

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 1 (1928)
Heft: V

Artikel: Über Luftkräfte bei sehr grossen Geschwindigkeiten insbesondere bei ebenen Strömungen
Autor: Ackeret, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-109174>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über Luftkräfte bei sehr grossen Geschwindigkeiten insbesondere bei ebenen Strömungen

von J. Ackeret, Zürich.

(4. VI. 28.)

Zusammenfassung. Es werden die Luftkräfte auf eine schwach gekrümmte Fläche in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit untersucht und insbesondere die charakteristischen Unterschiede bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit diskutiert. Im Anhang wird die Stabilität von Trennungsflächen untersucht.

1. Übersicht.

Die Strömungskräfte bei sehr grossen Geschwindigkeiten haben schon früh Interesse erweckt im Zusammenhang mit ballistischen Aufgaben. Eine starke Förderung erfuhren dann weiterhin unsere Kenntnisse durch die Erfahrungen an Dampfturbinen, in welchen zum erstenmal Geschwindigkeiten der strömenden Mittel auftraten, die die Schallgeschwindigkeit erreichten oder überstiegen. Ganz neuerdings nun tauchen im Gebiet der Flugtechnik gasdynamische Fragen auf, indem die Luftschrauben am äusseren Umfang nicht selten mit Schallgeschwindigkeit sich bewegen; und auch bei sehr raschen Flugzeugen der Einfluss der endlichen Grösse der Kompressibilität der Luft, die dynamisch durch die Grösse der Schallgeschwindigkeit gemessen wird, sich allmählich bemerklich macht. Aber auch abgesehen von jeder Anwendung ist es von hohem Interesse, die Strömungsvorgänge auch dann zu untersuchen, wenn eine wesentliche Voraussetzung der klassischen Hydrodynamik, die Inkompressibilität des strömenden Mittels wegfällt. Naturgemäss sind die formalen Schwierigkeiten hier ganz besonders gross, indem die z. T. hochentwickelten Methoden der Hydrodynamik (konforme Abbildung, Quellen usw.) versagen. Demgemäss ist der bisher erzielte Fortschritt nicht sehr gross, obwohl einige viel versprechende Ansätze vorliegen.

Diese Arbeit setzt sich das Ziel, möglichst *anschaulich* die charakteristischen Unterschiede zwischen Strömungskräften bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit darzustellen. Völlig allgemein lässt sich das nicht durchführen; ich habe deshalb einen Fall als Beispiel gewählt, der sich noch verhältnismässig einfach

behandeln lässt. Es bedürfte also noch einer besonderen Untersuchung, um zu entscheiden, wie weit die aufgestellten Beziehungen auch allgemeinere Geltung beanspruchen können; immerhin hat es den Anschein, als ob die nachfolgenden Betrachtungen doch einige typische Züge zutage gefördert haben. Es liegt in der Natur der bisherigen Methoden, dass sie im Gebiet der Schallgeschwindigkeit selbst unbrauchbar werden. Die massgebende Differentialgleichung ändert dort ihren Charakter völlig. Aus diesem Grunde ist es auch noch nicht gelungen, die nachfolgenden Betrachtungen so auszubauen, dass sie den in Wirklichkeit brüskten, aber immerhin noch kontinuierlichen Übergang von Unter- zu Überschallgebiet exakt beschreiben; die Theorie ergibt dort ein singuläres Verhalten. Unsere Betrachtungen ruhen auf rein rationaler Basis, d. h. sie gehen von den Strömungsgleichungen direkt aus, ohne Benützung von Beiwerten, die erst aus Versuchen entnommen werden müssen.

2. Die Differentialgleichung der ebenen, wirbelfreien, stationären, reibungsfreien, kompressiblen Gas-Strömungen.

In der Hydro-Dynamik inkompressibler Medien wird gezeigt, dass die Bewegung wirbelfrei bleibt, wenn sie unter der Wirkung konservativer Kräfte aus der Ruhe entsteht. Die Dynamik der Gase ergibt das gleiche Resultat, aber nur unter der Voraussetzung, dass die Dichte ϱ eine *eindeutige* Funktion des Druckes p ist. Das ist praktisch sehr oft der Fall; die Meteorologie aber kennt ein Beispiel, wo gerade das Nichteintreten dieser Einschränkung von grösster Bedeutung ist. (Auftreten atmosphärischer Zirkulation, wenn ϱ bei gleichem p an zwei Orten verschieden ist.) Für unsere Zwecke können wir unbedenklich wirbelfreie Strömung annehmen, ebenso vernachlässigen wir die Reibung, da es uns hier weniger auf Verluste und Wirkungsgrade, als im Wesentlichen auf Strömungsformen und Strömungskräfte ankommt. Wir setzen also ein skalares Potential Φ an, aus dem sich die Geschwindigkeiten u und v in x - bzw. y -Richtung berechnen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u ; \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v . \quad (1)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} = 0 ; \quad (2)$$

die Bewegungsgleichungen in Euler'scher Form:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Berücksichtigen wir noch die Beziehungen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{d \varrho}{d p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{d \varrho}{d p} \frac{\partial p}{\partial y}$$

und führen wir ferner mit

$$a = \sqrt{\frac{d p}{d \varrho}} \quad (4)$$

den bekannten Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit ein, so folgt für die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) - \frac{2 u v}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5a)$$

bezw.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(1 - \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2}{a^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(1 - \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}{a^2}\right) - \frac{2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5b)$$

ein recht komplizierter, nicht linearer Ausdruck der für $\varrho = \text{constant}$, $a = \infty$ übergeht in die wohlbekannte Laplace'sche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

Es ist begreiflich, dass die Kompliziertheit der Gleichungen 5 abgeschreckt hat und vielleicht aus diesem Grunde hat eine sehr wertvolle Arbeit von PRANDTL und STEICHEN über diesen Gegenstand nicht die Beachtung gefunden, die sie verdient¹⁾.

¹⁾ A. STEICHEN, Dissert. Göttingen 1909; s. a. den Artikel „Gasdynamik“ im Geiger-Scheel'schen Handb. der Phys., Bd. VII, insbes. S. 315.

