

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 1 (1928)  
**Heft:** VII/VIII  
  
**Artikel:** Entdämpfung und Schwingungserregung aperiodischer Systeme  
**Autor:** Tank, F. / Graf, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-109184>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Entdämpfung und Schwingungserregung aperiodischer Systeme

von F. Tank und K. Graf, Zürich.

(18. VII. 28.)

*Zusammenfassung:* Werden Kreise, die nur Widerstand und Induktivität oder nur Widerstand und Kapazität enthalten, durch Verstärker gekoppelt, so können bei geeigneter Schaltung Schwingungen auftreten, die durchaus den Charakter von Eigenschwingungen haben, bei geradliniger Charakteristik sinusförmig verlaufen und sowohl gedämpfter wie ungedämpfter Natur sein können. Sie hängen aufs engste mit den Stabilitätseigenschaften der elektrischen Systeme zusammen.

§ 1. Im Falle der allgemeinen Kopplung zweier einfacher Kreise, die nur Widerstand und Induktivität oder nur Widerstand und Kapazität besitzen, berechnen sich die elektromagnetischen Ausgleichsvorgänge aus einem Gleichungssystem der Art

$$\begin{aligned} a_{11} i_1 + b_{11} \frac{di_1}{dt} + a_{12} i_2 + b_{12} \frac{di_2}{dt} &= 0 \\ a_{22} i_2 + b_{22} \frac{di_2}{dt} + a_{21} i_1 + b_{21} \frac{di_1}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Die Grössen  $a_{11}$   $a_{22}$   $b_{11}$   $b_{22}$  sind positive Konstanten; ferner gelten für die Koeffizienten der Kopplungsglieder, sofern die Kreise ein abgeschlossenes energetisches System bilden, die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{21} & b_{12} &= b_{21} \\ \frac{a_{12}^2}{a_{11} a_{22}} &< 1 & \frac{b_{12}^2}{b_{11} b_{22}} &< 1. \end{aligned}$$

Der Ansatz

$$i_1 = A_1 \varepsilon^{\lambda t} \quad i_2 = A_2 \varepsilon^{\lambda t}$$

führt dann stets auf aperiodische Lösungen, da die charakteristische Gleichung für die Zeitkonstante  $\lambda$

$$\begin{aligned} \lambda^2(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) + \lambda(a_{11} b_{22} + b_{11} a_{22} - a_{12} b_{21} - b_{12} a_{21}) \\ + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

unter den obigen Voraussetzungen immer reelle und negative Wurzeln ergibt.

§ 2. Zieht man jedoch unsymmetrische Kopplungen in den Kreis der Betrachtung, d. h. setzt man

$$a_{12} \neq a_{21} \quad b_{12} \neq b_{21},$$

so ändern sich die Verhältnisse ganz wesentlich. Insbesondere ist dies leicht zu erkennen in den Spezialfällen

$$a_{12} = 0 \quad b_{12} = b_{21} \quad (3) \quad a_{12} = a_{21} \quad b_{12} \neq 0 \quad (4)$$

$$a_{21} \neq 0 \quad \frac{b_{12}^2}{b_{11} b_{22}} < 1 \quad \frac{a_{12}^2}{a_{11} a_{22}} < 1 \quad b_{21} = 0$$

$$a_{12} = 0 \quad b_{12} \neq 0 \quad (5)$$

$$a_{21} \neq 0 \quad b_{21} = 0$$

wobei  $a_{21}$  bzw.  $b_{12}$  zunächst beliebig verfügbar gedacht sind. Aus Gleichung (2) ergibt sich dann, dass bei genügender Grösse von  $a_{21}$  bzw.  $b_{12}$  der Koeffizient von  $\lambda$  klein oder sogar negativ werden kann. Infolgedessen müssen komplexe Lösungen für  $\lambda$  und damit Schwingungen auftreten.

