$  a fait l'objet d'un travail spécial effectué par l'un de nous en complément de cette étude<sup>1)</sup>; nous en résumerons plus loin les principaux résultats.

D'autre part, les vitesses de propagation observées dans toutes nos expériences sont si faibles que l'on peut, sans inconvénient, négliger complètement la force vive du liquide et ses variations en regard des autres énergies en jeu. Dans ces conditions la relation (4) se réduit à:

$$E_0 = \mathcal{T} + Jq_1. \quad (5)$$

On remarquera que  $E_0$  n'est autre que la variation d'énergie interne  $U_0 - U_1$  avant et après l'imbibition d'un  $\text{cm}^3$  de liquide. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

## 2. Mouvement d'un liquide dans une bande poreuse.

Nous allons maintenant préciser la nature des travaux effectués dans le cas où le liquide progresse par imbibition le long d'une bande poreuse, en supposant que l'imbibition est pratiquement totale, en arrière du front de propagation.

<sup>1)</sup> H. SAINI, les résultats complets de cette étude seront publiés ultérieurement.

a) *Mouvement ascendant dans une bande verticale.*

Soit une bande poreuse verticale de longueur indéfinie, plongeant par sa partie inférieure dans un liquide capable de l'imbiber. Le liquide va s'élever spontanément dans ce corps poreux, conformément aux hypothèses formulées plus haut. Pour chaque élément de volume  $d\varphi$  imbibé, il y aura une libération d'énergie  $E_0 d\varphi$  disponible.

Les travaux  $d\tau$  effectués dans ce cas contre les forces extérieures sont de deux sortes. Il y aura un travail effectué contre la pesanteur représenté par  $d\tau_p$  et un travail contre les forces de viscosité (ou travail de frottement), représenté par  $d\tau_\eta$ . Nous avons alors:

$$d\tau = d\tau_p + d\tau_\eta. \quad (6)$$

Evaluons séparément ces deux travaux.

L'expression du travail de pesanteur  $d\tau_p$ , lorsque le liquide étant à une hauteur  $h$ , s'élève d'une hauteur  $dh$ , sera:

$$d\tau_p = (\varepsilon lh \varrho \cdot g) dh, \quad (7)$$

où  $\varepsilon$  représente l'épaisseur du liquide dans la bande, épaisseur supposée constante sur toute la longueur imbibée,  $\varrho$  la densité absolue du liquide,  $l$  la largeur de la bande,  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Pour le travail de viscosité, nous supposerons qu'il est de la forme:

$$d\tau_\eta = (A_0 \varepsilon lh v) dh = (A_0 \varphi v) dh. \quad (8)$$

$\varepsilon lh$  représente le volume total du liquide qui imbibe la bande à un instant donné.

$v$  est la vitesse de propagation du liquide dans la bande; vitesse supposée constante tout le long de la bande à l'instant considéré.

$A_0$  est le frottement créé par le liquide circulant avec une vitesse unité dans le volume unité<sup>1)</sup>.  $A_0$  dépend de la nature du corps poreux, de la nature du liquide, de sa température.

L'expression  $A_0 \varphi v$  représente donc la force de frottement créée par le liquide circulant avec une vitesse  $v$  dans un volume  $\varphi$ .

Pour mettre en évidence la part qui revient à la nature du liquide, nous posons:

$$A_0 = A\eta. \quad (9)$$

<sup>1)</sup> Dimensions de  $A_0$  et de  $A$ . — Nous avons vu que  $A_0 \varphi v$  était la force de frottement; d'où pour les dimensions de  $A_0$   $[A_0] = ML^{-3} T^{-1}$ . Pour  $A$  nous aurons  $[A] = L^{-2}$ . Car on sait que  $[\eta] = ML^{-1} T^{-1}$ .

$A$  étant le coefficient de résistance du corps poreux;  
 $\eta$  le coefficient de viscosité du liquide;  
d'où pour le travail de viscosité:

$$d\tau_\eta = (A \eta \varepsilon l h v) dh. \quad (10)$$

Nous aurons donc pour la somme des deux travaux:

$$d\tau = (\varepsilon l h \varrho g) dh + (A \eta \varepsilon l h v) dh.$$

D'autre part, nous savons que, pour chaque élément de volume imbibé, il y a libération d'une énergie  $E_0 d\varphi$ . Nous aurons donc dans le cas le plus général (4) la relation:

$$E_0 d\varphi = dW + J q_1 d\varphi + (\varepsilon l h \varrho g) dh + (A \eta \varepsilon l h v) dh. \quad (11)$$

Cette équation relie les différents travaux et énergies pouvant se manifester lors du mouvement ascendant. Ainsi que nous l'avons dit, l'expérience ayant montré que la vitesse était petite, nous pourrons négliger l'énergie cinétique  $W$  du système, ou, ce qui revient au même, négliger les travaux des forces d'inertie. L'équation (11) devient alors:

$$E_0 d\varphi = J q_1 d\varphi + (\varepsilon l h \varrho g) dh + (A \eta \varepsilon l h v) dh. \quad (12)$$

Nous voyons que l'énergie disponible  $E_0 d\varphi$  est utilisée de deux façons différentes. Une partie sert à effectuer des travaux mécaniques, une autre partie est convertie directement et inutilement en chaleur<sup>1)</sup>.

Rapportée à l'unité de volume de liquide, cette équation donne:

$$E_0 - J q_1 = \varrho g h + A \eta h v. \quad (I)$$

elle se réduit à:

$$E_0 = \varrho g h + A \eta h v \quad (II)$$

dans le cas limite où toute l'énergie libérée serait utilisée au travail d'ascension et de déplacement du liquide. C'est le cas envisagé antérieurement par l'un de nous.

On remarquera d'abord que le second membre de l'équation (I) représente l'énergie disponible utilisée au travail d'ascension et de circulation du liquide. Cette énergie n'est pas nécessairement constante<sup>1)</sup>; elle doit vraisemblablement dépendre des conditions particulières de l'expérience et notamment de la hauteur

<sup>1)</sup> Voir les considérations thermodynamiques pages 452 et 453.

atteinte par le liquide. Toutefois les expériences nous ont montré que lorsque  $A_0$  est constant, c'est-à-dire au début de l'ascension,  $E_0 - Jq_1$  varie très approximativement en fonction linéaire de  $h$ . Nous pouvons donc poser:

$$E_0 - Jq_1 = \mathcal{E}_0(1 + k_1 h) = E_1, \quad (13)$$

et l'équation (I) devient:

$$\mathcal{E}_0 = (\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0)h + A \eta h \frac{dh}{dt}.$$

Cette équation s'intègre exactement comme l'équation (II) (*cf. éq. 2*) et l'on aura:

$$t = \frac{A \eta}{(\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0)} \left\{ \mathcal{E}_0 \log \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0 - (\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0)h} - (\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0)h \right\}. \quad (14)$$

Développée en série, elle devient:

$$t = M_1 h^2 + N_1 h^3 + P_1 h^4 + \dots, \quad (15)$$

dans laquelle les coefficients  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $P_1$ , etc., ont respectivement pour valeur:

$$M_1 = \frac{A \eta}{2 \mathcal{E}_0}; \quad N_1 = \frac{A \eta}{3 \mathcal{E}_0^2} (\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0); \quad P_1 = \frac{A \eta}{4 \mathcal{E}_0^3} (\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0)^2. \quad (16)$$

Ces relations nous montrent que dans ce cas particulier les courbes de propagation conservent la même allure que dans le cas particulier limite où la totalité de l'énergie libérée est utilisée au travail d'ascension (formules (1), (2) et (3), introduction).

Mais il importe de rappeler que les considérations qui précédent ne sont applicables que dans des limites assez étroites d'ascension. Il ne saurait être question en particulier de les appliquer à la détermination de la hauteur limite; car, ainsi que nous le verrons dans la partie expérimentale de ce travail, la supposition d'une imbibition quasi complète en arrière du front de propagation et par conséquent de la constance de  $A$  et de  $\varepsilon$ , est loin d'être vérifiée pour les grandes élévations. On remarquera enfin que, au début de l'ascension,  $h$  étant très petit, la relation (15) se réduit à:

$$t = M_1 h^2.$$

Les hauteurs d'ascension croissent proportionnellement à la racine carrée des temps écoulés et l'équation est celle d'une parabole.

b) *Mouvement du liquide dans une bande horizontale.*

Dans ce cas, le travail de la pesanteur est nul et l'équation (I) devient:

$$E_0 - Jq_2 = A \eta h \cdot \frac{dh}{dt} . \quad (\text{III})$$

Or, l'expérience montre que le second membre est très sensiblement constant ( $k_2 = 0$ ); l'intégration de l'équation (III) donne immédiatement:

$$t = \frac{A \eta}{2 [E_0 - Jq_2]} h^2 = M_2 h^2 \quad (17)$$

c'est l'équation d'une parabole.

Si maintenant l'on compare les mouvements ascendants et horizontaux tout au début de la propagation, le travail de la pesanteur étant négligeable, les deux mouvements devront se confondre. Il en résulte qu'au début,  $E_0 - Jq_1 = E_0 - Jq_2$ , d'où  $q_1 = q_2$  et  $M_1 = M_2$ . Ces mouvements se sépareront dès que la pesanteur agira d'une façon sensible sur le mouvement ascendant. L'expérience nous a montré que cette séparation des deux mouvements se produit à une hauteur de quelques centimètres avec le dispositif que nous avons employé.

### 3. Considérations thermo-dynamiques.

*Premier principe.* Considérons un système formé d'une part d'un  $\text{cm}^3$  de liquide et d'autre part à une hauteur  $h$  d'un élément de bande poreuse capable de l'absorber par imbibition totale (état initial) et désignons par  $U_0$  l'énergie interne de ce système.

Après l'imbibition (état final), l'énergie du système sera  $U_1$  et le premier principe donne immédiatement:

$$U_0 - U_1 = \mathcal{Z} + Jq = E_0 ,$$

$\mathcal{Z}$  étant le travail total nécessaire par l'ascension du liquide que nous avons divisé en deux parties.  $\mathcal{Z}_p$  le travail contre la pesanteur qui, pour des mouvements suffisamment lents, peut être considéré comme réversible et  $\mathcal{Z}_n$  le travail contre les forces de viscosité toujours irréversible.

Nous verrons qu'au début de l'ascension, c'est le second de ces deux travaux qui est le plus important, mais au fur et à mesure que l'on considère des hauteurs  $h$  plus grandes, c'est le travail contre la pesanteur qui tend à devenir prédominant;

d'autant plus que le facteur  $h \frac{dh}{dt}$  du terme relatif au travail de viscosité va rapidement en diminuant au fur et à mesure que la vitesse d'ascension diminue.

Si l'on appelle rendement le rapport  $\frac{\mathcal{C}_p + \mathcal{C}_\eta}{U_1 - U_0}$  de l'énergie utilisée à l'ascension à la variation d'énergie interne  $U_1 - U_0$ , ce rapport augmentera au fur et à mesure que l'on considère l'imbibition à une plus grande hauteur.

*Second principe.* Le second principe peut seul nous indiquer les limites de ce rendement. Nous supposerons pour cela que les transformations, particulièrement lorsqu'elles sont lentes, se font de façon isotherme et que, de plus, une partie du travail effectué demeure irréversible tant que la vitesse de propagation n'est pas nulle, et qu'il existe des forces de viscosité.

Dans ces conditions, on sait que le travail produit est plus petit que la variation de l'énergie utilisable, soit:

$$\mathcal{C} < F_0 - F_1$$

soit

$$\mathcal{C} < (U_0 - JTS_0) - (U_1 - JTS_1).$$

Ce n'est donc que pour un mouvement théoriquement infiniment lent que l'on aura l'égalité:

$$\mathcal{C} = F_0 - F_1.$$

On s'approchera donc d'autant plus de cette égalité que le mouvement d'ascension sera plus lent, c'est-à-dire que la hauteur imbibée de la bande sera plus grande.

On remarquera enfin que l'on ne pourrait utiliser la totalité de variation de l'énergie interne que si l'entropie du système envisagé demeurait invariable, ce qui semble d'ailleurs peu vraisemblable. On aurait alors:

$$\mathcal{C} = U_0 - U_1 = E_0.$$

Pour déterminer la limite possible, il faudrait donc imaginer une transformation isotherme et réversible faisant passer le système de l'état (0) à l'état (1), et qui donnerait:

$$S_1 - S_0 = \frac{1}{T} \int_0^1 dQ.$$

Cette relation permettrait de déterminer le maximum d'énergie

utilisable, c'est-à-dire susceptible d'être transformée en travail mécanique contre la pesanteur, soit:

$$\mathcal{Z} = U_0 - U_1 - JT(S_1 - S_0) = U_0 - U_1 - JQ.$$

Il n'est pas impossible que les données expérimentales qui résultent de nos expériences ne nous permettent d'aborder ce problème.

