

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 2 (1929)  
**Heft:** VI  
  
**Artikel:** Etude sur l'élasticité de flexion : Acier Elinvar  
**Autor:** Jaquerod, A. / Mügeli, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-109455>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Etude sur l'élasticité de flexion

Acier Elinvar

par A. Jaquerod et H. Mügeli.

28. X. 1929.

*Sommaire.* — Ce travail est le complément de celui publié l'an dernier sur le même sujet; on a utilisé une méthode toute différente. Elle consiste à adjoindre à un pendule de torsion de période connue un ressort fait du métal étudié et à déterminer la nouvelle période à diverses températures. Les mesures ont été faites entre 15—150°; l'amplitude des oscillations variait entre 3° et quelques minutes d'arc.

Les résultats ont confirmé les précédents: la courbe représentant le premier module de l'acier en fonction de la température a une allure parabolique nette. Les recuits successifs diminuent régulièrement le coefficient thermoélastique moyen; il semble en outre qu'ils tendent à augmenter l'incurvation de la parabole.

Dans le cas de l'*élinvar*, la variation est presque linéaire entre 0—100°; l'échantillon étudié a un coefficient thermoélastique environ 7 fois plus faible que celui de l'acier.

Pour ces deux métaux, les traitements thermiques et mécaniques tendent toujours à augmenter le module d'Young. La stabilisation, pour un intervalle donné de température, n'est obtenue qu'après un temps considérable et de nombreux cycles d'accommodation.

### Introduction.

Dans une publication précédente<sup>1)</sup>, nous avons indiqué les résultats obtenus par une méthode dite «de la montre», concernant l'influence de la température sur l'élasticité de différents métaux. Nous y annonçons des déterminations faites par une méthode différente, destinées à contrôler les premiers résultats. C'est de cette deuxième série de recherches qu'il s'agit ici.

On peut, en effet, objecter à la méthode de la montre, si sensible et si pratique qu'elle puisse être, que l'oscillation qui sert à déterminer l'élasticité y est *entretenue* par le mécanisme

---

<sup>1)</sup> Helvetica Physica Acta, vol. 1 (1928), p. 139 à 164.

de l'échappement, et que cet entretien peut en quelque mesure influencer les résultats. Nous avons donc pensé qu'une méthode de contrôle devrait opérer sur une oscillation libre.

De plus, la première méthode n'utilise que des amplitudes d'oscillation considérables (180 à 270 degrés environ), et ne permet pas d'étudier la dissipation d'énergie par frottement intérieur.

Nous avons cherché à pousser les mesures, dans la recherche dont il s'agit maintenant, jusqu'à des amplitudes extrêmement petites (quelques minutes d'arc) et avons, de plus, étudié le frottement intérieur du métal constituant le ressort.

Jusqu'ici, la majorité des mesures précises concernant l'élasticité et sa variation avec la température, ainsi que le frottement intérieur avaient porté sur l'élasticité de torsion. Nous nous sommes attachés à l'étude des mêmes phénomènes, relatifs à l'élasticité de flexion.

Tandis que, dans la méthode de la montre, l'organe oscillant est très petit et que l'axe d'oscillation est fixé au moyen de réactions à frottement solide, nous avons opéré sur un appareil de beaucoup plus grandes dimensions, éliminant complètement tout frottement solide. Il eût été évidemment intéressant de s'affranchir également du frottement de l'air, mais la complication considérable qui en eût résulté dans la réalisation des appareils nous y a fait renoncer.

Les métaux ont été utilisés sous forme de fils de 0,7 mm. de diamètre, enroulés en spirale plane ou en spirale cylindrique. Nous avons tout d'abord songé à utiliser des rubans métalliques tels que ceux que l'on emploie pour les spiraux de montres, mais de beaucoup plus grandes dimensions; cette forme eût assuré une déformation beaucoup moindre sous l'effort de la pesanteur. Des difficultés d'ordre pratique, concernant notamment la fixation des extrémités du dit ressort, nous ont engagés à y renoncer.

Le principe de la méthode est le suivant: un pendule de torsion est préalablement étudié quant à sa période et à son amortissement dans tout l'intervalle désiré d'amplitude et de température. Le ressort en spirale, constitué du métal à l'étude, est alors fixé au pendule de façon que son couple élastique superpose son action à celle du fil de torsion. Une seconde série de mesures, portant sur la période et l'amortissement du pendule dans ces nouvelles conditions, permet la détermination du premier module d'élasticité et du frottement intérieur du métal constituant le ressort.

On verra par la suite à quel point *l'histoire* d'un échantillon peut influencer ces deux facteurs. Le recuit notamment, même à des températures assez peu élevées, peut avoir déjà une influence considérable. Une chauffe à 500 ou 600 degrés peut modifier totalement l'allure des phénomènes ainsi que cela s'est présenté pour le nickel par exemple. Nous nous sommes efforcés de fixer les conditions à remplir pour que, entre certaines limites de température, les phénomènes aient un caractère bien défini et que notamment la courbe représentant la variation du module d'Young avec la température ait une allure stable. Même en se bornant à l'intervalle compris entre 15 et 150 degrés, ce résultat n'est pas facile à obtenir, et dans certains cas nous n'y sommes parvenus qu'approximativement.

Nous nous bornons dans ce mémoire à relater les résultats qui concernent le module d'Young et tout spécialement sa variation avec la température; pour ce qui concerne en effet la valeur absolue de ce module, qui nécessite la connaissance des mesures exactes des échantillons de fil employés, elle ne présente, nous semble-t-il qu'un intérêt secondaire étant données les grandes variations qui résultent de traitements thermiques et mécaniques même appliqués modérément.

Les données fournies par l'étude de l'amortissement feront l'objet d'une autre publication; enfin nous ne mentionnerons ici que les résultats relatifs à l'acier et à l'élinvar.

### **Appareil.**

Nous ne donnerons qu'une description sommaire de l'appareil utilisé. Nous l'avons en effet modifié plusieurs fois en cours de route et l'on pourrait certainement encore y apporter des perfectionnements de détail. Tel qu'il existe à l'heure actuelle, il nous semble cependant présenter des qualités précieuses de stabilité et de commodité de maniement, et permet d'assurer, pour ce qui concerne la période, la précision du cent-millième que nous désirions obtenir.

La photographie reproduite par la figure 2 et le dessin de la figure 1 permettent de suivre facilement la description que nous allons faire.