Die Erscheinung dürfte physikalisch so zu interpretieren sein: Unsymmetrische Kopplung bedeutet Energiezufuhr oder Energieentzug durch eine äussere Energiequelle, wird also insbesondere immer dann vorhanden sein, wenn die Kopplung durch einen Verstärker vermittelt wird. Das vorliegende System der beiden Kreise kann also als eine Verstärkeranordnung mit Rückkopplung aufgefasst werden. Unter Umständen erfolgt die Rückkopplung nochmals durch eine Verstärkerstufe. (Spezialfall Gl. 5.) Bei richtiger Anpolung ersetzt die durch den Verstärker gelieferte Energie in bestimmtem Betrage die in den Widerständen der Kreise verlorene und in Joule'sche Wärme verwandelte elektromagnetische Energie. Es tritt dadurch eine Ausschaltung der energieverzehrenden Wirkung der Widerstände ein, wobei jedoch der Einfluss der letzteren auf den zeitlichen Ablauf der Vorgänge nicht in entsprechendem Masse aufgehoben wird. Bei genügender Dämpfungsreduktion, d. h. hinreichender Verstärkerwirkung, wird dann ein wechselweiser Austausch der überschüssigen Energie zwischen den Energiespeichern der beiden Kreise möglich. Es treten Schwingungen auf, die durchaus den Charakter von Eigenschwingungen besitzen. Überkompensation der Dämpfungsverluste führt zu labilen Zuständen, die bei mässiger Überkompensation oszillatorischen Charakter haben (Schwingungsselbsterregung) und bei starker Überkompensation aperiodisch-labiler Natur sind.

§ 3. Im folgenden möge allein der Spezialfall Gl. (3) weiter behandelt werden.

$$a_{12} = 0 \quad b_{12} = b_{21} \\ a_{21} \neq 0 \quad \frac{b_{12}^2}{b_{11} b_{22}} < 1 .$$

Er lässt sich verwirklichen dadurch, dass die unsymmetrische direkte Kopplung durch einen Verstärker bewerkstelligt wird, dessen Wirkung die Grösse  $a_{21}$  misst, während die symmetrische „Rückkopplung“ induktiver oder kapazitiver Art sein kann. Man gelangt dann zu den Schaltungen Fig. 1 und Fig. 2.

Ist  $r_1$  der Primärwiderstand des Verstärkers und  $r_2$  sein Sekundärwiderstand (in beiden Fällen mitgerechnet ein eventueller Nebenschlusswiderstand, der zur Glättung der Verstärkercharakteristik wesentlich beitragen kann) und besitzt der Verstärker die

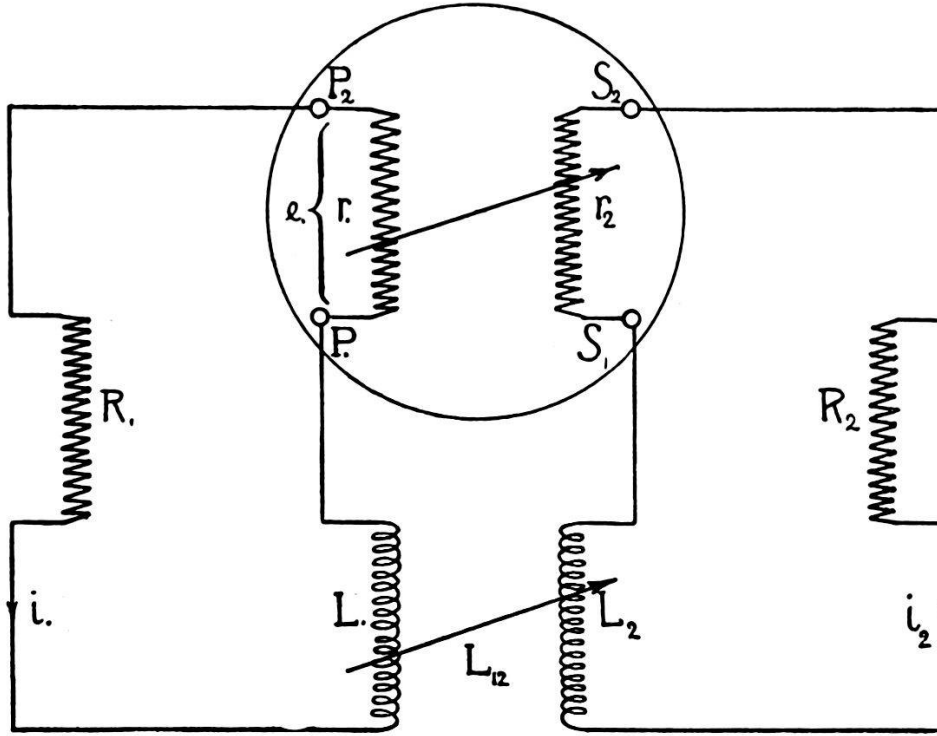


Fig. 1.