3. Strömung über eine schwach gewellte Fläche.

a) Unterschallgebiet.

Einen ganz einfachen Fall erhalten wir, wenn wir die Strömung über ein schwach gewölbtes Wellblech (quer zu den Wellen) betrachten. Die Einfachheit besteht darin, dass die Bewegung in erster Näherung eine Translation mit konstanter Geschwindigkeit ist und dass die Wellen eine kleine Störung hereinbringen,

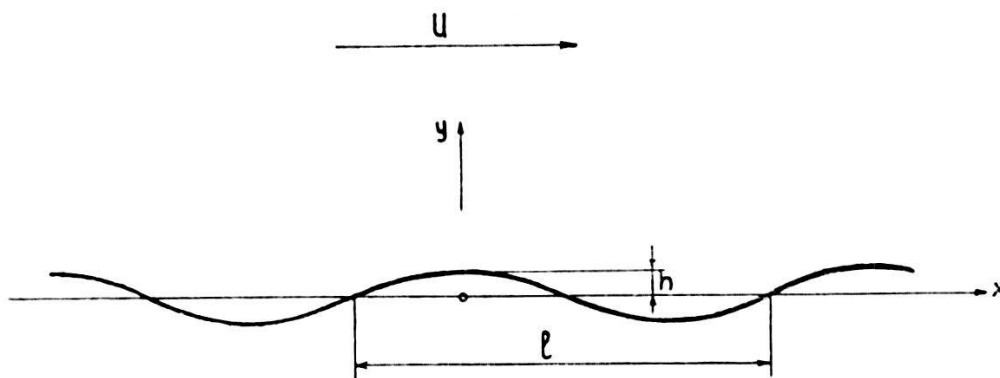


Fig. 1. Zu untersuchende Kontur.

deren Quadrate und höhere Potenzen vernachlässigt werden können (siehe Fig. 1). Wir setzen das Potential folgendermassen an:

$$\Phi = Ux + A \frac{l}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) e^{-\frac{2\pi y}{l}} \quad (7)$$

wo U die ungestörte Geschwindigkeit im Unendlichen (x beliebig; $y = +\infty$) bedeutet.

Nehmen wir vorläufig inkompressible Strömung an, so ist die Laplace'sche Gleichung, wie man sich leicht überzeugt, erfüllt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u &= U + A \cos \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y}{l}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v &= -A \sin \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y}{l}} \end{aligned} \quad (8)$$

und $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$.

Übrigens existiert dann auch eine Stromfunktion ψ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u ; -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v$$

nämlich:

$$\psi = Uy - A \frac{l}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{\pi y}{l}} \quad (9)$$

und es gilt

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 .$$

Geben wir ψ einen konstanten Wert z. B. 0, so erhalten wir die Gleichung einer Stromlinie:

$$0 = Uy - A \frac{l}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y}{l}} .$$

Nun setzen wir

$$\frac{A}{U} \ll 1 ,$$

dann ist:

$$y = \frac{A}{U} \frac{l}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y}{l}} ; \quad (10)$$

näherungsweise:

$$y = h \cos \frac{2\pi x}{l} .$$

indem für kleine Ausschläge y das exponentielle Glied im Bereich des Wellbleches konstant (~ 1) gesetzt werden kann.

Die Stromlinie ist also eine Sinuslinie. Wir wählen sie als Kontur unseres Wellbleches. Die anderen Stromlinien ($y > 0$) gehen mit zunehmendem y in Gerade über, da der Faktor $e^{-\frac{2\pi y}{l}}$ sehr rasch kleiner wird.

Es ist nicht schwer, mit Hilfe der Bernoulli'schen Gleichung die Drücke auf die gewellte Fläche zu berechnen; in erster Näherung ist:

$$p = p_0 - \rho U A \cos \frac{2\pi x}{l} . \quad (11)$$

Die Drücke sind so verteilt, dass an den konvexen Stellen der tiefste, an den konkaven der höchste Druck herrscht, würde das Wellblech nachgiebig sein, so würden durch die Drücke die Wellungen verstärkt (vergl. Anhang).

Nun gehen wir über zur kompressiblen Strömung. Die Gleichung 5 kann auch jetzt nicht streng gelöst werden; für sehr kleine Wellenhöhen aber kann eine Näherungslösung angegeben werden, die einige wesentliche Züge der wahren Lösung deutlich zeigt.

Um die vereinfachte Gleichung zu finden, gehen wir so vor, dass wir in die exakte Gleichung die Ausdrücke 8 für die Geschwindigkeiten einsetzen und nun sehen, welche Glieder die grösste Abweichung bedingen; diese sind dann für das Weitere wesentlich und müssen beibehalten werden.

Zunächst können wir das Glied

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

weglassen, da es nach Voraussetzung ja = 0 ist.

Es bleiben:

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{u^2}{a^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{v^2}{a^2} - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Für die Beurteilung des Gewichtes der obenstehenden einzelnen Glieder ist die Grösse der Schallgeschwindigkeit zunächst nicht von Bedeutung.

Wir vergleichen also die Ausdrücke

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} u^2}_1; \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} v^2}_2; \underbrace{2uv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}}_3.$$

Glied 2 verhält sich zu Glied 1 wie:

$$-\frac{v^2}{u^2}, \text{ da ja } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

oder mit Benützung der Ausdrücke (8) wie:

$$-\frac{v^2}{u^2} = \frac{A^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi x}{l} \right) e^{-\frac{4\pi y}{l}}}{U^2 + 2UA \cos \left(\frac{2\pi x}{l} \right) e^{-\frac{2\pi y}{l}} + A^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi x}{l} \right) e^{-\frac{4\pi y}{l}}}.$$