Le *pendule de torsion* est constitué d'un fil d'élinvar de 0,5 mm. de diamètre et de 128 cm. de longueur, brasé à sa partie supérieure à une large tête de bronze taillée en forme tronc-conique, qui



s'ajuste dans un anneau fixé à la muraille par un fer en T. Une butée permet de ramener la tête dans une position invariable. Ce dispositif permet de lancer le pendule en lui appliquant des impulsions rythmées par une série de rotation appropriées de la tête qui le supporte. Le centrage est suffisamment précis

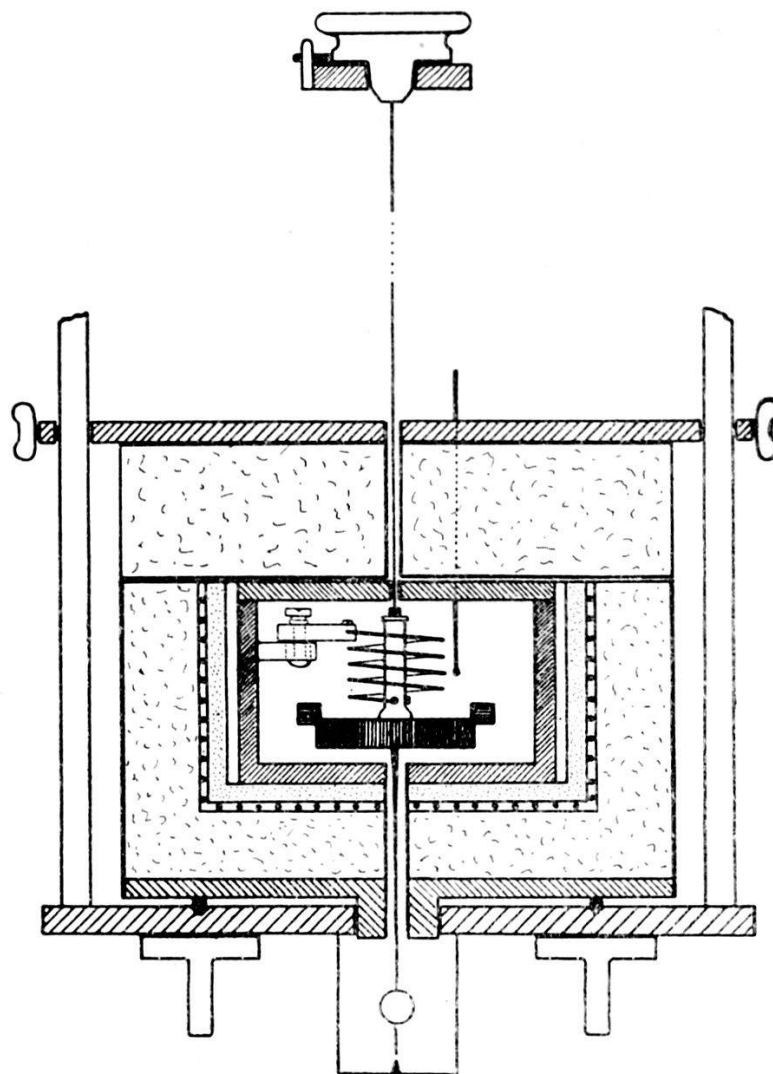


Fig. 1.

pour que le pendule n'effectue que les oscillations de torsion sans balancement appréciable.

L'équipage mobile est constitué par une tige d'acier de 10 mm. de diamètre et de 50 mm. de longueur, à laquelle est fixé un disque horizontal d'acier de 80 mm. de diamètre et de 15 mm. d'épaisseur. Le tout a été très exactement tourné.

Une surcharge mobile en forme de tore à section rectangulaire, de 100 mm. de diamètre extérieur et de 76 mm. de diamètre intérieur peut se poser à frottement doux sur le disque fixe et

servir à la détermination du moment d'inertie de l'équipage par la méthode de Gauss. A la partie inférieure de l'équipage est fixée une nouvelle tige cylindrique beaucoup plus mince, de 2 mm. de diamètre et de 18 cm. de longueur, destinée à supporter

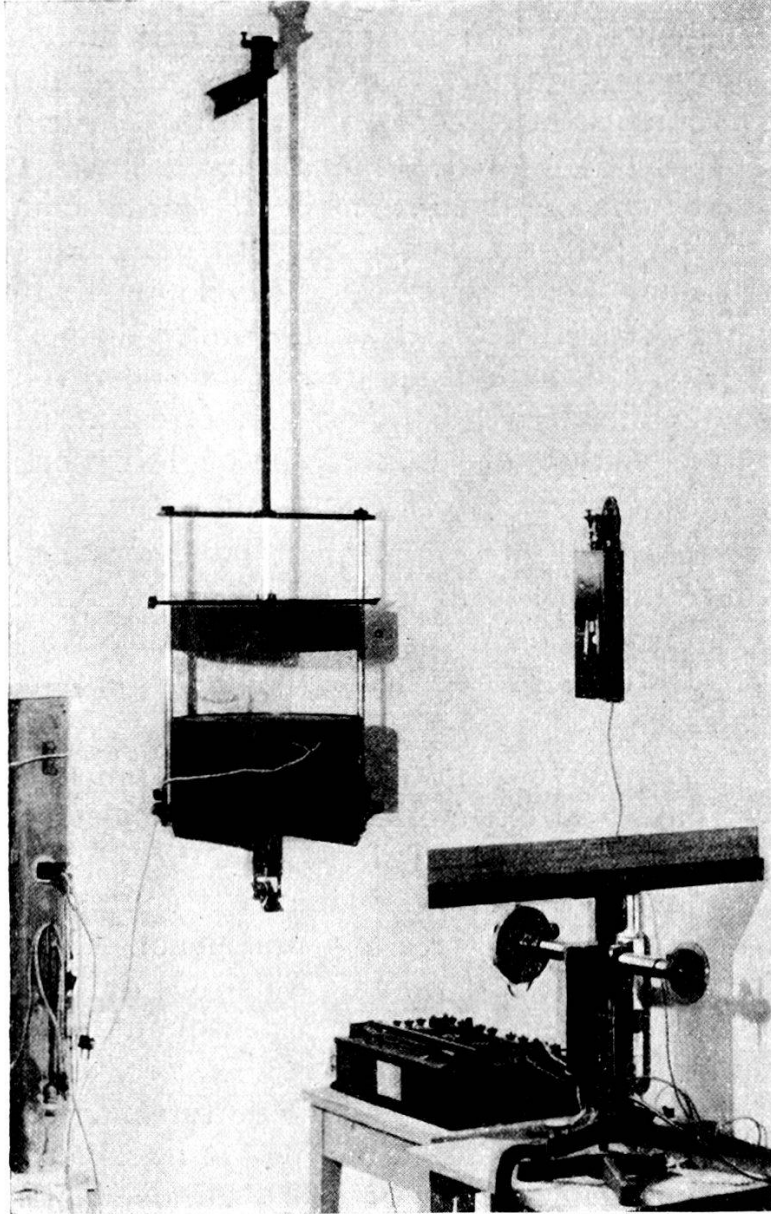


Fig. --.

le miroir servant à l'observation des oscillations par la méthode de Poggendorff; ce miroir donne sur une échelle transparente placée à 109 cm. de distance une image très nette du filament rectiligne d'une lampe à incandescence. L'observation des amplitudes supérieures à  $7^{\circ}$  se fait à l'aide d'un viseur muni d'un oculaire gradué en degrés; l'extrémité de la tige du pendule est ter-

minée par une aiguille très fine dont l'image est projetée sur le viseur au moyen d'un miroir incliné à  $45^{\circ}$ . Ce dispositif a été utilisé pour l'étude de l'amortissement aux très grandes amplitudes dont il ne sera pas question ici.

L'équipage tourne librement dans un «four» constitué par un récipient cylindrique en cuivre de 14 cm. de diamètre intérieur sur 8 cm. de hauteur, dont les parois ont 10 mm. d'épaisseur, récipient recouvert d'un couvercle de même métal et percé d'ouvertures appropriées. Un corps de chauffe électrique permet d'atteindre et de maintenir la température désirée. L'enveloppe extérieure, de 37 cm. de diamètre et de 25 cm. de hauteur totale, est en tôle de fer de 3 mm., reposant sur une plaque également en fer de 10 mm. d'épaisseur; cette enveloppe limite la partie isolante du four, constituée par de la cendre de bois. Le four tout entier peut tourner autour de son axe de révolution grâce au roulement à billes qui le supporte, et être fixé par deux vis dans la position voulue, c'est-à-dire celle où le ressort métallique surajouté n'exerce aucun effort appréciable.