Eigenschaft, dass eine Primärspannung  $e_1$  eine elektromotorische Kraft  $\frac{e_1}{D}$  im Sekundärkreis erzeugt, so ergibt die Durchrechnung für das Beispiel Fig. 1

$$\lambda^2 (L_1 L_2 - L_{12}^2) + \lambda \left[ L_1 (R_2 + r_2) + L_2 (R_1 + r_1) + L_{12} \frac{r_1}{D} \right] + (R_1 + r_1) (R_2 + r_2) = 0 \quad (6)$$

bezw. für das Beispiel Fig. 2

$$\lambda^2 [(C_1 + C_{12}) (C_2 + C_{12}) - C_{12}^2] + \frac{\lambda}{(R_1 + r_1) (R_2 + r_2)} \left[ (C_1 + C_{12}) (R_1 + r_1) + (C_2 + C_{12}) (R_2 + r_2) + C_{12} \frac{r_1}{D} \right] + \frac{1}{(R_1 + r_1) (R_2 + r_2)} = 0 \quad (7)$$

Ein oszillatorisches Verhalten stellt sich ein, wenn in Gl. (6) der Term  $L_{12} \frac{r_1}{D}$  bzw. in Gl. (7) der Term  $C_{12} \frac{r_1}{D}$  negativ und hinreichend gross wird. Dies ist zu erreichen durch richtigen Sinn der induktiven bzw. kapazitiven Rückkopplung und genügende Grösse des Verstärkungsfaktors.

Für den Fall, dass das Dämpfungsglied gerade verschwindet, ergibt sich für die Schwingungsdauer aus Gl. (6)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 L_2 - L_{12}^2}{(R_1 + r_1)(R_2 + r_2)}} \quad (8)$$

und aus Gl. (7)

$$T = 2\pi \sqrt{[(C_1 + C_{12})(C_2 + C_{12}) - C_{12}^2](R_1 + r_1)(R_2 + r_2)} \quad (9)$$