#### 4. Détermination de la constante $A$ en régime permanent.

Jusqu'à présent nous avons supposé connue la constante  $A$ . Nous croyons donc bien faire de compléter cet exposé en indiquant le principe de la méthode qui nous a permis de la déterminer dans le cas où l'imbibition peut être considérée comme pratiquement complète.

Considérons à cet effet une bande poreuse complètement imbibée formant siphon. Avec un tel système, on aura un écoulement constant, déterminé d'une part, par la pesanteur qui est la force motrice et, d'autre part, par le frottement du liquide dans la bande (force résistante). Comme précédemment, nous pouvons négliger les travaux des forces d'inertie car, avec notre dispositif, la vitesse d'écoulement est constante; elle est d'ailleurs très petite.

Soient alors:

$h_0$  la hauteur de chute;

$H$  la longueur totale de la bande;

$l$  la largeur de la bande;

$\varepsilon$  l'épaisseur constante du liquide dans la bande;

$\varrho$  la densité absolue du liquide;

$v$  la vitesse constante de circulation du liquide;

$m_1 = \varepsilon l \varrho v$  la masse de liquide débitée en une seconde;

$m = m_1 t$  la masse de liquide débitée en un temps quelconque.

Le régime étant permanent nous écrivons qu'il y a égalité entre le travail de la pesanteur et le travail des forces de frottement.

Soit:

$$\tau_p = mgh_0 = \varepsilon l \varrho v g h_0 t$$

le travail de la pesanteur correspondant à l'écoulement d'une masse  $m$ , et soit d'après ce qui a déjà été dit sur le frottement

$$\tau_f = A \eta \varepsilon l H v \int_0^h dh = A \eta \varepsilon l H v h$$

le travail des forces de frottement lorsque le liquide a parcouru

la distance  $h$ . En égalant ces deux travaux et en supprimant les facteurs communs, on a:

$$A \eta H v = \varrho g h_0, \quad (18)$$

car

$$\frac{h}{t} = v.$$

Cette équation régit la circulation du liquide dans la bande en régime permanent.

L'équation (18) nous donne la valeur du coefficient  $A$ , si l'on connaît la vitesse  $v$  du liquide dans la bande.

$$A = \frac{\varrho g h_0}{H v \eta}. \quad (19)$$

Pour déterminer la vitesse  $v$  écrivons l'expression de la masse  $m$  de liquide débitée en un temps  $t$ , on a:

$$m = m' v t,$$

$m'$  étant la masse de liquide contenue dans un centimètre de bande. On voit que  $m$ ,  $m'$  et  $t$  sont directement fournies par l'expérience,  $v$  est donc immédiatement connu.

Si l'on explicite la vitesse contenue dans l'équation (18), on a:

$$v = \frac{\varrho g}{A \eta} \cdot \frac{h_0}{H},$$

mais  $\frac{\varrho g}{A \eta}$  est une constante pour un liquide déterminé et un même corps poreux. Par conséquent, la vitesse est déterminée par le rapport  $\frac{h_0}{H}$  de la hauteur de chute à la longueur totale de la bande. Nous donnerons, dans la seconde partie de ce travail, des résultats expérimentaux montrant dans quelle mesure ces considérations ont été vérifiées.

## DEUXIÈME PARTIE.

### Etude expérimentale.

#### Chapitre I. — Dispositif expérimental.

##### 1. Propriétés requises pour le matériel expérimental.

Il résulte des essais préliminaires que le liquide et le corps poreux doivent avoir les propriétés suivantes: le liquide ne doit pas attaquer ni dissoudre le corps poreux; il doit être, si possible, un corps pur ou en tout cas un mélange ne laissant aucun dépôt dans le corps poreux. Enfin le liquide ne doit pas être

trop volatil, ni s'altérer au cours de l'imbibition qui peut durer plusieurs jours. Le corps poreux doit être homogène; en outre, après avoir été imbibé, il doit garder une certaine résistance mécanique pour supporter son propre poids.

Les liquides définitivement choisis ont été:

- 1<sup>o</sup> le pétrole ordinaire ou lampant;
- 2<sup>o</sup> l'huile de vaseline;
- 3<sup>o</sup> l'eau distillée.

Les liquides essayés et rejetés ont été: la glycérine, l'aniline, le benzène, le monobromure de naphtaline, la décaline, la tétraline, le chlorobenzène.

Le corps poreux définitivement adopté est un buvard anglais épais<sup>1)</sup>, découpé à la main en bandes de 150 à 200 cm. de long et de 1,7 cm. de large.

Des bandes d'étoffe diverses, coton, soie, etc., furent rejetées vu leur manque d'homogénéité et la discordance complète des résultats obtenus avec les divers échantillons.

## 2. Précision des expériences.

Comme on le verra dans le prochain chapitre, nos résultats sont connus avec une approximation moyenne de 1 à 5%. Celle-ci peut paraître faible au premier abord. Toutefois, si l'on tient compte de ce que la théorie n'est qu'approchée, que le buvard n'est pas parfaitement homogène; et de plus que les bandes coupées à la main n'ont pas des bords rigoureusement parallèles, mais légèrement sinueux, on voit que la précision obtenue est acceptable.

## 3. Dispositif expérimental.

### a) Pour l'étude du mouvement ascendant.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, nous avons utilisé des bandes de buvard de 1,7 cm. de large et de 150 cm. de long. Chaque bande est tendue dans un tube de verre de 3 cm. de diamètre et d'environ 160 cm. de long, fermé à sa partie supérieure par un bouchon de liège. Ceci pour éviter l'évaporation, l'oxydation et le dépôt de poussières sur le système. Les bandes sont graduées par des traits légers, tracés au crayon, et distants de un centimètre. De plus, pour chaque expérience, nous avons

<sup>1)</sup> Le buvard que nous avons utilisé pour ces essais nous a été fourni très obligeamment par la Maison Robert Craig Son (Ecosse) en rouleau d'un mètre de largeur atteignant une longueur d'environ cinq mètres; nous saissons cette occasion pour exprimer à la Maison Robert Craig nos sincères remerciements.

toujours utilisé une série de 3 tubes, plongeant dans la même cuvette. Au début de l'expérience, ces bandes sont donc imbibées simultanément.

*b) Pour l'étude du mouvement horizontal.*

Voici le dispositif utilisé (Fig. 1).

Dans un tube de verre  $T_1$  de 3 cm. de diamètre et d'environ 30 cm. de long, nous avons façonné deux encoches  $a$  et  $b$ , à arête parallèle, et étiré l'extrémité  $C$ , de façon à constituer un réservoir  $R_1$ . Le dessin montre la position du buvard ainsi que celle du liquide. Le zéro de la graduation est en 0 sur l'arête de l'encoche  $b$ . Le liquide part directement et horizontalement. A ce tube  $T_1$  nous adaptons un tube  $T_2$  de longueur voulue. Toutefois, il est utile de laisser (en  $d$ ) un intervalle de deux à trois

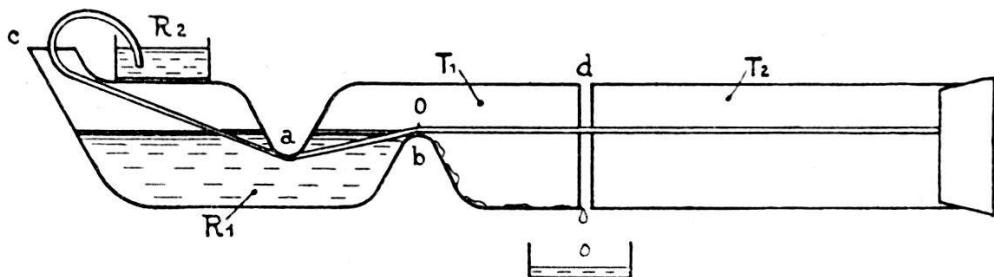


Fig. 1.

millimètres entre les deux tubes  $T_1$  et  $T_2$ , afin d'empêcher le liquide de s'écouler dans le tube  $T_2$ . Sinon arrivé à l'extrémité de celui-ci, il imbibera le bouchon, puis le buvard, réduisant ainsi la longueur utile du papier. Une fois l'expérience commencée, il faut assurer un niveau constant dans le réservoir  $R_1$ . Pour cela nous avons placé un cristallisoir  $R_2$ , légèrement surélevé à côté du tube. La communication est obtenue par un double ruban de buvard qui assure un débit très suffisant. Nous avons utilisé trois tubes, mis en expérience l'un après l'autre. Enfin les expériences horizontales et verticales débutaient toutes, le même matin, de sorte que les deux mouvements étaient placés dans les mêmes conditions extérieures.

*c) Mouvement vertical et horizontal simultané.*

Nous avons en outre réalisé le départ simultané du liquide dans le mouvement horizontal et vertical, ceci pour trouver le point de séparation des deux mouvements. Pour cela nous avons fixé, entre deux plaques de verre maintenues horizontales, l'ori-

gine d'une bande tendue verticalement et d'une bande tendue horizontalement. Du liquide introduit entre les deux plaques assure l'imbibition des bandes; nous avons ainsi un départ simultané. Cette expérience, qui est de courte durée, se fait à l'air libre.

## Chapitre II. — Détermination expérimentale du coefficient de résistance $A$ du corps poreux.

Les expériences ont été effectuées dans le buvard anglais avec le pétrole, l'huile de vaseline et l'eau distillée.

*Dispositif expérimental.* La bande de buvard complètement imbibée et disposée comme un siphon (cf. p. 454), est placée sous une cloche de verre. Celle-ci est tapissée intérieurement par trois couches de buvard complètement imbibées de liquide, ce qui garantit une atmosphère saturée.

La quantité de liquide débitée par la bande a été dans une première série d'expériences, déterminée par pesée toutes les 24 heures. L'écoulement est maintenu pendant une semaine, ce qui nous donne six lectures pour chaque bande. Dans une deuxième série d'expériences, le liquide débité arrive dans un tube de diamètre connu (0,2 à 0,5 cm. selon les liquides) et le niveau est noté d'heure en heure avec un cathétomètre. On a dans ces conditions un débit constant pendant les six jours d'observation.

De plus, avec le pétrole seulement, nous avons retourné la bande le troisième jour, obligeant ainsi le liquide à circuler en sens inverse. Là encore le débit s'est montré constant et le même qu'avant le retournement de la bande.

Les résultats obtenus, soit par pesée, soit par volume, concordent dans les limites d'homogénéité du papier et de régularité dans la largeur des bandes. Voici du reste le tableau I qui donne l'ensemble des résultats obtenus. Les grandeurs  $A_0$  et  $A$  sont calculées avec les éq. (9) et (19).

$\Theta$  étant la température ambiante;  $\eta$  le coefficient de viscosité;  $h_0$  la hauteur de chute;  $H$  la longueur totale de la bande;  $m_1$  la masse de liquide débitée en une seconde;  $v$  la vitesse du liquide.

Mentionnons encore deux résultats:

a) Nous avons voulu nous rendre compte, si le liquide qui a circulé à travers les bandes n'a pas été altéré par cette circulation (soit en dissolvant quelque composé fixé dans le buvard, soit au contraire en laissant un dépôt dans la bande). Pour cela nous avons déterminé le coefficient de viscosité du liquide re-

*Résultats obtenus en régime permanent.*

Tableau I.