Le couvercle peut être facilement levé, lors de la fixation du ressort en étude, grâce à deux glissières latérales. Un tube d'acier fixe et un tube de verre solidaire du couvercle, et glissant dans le premier tube, protègent le fil de suspension contre les courants d'air.

Nous avons éprouvé de grandes difficultés dans la fixation du ressort, dont l'une des extrémités doit être reliée rigidement au four et l'autre à l'équipage mobile. La solution qui nous a paru la meilleure consiste à munir les deux extrémités de ce ressort d'un tronc de cône à angle très aigu qui pénètre dans un orifice de même forme et y est fixé à l'aide d'une vis de pression. L'extrémité solidaire du four peut être réglée quant à sa position à l'aide de coulisses en laiton de façon à n'exercer, dans la position d'équilibre, aucun effort sur le pendule de torsion. Cette position d'équilibre est repérée à l'aide d'une pointe fixe placée en regard de l'extrémité inférieure de la tige du pendule, ainsi que par la position du spot sur l'échelle transparente.

La *température du four* était déterminée, au début, à l'aide d'un thermomètre divisé en dixièmes de degré, dont le réservoir pénétrait dans le four jusqu'à quelques millimètres du ressort. Deux thermomètres auxiliaires donnaient la température de la colonne émergente.

Dans la suite, nous avons remplacé ces thermomètres par un couple argent-constantan très soigneusement étalonné, dont

la soudure froide est placée dans un «Dewar» rempli d'eau surmontée d'une couche de paraffine liquide, et dont la température, qui se maintient très constante, est lue sur un thermomètre auxiliaire.

*L'uniformité de la température* de l'enceinte intérieure est d'une importance capitale; elle est difficile à obtenir par le fait que le couvercle de l'appareil n'est pas chauffé, mais l'épaisseur des parois de cuivre de cette enceinte (10 mm.) nous a paru propre à l'assurer de façon suffisante. Nous avons d'ailleurs vérifié la chose en déplaçant le thermomètre intérieur et n'avons pu constater une différence de température supérieure à un dixième de degré entre le bas et le haut. La température du ressort est donc connue au dixième de degré.

### Méthode d'observation.

La *période d'oscillation* est déterminée par la méthode dite «des passages», à l'aide d'un chronographe enregistreur de Hipp, tel qu'on l'emploie dans les observatoires, qui permet l'estimation du centième de seconde. L'horloge qui commande le chronographe a une marche très régulière; elle est contrôlée chaque jour à l'aide des battements de coïncidence émis par la tour Eiffel dès 10h 31, et ses variations dépassent rarement 0,05 seconde par jour. Un contact électrique relié au chronographe est actionné par l'observateur au moment du passage du spot par sa position d'équilibre dans un sens déterminé et toujours le même.

Les périodes d'oscillation sont d'environ 12 secondes pour le pendule de torsion seul et 4 secondes pour le pendule muni du ressort à étudier, lorsque l'anneau de surcharge est posé sur le disque; ceci est toujours le cas sauf lors de la détermination du moment d'inertie. Dans ces conditions, la connaissance de la durée approximative de l'oscillation permet de calculer le centième, deux centième... etc. passage du spot par la position d'équilibre et de l'observer à l'instant voulu. La durée totale d'une expérience varie naturellement suivant l'amortissement; pour le pendule seul, elle est d'environ 9 heures pour une chute d'amplitude de  $2^{\circ} 39'$  à  $16'$ . Avec le ressort, la durée de l'expérience, pour les mêmes amplitudes extrêmes, descend à 4 heures en moyenne à froid et peut même s'abaisser jusqu'à 15 à 20 minutes à haute température. Nous avons poursuivi quelques fois l'observation jusqu'à 3 mm. d'amplitude double du spot (amplitude d'oscillation de 2 à 3 minutes d'arc). Nous sommes même, dans

un cas particulier, descendus jusqu'à un déplacement du spot de 0,1 mm., en observant au microscope les oscillations.

Chaque détermination de passage est faite à l'aide d'une dizaine de pointés successifs dont on prend la moyenne; il semble que dans ces conditions la précision de 0,02 seconde soit assurée. La période est alors connue avec une précision qui dépend de la durée de l'expérience: dans les meilleures conditions, cette précision atteint certainement le cent-millième comme le montrent les exemples qu'on trouvera plus bas. Si l'amortissement est très fort, la précision diminue, mais ne semble pas devenir inférieure au dix-millième, sauf cas tout à fait spéciaux dont il ne sera pas question pour l'instant.

Les positions extrêmes du spot sur l'échelle sont lues à chaque détermination de passage, ce qui fournit les éléments nécessaires au calcul de l'amortissement. Dans nos tableaux nous indiquerons toujours l'amplitude double en divisions de l'échelle; 200 mm. correspondent à une amplitude, au sens ordinaire du terme, de  $2^{\circ} 39'$ , et 20 mm. à  $16'$ .

#### Calculs.

Nous appellerons:

Pour le pendule de torsion seul,

$T$  = la période d'oscillation.

$I$  = le moment d'inertie de l'équipage mobile.

$C$  = le couple de torsion du fil pour l'unité d'angle.

Pour le pendule de torsion avec ressort:

$Tr$  = la période d'oscillation.

$i$  = le moment d'inertie *apparent* du ressort-spiral.

$M$  = le couple dû au ressort pour un angle de un radian ou moment élastique du spiral.

$t$  = la température.

$a$  = le coefficient de dilatation du métal constituant le ressort ( $a = a + \beta t$ ).

$e$  ou  $E$  = le premier module d'élasticité ou module d'Young du même métal.

$l$  = la longueur du fil constituant le ressort.

$d$  = son diamètre.

Nous affectons de l'indice zéro les grandeurs qui se rapportent à la température de la glace fondante.

On a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \quad \text{et} \quad T_r = 2\pi \sqrt{\frac{I+i}{C+M}}.$$

On en déduit :

$$M = 4\pi^2 \left[ \frac{I+i}{T_r^2} - \frac{I}{T^2} \right]. \quad (1)$$

Le moment élastique d'un ressort à section circulaire est donné par

$$M = \frac{\pi e d^4}{64 l}. \quad (2)$$

Si l'on introduit l'influence de la température sur le ressort, on tire des expressions ci-dessus la relation :

$$\frac{e}{e_0} = \frac{M}{M_0} \cdot \frac{1}{(1+at)^3}. \quad (3)$$

Les *moments d'inertie*  $I$  et  $i$  sont naturellement des fonctions de la température; nous les avons obtenus de la façon suivante :

Le moment d'inertie  $I$  de l'équipage mobile a été déterminé à plusieurs reprises par la méthode de Gauss, à la température ordinaire. Comme sa détermination à chaud eût présenté des difficultés, sans autoriser une confiance suffisante, nous avons calculé la valeur correspondante pour toutes les autres températures, au moyen de la relation :

$$I = I_0 (1 + at)^2 \quad (4)$$

$I_0$  étant la valeur à 0 et  $a$  le coefficient de dilatation de l'acier. Une mesure directe de  $a$  n'étant pas possible, nous avons adopté la valeur relative à un acier moyen :

$$a = a + \beta t \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} a &= 11 \cdot 10^{-6} \\ \beta &= 5 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

Une petite incertitude subsiste naturellement sur ces coefficients, mais nous ferons remarquer que le but principal de cette étude était de fixer l'allure de la fonction  $e = f(t)$ , soit la forme de la courbe représentant le module d'Young. Or le terme du premier degré n'affecte guère que le coefficient angulaire de la courbe à l'origine; le terme en  $\beta$  seul agit sensiblement sur l'incurvation. Sa valeur est très petite, et les divers échantillons



d'acier, pour lesquels nous avons trouvé des données concernant  $\beta$ , montrent que ce coefficient varie peu d'un échantillon à l'autre.

