Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 1 (1928)
Heft: I

Artikel: Streuungskoeffizient von Wasserstoff nach der Wellenmechanik
Autor: Stratton, J.A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-109161

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Streuungskoeffizient von Wasserstoff nach der Wellenmechanik

von **J. A. Stratton.**

Inhalt: Unter Zugrundelegung der de Brogie-Schrödinger'schen wellenmechanischen Vorstellung vom Elektron wird die Streuung für Röntgenstrahlen am Wasserstoffatom gerechnet. Es kann gezeigt werden, dass die Intensität der Streustrahlung mit abnehmender Wellenlänge stark abnimmt und ebenso starke Winkelabhängigkeit zeigen muss, im Einklang mit der Erfahrung.

I. Einleitung.

1. Phänomenologisches.

Wenn ein Röntgenstrahl auf eine materielle Schicht fällt, wird Energie absorbiert. Um diese Absorption quantitativ fassen zu können, muss man einen Absorptionskoeffizienten definieren. Man bezeichnet als *linearen* Absorptionskoeffizienten den pro Längeneinheit der durchstrahlten Materie absorbierten Bruchteil der Intensität I des einfallenden, parallelen Strahlenbündels, oder also

$$\mu = -\frac{1}{I}\frac{dI}{dx};$$

hierbei ist übereinstimmend mit den Beobachtungen der absorbierte Teil der Intensität I proportional gesetzt der Dicke dx der materiellen Schicht. Für den Fall eines homogenen Strahles (Strahl gleicher Qualität oder Frequenz) ist μ konstant und die Integration ergibt $I = I_0 e^{-\mu x}$. Der lineare Absorptionskoeffizient μ bedeutet auch den von der Volumeneinheit des absorbierenden Mittels aufgenommenen Bruchteil der primären Energie. Weit häufiger spricht man vom *Massen*absorptionskoeffizienten. Dieser auf die Masseneinheit bezogene Absorptionskoeffizient ist gleich dem linearen Koeffizienten dividiert durch die Dichte ϱ des Absorbers; er ist eine charakteristische Grösse

für die absorbierende Substanz, unabhängig von ihrem physikalischen Zustande. Interessieren wir uns endlich für den Teil der Absorption, der dem einzelnen Atom zukommt, so führen wir einen Atomabsorptionskoeffizienten $\mu_a = \frac{\mu}{n}$ ein; wobei $n = \frac{LN\varrho}{A}$ die Zahl der Elektronen in der Volumeneinheit bedeutet (L LOSCHMIDT'sche Zahl, N Atomnummer, A Atomgewicht).

Fragen wir nach der Art und Weise der Energieabsorption, so ist zwischen vier verschiedenen Erscheinungen zu unterscheiden.

Erstens kann das Vorhandensein von Lichtelektronen festgestellt werden. Es sind dies die durch den Primärstrahl aus ihren Bahnen gelöst gedachten Elektronen; für die Energieumwandlung gilt dabei nach der Quantentheorie die Beziehung:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = h\nu - w \, .$$

In dieser Gleichung bedeutet $\frac{m}{2} v^2$ die kinetische Energie des Lichtelektrons, w die Auslösungsarbeit desselben aus seiner Bahn, und $h\nu$ die Energie des einfallenden Strahles. Bei dieser lichtelektrischen Emission wird demnach die elektromagnetische Energie des einfallenden Strahles in die kinetische Energie eines β-Strahlenbündels umgesetzt. Wie die Gleichung für die Energieumwandlung zeigt, existiert für den Primärstrahl eine Grenzfreqnenz, unter welcher keine Lichtelektronen mehr emittiert werden.