No. de la bande	$\Theta$	$\eta$	$h_0$ cm.	$H$ cm.	$m_1$ gr/sec	$v$ cm/sec	$A_0$	$A$	Méthode
1 <sup>o</sup> Pétrole $\varrho = 0,8$								$A_{\text{moy}} = 3,815 \cdot 10^7$	
a	19 <sup>o</sup> C	0,0130	10	40	$2,69 \cdot 10^{-5}$	$3,90 \cdot 10^{-4}$	$5,03 \cdot 10^{-5}$	$3,87 \cdot 10^{-7}$	par pesée
b	19 <sup>o</sup>	0,0130	15	40	4,17 »	6,05 »	4,87 »	3,75 »	
c	19 <sup>o</sup>	0,0130	20	40	5,50 »	7,97 »	4,93 »	3,79 »	
d	19 <sup>o</sup>	0,0130	15	30	5,25 »	7,60 »	5,16 »	3,97 »	
e	22 <sup>o</sup>	0,0124	19	29	7,60 »	11,0 »	4,67 »	3,76 »	
f	23 <sup>o</sup>	0,0123	19,5	29	8,00 »	11,60 »	4,55 »	3,70 »	
g	20 <sup>o</sup>	0,0128	20	40	5,34 »	7,73 »	5,07 »	3,96 »	
h	20 <sup>o</sup>	0,0128	20	40	5,55 »	8,05 »	4,87 »	3,73 »	par volume
2 <sup>o</sup> Eau $\varrho = 1$								$A_{\text{moy}} = 3,62 \cdot 10^7$	
a	16 <sup>o</sup>	0,0111	15	40	$11,40 \cdot 10^{-5}$	$9,12 \cdot 10^{-4}$	$4,04 \cdot 10^{-5}$	$3,64 \cdot 10^{-7}$	par volume
b	20 <sup>o</sup>	0,0100	20	40	16,40 »	13,10 »	3,75 »	3,75 »	
c	22,5 <sup>o</sup>	0,0945	18,5	28,25	23,80 »	19,00 »	3,38 »	3,58 »	
d	23 <sup>o</sup>	0,0930	18,5	28,5	23,50 »	18,80 »	3,38 »	3,64 »	
3 <sup>o</sup> Huile $\varrho = 0,87$								$A_{\text{moy}} = 3,00 \cdot 10^7$	
a	16 <sup>o</sup>	0,1800	20	40	$2,60 \cdot 10^{-6}$	$3,61 \cdot 10^{-5}$	$11,80 \cdot 10^{-6}$	$3,10 \cdot 10^{-7}$	par pesée
b	20 <sup>o</sup>	0,317	20	40	2,94 »	4,08 »	10,45 »	3,30 »	
c	23 <sup>o</sup>	0,276	20	30	5,30 »	7,35 »	7,75 »	2,80 »	
d	23 <sup>o</sup>	0,276	20	30	5,25 »	7,30 »	7,80 »	2,82 »	

cueilli après une circulation à travers la bande et nous avons trouvé que ce coefficient est demeuré le même.

b) La pesée des bandes en régime permanent a donné le même poids de liquide par cm. que celui obtenu pour le début du mouvement en régime variable. Les épaisseurs d'imbibition sont donc les mêmes dans ces deux cas.

### Chapitre III. — Résultats expérimentaux avec le pétrole.

On verra dans ce chapitre que l'hypothèse de l'épaisseur  $\varepsilon$  constante ne se vérifie approximativement qu'au début du mouvement. Au delà de 25 cm., l'épaisseur  $\varepsilon$  varie notablement avec la distance.

Dans ces conditions, nous avons divisé, pour le mouvement ascendant seulement, les résultats de nos expériences en deux

parties. La première partie comprend les résultats concernant l'ascension jusqu'à 25 cm., puisque jusque là l'hypothèse de l'épaisseur constante est sensiblement vérifiée et que les équations du chapitre Ier s'y appliquent approximativement. La deuxième partie comprend les résultats concernant les mouvements de longue durée portant sur des longueurs imbibées supérieures à 25 cm.

### § 1. Etude de l'épaisseur du liquide dans la bande verticale.

#### a) En régime variable.

En examinant l'imbibition des bandes on peut constater que, à partir d'une hauteur d'environ 15 à 20 cm., l'épaisseur du liquide ne semble pas être constante tout le long de la bande. On se rend compte que, dans l'onde liquide qui avance, le front doit avoir une épaisseur moindre que le liquide situé en arrière de lui. Comme les considérations théoriques résumées dans la première partie sont basées sur l'hypothèse d'une épaisseur pratiquement constante, il faut chercher en premier lieu à nous rendre compte dans quelles limites cette hypothèse se vérifie.

Voici comment nous procédons pour cette vérification. Nous utilisons des bandes imbibées selon le processus habituel jusqu'à une hauteur  $h$  de 5 cm., 10 cm., 15 cm. et 20 cm. que nous pesons dans des flacons fermés. Cela nous donne l'épaisseur moyenne du liquide jusqu'à 5, 10, 15 et 20 cm. de hauteur.

Voici les résultats de ces pesées:

1 <sup>o</sup>	épaisseur saturant la bande . . . . .	$\varepsilon = 0,0440$ cm.
2 <sup>o</sup>	" moy. dans l'intervalle 0 : 5 cm.	$\varepsilon = 0,0430$ "
3 <sup>o</sup>	" " " " 0 : 10 " $\varepsilon = 0,0405$ "	"
4 <sup>o</sup>	" " " " 0 : 15 " $\varepsilon = 0,0420$ "	"
5 <sup>o</sup>	" " " " 0 : 20 " $\varepsilon = 0,0400$ "	"

L'examen de ces résultats montre que l'épaisseur moyenne peut être considérée comme approximativement constante jusqu'à 15 à 20 cm. Nous pourrons par conséquent utiliser dans ces limites les équations établies au chapitre précédent pour calculer les différentes grandeurs caractérisant ce mouvement.

D'autre part, pour les bandes imbibées sur une grande longueur ( $h = 130$  cm.) nous déterminons l'épaisseur en coupant la bande par segments de 10 cm. que nous pesons dans des flacons fermés. Cela nous donne la répartition de l'épaisseur du liquide dans la bande, pour une longueur et un temps d'imbibition bien déterminés (voir Tableau II 1<sup>er</sup> colonne et fig. 2).

Tableau II.

*Mouvement ascendant. (Pétrole).*

Résultats obtenus par la pesée des segments de 10 cm. de longueur.

$h_{\text{cm}}$	$\varepsilon$ Fig. 2.	$\varepsilon$ Courbe 1, fig. 3
0	0,0450 cm.	0,0480 cm.
5	0,0450 "	0,0480 "
15	0,0448 "	0,0470 "
25	0,0412 "	0,0456 "
35	0,0357 "	0,0375 "
45	0,0268 "	0,0300 "
55	0,0213 "	0,0240 "
65	0,0180 "	0,0200 "
75	0,0151 "	0,0187 "
85	0,0098 "	0,0143 "
95	0,0090 "	0,0136 "
105	0,0077 "	
115	0,0073 "	
125	0,0022 "	

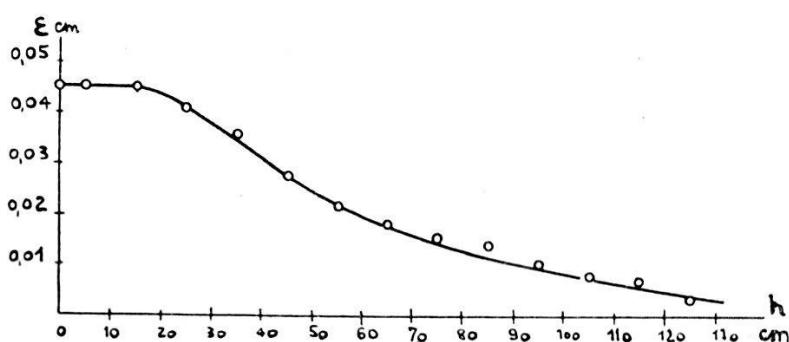


Fig. 2.

b) *Bandes de longueur finie.*

Nous avons encore voulu nous rendre compte des variations de l'épaisseur dans des bandes de longueur finie. Pour cela nous avons pris des bandes de 100 cm. de longueur, enfermées comme toujours dans un tube de verre. Nous les avons laissées s'imbiber selon le processus normal et après que le liquide fut arrivé à l'extrémité de la bande, nous avons encore laissé le système dans cet état, pendant un certain temps, sans le démonter.

Pour le mouvement vertical, le pétrole arrive à l'extrémité de la bande en 165 heures, c'est-à-dire en 7 jours environ. C'est seulement 11 jours après le début de l'ascension que nous avons

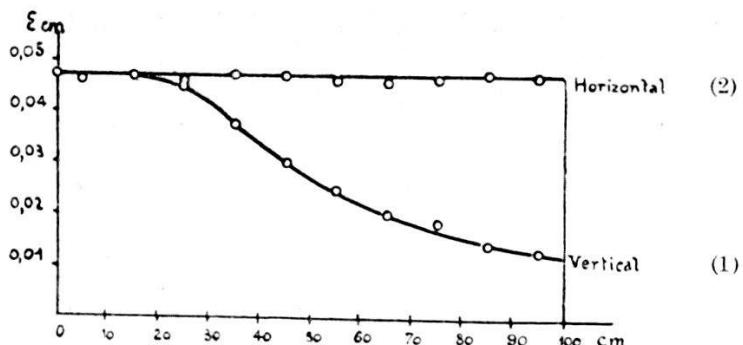


Fig. 3.

démonté les tubes et pesé les bandes. Le liquide a donc continué à se propager dans la bande pendant 4 jours encore.

La courbe 1 (Fig. 3), dont les épaisseurs sont inscrites dans le tableau II, donne la représentation de  $\varepsilon$  ainsi obtenu. On voit que même dans ce cas on n'arrive pas à obtenir une imbibition constante.

## § 2. Etude de l'épaisseur du liquide dans une bande horizontale.

### a) En régime variable.

Tout ce qui a été dit pour le mouvement ascendant reste vrai pour le mouvement horizontal. Voici les résultats (Fig. 4),

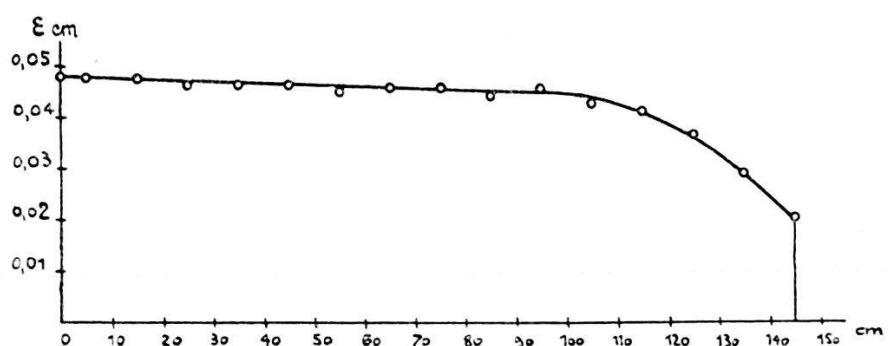


Fig. 4.

Tab. III 1<sup>re</sup> colonne) qui donnent l'allure de l'épaisseur  $\varepsilon$  en fonction de la distance  $h$ .

Tableau III.  
*Mouvement horizontal. Résultat des pesées.*

$h_{\text{cm.}}$	$\varepsilon$ Fig. 4	$\varepsilon$ Courbe 2, fig. 3
0	0,0500 cm.	0,0500 cm.
5	0,0477 »	0,0470 »
15	0,0474 »	0,0485 »
25	0,0463 »	0,0470 »
35	0,0463 »	0,0485 »
45	0,0463 »	0,0485 »
55	0,0449 »	0,0470 »
65	0,0456 »	0,0470 »
75	0,0456 »	0,0480 »
85	0,0441 »	0,0490 »
95	0,0456 »	0,0485 »
105	0,0426 »	
115	0,0411 »	
125	0,0368 »	
135	0,0290 »	
145	0,0200 »	

b) *Bandes de longueur finie.*

Comme nous l'avons fait pour le mouvement ascendant, nous avons utilisé, ici encore, des bandes de 100 cm., que nous avons laissées s'imbiber selon le processus normal. Le pétrole arrive au centième cm. en 23 h. 45 et c'est 48 heures après le départ que nous avons démonté et pesé les bandes.

La courbe (Fig. 3, courbe 2) se réduit à une droite horizontale, ce qui montre que l'épaisseur est devenue constante dans toute la longueur de la bande. Il suffit donc de 24 heures pour saturer celle-ci.