Nehmen wir etwa das Maximum des Zählers (sin = 1), womit

wir sehr annähernd den Höchstwert des Ausdruckes erhalten, so wird:

$$-\frac{v^2}{u^2} = + \frac{A^2}{U^2}.$$

Bezeichnen wir die grösste Erhebung des Bleches mit h so ist gemäss Gleichung (10)

$$h = \frac{A \cdot l}{U \cdot 2\pi}$$

also

$$A = U \frac{2\pi h}{l}$$

und der obige Ausdruck

$$\frac{v^2}{u^2} = - \frac{4\pi^2 h^2}{l^2}.$$

Denken wir etwa an

$$\frac{2h}{l} = \frac{1}{100},$$

so wird

$$\frac{v^2}{u^2} \sim 0,001,$$

so dass demnach für schwach gewölbte Platten das zweite Glied gegenüber dem ersten vernachlässigt werden darf. Für das dritte Glied ergibt sich, verglichen mit dem ersten:

$$(3) : (1) = 2 \frac{v}{u} \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}}.$$

Setzen wir wiederum die Werte für u und v ein, so ergibt sich:

$$(3) : (1) = \frac{-2A \cos \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y}{l}}}{U + A \cos \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y}{l}}},$$

oder mit genügender Näherung, abgesehen vom Vorzeichen

$$\frac{2A}{U} = \frac{4\pi h}{l},$$

in unserem Beispiel also:

$$\frac{\pi}{50} = 0,063 .$$

Das ist ein Betrag, den man fast nicht mehr vernachlässigen darf, tun wir dies dennoch, so müssen wir darauf gefasst sein, dass unsere Näherungsgleichung nur die gröberen Züge wiedergibt. Wir berücksichtigen nur 1 und schreiben die Hauptgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{u^2}{a^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 .$$

Man sieht, dass das mittlere Glied von der Grössenordnung $\frac{u^2}{a^2}$ verglichen mit den beiden andern ist, und wir haben zunächst durchaus keinen Anhaltspunkt, bis zu welchen $\frac{u}{a}$ die Näherungsbetrachtung mit inkompressibler Hauptströmung noch gültig ist. Immerhin wissen wir aus der Erfahrung an Propellern und Dampfturbinen, dass bis $\frac{u}{a} = 0,6$ kein sehr grosser Einfluss der Kompressibilität vorhanden ist. Nur eine weitere Annäherung kann da allerdings endgültig entscheiden.

Setzen wir an Stelle des schwach veränderlichen u die konstante Geschwindigkeit U ; setzen wir ferner die gleichfalls wenig veränderliche Schallgeschwindigkeit $a = \text{konstant}$, so ergibt sich die Näherungsgleichung¹⁾:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(1 - \frac{U^2}{a^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 . \quad (12)$$

Der Klammerausdruck ist eine Konstante, so dass durch eine einfache Koordinatentransformation leicht Lösungen gefunden werden können.

Wir setzen:

$$x = \xi ; \quad y \sqrt{1 - \frac{U^2}{a^2}} = y \cdot \beta = \eta \quad (13)$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{U^2}{a^2}} \quad (14)$$

und erhalten:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0$$

d. h. die gewöhnliche Laplace'sche Gleichung.

¹⁾ Diese Gleichung ist Prof. PRANDTL schon vor längerer Zeit bekannt gewesen und von ihm verwendet worden.

Für das Potential finden wir jetzt:

$$\Phi = U \xi + A \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi \xi}{l} e^{-\frac{2\pi \eta}{l}}$$

oder in x und y geschrieben:

$$\Phi = U x + A \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y \beta}{l}}. \quad (15)$$

Um die Stromlinien zu erhalten, schreiben wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{A \beta}{U} \sin \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y \beta}{l}}$$

und für kleine y :

$$y = \frac{A \beta l}{2\pi U} \cos \frac{2\pi x}{l}. \quad (16)$$

Schreiben wir nun, um die Kontur zu wahren, wieder eine Sinuslinie mit der Amplitude h vor, so ist also:

$$h = \frac{A l \beta}{2\pi U} \text{ und } A = \frac{2\pi h \cdot U}{\beta \cdot l}.$$

Damit wird schliesslich:

$$\Phi = U x + U \frac{h}{\beta} \sin \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y \beta}{l}} \quad (17)$$

das Potential oberhalb der Kontur

$$y = h \cos \frac{2\pi x}{l}.$$

Für den Druck gilt die Beziehung (verallgemeinerte Bernoulli'sche Gleichung):

$$-\frac{dp}{\varrho} = w dw$$

wo w der Betrag der Geschwindigkeit ist. Man sieht leicht, dass bei schwacher Wellung

$$\left(\frac{h}{l} \ll 1 \right)$$

diese Gleichung auch geschrieben werden kann:

$$-\frac{dp}{\varrho} = U \cdot \delta u$$

und da bei kleinen δu die Dichte ϱ sich nicht wesentlich ändert:

$$p = p_0 - \varrho (u - U) \cdot U.$$

Mit dem obenstehenden Potential finden wir

$$\left(u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$$

$$p = p_0 - \varrho \frac{2\pi h}{l} \frac{U^2}{\beta} \cos \frac{2\pi x}{l}, \quad (18)$$

was für $\beta = 1$ in den früher erhaltenen Ausdruck (11) übergeht.

Diskutieren wir nun die Ergebnisse, indem wir β allmählich abnehmen lassen. Die zuletzt stehende Formel zeigt uns unmittel-

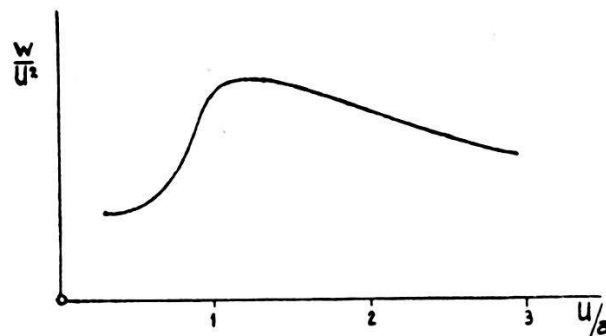


Fig. 2. Auf u^2 bezogener Luftwiderstand eines Spitzgeschosses nach Cranz und Becker.

bar, dass alle Druckdifferenzen, ferner die damit direkt zusammenhängenden Auftriebs-Beiwerte von Tragflügeln usw. mit