Il faut encore remarquer que la détermination de  $I$  présente quelque incertitude, du fait que la charge du fil de suspension varie durant la mise en œuvre de la méthode de Gauss; en effet, le poids de l'équipage mobile seul est de 530 gr. et celui de la surcharge 260 gr. environ. Il en résulte nécessairement une légère modification du couple de torsion, qui fausse la valeur de  $I$ . Mais, ici encore, nous ferons observer que la valeur absolue du module d'élasticité, très variable d'un échantillon à l'autre pour un même métal, ne présente pas un intérêt spécial.

En ce qui concerne la détermination du *moment d'inertie apparent*  $i$  du ressort et de sa variation avec la température, le calcul est impossible. Le ressort, lors des oscillations du pendule, ne tourne pas purement et simplement autour d'un axe, mais se déforme d'une façon compliquée. L'influence de son inertie peut, en gros, se ramener au moment d'inertie d'un solide invariable. Une étude remarquable, faite tout récemment par J. HAAG<sup>1)</sup>, montre que même pour des formes simples, spirale logarithmique par exemple, du ressort-spiral, ce calcul est compliqué. Or nous ne sommes pas parvenus à réaliser avec tant soit peu d'exactitude une spirale logarithmique ou une spirale cylindrique; nos ressorts avaient toujours une forme quelque peu irrégulière. La détermination expérimentale s'imposait; nous l'avons effectuée également par le moyen de la méthode de Gauss appliquée au pendule avec ressort et obtenu la valeur de  $i$  par différence.

Pour la variation de  $i$  avec la température, nous l'avons simplement calculée à partir de la valeur de base en traitant  $i$  comme un moment d'inertie réel.

*Influence de l'amortissement.* — Les calculs de la page 426 supposent l'amortissement nul; en réalité il existe toujours, dû à la présence de l'air, au frottement intérieur du fil de suspension, et à celui du ressort spiral. Nous avons dans tous les cas déterminé cet amortissement et calculé le décrétement logarithmique pour les différentes amplitudes.

Le cas serait particulièrement simple si ce décrétement était constant, ce qui supposerait un frottement proportionnel à la vitesse. Malheureusement, il n'en est que rarement ainsi. Dans le cas du pendule de torsion seul, le décrétement est bien pratiquement constant comme le montrent les exemples suivants:

---

<sup>1)</sup> J. HAAG, C. R. **186** (1928), 1194, 1421.



**Tableau I.**  
Pendule seul.

$t$	Amplitude double en divisions de l'échelle	Nombre d'oscillations	Décrément logarithmique
18,7	200		
		300	0,000423
	149		
		300	419
	111,8		
		300	417
	83,8		
98,7		836	411
	38,0		
		700	410
	19,0		
	201,1		
		300	0,000461
	146,2		
		300	459
	106,5		
		300	455
	77,8		
		700	451
	37,6		
		600	450
	20,2		

Néanmoins, une légère diminution s'observe; nous l'avons constatée sans exception dans toutes les déterminations.

Avec le ressort, il en va autrement et l'on remarque presque toujours une diminution notable du décrément avec l'amplitude; cette diminution peut dans certains cas être très considérable, comme le montre l'exemple suivant (tableau II).

Nous étudierons dans un autre mémoire la question du frottement intérieur dans le ressort, sa variation avec la température, et l'influence très considérable sur ce facteur du traitement thermique. Pour l'instant, nous n'avons qu'à considérer l'effet que peut avoir l'amortissement sur la valeur de la période.

En appelant  $\Delta$  le décrément logarithmique, ou logarithme naturel de  $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ ,  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  étant deux amplitudes successives du même côté de la position d'équilibre, on a :

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{4\pi^2}}} \quad (5)$$

$\tau$  est la période sans amortissement et  $T$  la pseudo-période.

**Tableau II.**

Nickel recuit.

Température de l'expérience	Amplitude double en divisions de l'échelle	Nombre d'oscillations	Décroissement logarithmique
18,0°	204,5	50	0,00826
	79,0	50	396
	50,1	50	270
	36,7	50	214
	28,7	50	177
	23,4	50	154
	19,6		

La valeur la plus forte observée est  $\Delta = 0,03$  (argent à 150°); le rapport  $\frac{T}{\zeta}$  qui en résulte ne dépasse l'unité que de un cent-millième en chiffre rond, ce qui représente une précision qu'il n'est pas possible d'atteindre sur la période pour des mouvements aussi amortis, par suite du petit nombre d'oscillations observables. Dans les cas ordinaires, la correction serait de l'ordre du millionième ou même bien inférieure; nous pourrions donc toujours la négliger.

*Etablissement de la valeur  $M_0$ .* — Sans de grandes complications dans l'appareillage, il nous était impossible d'opérer à la température de la glace fondante pour obtenir la valeur du moment élastique du ressort à zéro degré, nécessaire à la détermination du rapport  $\frac{e}{e_0}$ . Nous avons opéré de la façon suivante:

Les valeurs de  $M$  à différentes températures (calculées suivant la formule (1)), portées sur un graphique, donnent en général une courbe très légèrement incurvée. L'extrapolation à zéro aurait cependant présenté une trop forte incertitude; nous avons alors calculé la différence entre les valeurs observées et une droite théorique passant par les points relatifs aux températures de la salle et 80°. Ces différences étaient portées sur un graphique à grande échelle et la courbe, d'allure parabolique en générale très régulière, était prolongée *de sentiment* jusqu'à zéro, ce qui fournissait la constante cherchée.

Une incertitude minime subsiste naturellement avec ce mode de faire, mais comme la valeur absolue du module nous importe moins, ainsi que nous l'avons relevé, que les variations de cette grandeur avec la température, nous avons jugé ce procédé parfaitement légitime.

*Variation de la période avec l'amplitude.* — On admet souvent que les oscillations d'un pendule de torsion ont une période constante jusqu'à de grandes amplitudes, et que le même isochronisme est réalisé pour les petites amplitudes dans le cas d'un ressort. Nous avons au contraire constaté que, dans presque tous les cas, la période diminue avec l'amplitude, et cela jusqu'aux plus petites amplitudes.

La variation est en générale très faible, et n'a pu être décelée que grâce à la grande précision des mesures; pour de nombreux métaux cependant, elle est notable, et peut exceptionnellement atteindre le millième pour des amplitudes constamment inférieures à 4 degrés d'arc.