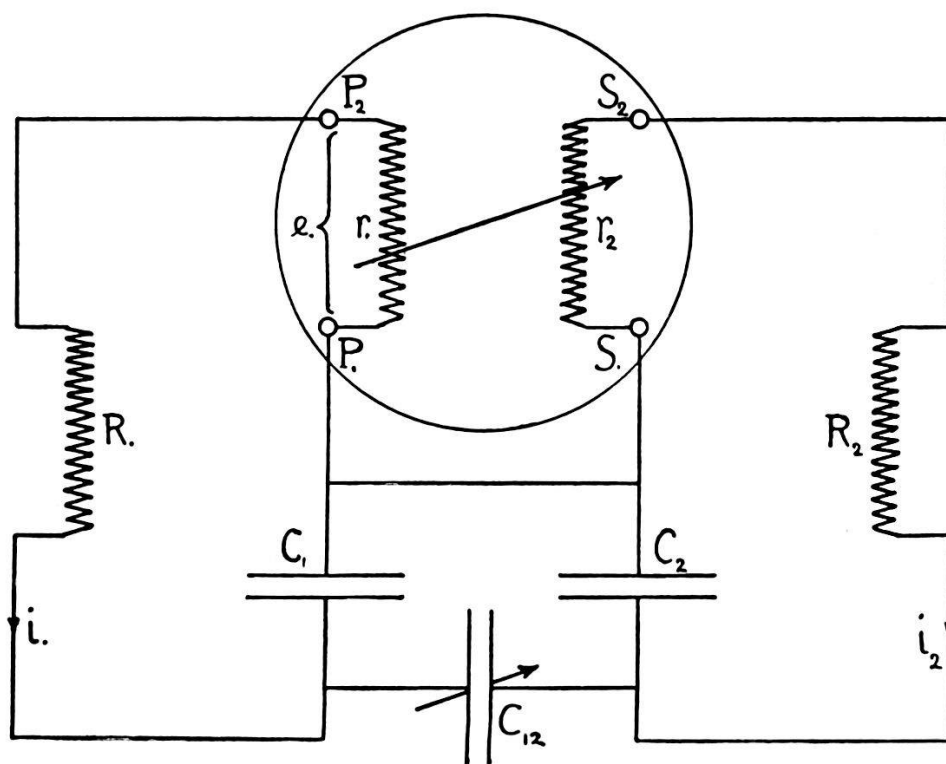


Fig. 2.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit der Formel für die Schwingungsdauer eines gewöhnlichen Röhrengenerators

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{1 + \frac{R}{R_i}}} \quad (10)$$

wo  $L$ ,  $C$  und  $R$  Induktivität, Kapazität und Widerstand des Schwingungskreises bedeuten und  $R_i$  den inneren Widerstand

der Röhre, so fällt sofort der grundsätzliche Unterschied auf, dass beim Röhrengenerator mit Schwingungskreis wegen der Kleinheit des Verhältnisses  $\frac{R}{R_i}$  die Schwingungsdauer vom Röhrenwiderstand praktisch unabhängig wird, während bei den von uns betrachteten Systemen der oscillatorische Zustand in der Regel erst dann eintritt, wenn  $\frac{r_1}{R_1} > 1$  und  $\frac{r_2}{R_2} > 1$  ist, so dass sich eine starke Abhängigkeit der Schwingungsdauer von den Verstärkerwiderständen und damit von der Röhrencharakteristik ergibt.

Die Verstärkerwiderstände  $r_1$  und  $r_2$  haben wir bisher als

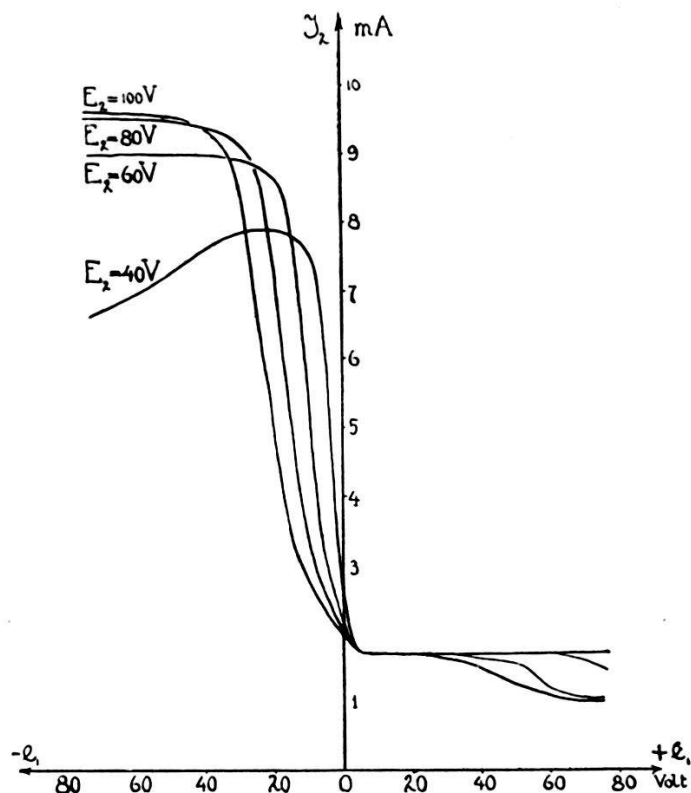


Fig. 3. Charakteristiken einer Doppelgitterröhre A. E. G., K 25.

konstant angenommen, eine Näherung, die für kleine Amplituden berechtigt ist. Mit wachsender Amplitude kommt aber mehr und mehr die Krummlinigkeit der Charakteristik zur Geltung, die eine Veränderlichkeit von  $r_1$  und  $r_2$  mit sich bringt, und insbesondere bei Selbsterregung auch die Amplitudenbegrenzung zur Folge hat. An Stellen ausgeprägter Krümmung der Charakteristik oder bei sehr grossen Amplituden können infolgedessen weitgehende Abweichungen von der Sinusform auftreten. Es entstehen dann Schwingungen vom Typus der Relaxationsschwingungen<sup>1)</sup> oder

<sup>1)</sup> B. VAN DER POL jr., Zeitschr. f. Hochfrequenztechnik **28**, 178, 1926; **29**, 114, 1927.

gewisser Kippschwingungen<sup>1)</sup>. Die Ausdrücke (8) und (9) für die Schwingungsdauern verlieren dann auch ihre Bedeutung.