**§ 3. Etude du mouvement ascendant.**

**I. DÉBUT DU MOUVEMENT (Résultats jusqu'à  $h = 25$  cm.).**

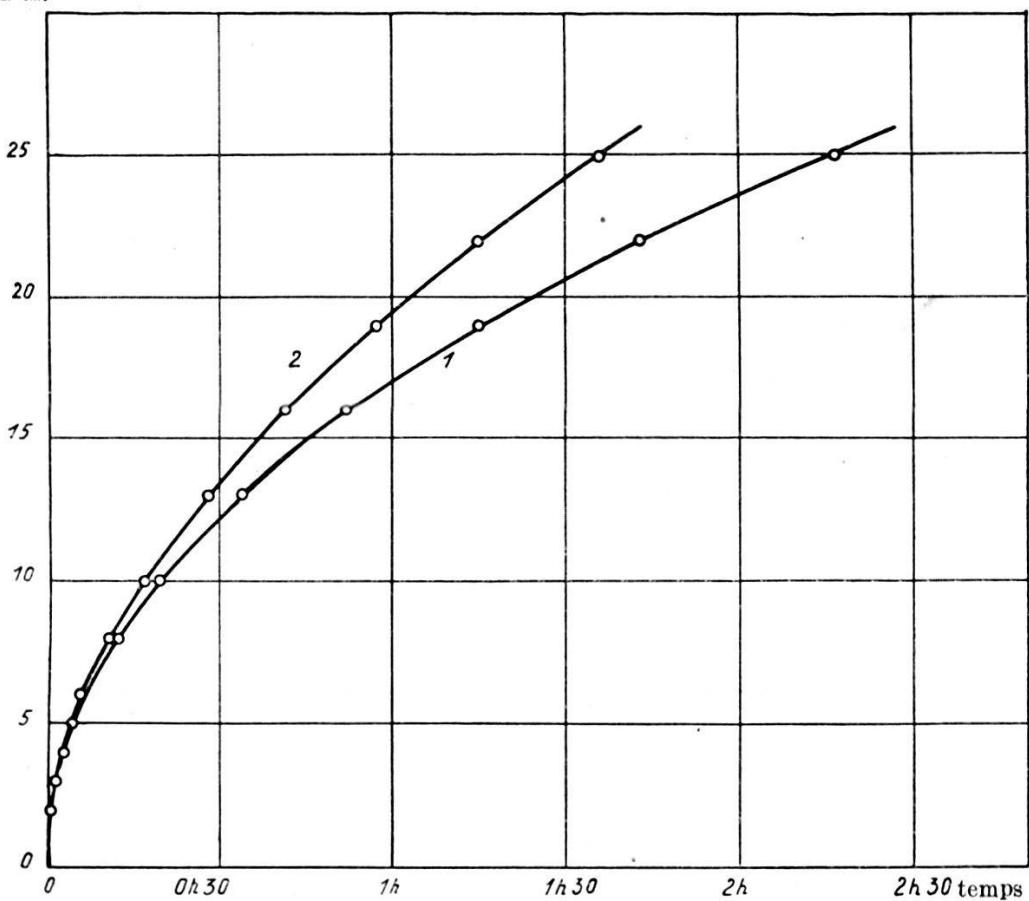
Voici le tableau IV donnant les hauteurs atteintes par le liquide en fonction du temps. Ces résultats expérimentaux qui sont la moyenne obtenue avec dix bandes, sont représentés par une expression de la forme

$$t = Mh^2 + Nh^3,$$

Tableau IV.  
Pétrole (moyenne de 10 bandes).

$h$ cm.	$t$ obs.	$t$ calc. éq 20.
—	—	—
1	11,22 s	11,08 s
2	44,5 s	44,7 s
3	1 m 41,7 s	1 m 41,2 s
4	3 m 02 s	3 m 01,3 s
5	4 m 45 s.	4 m 45 s.
6	6 m 50 s	6 m 54 s
7	9 m 30 s	9 m 27,6 s
8	12 m 30 s	12 m 26,6 s
9	16 m 00 s	15 m 51,5 s
10	19 m 30 s	19 m 43 s
13	34 m 00 s	34 m 02 s
16	52 m 00 s	52 m 37 s
19	1 h 15 m	1 h 15 m 42 s
22	1 h 43 m	1 h 43 m 33 s
25	2 h 17 m	2 h 16 m

Hauteur cm.



qui est du type (3). En outre ils sont représentés graphiquement dans la courbe 1 ci-contre (graphique A). Dans le cas particulier qui nous occupe en ce moment, on a:

$$t = 11 h^2 + \frac{1}{12} h^3. \quad (20)$$

Nous donnons dans le tableau IV les temps calculés avec cette équation pour bien montrer la concordance des résultats. Cette concordance étant très satisfaisante nous effectuerons tous les calculs à partir de cette équation (20).

Nous allons calculer:

- 1<sup>o</sup> la vitesse d'ascension du liquide,
- 2<sup>o</sup> la grandeur  $E_1$ ,
- 3<sup>o</sup> les travaux de la pesanteur et des forces de viscosité,
- 4<sup>o</sup> les travaux des forces d'inertie pour montrer qu'ils sont négligeables.

#### 1<sup>o</sup>) *Calcul de la vitesse du liquide.*

Nous obtenons immédiatement la vitesse en dérivant l'équation (20). Il vient:

$$v = \frac{1}{22 h + \frac{25}{100} h^2}. \quad (21)$$

Donnons pour fixer les idées la valeur de  $v$  pour trois hauteurs différentes.

Pour $h = 1$ cm.	$v = 0,044$ cm./sec.
$h = 10$ "	$v = 0,00408$ "
$h = 20$ "	$v = 0,00185$ "

A l'aide de ces nombres, nous montrerons tout à l'heure que les travaux des forces d'inertie sont négligeables par rapport à la somme des travaux de pesanteur et du frottement. Remarquons en outre que pour  $h = 20$  cm. la vitesse du liquide est ici sensiblement du même ordre de grandeur que la vitesse de circulation en régime permanent (cf. tableau I, bande e, f).

#### 2<sup>o</sup>) *Détermination de $E_1$ .*

Nous calculons  $E_1$  par la relation

$$E_1 = \varrho g h + A \eta h v$$

en prenant pour  $A$  la valeur obtenue par les expériences en régime permanent mentionnées plus haut (p. 459).

D'autre part, on a pour  $v$  une expression de la forme

$$v = \frac{1}{2Mh + 3Nh^2},$$

d'où pour  $E_1$

$$E_1 = \varrho gh + \frac{A\eta}{2M + 3Nh}. \quad (22)$$

Voici les données:

$$\begin{aligned} M &= 11; & N &= \frac{1}{12} \\ \varrho &= 0,80 & g &= 981 \\ A &= 3,815 \cdot 10^7 & \eta &= 0,013 \end{aligned}$$

Numériquement il vient

$$E_1 = 785h + \frac{49,50 \cdot 10^5}{22 + \frac{25}{100}h}$$

Voici les résultats pour trois hauteurs différentes:

$h_{\text{cm}}$	$\varrho gh$	$A\eta hv$	$E_1 = \varrho gh + A\eta hv$
0	—	22 500	$2,250 \cdot 10^4$ ergs/cm <sup>3</sup>
1	785	22 200	$2,298 \cdot 10^4$ » »
10	7 850	20 200	$2,80 \cdot 10^4$ » »
20	15 700	18 300	$3,40 \cdot 10^4$ » »

L'examen de ces résultats nous montre que  $E_1$  varie d'une façon systématique et sensiblement linéaire. Cela résulte du reste de la forme même de l'équation (22) qui peut s'écrire approximativement:

$$E_1 = \frac{A\eta}{2M} + \left( \varrho g - \frac{3A\eta N}{4M^2} \right)h.$$

Le coefficient  $k$  de variation de  $E_1$  (voir page 451) aura la valeur  
 $k = 0,0258$ .

### 3<sup>0</sup>) *Comparaison du travail de la pesanteur et du travail des forces de frottement.*

Le travail de la pesanteur, lorsque le liquide s'est élevé jusqu'à la hauteur  $h$ , est donné par:

$$\mathcal{T}_p = \int_0^h \varepsilon l \varrho gh \cdot dh = \frac{\varepsilon l \varrho gh^2}{2}. \quad (23)$$

Numériquement on a:

$$\mathcal{Z}_p = 30 h^2.$$

Le travail des forces de frottement est dans les mêmes conditions:

$$\mathcal{Z}_\eta = \int_0^h A \eta \varepsilon l h v \cdot dh.$$

On a vu que  $h v$  est de la forme

$$\frac{1}{2M + 3Nh}.$$

On aura alors:

$$\mathcal{Z}_\eta = \frac{A \eta \varepsilon l}{3N} \operatorname{Log} \left( 1 + \frac{3N}{2M} h \right) \quad (24)$$

et numériquement:

$$\mathcal{Z}_\eta = 3,48 \cdot 10^5 \log (1 + 0,01136 h).$$

Donnons ces valeurs pour trois hauteurs différentes:

$h$ cm.	$\tau_p$ ergs	$\tau_\eta$ ergs	$\frac{\tau_\eta}{\tau_p}$
1	30	1 710	23,6
10	3 000	16 300	5,4
20	12 000	31 000	2,58

On voit par ces nombres que, dans l'intervalle considéré, le travail contre les forces de viscosité est bien supérieur au travail contre la pesanteur.

#### 4<sup>0</sup>) Calcul du travail $\mathcal{Z}_i$ des forces d'inertie.

On sait que:

$$d\tau_i = -d \left( \frac{mv^2}{2} \right)$$

Nous avons trouvé pour la vitesse la valeur:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{22h + \frac{25}{100}h^2}$$

Pour simplifier le calcul nous négligeons dans cette expression le terme en  $h^2$ , ce qui nous majore  $v$ . Nous aurons ainsi la limite supérieure du travail des forces d'inertie.

On a tous calculs faits:

$$\frac{d\tau_i}{\varepsilon l dh} = \frac{8,35}{10^4 h^2} \text{ ergs/cm}^3$$

La valeur numérique de ce travail pour  $h = 1 \text{ cm.}$  est environ  $8,35 \times 10^{-4} \text{ ergs/cm}^3$  et pour  $h = 10 \text{ cm.}$   $8,35 \times 10^{-6} \text{ ergs/cm}^3$ . Ce travail dont l'ordre de grandeur est  $8,35 \times 10^{-4}$  et qui diminue très rapidement ( $8,35 \cdot 10^{-6}$  pour  $h = 10 \text{ cm.}$ ) est tout à fait négligeable par rapport à la somme des travaux de pesanteur et de viscosité dont la valeur rapportée à l'unité de volume est comme on l'a vu de  $2,3 \times 10^4 \text{ ergs/cm}^3$ .

## II. MOUVEMENT DE LONGUE DURÉE (*résultats jusqu'à $h = 120 \text{ cm.}$* ).

Comme nous venons de le faire pour le début du mouvement nous donnons ci-dessous un tableau (Tab. V) renfermant les hauteurs observées en fonction du temps. Ces résultats sont assez bien représentés par un polynome du cinquième degré de la forme

$$t = mh^2 + nh^3 + ph^4 + qh^5$$

ainsi qu'on peut s'en rendre compte en comparant les valeurs inscrites dans les colonnes 2 et 3 du tableau.

Tableau V.  
*Pétrole (moyenne de 3 bandes).*

$h_{\text{cm.}}$	$t_{\text{obs.}}$	$t_{\text{calc. éq. 25}}$
0	—	—
5	4 m 30 s	4 m 20 s
10	18 m 30 s	18 m 9,4 s
15	44 m	43 m 13,6 s
20	1 h 23 m	1 h 22 m 05 s
30	3 h 28 m	3 h 36 m
40	7 h 18 m	7 h 41 m 20 s
50	14 h	14 h 41 m 20 s
60	25 h	26 h 39 m
70	42 h 45 m	44 h
80	69 h 15 m	70 h 52 m
90	108 h 30 m	110 h 31 m
100	165 h	166 h 06 m
105	199 h	201 h 40 m
110	241 h	243 h 30 m
115	289 h 30 m	291 h 30 m
120	348 h	348 h

Les coefficients  $m, mp, q$  n'ont évidemment plus la signification théorique des coefficients  $M_1, N_1, P_1, Q_1$  donnés par les équations (16), puisque maintenant l'épaisseur  $\varepsilon$  est variable. Leurs valeurs numériques sont les suivantes:

$$m = 10, n = \frac{6,8}{100}, p = \frac{1,9}{1000} q = \frac{2,4}{100,000}$$

d'où pour le polynôme

$$t = 10 h^2 + \frac{6,8}{100} h^3 + \frac{1,9}{1000} h^4 + \frac{2,4}{100,000} h^5 \quad (25)$$