### **Le pendule de torsion.**

Avant d'aborder les recherches que nous avons en vue, la première chose à faire était l'étude complète du pendule de torsion seul, sans ressort, et cela dans les conditions mêmes auxquelles il devait être soumis par la suite; cette étude «à blanc» a été faite pour des températures comprises entre 15 et 200° environ, et pour des amplitudes ne dépassant pas 2° 40', ce qui correspond à un déplacement total du spot sur l'échelle de 200 mm. environ.

L'influence de la température s'est révélée minime, ainsi qu'il fallait s'y attendre. En effet, nous avons dans ce but choisi un fil de suspension d'élinvar; de plus, une faible longueur du fil est soumise aux variations de température du four, le reste étant maintenu à une température à peu près invariable.

Quant à l'amplitude, son influence s'est montrée extrêmement faible, mais cependant perceptible aussi loin que nous avons pu pousser les observations.

Le tableau III donne trois exemples à trois températures différentes.

**Tableau III.**

Pendule seul.

Température	Amplitude double en divisions de l'échelle	Nombre d'oscillations	Période en seconde
18°	201,0		
		482	12,03542
	131,6	577	12,03537
	79,7	688	12,03531
	44,3	977	12,03529
	19,4		
100°	199,0		
		238	12,04654
	158,7	388	12,04615
	110,7	299	12,04600
	83,5	602	12,04577
	48,1	991	12,04566
221°	19,0		
	200,3		
		225	12,06320
	151,6	175	12,06287
	122,5	300	12,06277
	85,4	800	12,06264
	33,1	300	12,06245
	23,4	300	12,06227
	16,4		

La durée totale d'une expérience pour une diminution d'amplitude double de 200 à 20 mm. sur l'échelle était d'environ 9 heures à la température ordinaire, 8 heures à 100° et 7 heures à 200°. Cette diminution provient essentiellement de l'augmentation de viscosité de l'air.

Nous avons toujours pris comme période la moyenne portant sur la durée totale de l'expérience.

*Stabilisation du fil d'élinvar.* — Dès le début nous avons été gênés, et dans la suite considérablement retardés, par le

manque de stabilité du fil de suspension. La période a varié dans de fortes proportions entre le début et la fin des expériences. Dans le but d'éliminer ces variations, qui rendaient des déterminations précises d'élasticité impossibles, nous avons effectué un certain nombre de recuits en chauffant le fil au moyen d'un courant électrique, après y avoir suspendu un poids d'environ 2 kg. Ces opérations ont quelque peu hâté la stabilisation, mais le graphique de la figure 3 montre cependant que nous avons du attendre plus de deux ans avant de pouvoir faire, avec les ressorts, des mesures présentant suffisamment de sécurité.

Durant ces deux années, nous avons à plusieurs reprises adjoint au pendule un ressort d'acier, mais les expériences corres-

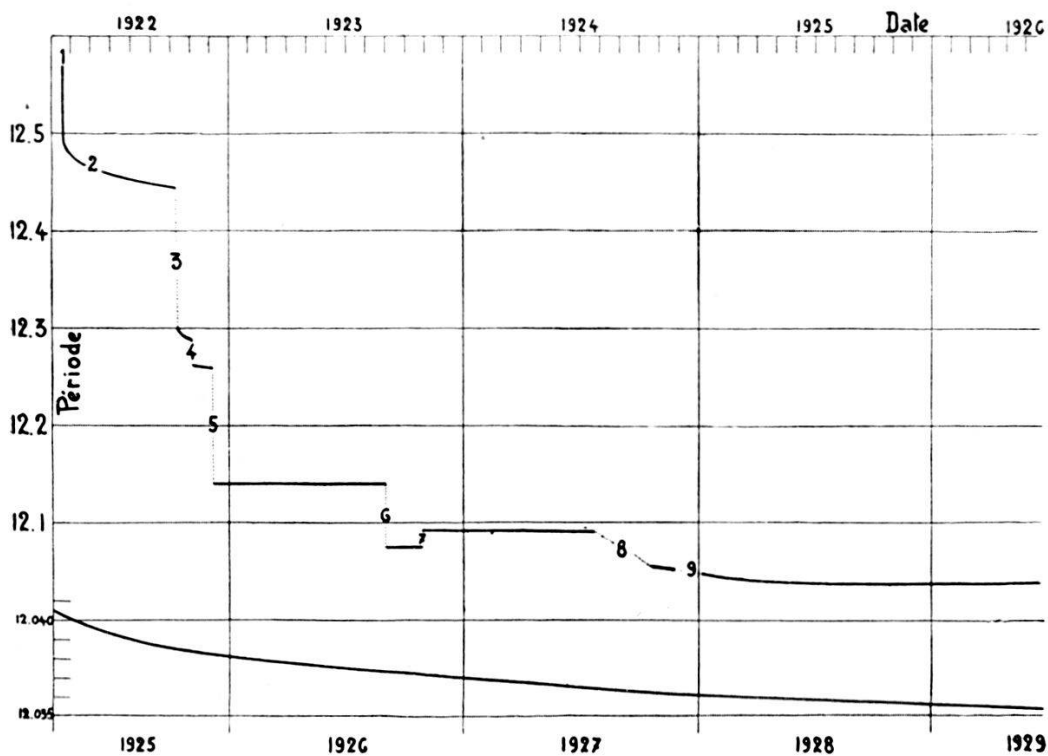


Fig. 3.

1. Mise en place du fil d'élinvar; pitons soudés.
2. Nombreuses oscillations du pendule aux grandes amplitudes.
3. Le fil de torsion a été recuit, au moyen du courant électrique, pendant 24 heures vers 300° et refroidi lentement en diminuant l'intensité du courant.
4. Recuit 50 heures à 250° au moyen du courant électrique.
5. Recuit 90 heures à 300° au moyen du courant électrique.
6. Fil raccourci.
7. Les pitons ont été brasés à l'argent.
8. Démontage complet du pendule.  
Remontage après 3 mois; le fil a été recuit pendant quelques secondes au rouge sombre.
9. Nouvelle transformation de l'appareil, mais le fil n'a pas été touché.

pondantes sont considérées comme préliminaires et les résultats obtenus ne seront donnés qu'à titre d'indication.

La figure 3, où toutes les mesures de  $T$  à la température ordinaire sont ramenées à  $20^0$ , est, pensons nous, suffisamment explicite pour nous dispenser d'une longue description; elle raconte l'histoire du fil de suspension avec ses différentes vicissitudes. La courbe supérieure correspond aux dates portées au haut du graphique; la courbe inférieure est à une échelle 20 fois plus grande.

On remarque au début une variation de période très rapide, puis, après un certain nombre d'oscillations aux grandes amplitudes, une tendance à la stabilisation. Chaque recuit marque ensuite une diminution de la période; en même temps la stabilité augmente. Trois accidents du graphique en août, octobre 1923 et août—septembre 1924 correspondent à des modifications apportées à l'appareil. Une première fois le fil, qui s'était légèrement allongé a été raccourci; une seconde fois ses extrémités, qui étaient simplement soudées à l'étain, ont été brasées à l'argent. La troisième fois enfin, l'appareil a été entièrement démonté pour cause de transformation du local; nous avons profité de l'occasion pour recuire une dernière fois le fil au rouge sombre durant quelques secondes au moyen du courant électrique.

A partir de ce moment, fin d'octobre 1924, la période est encore descendue, mais de plus en plus lentement, et le graphique montre que jusqu'à aujourd'hui les variations ont été absolument régulières et extrêmement lentes.