§ 4. Während die Schaltung Fig. 1 mit Hilfe einer Triode und eines Niederfrequenztransformators sich leicht verifizieren lässt, will dies im kapazitiven Fall Fig. 2 mit einer Triode nicht gelingen. Der Grund liegt darin, dass das Vorzeichen der kapazitiven Rückkopplung durch die gemeinsame Ankopplung von Gitterkreis und Anodenkreis an die Kathode schon im falschen Sinn festgelegt ist. Ein Ausweg bietet sich durch Umkehrung des Sinnes der direkten Kopplung, indem man zum Beispiel bei einer Doppelgitterröhre ein Gebiet fallender Charakteristiken verwendet, wo einer Steuerspannung  $e_1$  im unverstärkten Kreis eine

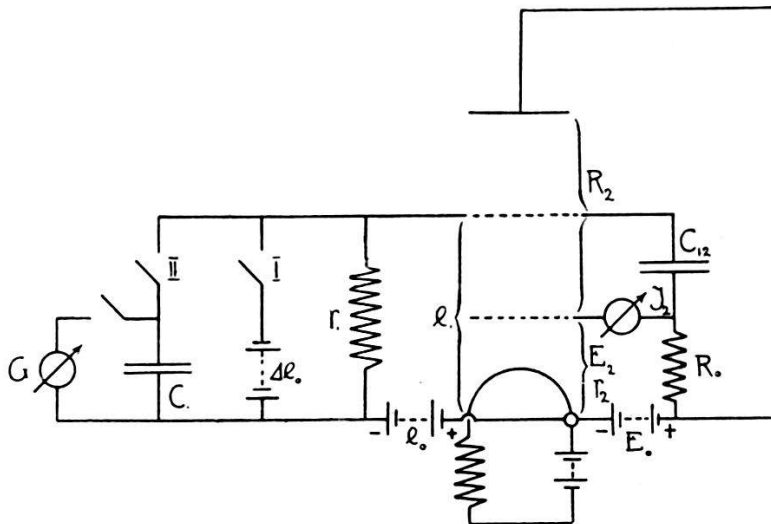


Fig. 4. „Tetroden-Multivibrator“. I und II Kontakthebel des Helmholtz'schen Pendels.  $G$  ballistisches Galvanometer.

elektromotorische Kraft  $-\frac{e_1}{D}$  im verstärkten Kreis entspricht. Solche Charakteristiken einer Röhre A. E. G., K 25 sind in Fig. 3 wiedergegeben.

Man gelangt auf diese Weise zum „Tetrodenmultivibrator“ Fig. 4<sup>2)</sup>, der sich auf das allgemeine Schema Fig. 2 zurückführen lässt. Arbeitet man am untern scharfen Knie der Charakteristiken, so treten stark verzerrte Schwingungen auf, während man durch geeignete negative Vorspannungen in ein lineares Gebiet hineingelangen kann, wo die Schwingungen der Sinusform ähnlich werden. Fig. 5 zeigt eine gedämpfte Schwingung, die mit Hilfe

<sup>1)</sup> E. FRIEDLÄNDER, Archiv für Elektrotechnik **16**, 273, 1926; **17**, 1, 113, 1926; **20**, 158, 1928.

<sup>2)</sup> Vergl. z. B. B. VAN DER POL jr., l. c.

des Helmholtz'schen Pendels<sup>1)</sup> in jenem Gebiete aufgenommen wurde. Die Kontakthebel I und II des Helmholtz'schen Pendels, sowie das ballistische Galvanometer sind in Fig. 4 eingezeichnet.