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{a^2}}}$$

wachsen. Ähnlich wie in der Relativitätstheorie, erscheint hier eine Grenzgeschwindigkeit, die Schallgeschwindigkeit zu deren Erreichung unendlich grosse Kräfte nötig sind. Nun ist es allerdings ja nicht so in der Natur, indem wir ohne weiteres die Schallgeschwindigkeit überschreiten können; die Näherungs-Gleichung bricht zusammen und sie muss dann eben durch die stets gültige Gleichung 5 ersetzt werden, aber qualitativ wissen wir schon seit

längerer Zeit, und neuerdings sehr genau, dass tatsächlich die Luft kräfte relativ (d. h. bezogen auf den Staudruck $q = \frac{\rho}{2} U^2$) hyperbelartig anwachsen in der Nähe der Schallgeschwindigkeit, dort ein Maximum erreichen und dann unter Umständen ganz erheblich abfallen. Fig. 2 zeigt die $\frac{W}{\rho u^2}$ Kurve des Widerstandes W eines Spitzgeschosses für verschiedene $\frac{u}{a}$ die durchaus diesen Charakter aufweist. Auch deuten Messungen an Luftschrauben auf solche Einflüsse hin.

H. LORENZ hat schon vor längerer Zeit versucht, eine Theorie dieses Buckels in der Widerstandskurve zu geben¹⁾, indem er ihn als Resonanzeffekt auffasst; was zunächst sehr ansprechend erscheint. Jedoch muss er im Verlauf seiner Rechnungen drei unabhängige empirische Konstanten einführen, über deren Grösse man a priori keinerlei Aussagen machen kann. So weit ich die Literatur kenne, hat man noch keine Weiterbildung dieser phänomenologischen Ansätze versucht.

Wir wollen nun versuchen, für den zweidimensionalen Fall eine anschauliche Deutung dieses Anstieges zu geben und ziehen dazu die Stromliniengleichung heran:

$$y = \text{const} + h \cos \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi y\beta}{l}}.$$

Hier sehen wir, dass die Wellung der Stromlinien nach aussen hin exponentiell abnimmt, aber das Abklingen ist durch den Faktor $\beta < 1$ verzögert.

Im Grenzfall $\beta = 0$ ist der Exponent selbst 0, die Stromlinien haben bis ins Unendliche dieselbe Form.

Es ist nicht schwer, zu zeigen, dass die Kraftwirkung in diesem Falle unendlich gross wird.

Betrachten wir etwa das nach oben konvexe Stück $A-B$ der gewellten Fläche Fig. 3. Links und in der Mitte sind (schematisch) Stromlinien gezeichnet, die nach einer e -Funktion in ihrer Wellung abklingen. Ziehen wir jetzt die ins Unendliche reichende Kontrollfläche, bestehend aus dem Stück $A-B$ den Vertikalen in A und B und einer horizontalen Verbindungslinie in sehr grosser Entfernung (im Unendlichen) so ergibt der Impulssatz die Aussage, dass eine nach oben gerichtete Kraft auf die Oberseite des Wellbleches wirkt. Alles in die Kontrollfläche strömende Gas hat nämlich

¹⁾ H. LORENZ. Phys. Z. S. Bd. 18, 1917. S. 209.

Aufwärts-, alles ausströmende Abwärtsimpuls. Die Drücke auf die Vertikalen $A-H$ und $B-H$ geben keinen Beitrag, im Unendlichen ist der Druck gleich dem der ungestörten Potential-Strömung. Man überzeugt sich durch die nachfolgende Rechnung, dass die so erhaltene Kraft übereinstimmt mit dem Integral des Druckes gemäss Gleichung 18.

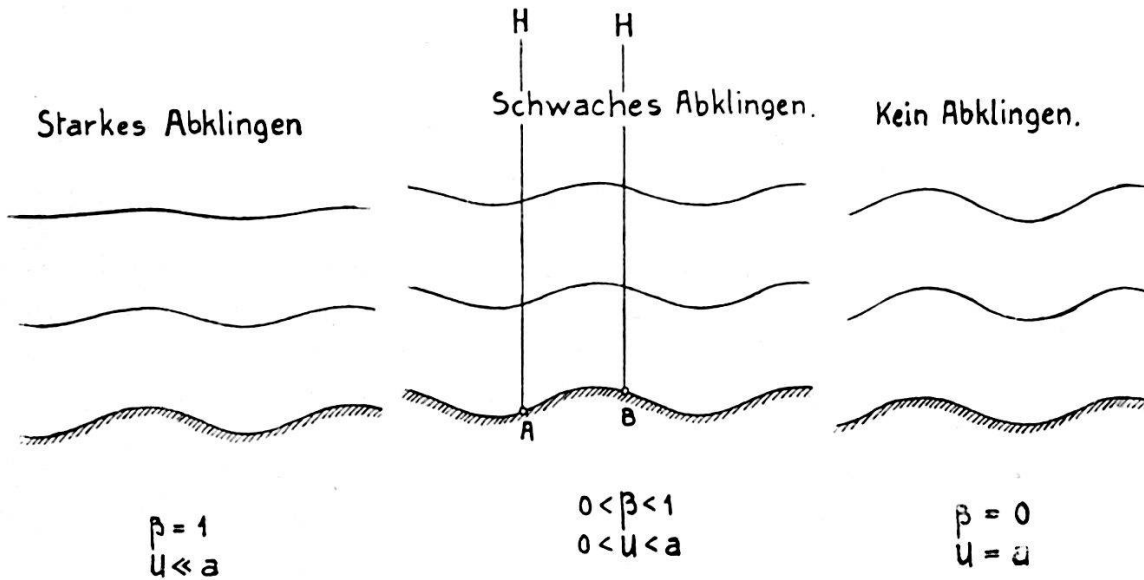


Fig. 3. Stromlinien bei verschiedenem $\frac{U}{a}$.