Toutes les mesures d'élasticité ont été effectuées à partir de 1925. La période du pendule seul était déterminée avant et après chaque série de mesures concernant un métal. A partir de juin 1925 jusqu'à aujourd'hui, la diminution totale de période n'a été que d'environ  $\frac{1}{3000}$  à  $20^0$ ; grâce à ces précautions, nous estimons que la période  $T$  peut être interpolée avec certitude.

Remarquons d'ailleurs que la formule (1) de la page 426 montre qu'une erreur de un dix-millième sur  $T$  affecterait d'environ un cent-millième la valeur de  $M$ .

*Variation de  $T$  avec la température.* — L'étude a été faite à trois reprises. Le graphique correspondant s'est toujours montré très voisin d'une droite; nous donnons comme exemple les dernières déterminations effectuées (fig. 4).

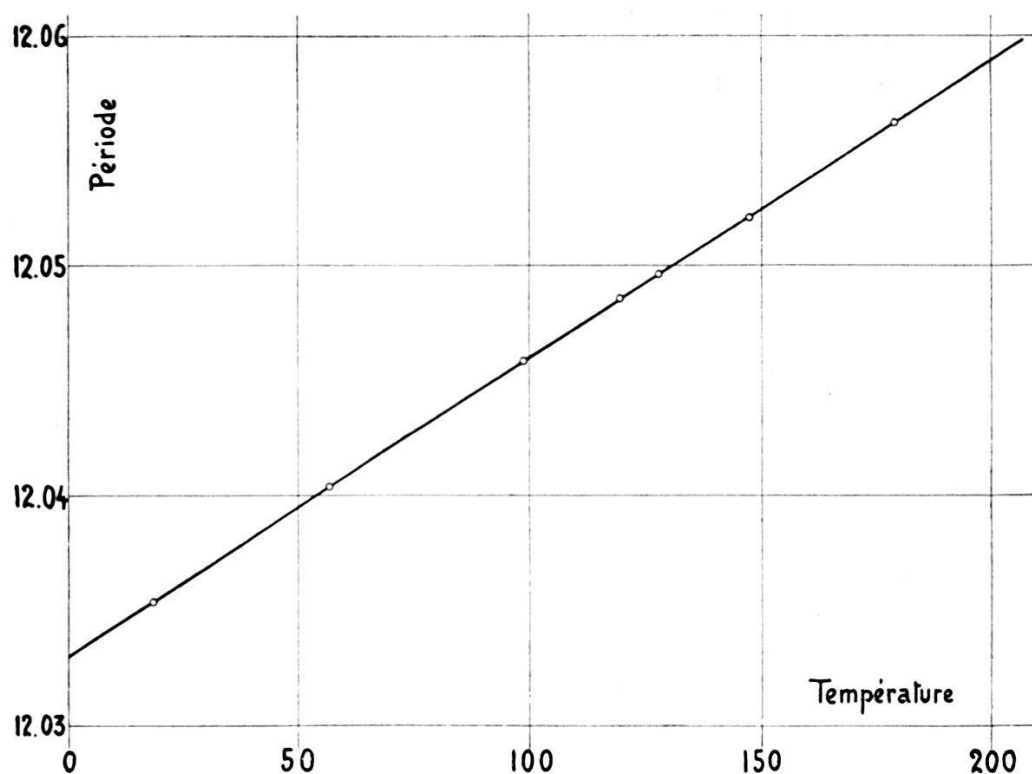


Fig. 4.

Cette droite s'est naturellement déplacée parallèlement à elle-même, au cours du temps, par suite de la variation de période à froid due à l'instabilité dont nous venons de parler.

### Résultats expérimentaux.

#### *Acier.*

Comme nous l'avons dit à la page 419, nous avons débuté en utilisant un ressort à section rectangulaire; les difficultés de fixation nous y ont fait renoncer par la suite. Alors même qu'un temps considérable a été employé à ces mesures préliminaires, nous n'indiquerons que sommairement, à titre de comparaison, les résultats obtenus qui présentent quelque incertitude,

Les mesures définitives ont été effectuées à l'aide d'un fil cylindrique constitué par une corde à piano de 0,725 mm. de diamètre de 132,6 cm. de longueur utile, recuit à 147° pendant 156 heures. Ce fil a été enroulé en une spirale plane, comprenant  $6\frac{1}{4}$  spires, dont le diamètre total est d'environ 120 mm. Aux deux extrémités on a sondé les pitons de fixation. Puis, le ressort a été mis en place et les mesures effectuées comme nous l'avons décrit.



Comme exemple, nous donnons pour le cas de l'acier les renseignements nécessaires au calcul; dans la suite nous n'indiquerons que les résultats.

Le moment d'inertie apparent du ressort  $i$  a été déterminé à la fin des mesures par la méthode de Gauss; ramenées à zéro degré par le calcul, les valeurs expérimentales sont les suivants:

$$\begin{aligned} I_0 + i_0 &= 9474,45 \text{ gr. cm}^2 \\ I_0 &= 9377,54 \text{ gr. cm}^2 \\ \hline i_0 &= 96,91 \text{ gr. cm}^2 \end{aligned}$$

Le tableau IV résume les valeurs expérimentales de  $T_r$  et de  $T$  ainsi que les valeurs de  $I + i$  et de  $I$  calculées à partir des valeurs expérimentales à la température de la salle; la dernière colonne donne les valeurs de  $M$  calculées à l'aide de la formule (1).

Tableau IV.

$t$	$(I + i)$	$I$	$T_r$	$T$	$M$
18,00	9478,24	9381,29	3,90341	12,04140	22004,06
43,81	9483,77	9386,77	3,91662	12,04478	21852,86
67,60	9488,99	9391,93	3,92961	12,04773	21704,95
98,99	9496,02	9398,89	3,94895	12,05138	21485,37
132,20	9503,70	9406,49	3,97397	12,05497	21202,25

Remarquons que les valeurs de  $T_r$  proviennent d'une série de 30 mesures et qu'il a été tenu compte, dans les moyennes, des variations lentes qui se manifestaient en fonction du temps. Les valeurs de  $M$  de la dernière colonne ont servi à construire le graphique dont il est parlé à la page 429, graphique à grande échelle donnant par extrapolation la valeur  $M_0$  et permettant l'interpolation aux températures de 20, 40, 60, 80, 100 et 130 degrés. Ces valeurs sont consignées dans la deuxième colonne du tableau V; elles permettent de calculer le rapport  $\frac{e}{e_0}$  d'après la formule (3). Pour ces calculs, nous avons admis le coefficient de dilatation déjà adopté par l'équipage mobile du pendule de torsion:  $a = (11 + 0,005 \cdot t) \cdot 10^{-6}$ .

Tableau V.

Température	M	$\frac{e}{e_0}$ (déduits des observations)	$\frac{e}{e_0}$ calc. (=1-0,0003075 t)	Différence (observ. — calc.)
0	22105,0	1,00000	1,00000	0,00000
20	21992,6	0,99422	0,99385	+ 0,00037
40	21875,6	0,98823	0,98770	+ 0,00053
60	21753,1	0,98198	0,98155	+ 0,00043
80	21623,2	0,97540	0,97540	0,00000
100	21478,0	0,96813	0,96925	— 0,00112
130	21224,0	0,95561	0,96002	— 0,00441

Si l'on compare ces résultats avec ceux publiés dans notre précédent travail (1), la confirmation des résultats obtenus avec la méthode de la montre est tout à fait satisfaisante en ce qui concerne l'allure parabolique des courbes.