§ 5. Man kann das in § 2 und § 3 erläuterte Prinzip natürlich auch ausdehnen auf ganz allgemeine gekoppelte Systeme. Im Grunde lässt sich ja jede elektrische Schaltung, die Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten enthält, zurückführen auf  $n$  gekoppelte Kreise, von denen jeder Einzelkreis nur Widerstand und Induktivität oder nur Widerstand und Kapazität besitzt. Allerdings muss man dabei unter Umständen unendlich grosse

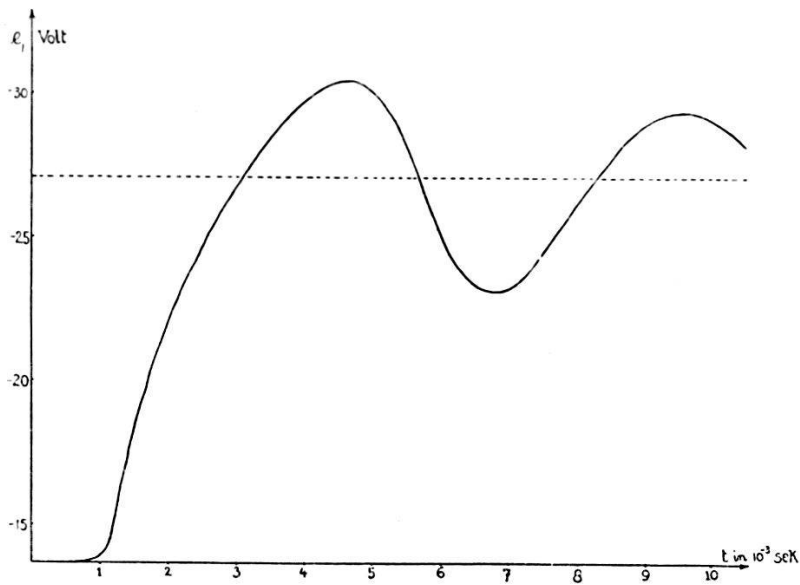


Fig. 5. „Tetroden-Multivibrator“. (Vergl. Fig. 4).  $C_1 = 0,10 \mu F$ ,  $C_{12} = 0,005 \mu F$ ,  $r_1 = 10000 \Omega$ ,  $R_0 = 6800 \Omega$ ,  $E_0 = 150 V$ ,  $e_0 = -27 V$ ,  $\Delta e_0 = 13 V$ .

Widerstände zulassen. Der Ausgleichsvorgang des gesamten Systems stellt eine Superposition von  $n$  einfachen Exponentialfunktionen dar, deren Zeitkonstanten aber infolge des Einflusses der Kopplungen von den Zeitkonstanten der Einzelkreise erheblich abweichen. Man hat zur Berechnung der Ströme ein sog. D'Alembert'sches System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung<sup>2)</sup> zu lösen, wobei die Zeitkonstanten sich aus der „Charakteristischen Gleichung“ ergeben, welche sofort in Form einer Determinante hingeschrieben werden kann. Die Fragen der Stabilität und Labilität, des periodischen und aperiodischen Ausgleiches in elektrischen Systemen laufen auf eine Diskussion dieser Determinante hinaus. Durch den Einbau von Verstärkern in an sich aperiodische

<sup>1)</sup> Vergl. F. TANK und A. HERZOG, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **17**, 426, 1921.

<sup>2)</sup> Vergl. z. B. SERRET-SCHEFFERS, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Bd. III, Kap. IV.

Systeme gelingt es nun, gewisse Glieder in dieser Determinante so zu modifizieren, dass je nach dem Grade der Verstärkerwirkung aperiodisch stabile, periodisch stabile, d. h. periodisch gedämpfte, periodisch labile, d. h. periodisch ungedämpfte oder schliesslich aperiodisch labile Lösungen entstehen.

§ 6. Solcher allgemeiner, an sich aperiodischer, mit Verstärker versehener und dadurch schwingungsfähiger Systeme sind schon eine ganze Reihe bekannt<sup>1)</sup>. Man kann ihre Zahl leicht vermehren. Das bekannteste ist wohl der von ABRAHAM und BLOCH angegebene „Multivibrator“<sup>2)</sup>, dessen Schaltungsschema in Fig. 6 dargestellt ist.