Der vertikale Impulsstrom durch $A-H$ ist angenähert:

$$J = \int_0^{\infty} \rho U \cdot v dy.$$

Aus Gleichung 17 finden wir:

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -U \frac{2\pi h}{l} e^{-\frac{2\pi y \beta}{l}} \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Damit wird:

$$J = -\rho U^2 \frac{2\pi h}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\pi y \beta}{l}} dy = -\frac{\rho U^2 h}{\beta} \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Die Kraft auf ein beliebiges Stück $A-B$ ist also:

$$(J_B - J_A) = -\frac{\rho U^2 h}{\beta} \left(\sin \frac{2\pi x_B}{l} - \sin \frac{2\pi x_A}{l} \right).$$

Im Grenzfall, wo $x_B - x_A$ sehr klein wird, haben wir

$$dJ = p dx = - \frac{2\pi \varrho U^2}{\beta} \frac{h}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} dx = - \frac{2\pi \varrho U^2}{\beta} \frac{y}{l} dx$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (18).

Lassen wir nun β gegen 0 abnehmen, U also der Schallgeschwindigkeit sich nähern, so erkennt man ohne Rechnung, dass die Drücke auf die Fläche wachsen, deshalb weil der tangentielle (nach oben bzw. unten gerichtete Impulsstrom durch $A-H$ bzw. $B-H$ immer stärker wächst. Im Grenzfall Fig. 3 rechts sind alle Stromlinien kongruent, die Fläche lenkt gewissermassen die ganze über ihr strömende Gasmasse gleichmässig ab und da deren Menge unendlich gross ist, muss die Flächenkraft unendlich gross werden.

Dieses Ergebnis entspricht einer ersten Näherung; selbstverständlich kommt damit nur die Tendenz und nicht das wirkliche Verhalten der Gasströmung bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit zutage, aber wir verstehen jetzt das Anwachsen der Strömungskräfte: Die Kompressibilität zwingt die ferner liegenden Gasteile zu stärkerer Ablenkung.

b) Überschallgebiet.

Nun tritt die Frage an uns heran: Was geschieht, wenn wir weiter die Geschwindigkeit steigern? Dass wir das überhaupt können, hängt damit zusammen, dass bei Berücksichtigung der vernachlässigten Glieder die Luftkraft nicht unendlich wird.

Wir überspringen das gefährliche Gebiet der Schallgeschwindigkeit und schreiben unsere Grundgleichung wieder hin:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Setzen wir auch jetzt wieder ganz kleine v -Geschwindigkeiten voraus, so gilt approximativ:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (19)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{U^2}{a^2} - 1\right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \quad (19a)$$

Vergleichen wir Gleichung (19) mit Gleichung (12), so ist der einzige Unterschied das geänderte Vorzeichen des ersten Gliedes,

da jetzt $U > a$; dies gibt aber den Lösungen einen völlig anderen Charakter, Gleichung (12) ist vom sog. elliptischen Typ, Gleichung (19) dagegen vom hyperbolischen.

Wie früher (Gleichung 13) führen wir neue unabhängige Variable ein:

$$x = \xi ; y \sqrt{\frac{U^2}{a^2} - 1} = \eta , \quad (20)$$

mit denen sich unsere vereinfachte Gleichung (19) nunmehr schreibt:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0 . \quad (21)$$

Diese sehr bekannte Differentialgleichung beschreibt einen Wellenvorgang, den wir nun näher betrachten wollen. Die Lösung von Gleichung (21) lautet bekanntlich:

$$\Phi = F_1 (\xi - \eta) + F_2 (\xi + \eta) , \quad (22)$$

wo F_1 und F_2 zwei weitgehend willkürliche Funktionen darstellen.

Setzen wir zunächst $F_2 = 0^1)$, so ist Φ demnach konstant auf der Geraden $\eta = \xi$ oder in den Koordinaten x, y auf den Geraden

$$y = \frac{x}{\sqrt{\frac{U^2}{a^2} - 1}} .$$

Da aber der Anfangspunkt $x = 0, y = 0$ beliebig gewählt werden kann, ist Φ auf jeder unter dem Winkel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{U^2}{a^2} - 1}}$$

geneigten Geraden konstant.

Für $\sin \alpha$ ergibt sich

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a}{U} \quad (23)$$

α ist also der *Mach-Doppler'sche Winkel*, der in der Überschalldynamik eine so grosse Rolle spielt.

¹⁾ Eine nähere Diskussion zeigt, dass F_2 für unsere Betrachtung tatsächlich nicht in Frage kommt.

Nun sind wir so weit, uns ein anschauliches Bild zu machen, wie die Strömung bei Überschallgeschwindigkeit aussehen wird.

Da Φ auf jeder Mach'schen Linie konstant ist, und (in unserer Näherung) alle Mach'schen Linien parallel liegen, so sind alle Stromlinien identisch, entstehen auseinander durch Verschiebung schräg nach oben längs Geraden mit der Steigung $\tan \alpha$. Ein exponentielles Abklingen ist jetzt nicht mehr vorhanden.

Für $\frac{U}{a} = 1$, wo freilich unsere Näherung versagt, ist $\alpha = 90^\circ$, die Stromlinien entstehen durch Verschiebung unserer Kontur nach der y -Achse. Trotz des Näherungscharakters unserer Rechnungen erhalten wir also den richtigen Übergang zu unseren Betrachtungen bei Unterschallgeschwindigkeit. Es ist jetzt leicht möglich, auch die Kräfte zu berechnen, die auf ein Stück des

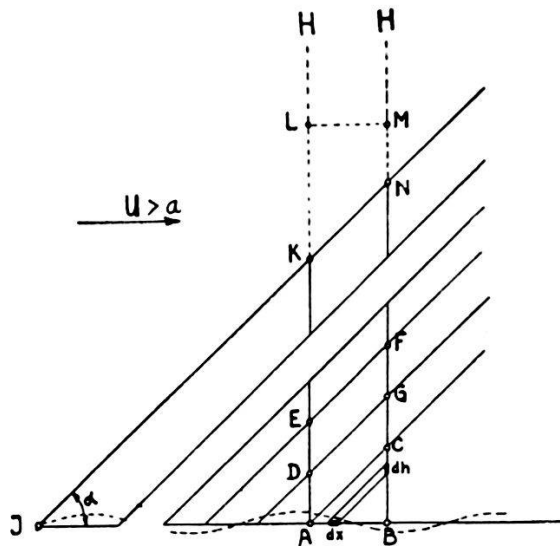


Fig. 4. Mach'sche Störungslinien bei $U > a$.