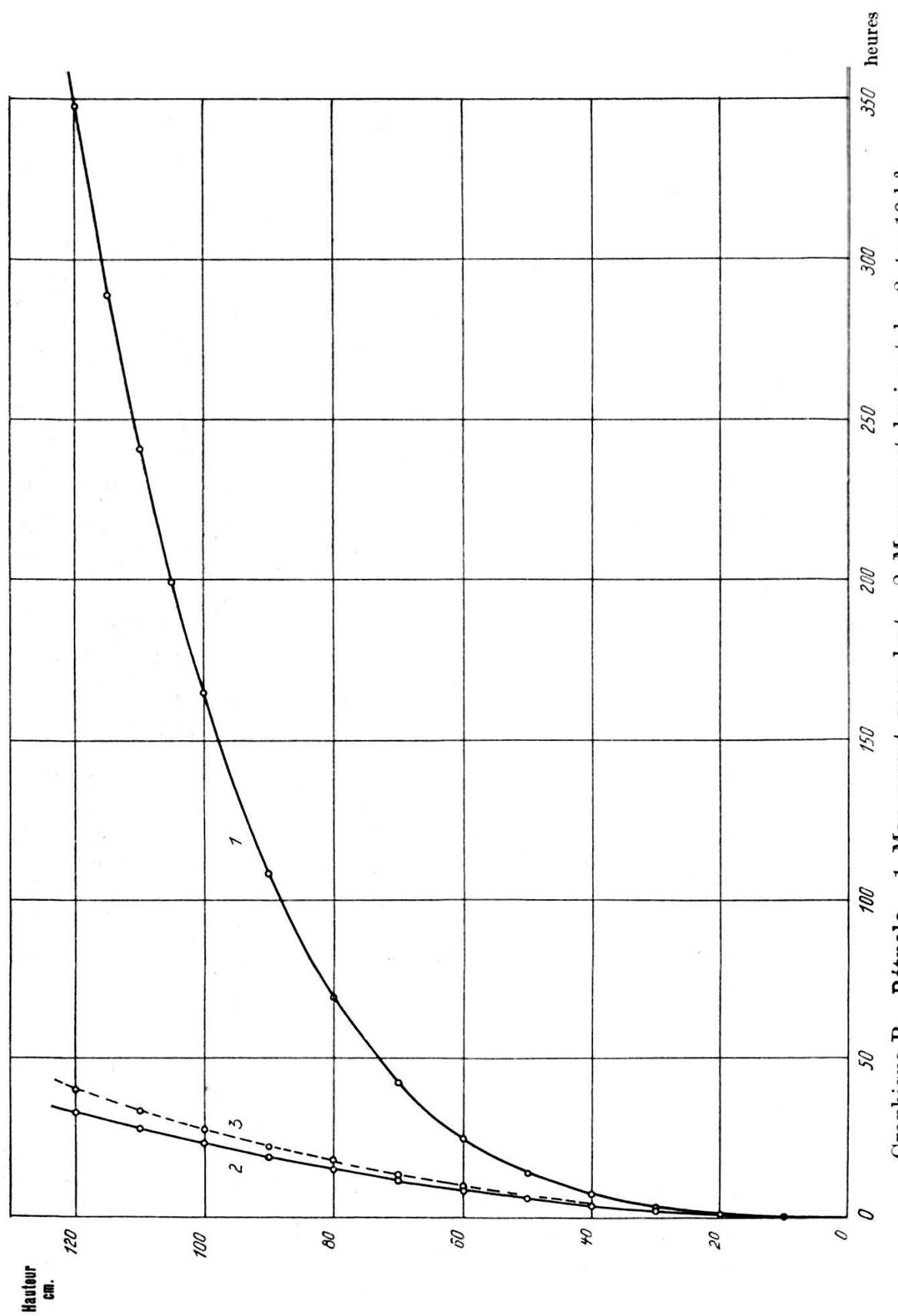
qui nous donne le temps en secondes si les hauteurs sont exprimées en centimètres.

Si l'on examine les résultats du tableau V représentés graphiquement dans le graphique B on s'aperçoit que le liquide ne s'élève plus que d'environ 2,5 cm. par jour, dès qu'il a atteint la hauteur de 120 cm. On peut donc en première approximation supposer que la vitesse est négligeable et envisager la colonne liquide comme se rapprochant des conditions d'équilibre statique. On doit alors s'attendre à trouver pour loi de répartition des épaisseurs en fonction de la hauteur la loi donnant la variation de pression atmosphérique avec la hauteur, c'est-à-dire qu'on doit avoir:

$$\text{Log} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = k (h_1 - h_2). \quad (26)$$

Si l'on effectue les calculs avec les résultats du tableau II, fig. 2, on trouve que c'est bien le cas. Voici du reste les chiffres qui montrent dans quelles limites cette supposition est en accord avec la réalité.

$h_{\text{cm.}}$	$\varepsilon_{\text{obs.}}$	$\varepsilon_{\text{calc. éq. 26}}$
30	0,0370 cm.	0,0370 cm.
40	0,0300 »	0,0298 »
50	0,0240 »	0,0240 »
60	0,0195 »	0,01935 »
70	0,0160 »	0,0156 »
80	0,0125 »	0,0126 »
90	0,0100 »	0,0102 »
100	0,0080 »	0,00820 »
110	0,0062 »	0,00662 »
120	0,0050 »	0,00535 »



Graphique B. Pétrole. 1. Mouvement ascendant. 2. Mouvement horizontal. 3.  $t = 10 h^2$ .

Les épaisseurs observées  $\varepsilon_{\text{ob.}}$  sont obtenues en partant de la courbe expérimentale, fig. 2, (p. 461). Les épaisseurs calculées  $\varepsilon_{\text{cal.}}$  s'obtiennent en utilisant l'équation (26) dans laquelle  $h_1$  et  $\varepsilon_1$  sont respectivement 30 et 0.0370. On voit que la loi hypsométrique est assez exactement satisfaite.

*Expérience complémentaire.*

Nous avons encore voulu nous rendre compte comment se comporterait l'épaisseur du liquide dans une bande que nous avions préalablement uniformément imbibée, puis ensuite tendue verticalement dans un tube de verre et laissée dans cette position pendant une durée de 15 jours. La bande avait son extrémité inférieure immergée et était dans une atmosphère saturée.

*Voici les résultats des pesées (moyenne de 2 bandes) avec le pétrole:*

$h_{\text{cm.}}$	$\varepsilon_{\text{ob.}}$	$\varepsilon_{\log}$
0	0,0480 cm.	
10	480 "	
20	476 "	
30	460 "	
40	435 "	
50	385 "	0,0385 cm.
60	320 "	320 "
70	265 "	266 "
80	220 "	221 "
90	190 "	184 "
100	170 "	153 "
110	150 "	127 "
120	140 "	106 "
130	130 "	83 "
140	115 "	69 "

On voit par ces chiffres que la loi hypsométrique est loin d'être aussi bien satisfaite que dans le tableau précédent; il y a cependant une tendance à s'en rapprocher, d'autant plus que la courbe relative aux épaisseurs  $\varepsilon$  dans cette dernière expérience est presque parallèle à celle du tableau II (fig. 2).

**§ 4. Etude du mouvement horizontal.**

Le tableau VI donne les distances  $h$  atteintes par le liquide en fonction du temps, ainsi que le rapport  $M = \frac{t}{h^2}$  (voir graphiques A et B).

On constate que ce rapport, sensiblement constant jusqu'à 13 cm. décroît systématiquement jusqu'à 40 cm., puis redevient constant et égal à 8,45 environ entre 50 et 150 cm.

**Tableau VI.**  
*Pétrole, mouvement horizontal.*

$h_{\text{cm.}}$	$t_{\text{obs.}}$	$M$	$h_{\text{cm.}}$	$t_{\text{obs.}}$	$M$
0	—	—	25	1 h 36 m	9,20
1	10 s	10,0	30	2 h 15 m	9,0
2	40 s	10,0	40	3 h 51 m 30 s	8,63
3	1 m 30 s	10,0	50	5 h 54 m	8,50
4	2 m 40 s	10,0	60	8 h 23 m	8,40
5	4 m 08 s	9,93	70	11 h 35 m	8,50
6	6 m 03 s	10,1	80	15 h	8,45
7	8 m 12 s	10,0	90	19 h	8,45
8	10 m 48 s	10,1	100	23 h 19 m	8,40
9	13 m 45 s	10,2	110	28 h 06 m	8,35
10	17 m 00 s	10,2	120	33 h 30 m	8,45
13	28 m 15 s	10,0	130	39 h 30 m	8,40
16	41 m 30 s	9,72	140	46 h 11 m	8,48
19	57 m 15 s	9,53	150	53 h 11 m	8,48
22	1 h 15 m	9,32			

Le coefficient de  $h^2$  subit donc une variation d'environ 15%.

*Calcul des différentes grandeurs.*

D'après ce qui précède on voit que le mouvement sera représenté par l'équation :

$$t = 10 h^2 \quad (27)$$

dans l'intervalle

$$h = 0 \quad h = 13 \text{ cm.}$$

et par

$$t = 8,45 h^2 \quad (28)$$

dans l'intervalle

$$h = 50 \quad h = 150 \text{ cm.}$$

*Remarque.* Si l'on compare le coefficient de  $h^2$  obtenu pour le début du mouvement ascendant (valeur numérique 11) à celui obtenu pour le début du mouvement horizontal (valeur numé-

rique 10), on voit qu'ils diffèrent entre eux d'environ 10%. Or ils devraient — théoriquement du moins — être égaux. Cette différence tient en grande partie à ce que les bandes de buvard ne sont pas tout à fait homogènes et que les conditions des expériences ne peuvent être de tous points comparables particulièrement au début du mouvement. Du reste, on verra tout à l'heure (§ 5) que la concordance des deux mouvements est obtenue au début d'une expérience faite spécialement en vue de déterminer la divergence des deux courbes.

Si nous admettons donc la même valeur numérique  $M = 11$  pour les deux mouvements, nous aurons pour  $E_1$  la valeur:

$$E_1 = 2,25 \cdot 10^4 \text{ ergs/cm}^3.$$

### § 5. Détermination du point de séparation des deux mouvements

Comme nous l'avons dit page 457, nous avons obtenu le début simultané du mouvement ascendant et horizontal, en plaçant l'origine des deux bandes entre des plaques de verre horizontales.

Dans ces conditions on voit que jusqu'à 3 cm., il y a concordance des deux mouvements, puis à partir de là, la séparation s'effectue. Voici du reste le tableau des résultats:

$t$	$h$ horizontal	$h$ vertical
13 s	1 cm.	1 cm.
48 s	2 "	2 "
1 m 52 s	3 "	3 "
3 m	4 "	3,9 "
4 m 50 s	5 "	4,8 "
7 m	6 "	5,6 "
9 m 30 s	7 "	6,5 "
12 m 30 s	8 "	7,5 "
16 m 15 s	9 "	8,4 "

Comme on peut le voir, en comparant ce tableau aux autres le mouvement est ici plus lent que dans les tubes de verre. Cela tient à un travail supplémentaire de viscosité entre les plaques et peut être à l'évaporation du liquide. Ceci nous importe peu, car nous ne demandons à cette expérience que de nous indiquer le point de séparation des deux mouvements qui ne dépend, lui, que de la pesanteur.

Disons enfin que la loi du carré des hauteurs, mentionnée page 451, ne doit être cherchée que dans l'intervalle  $h = 0$  à  $h = 3$  cm., puisque c'est là que la pesanteur est négligeable.

## Chapitre IV. — Résultats avec l'huile de vaseline.

### § 1. Etude de l'épaisseur du liquide.

*Mouvement ascendant. (Régime variable).*

Disons immédiatement que pour l'huile et l'eau, nous n'avons pas fait une étude aussi détaillée de l'épaisseur d'imbibition que celle que nous venons de faire pour le pétrole. Toutefois les

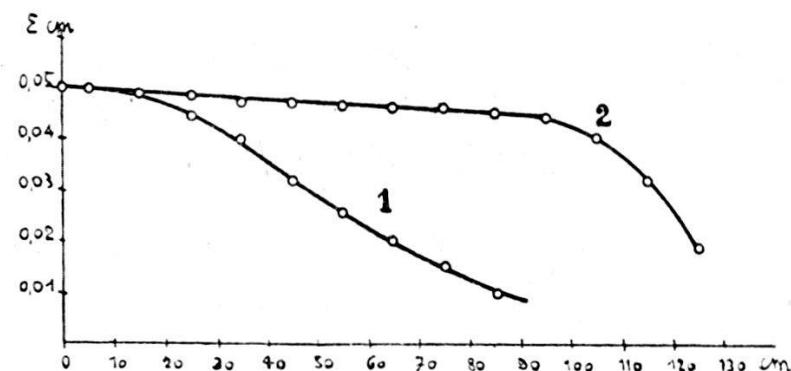


Fig. 5.

résultats obtenus avec le pétrole se retrouvent ici et sont encore vrais pour l'huile et l'eau. Voici une courbe (fig. 5, courbe 1) donnant l'allure de l'épaisseur (à un instant donné) en fonction de la hauteur (Tableau VII).