Unter Voraussetzung geradliniger Charakteristik und unter

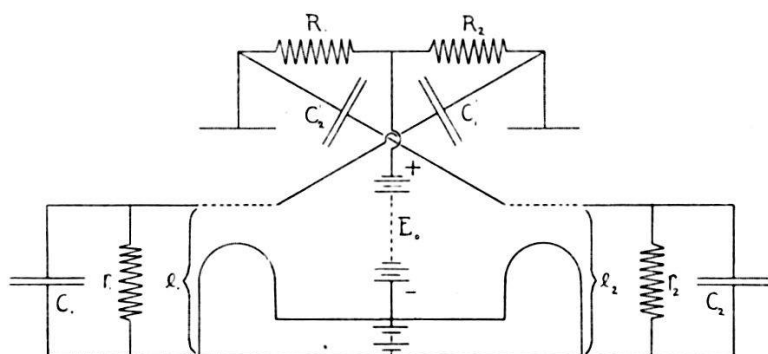


Fig. 6. Multivibrator von Abraham und Bloch.

Vernachlässigung des Gitterstromes berechnet man für die charakteristische Gleichung

$$(A_1 + \lambda B_1 + \lambda^2 F_1) (A_2 + \lambda B_2 + \lambda^2 F_2) - \lambda^2 K_1 K_2 = 0, \quad (11)$$

wo die Grössen  $A_1, B_1, F_1, K_1$  usw. sich aus den Widerständen, Kapazitäten und Röhrenkonstanten berechnen. Im symmetrischen Fall

$$r_1 = r_2 = r \quad R_1 = R_2 = R \quad C_1 = C_2 = C \quad C_1' = C_2' = C'$$

geht sie über in

$$A + (B \mp K) \lambda + F \lambda^2 = 0. \quad (13)$$

Dabei bedeutet

$$A = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{R}{R_i} \right) \quad B = (C + C') \left( 1 + \frac{R}{R_i} \right) + C' \frac{R}{r} \quad (14)$$

$$F = R C C' \quad K = \frac{C'}{D} \cdot \frac{R}{R_i}.$$

<sup>1)</sup> Vergl. K. HEEGNER, Zeitschr. f. Physik **42**, 773, 1927; Zeitschr. f. Hochfrequenztechnik **29**, 151, 1927; E. FRIEDLÄNDER, l. c.

<sup>2)</sup> ABRAHAM und BLOCH, Ann. de Physique **12**, 237, 1919.

Für die Schwingungsdauer an der Grenze der Selbsterregung ( $B = K$ ) folgt daraus

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r R C C'}{1 + \frac{R}{R_i}}} \quad (15)$$

Die Schwingungsverhältnisse beim Multivibrator haben wir experimentell eingehend untersucht, wobei wiederum das Helmholtz'sche Pendel zur Verwendung kam. Es zeigte sich, dass der Fall nahezu sinusförmiger Schwingungen ziemlich häufig ist und

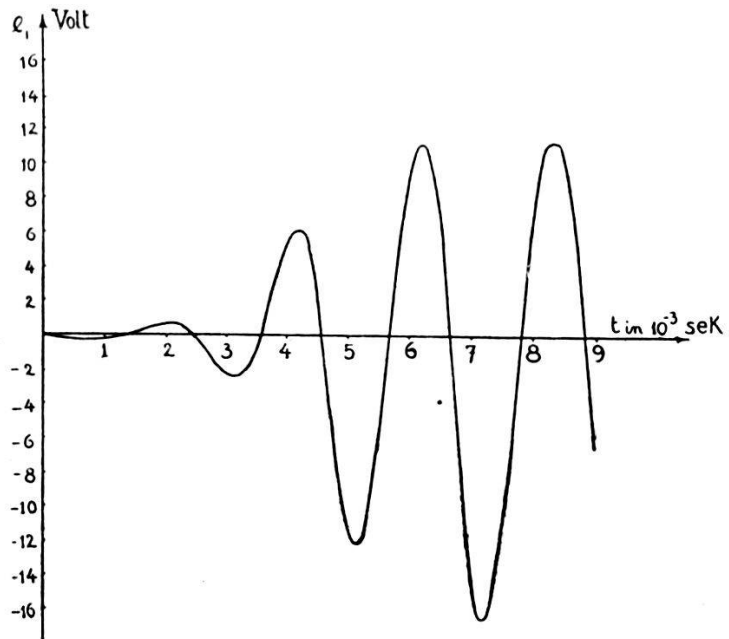


Fig. 7. Multivibrator (vergl. Fig. 6).  $C_1 = C_1' = C_2' = 0,10 \mu F$ ,  $C_2 = 0$ ,  $r_1 = r_2 = 5000 \Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 10000 \Omega$ ,  $E_0 = 220 V$ , Röhre Philips E.