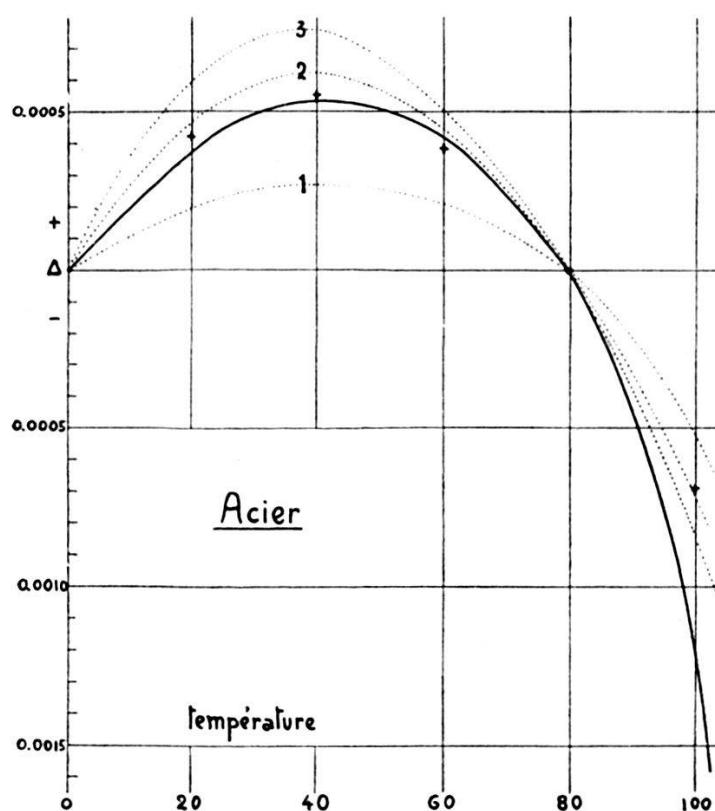


Fig. 5.

(1) loc. cit. à la page 151.

La figure 5 donne sous forme de graphique les différences  $\Delta$ , soit  $\left(\frac{e}{e_0}\right)$  observé moins  $\left(\frac{e}{e_0}\right)$  calculé linéairement à l'aide de la droite passant par zéro et  $80^\circ$ , en fonction de la température; l'équation de cette droite est:

$$\left(\frac{e}{e_0}\right) \text{ calc.} = 1 - 0,0003075t \quad (6)$$

avec  $e_0 = 2,16 \cdot 10^{12}$  c. g. s.

Les courbes pointillées 1, 2, 3 correspondent aux résultats fournis par les mesures préliminaires, effectuées avec un ressort en acier plat de 0,22 mm. d'épaisseur et de 3,80 mm. de hauteur sur environ 66 cm. de longueur. Les croix représentent les valeurs moyennes des trois séries. La concordance, en ce qui concerne l'incurvation de la variation thermoélastique de l'acier, est très satisfaisante.

Pour ces trois séries préliminaires, les droites passant par zéro et  $80^\circ$  sont représentées respectivement par les équations:

$$\text{Courbe 1. } \frac{e}{e_0} = 1 - 0,0003215 \cdot t \quad (7)$$

$$\text{Courbe 2. } \frac{e}{e_0} = 1 - 0,00031375 \cdot t \quad (8)$$

$$\text{Courbe 3. } \frac{e}{e_0} = 1 - 0,000307625 \cdot t \quad (9)$$

Constatons tout d'abord que les mesures définitives effectuées sur un échantillon recuit pendant une période prolongée accusent un coefficient thermoélastique moyen (équation 6) très voisin de celui obtenu sur le premier échantillon après le dernier recuit (équation 9).

D'autre part, il est intéressant de remarquer qu'entre les trois séries de mesures complètes (équations 7, 8 et 9), faites entre la température de la salle et  $100^\circ$  environ, séparées par des déterminations de la période du pendule seul, le coefficient thermoélastique moyen à constamment *diminué*, alors même qu'au début, le ressort avait été recuit durant 100 heures à environ  $100^\circ$ . Cette variation est donc due aux traitements thermique et mécanique provenant des mesures elles-mêmes.

Afin de contrôler cette constatation, nous avons recuit encore une fois le ressort cylindrique ayant servi aux mesures définitives. Ce recuit a été de 48 heures à  $500^\circ$ , suivi d'un refroidisse-

ment lent. Le ressort nettoyé — il était assez fortement oxydé à la surface — a été remis en place et une nouvelle série de mesures à froid et une à 100° ont été effectuées.

Nous avons constaté une notable diminution dans la période d'oscillation, ce qui correspond à une augmentation du module d'élasticité. Il est impossible de donner une valeur tant soit peu exacte du nouveau module, par suite des changements de dimensions du fil provoqués par les opérations de nettoyage.

Nous avons pu, par contre, déterminer le coefficient thermoélastique moyen entre 20 et 100 degrés, qui a été trouvé égal à environ 0,00027. Avant le dernier recuit, la valeur correspondante était 0,000326. Il se manifeste donc bien, en confirmation de ce que donnaient les mesures préliminaires, une notable diminution du coefficient thermoélastique comme conséquence du recuit.

Enfin, les mesures préliminaires semblent montrer nettement (fig. 5) que l'incurvation de la courbe représentant  $e$  en fonction de la température, *augmente* au fur et à mesure des recuits; ce résultat demande naturellement confirmation.

Nous nous proposons de contrôler ces différents phénomènes en les étendant à des aciers de teneurs en carbone différentes et bien connues.

### *Elinvar.*

Etant donnée l'énorme influence des traitements mécanique et thermique constatée avec l'acier, nous avons tenu à étudier de façon un peu complète l'influence des mêmes traitements sur l'élasticité de l'élinvar. Dans ce but, nous avons procédé de la façon suivante: Deux échantillons ont été coupés dans une même botte de fil de 0,7 mm. de diamètre (coulée 01185); les dimensions étaient respectivement 111,2 cm. et 111,4 cm. de longueur utile. L'un, l'échantillon N° 2, a été soumis à la température ordinaire à des oscillations de forte amplitude initiale (20 à 90 degrés), avec un repos de quelques jours. Nous avons constaté que les oscillations qui faisaient «travailler» le ressort provoquaient une diminution plus rapide de la période que celle qui se produit spontanément au repos. Au bout d'un certain temps ce traitement mécanique semble conduire à une stabilisation partielle ainsi qu'il ressort de l'examen de la figure 6 (courbe 2).

Puis le ressort a été porté à des températures progressivement croissantes. Le graphique permet de constater l'influence



On voit que finalement ces deux sortes de traitements combinés ont conduit à une stabilisation suffisante pour permettre les mesures définitives. Il est clair que cette stabilisation n'est valable que pour l'intervalle 0 à 150° environ, et que des chauffes à températures plus élevées produiraient, selon toute vraisemblance, de nouvelles diminutions de la période.

Le second échantillon, élinvar N° 1, après quelques oscillations de grandes amplitudes à la température ordinaire constituant un traitement mécanique, a été chauffé directement à 140°, ce qui a provoqué une diminution de période, tout d'abord extrêmement prononcée, puis de plus en plus faible. Une curieuse anomalie dont nous ne pouvons imaginer la cause s'est manifestée vers le 14<sup>e</sup> jour; puis, la stabilisation valable pour des cycles ne dépassant pas 140° étant sensiblement réalisée, nous avons effectué les mesures définitives.