Tableau VII.

*Etude de l'épaisseur. — Résultat des pesées.*

$h_{\text{cm.}}$	$\varepsilon$ horizontal courbe 2	$\varepsilon$ vertical courbe 1
0	0,0500 cm.	0,0500 cm.
5	0,0500 »	0,0490 »
15	0,0490 »	0,0490 »
25	0,0486 »	0,0442 »
35	0,0472 »	0,0400 »
45	0,0470 »	0,0316 »
55	0,0466 »	0,0256 »
65	0,0460 »	0,0202 »
75	0,0460 »	0,0159 »
85	0,0452 »	0,0100 »
95	0,0446 »	
105	0,0405 »	
115	0,0324 »	
125	0,0190 »	

*Mouvement horizontal (régime variable).*

L'allure de l'épaisseur (fig. 5, courbe 2) est donnée dans le même tableau que celui du mouvement ascendant.

**§ 2. Etude du mouvement ascendant.<sup>1)</sup>**

**I. DÉBUT DU MOUVEMENT (Résultats jusqu'à  $h = 20$  cm.).**

Le tableau VIII et le graphique C ci-dessous donnent les hauteurs atteintes par le liquide en fonction du temps.

**Tableau VIII.**

*Huile de vaseline.*

$h_{\text{cm.}}$	$t_{\text{obs.}}$	$t_{\text{calc. éq. 29}}$
0	—	—
1	3 m 30 s	3 m 33 s
2	13 m	14 m 25 s
3	31 m 30 s	32 m 55 s
4	64 m	62 m 10 s
5	1 h 44 m	1 h 34 m 11 s
6	2 h 21 m	2 h 18 m
7	3 h 15 m	3 h 9 m 45 s
8	4 h 17 m	4 h 11 m
9	5 h 25 m	5 h 23 m
10	6 h 45 m	6 h 45 m
11	8 h 15 m	8 h 17 m
12	10 h 07 m	10 h 13 m
15	16 h 30 m	16 h 11 m
20	29 h	30 h 40 m

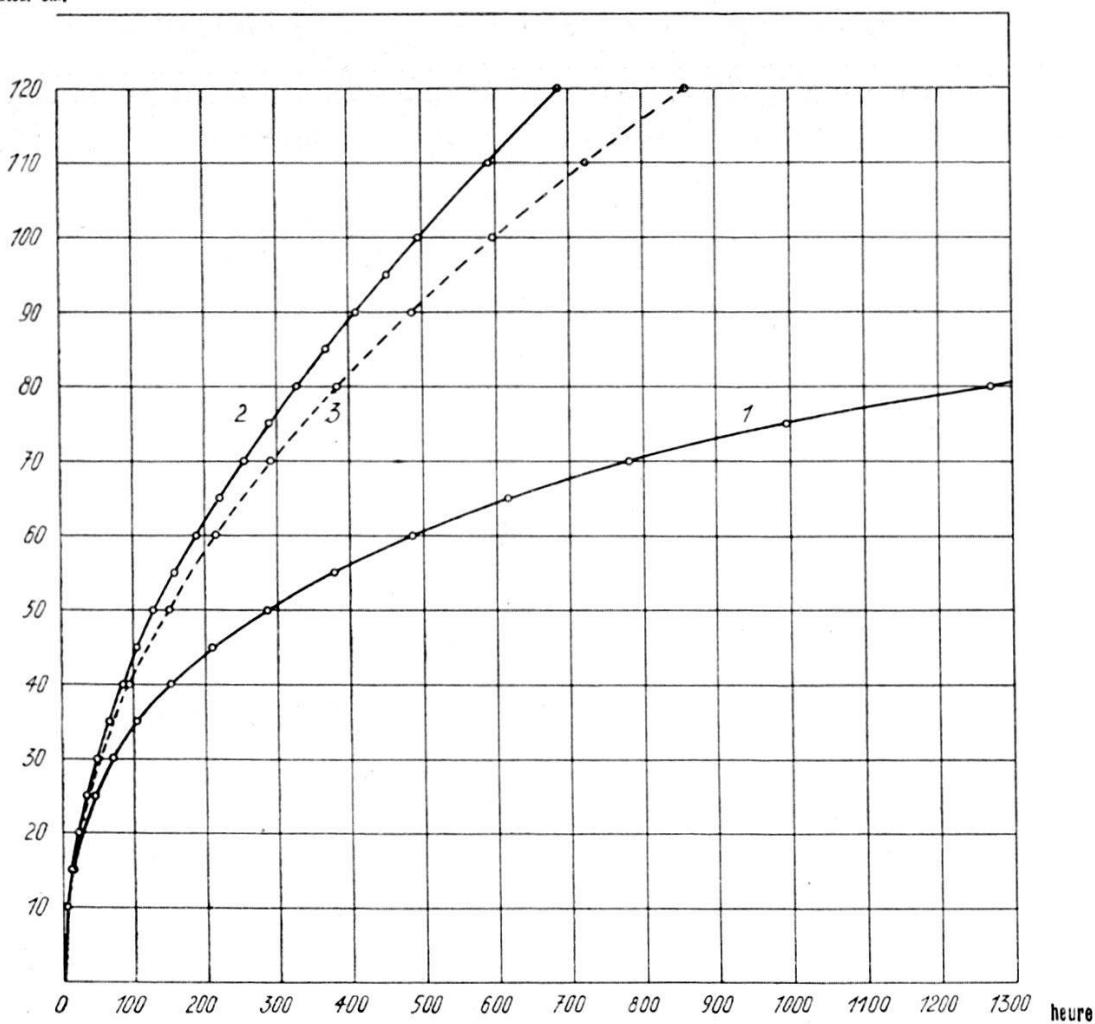
Ces résultats sont représentés par l'équation

$$t = 210 h^2 + 3,3 h^3 \quad (29)$$

qui nous servira à calculer les différentes grandeurs ainsi que nous l'avons déjà fait pour le pétrole, l'épaisseur pouvant être admise comme constante dans l'intervalle considéré.

<sup>1)</sup> Nous suivrons ici le même plan que celui que nous avons adopté plus haut concernant les résultats obtenus avec le pétrole.

Hauteur cm.



Graphique C. Huile de vaseline.

1. Mouvement ascendant. 2. Mouvement horizontal.  
3.  $t = 215 h^2$ .

*Calculs des différentes grandeurs.*

1<sup>o</sup> *Calcul de la vitesse du liquide.*

Par dérivation de l'équation (29), il vient:

$$v = \frac{1}{420h + 9,9h^2}. \quad (30)$$

Voici pour fixer les idées et pour les comparer aux vitesses obtenues avec le pétrole, les valeurs de  $v$  pour trois hauteurs

$$\begin{array}{ll} h = 1 \text{ cm.} & v = 0,00232 \text{ cm/sec.} \\ h = 10 \text{ "} & v = 0,000193 \text{ "} \\ h = 20 \text{ "} & v = 0,000081 \text{ "} \end{array}$$

2<sup>o</sup> *Détermination de  $E_1$ .*

Nous calculons  $E_1$  par la relation (22) page 466 comme nous l'avons fait pour le pétrole

Voici les données:

$$\begin{array}{ll} M = 210 & N = 3,3 \\ \varrho = 0,87 & g = 981 \\ \eta = 0,317 & A = 3,00 \cdot 10^7 \end{array}$$

Il vient:

$$E_1 = 853 h + \frac{9,5 \cdot 10^6}{420 + 9,9 h}.$$

Pour trois hauteurs différentes on a:

$h_{\text{cm.}}$	$\varrho g h$	$A \eta h v$	$E_1 = \varrho g h + A \eta h v$
0	0	22 600	$2,260 \cdot 10^4 \text{ ergs/cm}^3$
1	853	22 100	$2,295 \cdot 10^4 \text{ " "}$
10	8 530	18 300	$2,683 \cdot 10^4 \text{ " "}$
20	17 060	15 350	$3,240 \cdot 10^4 \text{ " "}$

et pour le coefficient  $k$  de variation de  $E_1$ :

$$k = 0,0217.$$

### 3<sup>o</sup> Comparaison du travail de la pesanteur et du travail des forces de frottement.

On a ici, pour le travail de la pesanteur (cf. éq. 23)

$$\mathcal{T}_p = 35 h^2$$

et pour le travail de viscosité (cf. éq. 24)

$$\mathcal{T}_\eta = 1,80 \cdot 10^5 \log(1 + 0,0236 h)$$

Donnons ces valeurs pour trois hauteurs différentes:

$h_{\text{cm.}}$	$\mathcal{T}_p \text{ ergs}$	$\mathcal{T}_\eta \text{ ergs}$	$\frac{\mathcal{T}_\eta}{\mathcal{T}_p}$
1	35	1 825	52,2
10	3 500	16 650	4,75
20	14 000	30 200	2,16

## II. MOUVEMENT DE LONGUE DURÉE.

(Résultats jusqu'à  $h = 80 \text{ cm.}$ )

Le tableau IX contient les valeurs observées jusqu'à 80 cm. Celles-ci sont représentées par la relation empirique

$$t = 210 h^2 + 3 h^3 - \frac{2,4}{100} h^4 + \frac{8}{10 000} h^5. \quad (31)$$

L'épaisseur étant variable les coefficients des différentes puissances de  $h$  n'ont plus la signification théorique précédente.

Tableau IX.  
*Huile de vaseline.*

$h$	$t_{\text{obs.}}$	$t_{\text{calc. éq. 31}}$
0	—	—
5	1 h 44 m	
10	6 h 45 m	6 h 37 m
15	16 h 30 m	
20	29 h	29 h 39 m
25	48 h	
30	72 h	75 h
35	105 h	
40	151 h 30 m	152 h
45	211 h	
50	284 h	278 h
55	377 h	
60	484 h	475 h
65	616 h	
70	780 h	787 h
75	995 h	
80	1270 h	1250 h

En outre ces résultats nous montrent que le liquide ne s'élève plus que d'environ 0,5 cm. par jour une fois qu'il a atteint la hauteur de 80 cm. On doit donc s'attendre à trouver, comme pour le pétrole, une répartition logarithmique des épaisseurs en fonction de la hauteur, répartition donnée par l'équation (26).

Voici un tableau montrant que, comme pour le pétrole, cette prévision est approximativement justifiée.

$h_{\text{cm.}}$	$\varepsilon_{\text{obs.}}$	$\varepsilon_{\text{calc.}}$
30	0,0425 cm.	0,0425 cm.
40	0,0350 »	0,0343 »
50	0,0280 »	0,0277 »
60	0,0225 »	0,0224 »
70	0,0175 »	0,0181 »
80	0,0125 »	0,0146 »

### § 3. Etude du mouvement horizontal.

(Résultats jusqu'à  $h = 120$  cm.)

Nous donnons dans le tableau X les résultats moyens jusqu'à  $h = 120$  cm., ainsi que le rapport  $M = \frac{t}{h^2}$ . On remarquera que ce rapport oscille autour du nombre 215 dans l'intervalle  $0 \div 25$  cm., et qu'à partir de là, il diminue linéairement.

Analytiquement, le mouvement sera représenté par les équations:

$$t = 215 h^2 \quad (32)$$

dans l'intervalle

$$h = 0 \quad h = 25$$

et par:

$$t = 210 h^2 - \frac{3,2}{10} h^3 \quad (33)$$

dans l'intervalle

$$h = 25 \quad h = 120$$

Tableau X.

*Huile de vaseline, mouvement horizontal.*

$h$	$t_{\text{obs.}}$	$t_{\text{calc. éq. 32, 33}}$	$M$
0	0		
1	3 m 30 s	3 m 35 s	210
2	14 m	14 m 20 s	210
3	31 m	32 m 15 s	207
4	55 m	57 m 20 s	206
5	89 m	89 m 30 s	213
6	2 h 03 m	2 h 09 m	205
7	2 h 50 m	2 h 55 m	208
8	3 h 50 m	3 h 48 m	216
9	5 h 10 m	4 h 50 m	230
10	6 h 15 m	5 h 58 m	225
11	7 h 35 m	7 h 13 m	226
12	8 h 50 m	8 h 37 m	221
15	13 h 45 m	13 h 43 m	220
20	23 h 50 m	23 h 50 m	212
25	35 h		202
30	50 h	50 h 06 m	200
35	67 h		
40	85 h	87 h 30 m	191
45	105 h		

Tableau X. (Suite.)