aus den Charakteristiken vorausgesagt werden kann. Beispiele dafür geben die Fig. 7 und 8.

§ 7. Die in der vorliegenden Untersuchung geschilderten Schwingungen sind als eine Art Eigenschwingungen anzusehen, die mit den Stabilitätseigenschaften der elektrischen Systeme verknüpft sind. Bei genügend kleinen Amplituden sind sie sinusförmig und erst bei grösseren Amplituden, wenn die Verstärkerwiderstände nicht mehr als konstant betrachtet werden können, treten erhebliche Verzerrungen auf. Von den Kippschwingungen unterscheiden sie sich grundsätzlich dadurch, dass sie sogar besonders gut an den linearen Teilen der Charakteristiken entstehen können, während die Kippschwingungen an Unstetigkeiten im Verlauf der Charakteristiken gebunden sind. Diese Unstetigkeiten

bestehen entweder in einem Abbrechen des Kurvenzuges oder in einem unvermittelten Wechsel der Krümmung. Die Kippschwingungen sind durch die Form der Charakteristik erzwungen; sie können weder gedämpft abklingen, noch bei Selbsterregung sich

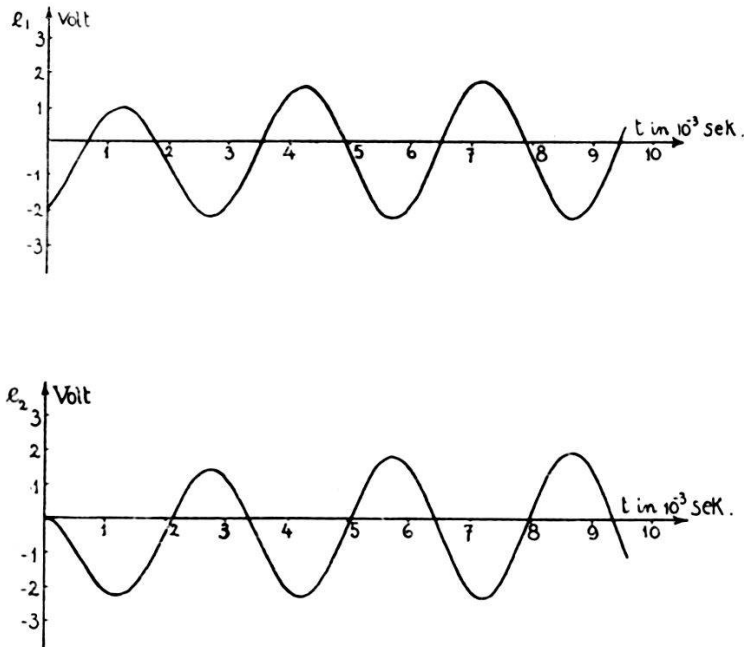


Fig. 8. Multivibrator (vergl. Fig. 6).  $C_1 = C_2 = C_1' = C_2' = 0,10 \mu F$ ,  
 $r_1 = r_2 = R_1 = R_2 = 6000 \Omega$ ,  $E_0 = 225$  Volt, Röhre Philips E.

aufschaukeln, sondern springen in letzterem Fall gleich mit der vollen Amplitude an.

Die Möglichkeit des Auftretens der von uns geschilderten Eigenschwingungen ist in Verstärkeranordnungen häufig gegeben. Es dürften daher die von uns entwickelten theoretischen Gesichtspunkte vor allem für die Theorie und den Bau von Verstärkeraggregaten Bedeutung besitzen.

Zürich, Juni 1928, Physikalisches Institut der E. T. H.