Wellblechs wirken. Wir wenden dazu den Impulssatz in gleicher Weise wie früher an.

In Fig. 4 ist das System der Störungswellen nach MACH-DOPPLER für die erste Näherung gezeichnet; alle Geraden sind parallel. Ziehen wir nun die gestrichelte Kontrollfläche über zwei beliebigen Punkten A und B und bestimmen Drücke und Impulsströme, so sehen wir zunächst: Die Drücke auf $A-H$ bzw. $B-H$ tragen nichts zum Auftrieb bei. Durch $D-E$ fließt genau der gleiche Impulsstrom, wie durch $G-F$, wenn E und F bzw. D und G auf derselben Mach'schen Geraden liegen. Zu jedem Linien-element von $A-H$ können wir offenbar ein entsprechendes auf $B-H$ finden; der Beitrag durch die Impulsströme ist also Null, ausgenommen den nicht kompensierten Impulsstrom durch $B-C$.

Jedoch muss das Verhalten im Unendlichen (H) noch näher betrachtet werden, um die Kraft auf $A-B$ berechnen zu können. Ist die gewellte Fläche unendlich ausgedehnt, so ist Druck und Impulsstrom im Unendlichen tatsächlich unbestimmt, in der Art etwa, wie $\sin \infty$ unbestimmt ist. Diese Schwierigkeit kann man auf folgende Weise umgehen: Wir nehmen zuerst an, das Wellblech beginne irgendwo weit links J , aber immerhin noch in endlicher Entfernung. Es gibt dann eine erste Mach'sche Welle: $J K N$. Ziehen wir nun die Kontrollfläche nach der gestrichelten Linie in den von Störungen freien Raum, wo der normale Luftdruck (wir können ihn hier etwa gleich Null setzen, da es nur auf Druckdifferenzen ankommt) herrschen soll, so sieht man, dass $L-M$ keinen Beitrag zum Druck liefert, $K-L$ und $N M$ ebenso keinen Beitrag zum Impulsstrom. Es bleibt also schliesslich nur der Impulsstrom durch $B-C$ übrig, der sich in erster Näherung ganz einfach rechnen lässt. Wie weit links J liegt, ist offenbar belanglos. Nun entspricht jedem Element dx auf $A-B$ ein Element, dh auf $B-C$. Durch dh strömt in erster Näherung sekundlich die Masse $\varrho U \cdot dh$ mit der Aufwärts-, bzw. Abwärts-, geschwindigkeit $\frac{dy}{dx} \cdot U$, indem ja alle Geschwindigkeitsrichtungen auf einer Mach'schen Welle gleich sind, also gleich der Wandneigung am Ursprung der Welle bei dx . Mit $dh = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx$ wird also der vertikale Impulsstrom durch $B-C$

$$J = \int_B^C \varrho U^2 \left(\frac{dy}{dx} \right) dh = \int_A^B \varrho U^2 \left(\frac{dy}{dx} \right) \operatorname{tg} \alpha \cdot dx = \varrho U^2 \operatorname{tg} \alpha (y_B - y_A) \quad (24)$$

ein ausserordentlich einfaches Ergebnis, das umso interessanter ist, als offenbar gar nicht besondere Annahmen über die Form der Wellen nötig sind. Auch die Periodizität der Kontur ist nicht vorauszusetzen; die Formel gilt ganz allgemein für jede Kontur, sofern die Mach'schen Wellen streng parallel bleiben¹⁾. Auf die Längeneinheit dx wirkt der Druck p :

$$p dx = + dJ = \varrho U^2 \operatorname{tg} \alpha dy \quad \text{und} \quad p = \varrho U^2 \frac{dy}{dx} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (25)$$

bei negativem dy als Auftrieb; bei positivem entsprechend nach unten drückend.

¹⁾ Damit werden, wie hier nicht näher begründet werden soll, sog. Verdichtungsstösse ausgeschlossen. Vergl. ACKERET Z. f. Flugt. 1925, S. 72.

Mit zunehmender Geschwindigkeit wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{U^2}{a^2} - 1}}$$

immer kleiner; die Impulsbetrachtung zeigt, dass gleichzeitig der Impulsstrom durch $B-C$ bezogen auf $\varrho \frac{U^2}{2}$, den Staudruck, abnimmt; hieraus ergibt sich eine anschauliche Deutung der allgemein beobachteten Abnahme der Luftkraftbeiwerte.

In Fig. 5 ist für die Oberseite der Wellblechfläche der Druckverlauf angegeben für $U \ll a$; $U = 0,87 \cdot a$ und $U = 1,45 \cdot a$ gemäss Gleichung (18) und Gleichung (25). Es zeigt sich nach

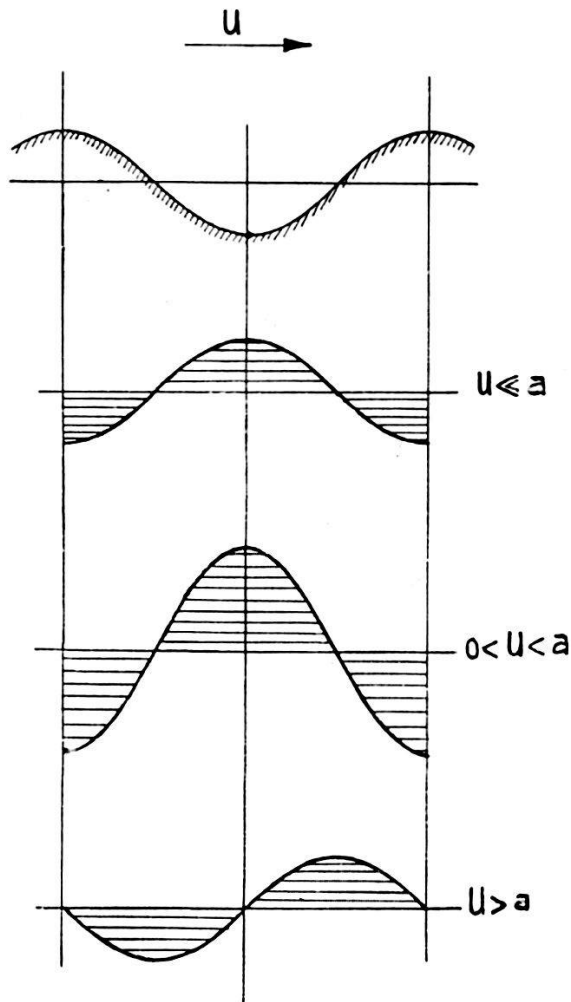


Fig. 5. Druckverteilungen bei drei verschiedenen Geschwindigkeiten.