Pour les deux échantillons, la mesure de la période à froid, faite avant et après une chauffe, n'était jamais exactement la même; nous en avons tenu compte au mieux en prenant la moyenne des observations.

La période s'est montrée exceptionnellement, avec ces deux ressorts d'élinvar, pratiquement indépendante de l'amplitude, tout au moins lorsque cette dernière restait inférieure à 3° d'arc, ce qui était toujours le cas pour les mesures définitives de l'élasticité. Les exemples suivants en font foi:

Tableau VI.

Température	Amplitude double en divisions de l'échelle	Nombre d'oscillations	Période
18,10°	200,0		
		500	3,97824
	152,1	1000	3,97825
	88,0	2000	3,97824
	30,2	1000	3,97824
	17,5	1000	3,97825
	10,3		

Tableau VI. (Suite.)

Température	Amplitude double en divisions de l'échelle	Nombre d'oscillations	Période
137,09°	199,0	300	3,98973
	138,0	500	3,98972
	75,9	500	3,98980
	41,9	500	3,98974
	23,0	500	3,98974
	12,6	400	3,98972
	7,8		

Le calcul de  $\frac{e}{e_0}$  a été fait en adoptant pour l'élinvar, coulée 01185, le coefficient de dilatation

$$a = (8,83 + 0,0037t) 10^{-6}$$

qui nous à été obligeamment communiqué par M. CH. ED. GUILLAUME.

Les résultats que nous donnons ci-dessous sont déduits d'une quarantaine de déterminations de période pour chaque échantillon. Nous ne pensons pas nécessaire de reproduire tous les éléments expérimentaux et nous nous bornons à donner dans les tableaux VII et VIII les résultats définitifs.

Tableau VII.

Elinvar No. 1.

Température	M	$\frac{e}{e_0}$ (déduit des observations)	$\frac{e}{e_0}$ calc. (=1-0,000045375 t)	Différence (observ. — calc.)
0	21247,7	1,00000	1,00000	0,00000
20	21239,8	0,99909	0,99909	0,00000
40	21232,1	0,99819	0,99818	+ 0,00001
60	21224,95	0,99730	0,99728	+ 0,00002
80	21217,0	0,99637	0,99637	0,00000
100	21205,3	0,99525	0,99546	— 0,00021
120	21193,0	0,99410	0,99456	— 0,00046
135	21175,2	0,99283	0,99387	— 0,00104
150	21146,8	0,99106	0,99319	— 0,00213



**Tableau VIII.**  
Elinvar No. 2.

Température	M	$\frac{e}{e_0}$ (deduit des observation)	$\frac{e}{e_0}$ calc. (=1-0,00004813 t)	Différence (observ. - calc.)
0	20544,8	1,00000	1,00000	0,00000
20	20538,1	0,99914	0,99904	+ 0,00010
40	20531,7	0,99829	0,99808	+ 0,00021
60	20520,0	0,99717	0,99711	+ 0,00006
100	20501,7	0,99515	0,99519	- 0,00004
120	20495,8	0,99429	0,99423	+ 0,00006
150	20471,2	0,99222	0,99278	- 0,00056

La dernière colonne des tableaux VII et VIII donne, comme à l'ordinaire, la différence entre les valeurs de  $\frac{e}{e_0}$  observé et  $\frac{e}{e_0}$  calculé linéairement par les équations suivantes qui représentent une droite passant par les points 0° et 80°.

$$1^{\text{er}} \text{ échantillon: } \frac{e}{e_0} \text{ calc.} = 1 - 0,000045375 t \quad (10)$$

$$2^{\text{e}} \text{ échantillon: } \frac{e}{e_0} \text{ calc.} = 1 - 0,00004813 t \quad (11)$$

Le graphique de la figure 7 donne une vue d'ensemble de ces différences. On voit que le coefficient thermoélastique moyen pour ces deux échantillons est sensiblement le même, la légère différence s'explique d'ailleurs, soit par le fait que les cycles de stabilisation n'ont pas été les mêmes dans les deux cas, soit par le fait d'une inhomogénéité dans la coulée du métal.

Des différences semblables s'observent dans l'allure des deux courbes. Elles sont cependant toutes deux sensiblement rectilignes entre 0 et 100°; au-dessus de cette température une assez forte incurvation se manifeste.

Des phénomènes semblables ont été trouvés dans nos premières expériences effectuées avec la méthode de la montre.

A titre d'indication nous donnons la valeur du module d'élasticité à zéro degré.

$$1^{\text{er}} \text{ échantillon: } e_0 = 1,84 \cdot 10^{12} \text{ c. g. s.}$$

$$2^{\text{e}} \text{ échantillon: } e_0 = 1,87 \cdot 10^{12} \text{ c. g. s.}$$

Si l'on compare les coefficients thermiques du premier module d'élasticité pour cet élinvar avec ceux relatifs à d'autres coulées

(voir notre mémoire précédent à la page 160), nous constatons que ce coefficient est *négatif* et a une valeur absolue assez élevée, bien qu'environ 7 fois plus faible que celui de l'acier. Ce métal ne se prêterait donc pas tel quel à la confection de spiraux des-

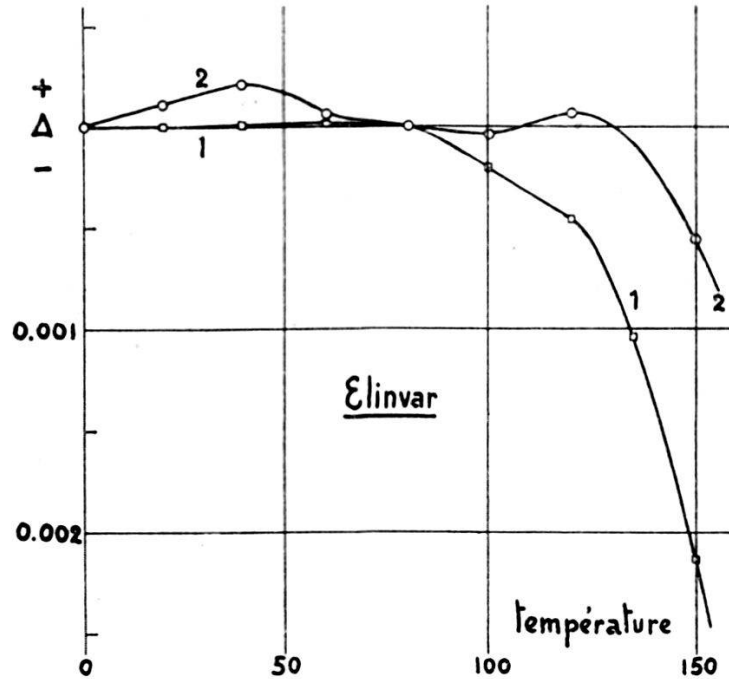


Fig. 7.

tinés au réglage des chronomètres et donnerait un retard aux températures croissantes. On a vu par nos précédentes recherches que d'autres coulées d'élinvar peuvent donner des résultats de beaucoup supérieurs, et notamment un coefficient thermoélastique positif. Il est regrettable que nous soyons tombés par hasard sur un des échantillons les moins intéressants.