$h$	$t_{\text{obs.}}$	$t_{\text{calc. éq. 32, 33}}$	$M$
50	128 h	134 h 30 m	184,5
55	157 h		
60	189 h	190 h 30 m	189
65	222 h		
70	255 h	255 h 30 m	187
75	290 h		
80	327 h	328 h	184
85	368 h		
90	410 h	407 h	181,5
95	452 h		
100	494 h	495 h	178
110	588 h	587 h	175
120	694 h	686 h	173

D'autre part, en ce qui concerne la valeur numérique de  $E_1$ , la remarque faite à la page 473 est encore vraie ici; c'est-à-dire que  $E_1$  a la même valeur que pour le mouvement ascendant tant que la formule en  $h^2$  est applicable, c'est-à-dire au début du mouvement.

#### § 4. Détermination du point de séparation des deux mouvements.

Le tableau ci-dessous montre l'allure du liquide dans une bande horizontale et dans une bande verticale imbibées simultanément selon le dispositif décrit page 457.

On voit qu'il y a concordance des deux mouvements jusqu'à une hauteur de 3 cm.

$t$	$h$ horizontal	$h$ vertical
4 m	1	1
16 m 30 s	2	2
36 m	3	3
57 m	4	3,9
1 h 27 m	5	4,85
2 h 06 m	6	5,8

## Chapitre IV. — Résultats avec l'eau distillée.

### § 1. Etude de l'épaisseur du liquide.

Les courbes ci-dessous (tableau XI et fig. 6) donnent l'allure de l'épaisseur (à un instant donné) pour le processus vertical (courbe n° 1) et horizontal (courbe n° 2). La courbe 3 donne l'épaisseur dans une bande horizontale de longueur finie.

Tableau XI.  
*Etude de l'épaisseur. Résultat des pesées.*

$h$ cm.	$\varepsilon$ vertical courbe 1	$\varepsilon$ horizontal courbe 2	$\varepsilon$ horizontal courbe 3
0	0,0700 cm.	0,0700 cm.	0,0700 cm.
5	0,0700 »	0,0700 »	0,0700 »
15	0,0665 »	0,0665 »	0,0700 »
25	0,0635 »	0,0635 »	0,0700 »
35	0,0550 »	0,0390 »	0,0680 »
45	0,0435 »	0,0575 »	0,0680 »
55	0,0380 »	0,0550 »	0,0630 »
65	0,0330 »	0,0525 »	0,0620 »
75	0,0294 »	0,0490 »	0,0620 »
85	0,0270 »	0,0470 »	0,0620 »
95	0,0245 »	0,0425 »	0,0620 »
105	0,0195 »	0,0350 »	0,0620 »
115	0,0150 »	0,0240 »	

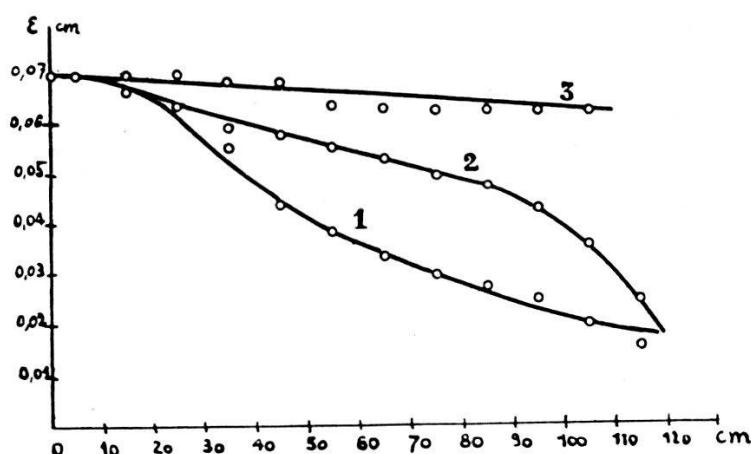


Fig. 6.

### Expérience complémentaire.

Ainsi que nous l'avons vu, l'épaisseur du liquide dans une bande saturée de pétrole, puis placée verticalement, semble tendre vers la répartition logarithmique. Une expérience identique faite avec l'eau distillée a donné une répartition de l'épaisseur

qui est sensiblement linéaire. Ceci peut tenir au fait que le buvard se gonfle et se distend fortement lorsqu'il est imbibé par l'eau, de telle sorte que ces déformations peuvent bien masquer la véritable répartition des épaisseurs.

### § 2. Etude du mouvement ascendant.

#### I. DÉBUT DU MOUVEMENT (*Résultats jusqu'à $h = 25$ cm.*).

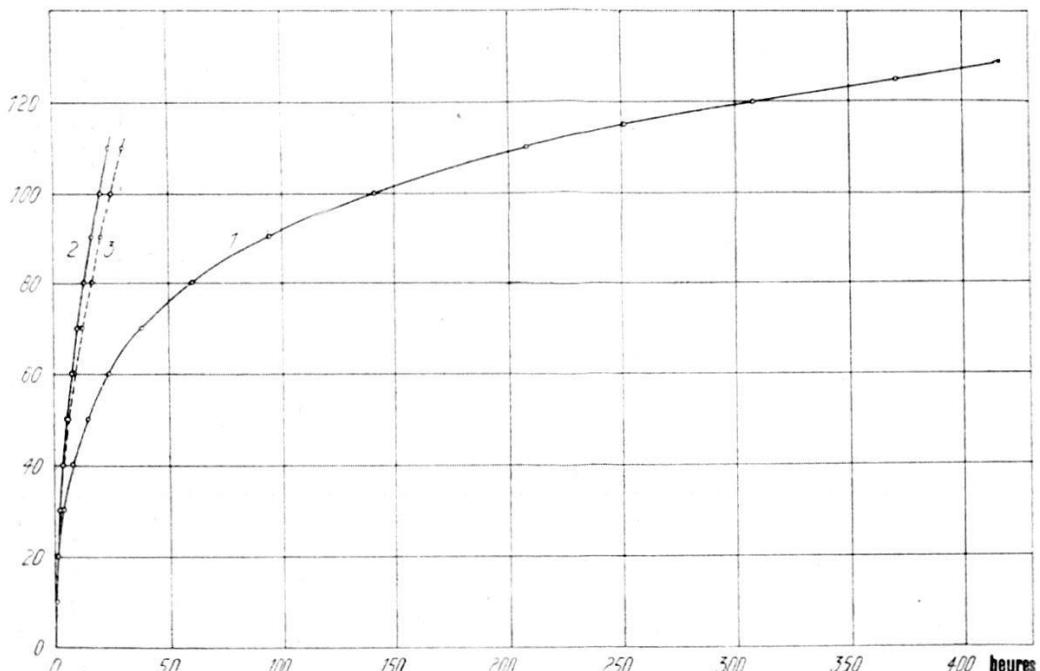
Le tableau XII et le graphique D donnent les hauteurs atteintes par l'eau en fonction du temps.

Tableau XII.

*Eau distillée.*

$h$	$t_{\text{obs.}}$	$t_{\text{calc. éq. 34}}$	$h$	$t_{\text{obs.}}$	$t_{\text{calc. éq. 34}}$
0	.		8	12 m 30 s	11 m 44 s
1	9 s	9,2 s	9	16 m	15 m 11 s
2	36 s	38 s	10	20 m	19 m 10 s
3	1 m 30 s	1 m 28 s	13	36 m	34 m 30 s
4	2 m 50 s	2 m 40 s	16	57 m 30 s	55 m 20 s
5	4 m 30 s	4 m 16,5 s	19	1 h 24 m	1 h 83 m
6	6 m 45 s	6 m 18 s	22	1 h 56 m	1 h 57 m
7	9 m 30 s	8 m 47 s	25	2 h 34 m	2 h 39 m

Hauteur cm.



Graphique D. Eau distillée.

1. Mouvement ascendant. 2. Mouvement horizontal. 3.  $t = 9 h^2$ .

Ces résultats sont représentés par l'équation

$$t = 9 h^2 + 0,25 h^3 \quad (34)$$

qui nous servira à calculer les différentes grandeurs, ainsi que nous l'avons fait pour le pétrole et pour l'huile; l'épaisseur étant admise comme constante dans l'intervalle considéré.

*Remarque importante.* — Lors de l'ascension de l'eau dans le buvard, on remarque le fait suivant: lorsque l'eau a atteint une hauteur d'environ 7 à 8 cm., c'est-à-dire après 10 minutes d'imbibition, on voit apparaître sur le tube de verre de fines gouttes d'eau, gouttes qui grossissent peu à peu. Cette condensation d'eau sur le tube suit le mouvement du liquide dans le buvard, elle s'élève parallèlement au liquide imbibant la bande. Après 24 heures, la quantité d'eau déposée est telle que de grosses gouttes glissent vers le bas et retombent dans le récipient. En d'autres termes, tout se passe comme s'il y avait une distillation du liquide partant du buvard pour aller sur le tube de verre. En 24 heures, la quantité d'eau ainsi distillée est environ le 2% de la quantité aspirée.

Dans une expérience accessoire, faite comme toujours dans un tube de verre, nous avons utilisé des bandes dont la partie inférieure n'était pas en contact avec l'eau. Après deux jours, nous avons constaté que ces bandes étaient imprégnées de vapeur d'eau. La quantité de vapeur d'eau qui s'est condensée par cm. de buvard a été de 0,0043 gr. pour une bande de 63 cm. placée en vase clos à 5 cm. au-dessus de l'eau et de 0,0040 gr. pour une bande de 35 cm. placée à 33 cm. au-dessus de l'eau. D'autre part, la masse maximum d'eau fixée par imbibition dans une bande de buvard est de 0,12 gr. par cm. La quantité de vapeur d'eau déposée n'est donc que le 3,3% de celle qui assure la saturation du papier. Enfin, au cours de cette expérience, aucun dépôt d'eau ne se remarquait sur le tube de verre.

Les gouttes d'eau sur le tube sont donc bien dues à la présence de la bande imbibée. Mais pour qu'il y ait distillation du liquide de la bande sur le tube, il faut que la température de la bande soit supérieure à celle du tube de verre. Nous montrerons dans un travail complémentaire qui sera publié ultérieurement que cette différence de température existe, qu'elle atteint avec l'eau une valeur d'environ 3° C., et qu'elle est due à la chaleur dégagée lors de l'imbibition.

Disons enfin que lors du démontage des tubes ayant contenu les bandes imbibées par le pétrole, nous avons également observé de fines gouttelettes sur la moitié inférieure du tube.

*Calculs des différentes grandeurs.***1<sup>o</sup> Vitesse du liquide.**

On a:

$$v = \frac{1}{18h + 0,75h^2} . \quad (35)$$

Pour  $h = 1 \quad v = 0,0534 \text{ cm./sec.}$ "  $h = 10 \quad v = 0,00392 \text{ "}$ "  $h = 20 \quad v = 0,00151 \text{ "}$ **2<sup>o</sup> Détermination de  $E_1$ .**

Données:

$$\begin{aligned} M &= 9 & g &= 981 \\ N &= 0,25 & \eta &= 0,01 \\ \varrho &= 1,0 & A &= 3,62 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

Calculons  $E_1$  par la relation (22), il vient:

$$E_1 = 981h + \frac{3,62 \cdot 10^5}{18 + 0,75h} .$$

Pour trois hauteurs différentes, on a:

$h_{\text{cm.}}$	$\varrho gh$	$A\eta hv$	$E_1 = \frac{\varrho gh}{A\eta hv}$
0	0	20 100	$2,01 \cdot 10^4 \text{ ergs/cm}^3$
1	981	19 300	$2,028 \cdot 10^4 \text{ " "}$
10	9 810	14 200	$2,401 \cdot 10^4 \text{ " "}$
20	19 620	10 980	$3,06 \cdot 10^4 \text{ " "}$

et pour le coefficient  $k$  on a:

$$k = 0,0261 .$$

**3<sup>o</sup> Comparaison du travail de la pesanteur et du travail des forces de frottement.**

On a (cf. éq. 23)

$$\mathcal{Z}_p = 58,3 h^2$$

et pour le travail de viscosité (cf. éq. 24)

$$\mathcal{Z}_\eta = 1,32 \cdot 10^5 \log (1 + 0,0416 h)$$

Pour trois hauteurs différentes, on a:

$h_{\text{cm.}}$	$\tau_p$ ergs	$\tau_\eta$ ergs	$\frac{\tau_\eta}{\tau_p}$
1	58,3	2 340	40
10	5 830	19 800	3,4
20	23 300	34 400	1,48

## II. MOUVEMENT DE LONGUE DURÉE.

(Résultats jusqu'à  $h = 125$  cm.)