Überschreiten der Schallgeschwindigkeit ein eigenartiger Phasensprung, indem die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Minima} \\ \text{Maxima} \end{array} \right\}$ des Druckes nicht mehr mit den $\left\{ \begin{array}{l} \text{Wellenberg} \\ \text{Wellentälern} \end{array} \right\}$ zusammenfallen, sondern den Wendepunkten als

Orten grösster Neigung gegenüber der ungestörten Stromrichtung zugeordnet sind. Beziehen wir die Drücke wie in der Aerodynamik üblich auf den Staudruck $q = \frac{\rho}{2} U^2$, so ergibt sich also:

$$\text{für } U < a \quad \frac{p}{q} = -4\pi \frac{h}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{a^2}}}$$

$$\text{für } U > a \quad \frac{p}{q} = -4\pi \frac{h}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} \frac{1}{\sqrt{\frac{U^2}{a^2} - 1}}.$$

(Unter p wie stets vorher die Druckdifferenz verstanden). Die Drücke sind ihrem Betrage nach von der Geschwindigkeit abhängig gemäss:

$$F\left(\frac{U}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{a^2}}} \text{ bzw. } \frac{1}{\sqrt{\frac{U^2}{a^2} - 1}}.$$

Fig. 6 gibt den Verlauf dieser Faktoren $F\left(\frac{U}{a}\right)$ und zeigt nun sehr deutlich den schon von LORENZ betonten Charakter der

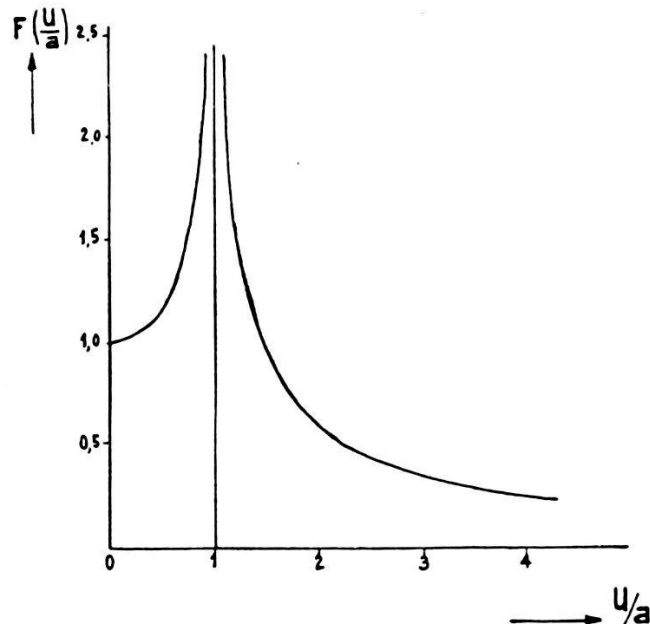


Fig. 6. Funktion $F\left(\frac{U}{a}\right)$.

Resonanzkurve, obwohl wir gerade aus unseren Betrachtungen ersehen können, dass von einer Resonanz (bei Schallgeschwindigkeit) im üblichen Sinne kaum gesprochen werden kann.

4. ANHANG.

Bemerkung über die Stabilität von Trennungsflächen.¹⁾

L. PRANDTL hat gesprächsweise die Vermutung geäußert, dass die sog. Trennungsflächen beispielsweise die Berührungsflächen zweier verschieden schnell bewegter Gasströme bei sehr grosser Geschwindigkeit *stabil* sein könnten.

Bei Unterschallgeschwindigkeit weiss man seit HELMHOLTZ und KELVIN, dass solche Flächen die man auch als Wirbelschichten auffassen kann, *labil* sind, d. h. sich mehr oder weniger rasch überschlagen und in einzelne Wirbel aufrollen²⁾.

Wir wollen immer im Bereich unserer Näherung bleibend zeigen, dass mindestens in einem sehr einfach gewählten Falle die Prandtl'sche Vermutung zutrifft.

Betrachten wir die Wirbelfläche, die sich zwischen den zwei

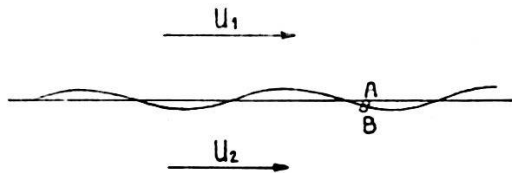


Fig. 7. Trennungsfläche.

Gasströmen abrollt (ebenes Problem). Sei U_1 die Geschwindigkeit des ersten, U_2 die des andern, so ist

$$U_m = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

die mittlere Fortschrittggeschwindigkeit eines einzelnen Wirbels der Fläche. Dieser Fläche geben wir, um ihre Stabilität zu untersuchen, eine kleine Deformation. Vergrössert sich diese unter dem Einfluss der Strömungskräfte, so ist Labilität vorhanden, verkleinert sie sich, so ist die Bewegung absolut stabil, haben wir Indifferenz, so können wir ohne auf höhere Näherungen einzugehen, immerhin sagen, dass für praktisch in Betracht kommende Zeiten und Längen die Trennungsfläche erhalten bleibt.

Als Deformation nehmen wir der Einfachheit halber eine Verbiegung nach einer Sinuslinie an, wobei diese Form nicht wesentlich ist. Fig. 7. Unser Koordinatensystem soll sich mit

¹⁾ Ich gehe auf dieses interessante Thema hier kurz ein, weil die vorangehenden Betrachtungen alle wesentlichen Vorbereitungen enthalten.