Le tableau XIII contient les valeurs observées jusqu'à 125 cm. et l'équation

$$t = 9h^2 + \frac{2,4}{100}h^3 - \frac{2,4}{1000}h^4 + \frac{4,2}{100.000}h^5 \quad (36)$$

Tableau XIII

*Eau distillée.*

$h$	$t_{\text{obs.}}$	$t_{\text{calc. éq. 36}}$
0	—	—
5	4 m 30 s	4 m 15 s
10	20 m	18 m 40 s
15	50 m	45 m 41 s
20	1 h 24 m	1 h 27 m 40 s
30	3 h 50 m	3 h 47 m
40	8 h	7 h 45 m
50	14 h 45 m	14 h 03 m
60	24 h	23 h 50 m
70	38 h	38 h 45 m
80	60 h 30 m	60 h 20 m
90	93 h 30 m	94 h 30 m
100	140 h 30 m	141 h 30 m
105	170 h	172 h
110	206 h 30 m	209 h
115	251 h	252 h
120	307 h	303 h
125	370 h	363 h

en représente les résultats. L'épaisseur étant variable les coefficients des différentes puissances de  $h$  n'ont plus la signification théorique précédente.

D'autre part le liquide ne s'élevant plus que de 2 cm. par jour environ, l'équilibre doit être sensiblement atteint et l'on doit trouver, comme pour le pétrole et l'huile, une tendance à la répartition logarithmique des épaisseurs en fonction de la hauteur.

Voici un tableau donnant cette répartition:

$h_{\text{cm.}}$	$\mathcal{E}_{\text{obs.}}$	$\mathcal{E}_{\text{calc.}}$
50	0,0410 cm.	0,0404 cm.
60	0,0355 "	0,0360 "
70	0,0315 "	0,0320 "
80	0,0280 "	0,0285 "
90	0,0245 "	0,0254 "
100	0,0215 "	0,0226 "
110	0,0190 "	0,0201 "
120	0,0175 "	0,0180 "

### § 3. Etude du mouvement horizontal.

(Résultats jusqu'à 110 cm.)

*Remarques particulières.*

1<sup>o</sup> — Disons d'emblée que le buvard imbibé par l'eau distillée gonfle plus que lorsqu'il est imbibé par le pétrole, qu'il s'allonge d'environ 0,40 cm. pour 100 cm., et qu'il perd beaucoup de sa résistance mécanique. On ne peut pas par conséquent tendre des bandes horizontales de plus de 100 à 110 cm. de long sans mettre des supports sous le buvard; ce que nous cherchons à éviter.

2<sup>o</sup> — Le phénomène de distillation s'observe également lors du mouvement horizontal et là encore le dépôt d'eau avance en même temps que le liquide dans le buvard.

3<sup>o</sup> — Pensant que cette distillation devait peut-être perturber la loi du mouvement, nous avons utilisé, pour placer les bandes horizontales, une caisse en bois de  $150 \times 30 \times 30$  cm., paraffinée à l'intérieur. Nous avons recouvert le fond de cette caisse d'une couche d'eau d'environ 2 cm. d'épaisseur et nous avons tendu horizontalement deux bandes reposant sur trois fils métalliques paraffinés, placés transversalement. La fermeture de la caisse est obtenue par deux plaques de verre. Nous avons

ainsi un milieu uniformément saturé, ce qui n'est pas le cas dans les tubes de verre. Nous donnons dans le tableau XIV suivant les résultats moyens des bandes dans les trois tubes et les résultats moyens des deux bandes dans la caisse.

Tableau XIV.

*Eau distillée, mouvement horizontal.*

h	Moy. des 3 tubes		Moy. des 2 bandes dans la caisse		
	$t_{\text{obs.}}$	M	$t_{\text{obs.}}$	M	$t_{\text{calc. éq. 37, 38}}$
0					
5	3 m 45 s	9,0	3 m 45 s	9,0	3 m 45 s
10	16 m	9,6	15 m	9,0	15 m
15	37 m	9,86	34 m	9,0	33 m 45 s
20	66 m	9,9	60 m	9,0	60 m
25	1 h 44 m	10,0	1 h 28 m	8,45	
30	2 h 27 m	9,81	2 h 00 m	8,00	1 h 58 m 30 s
40	4 h 12 m	9,25	3 h 30 m	7,87	3 h 28 m
50	6 h 15 m	9,0	5 h 20 m	7,67	5 h 21 m
60	8 h 40 m	8,86	7 h 30 m	7,50	7 h 35 m
70	11 h 25 m	8,4	10 h	7,35	10 h 13 m
80	14 h 45 m	8,3	13 h	7,32	13 h 10 m
90	18 h 30 m	8,24	16 h 40 m	7,4	16 h 27 m
100	22 h 00 m	7,95	20 h 20 m	7,32	20 h
110	26 h 00	7,75	24 h	7,14	23 h 52 m

En outre, on y trouvera les rapports  $M$  concernant ces deux séries d'expériences. On verra que ce rapport part de la valeur 9, augmente jusqu'à 10 pour  $h = 25$ , puis diminue systématiquement, ceci pour le mouvement dans les tubes.

Quant au mouvement dans la caisse, on verra que le rapport garde la valeur 9 jusqu'à  $h = 20$ , puis à partir de là, il diminue systématiquement.

Remarquons en passant que l'augmentation de  $M$  résulte de ce que le mouvement devient moins rapide que si  $M$  reste constant; tandis que lorsque  $M$  diminue, c'est le contraire qui se produit.

Analytiquement le mouvement du liquide dans les bandes placées dans la caisse sera représenté par les équations:

$$t = 9 h^2 \quad (37)$$

dans l'intervalle

$$h = 0 \quad h = 20$$

et par

$$t = 8,2 h^2 - \frac{h^3}{100} \quad (38)$$

dans l'intervalle

$$h = 20 \quad h = 110.$$

#### § 4. Détermination du point de séparation des deux mouvements.

Le tableau ci-dessous montre l'allure de l'eau dans une bande horizontale et une bande verticale imbibée simultanément selon le dispositif décrit page 457.

On voit qu'il y a concordance des deux mouvements jusqu'à une hauteur  $h = 3$  cm.

$t$	$h$ horiz.	$h$ vert.
10 s	1	1
34 s	2	2
1 m 28 s	3	3
2 m 40 s	4	3,9
4 m 20 s	5	4,8
6 m 45 s	6	5,7

#### Comparaison des résultats trouvés avec les 3 liquides.

En résumé nous avons montré dans les chapitres précédents que l'énergie  $E_1$ , utilisée par le système contre la pesanteur et le frottement était au début du mouvement pour  $h = 20$  cm.

$$\begin{aligned} E_1 &= 3,4 \cdot 10^4 \text{ avec le pétrole} \\ &3,24 \cdot 10^4 \text{ avec l'huile} \\ &3,06 \cdot 10^4 \text{ avec l'eau.} \end{aligned}$$

D'autre part, selon l'équation (13),  $E_1$  n'est qu'une partie de l'énergie totale  $E_0$  disponible lors de l'imbibition d'un volume unité; la partie restante  $Jq$  est convertie directement en chaleur.

L'étude expérimentale des dégagements de chaleur lors de l'imbibition en l'absence de tout travaux contre les forces extérieures et qui nous donne par conséquent l'énergie totale  $E_0$ , a fait l'objet d'un travail qui paraîtra dans les Helvetica Physica Acta. Voici en quelques mots un résumé des résultats obtenus.

a) L'énergie totale  $E_0$  est:

$1,76 \cdot 10^6$  ergs/cm<sup>3</sup> pour le pétrole buvard

$1,23 \cdot 10^6$  " pour l'huile buvard

$1,90 \cdot 10^8$  " pour l'eau buvard

Si nous envisageons le rapport  $\frac{E_1}{E_0} = c$  que nous appelons coefficient d'utilisation mécanique de l'énergie, nous voyons qu'il prend au début de l'ascension les valeurs:

$c = 0,0193$  pour le pétrole

$c = 0,0263$  pour l'huile

$c = 0,000161$  pour l'eau

de sorte que l'énergie utilisée pour l'ascension du liquide n'est qu'une bien petite partie de l'énergie totale disponible.

b) L'énergie restante convertie directement en chaleur se manifeste par une élévation de température de la bande de 3° C. environ à la hauteur de 10 cm. lorsque le liquide (eau distillée) arrive à cette hauteur.

### Conclusions.

En résumé, les expériences que nous avons effectuées sur la propagation des liquides (pétrole, huile de vaseline, eau) dans des bandes poreuses (papier buvard) nous ont permis de préciser les conditions dans lesquelles s'effectue cette propagation.

En premier lieu, ces expériences ont montré qu'on avait raison de négliger les forces d'inertie dans l'équilibre des forces qui président au mouvement relativement très lent des liquides dans l'imbibition.

D'autre part, nous avons constaté qu'on n'a en général pas le droit de considérer le degré d'imbibition comme pratiquement constant en arrière du front de propagation, lors même que la ligne de démarcation de ce front semble très nette. Cette supposition ne peut guère être admise comme première approximation que jusqu'à des ascensions ne dépassant pas 15 à 20 cm. Au-delà, le degré d'imbibition diminue avec la hauteur et, pour les grandes élévations (120 cm. environ), il tend, comme l'ont prouvé les pesées, à se répartir suivant une loi logarithmique analogue à celle de la pression atmosphérique. Il en résulte que les formules établies dans la première partie de ce travail, et que nous reproduisons ci-dessous, ne peuvent être en accord avec l'expérience que dans des limites assez étroites de propagation ne dépassant guère 15 à 20 cm.

Il importe en outre de remarquer que les formules primitives (1), (2) et (3) avaient été établies dans l'hypothèse limite d'une utilisation totale de l'énergie libérée par imbibition. Or les expériences nous ont montré que l'énergie utilisée pour l'ascension et le déplacement du liquide ne serait, dans les cas particuliers que nous avons étudiés, qu'une très petite fraction de l'énergie totale libérée par l'imbibition et mesurée au calorimètre.

Par ces considérations, la formule primitive (1), applicable seulement dans le cas des petites élévations, devient:

$$E_0 - Jq_1 = \varrho gh + A\eta hv. \quad (1')$$

Toutefois les expériences ont montré que le second membre de l'équation, du moins au début de l'ascension, croît à peu près linéairement en fonction de la hauteur  $h$ , de sorte que l'énergie utilisée croît au fur et à mesure que la hauteur atteinte est plus grande. En posant  $E_0 - Jq_1 = \mathcal{E}_0(1 + k_1 h) = E_1$  et intégrant, on obtient:

$$t = \frac{A\eta}{(\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0)} \left\{ \mathcal{E}_0 \operatorname{Log} \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0 - (\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0)h} - (\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0)h \right\} \quad (2')$$

qui revêt, comme on voit, la même forme que l'équation primitive (2); mais il ne saurait être question de l'utiliser pour déterminer une hauteur limite puisqu'elle est basée sur l'hypothèse de la constance de  $A$ , c'est-à-dire d'une imbibition presque totale en arrière du front de propagation.

Développée en série, l'équation (2') prend comme l'équation (3) la forme:

$$t = M_1 h^2 + N_1 h^3 + P_1 h^4 + \dots \quad (3')$$

les coefficients  $M_1 N_1 P_1$  ayant alors respectivement les valeurs

$$M_1 = \frac{A\eta}{2\mathcal{E}_0}; N_1 = \frac{A\eta}{3\mathcal{E}_0^2} (\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0); P_1 = \frac{A\eta}{4\mathcal{E}_0^3} (\varrho g - k_1 \mathcal{E}_0)^2.$$

Dans la propagation horizontale, pour laquelle le travail contre la pesanteur est nul, on peut du moins au début de la propagation utiliser la relation:

$$t = \frac{A\eta}{2(E_0 - Jq_2)} h^2$$

Jusqu'à une distance de quelques centimètres, cette relation représente aussi la propagation ascendante puisque le travail contre la pesanteur est alors négligeable.

En résumé, les formules précédentes qui ne sont d'ailleurs qu'approximatives, ne donnent des résultats conformes à l'expérience que pour de faibles distances de propagation par imbibition. Le problème ne pourrait être résolu de façon satisfaisante dans toute sa généralité que par la résolution d'une équation aux dérivées partielles pour laquelle plusieurs données expérimentales font encore défaut. On ne sait en effet pas dans quelle mesure  $A$  et  $E$  dépendent du degré d'imbibition du corps poreux, lequel degré d'imbibition est en définitive fonction de  $h$  et de  $t$ .

Nous nous réservons de revenir un jour sur cette question et d'examiner en particulier quelles seraient les hypothèses les plus simples susceptibles de représenter l'allure du phénomène de façon plus générale.