²⁾ Vergl. Fuchs-Hopf Aerodynamik S. 156.

der Geschwindigkeit U_m , also mit der Diskontinuitätsfläche bewegen. Dann strömt etwa oben das Gas mit der Geschwindigkeit

$$\frac{U_1 - U_2}{2} = U$$

nach rechts über die Fläche, unten mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung.

Denken wir uns für einen Augenblick die Fläche erstarrt als festes Wellblech, so ist nach dem früher Gesagten ohne weiteres zu sehen, dass für $U < a$ die Strömungskräfte die Wellung zu vergrössern suchen; also Instabilität vorliegt. Für $U > a$ aber haben wir Unter- bzw. Überdrücke, die wie wir früher gesehen haben, nur von der *Neigung* $\frac{dy}{dx}$ der Flächenelemente abhängen. Im Punkte A also herrscht ein Unterdruck von der Grösse:

$$p = \varrho_A U^2 \operatorname{tg} \alpha_A \left(\frac{dy}{dx} \right)_A \quad \text{vergl. (25)}$$

im Punkte B auf der gegenüberliegenden Seite ist der Unterdruck:

$$p = \varrho_B U^2 \operatorname{tg} \alpha_B \left(\frac{dy}{dx} \right)_B$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_A = \left(\frac{dy}{dx} \right)_B$$

(x in der *jeweiligen* Strömungsrichtung gezählt).

Wir haben nun Indifferenz, wenn

$$\varrho_A \operatorname{tg} \alpha_A = \varrho_B \operatorname{tg} \alpha_B$$

ist; ausführlich geschrieben lautet diese Bedingung:

$$\frac{\varrho_A}{\sqrt{\frac{U^2}{a_A^2} - 1}} = \frac{\varrho_B}{\sqrt{\frac{U^2}{a_B^2} - 1}} \quad (26)$$

Ist beispielsweise $\varrho_A = \varrho_B$; $a_A = a_B$, so ist die Bedingung ohne weiteres erfüllt, die Trennungsfläche ist indifferent, das Wellblech kann seine Festigkeit verlieren, ohne dass seine Form geändert wird. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Gasströme muss grösser sein als $2a$ da ja

$$\frac{U_1 - U_2}{2} = U > a$$

vorausgesetzt ist.

Wir sehen damit, dass es tatsächlich Fälle gibt, wo die Trennungsfläche erhalten bleibt und haben dafür die Prandtl'sche Vermutung bestätigt.

Der allgemeine Fall $\varrho_A \neq \varrho_B$; $a_A \neq a_B$ erfordert ziemlich umfangreiche Betrachtungen, die wir hier nicht vorbringen wollen.

Die Photographien Fig. 8 und 9 zeigen sehr deutlich den Unterschied im Verhalten der Trennungsflächen bei Unter- bzw.

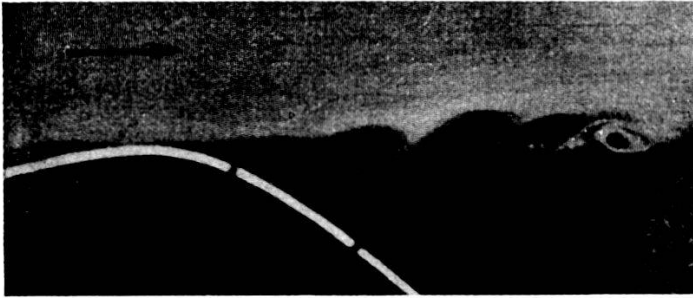


Fig. 8. Unstabile Trennungsfläche bei geringer Geschwindigkeit.

Überschallgeschwindigkeit. Fig. 8 zeigt einen von links nach rechts fliessenden Flüssigkeitsstrahl (durch aufgestreutes Aluminiumpulver auf der Aufnahme weiss gefärbt), der sich von der durch einen dicken weissen Strich angedeuteten Führungswand löst und eine Diskontinuitätsfläche mit dem hinter der Ablösungsstelle befindlichen „Totwasser“ bildet. Man erkennt nun sehr gut, wie die Trennungsfläche wellig wird und sich überschlägt.

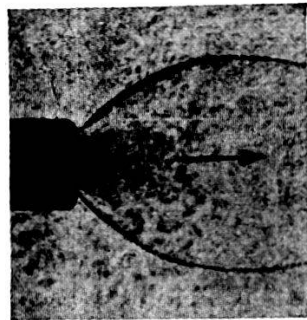


Fig. 9. Stabile Trennungsfläche bei sehr grosser Geschwindigkeit.
(Gasstrahl aus einem Gewehrlauf.)

Durch Aufwicklung der Wirbelschicht entstehen dann die relativ grossen diskreten Wirbel, die man ja so oft hinter eckigen Hindernissen beobachten kann.

Ganz anders in Fig. 9 (Aufnahme von Prof. CRANZ, Berlin). Hier strömt (wieder von links nach rechts) ein Gasstrahl aus einer Gewehrmündung. Er breitet sich glockenförmig aus, seine Geschwindigkeit übersteigt die Schallgeschwindigkeit wesentlich.

Die Trennungslinie von ruhender Luft und Auspuffgas ist nach der Schatten-Schlierenmethode sichtbar gemacht und zeigt nicht die geringste Tendenz einer Wellung und Auflösung in Einzelwirbel.

Es ist natürlich klar, dass die Diskontinuitätsfläche sich trotzdem beim Weiterströmen verwischt, da ja die innere Reibung des Gases, die wir bisher vernachlässigt haben, in diesem Sinne wirkt. Jedoch ist ihre Wirkung von ganz anderer Grössenordnung, als die starke Mischung von schnellen und langsamen Teilen durch die von den diskreten Wirbeln hervorgerufenen Sekundärbewegungen. Die innere Reibung ist ja ein molekularer Impulsaustausch, während die Turbulenzmischung ein makroskopischer Vorgang ist.

Herrn Prof. *Prandtl*, Göttingen, bin ich für mancherlei Belehrung in diesen und ähnlichen Fragen zu herzlichstem Danke verpflichtet.