Neben dieser eben beschriebenen Erscheinung beobachten wir eine zweite Art Sekundär-Strahlung, die nun wie die Primärstrahlung ebenfalls elektromagnetischer Natur ist. Die Frequenz dieser Strahlung ist aber im Gegensatz zu vorhin abhängig von der absorbierenden Materie und unabhängig von der Frequenz der primären oder anregenden Strahlung. Diese als *Fluoreszenz*strahlung bezeichnete Erscheinung ist eng verknüpft mit dem lichtelektrischen Effekt. Durch die Auslösung eines Lichtelektrons aus seiner Bahn kommt ein Atom in einen jonisierten Zustand und wird bei der ersten Gelegenheit versuchen, ein freies Elektron von aussen wieder aufzunehmen, um die vom Lichtelektron hinterlassene Lücke wieder auszufüllen. Gehörte dabei das Lichtelektron einer innern Schale an, so wird der neutrale Zustand gewöhnlich nicht in einem einzigen Schritt, sondern erst nach einer Reihe von mehreren Schritten erreicht, welche den Übergängen der Elektronen im Atominnern aus einem Zustand in einen andern entsprechen. Ein jeder solcher Übergang ist aber seinerseits von einer Ausstrahlung elektromagne-

tischer Energie begleitet, wobei die Frequenz charakteristisch sein wird für die betreffende Substanz. Für diese der emittierenden Substanz eigentümliche Frequenz gilt die fundamentale Beziehung der Quantentheorie

$$\nu = \frac{W_n - W_m}{h};$$

worin W die Energie eines gegebenen, stationären Zustandes bedeutet.

Die dritte Erscheinung, die wir am absorbierenden Körper wahrnehmen können, ist eine nach allen Richtungen mit gleicher Qualität wie die Primärstrahlung erfolgende Ausstrahlung elektromagnetischer Energie. Scheinbar ist demnach nur die Richtung des einfallenden Strahles geändert worden, und man kann deshalb von einer *Streuung* des einfallenden Strahles reden.

Von dieser eben beschriebenen Streustrahlung müssen wir endlich noch eine weitere Erscheinung unterscheiden, ebenfalls eine Streustrahlung, aber mit einer um einen kleinen Betrag veränderten Frequenz (Compton-Effekt); die Grösse dieser Abweichung hängt dabei ab vom Winkel zwischen dem primären und sekundären Strahl.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Streustrahlung von unveränderter Frequenz; eine kurze Übersicht soll die älteren Theorien aufführen.

Da die Streustrahlung von veränderter und unveränderter Frequenz innerhalb eines gewissen Bereiches gleichzeitig vorkommen kann, müssen wir zunächst die Bedingungen aufstellen für das Überwiegen der einen oder andern Strahlung. Um die Rolle, die jeder der vier Erscheinungen in der gesamten Absorption zukommt, festzulegen, wird jeder dieser Strahlungen ein einzelner Absorptionskoeffizient zugeordnet. So ist $\mu = \tau_1 + \tau_2 + \sigma_3 + \sigma_4$. Im allgemeinen ist es experimentell unmöglich, die Grösse der Absorption, die der lichtelektrischen Emission zukommt, von derjenigen der Fluoreszenz zu trennen; deshalb werden die beiden gewöhnlich zusammengefasst in $\tau = \tau_1 + \tau_2$. Ähnlich werden auch die beiden Streuungsprozesse vereinigt: $\sigma = \sigma_3 + \sigma_4$. Die dem Koeffizienten τ entsprechenden Energieumwandlungen werden öfters etwas irreführend als „wahre" Absorption bezeichnet; genau genommen müsste auch der Streuungsprozess mit unveränderter Frequenz als wahre Absorption bezeichnet werden[1]).

[1]) Cf. F. Kohlrausch, „Probleme der γ-Strahlung". Vieweg, 1927. — A. Sommerfeld, „Atombau", und A. H. Compton, „X-rays and Electrons" Macmillan, 1927.

2. Klassische oder elektromagnetische Theorie der Streuung.

Mit dem Wort „klassisch" bezeichnen wir, wie es üblich ist, jene Theorien, welche für die Erklärungen der Naturerscheinungen die strenge Gültigkeit (d. h. gültig für mikro- wie für makroskopische Erscheinungen) der Newton'schen und Maxwellschen Gesetze voraussetzen. Nach dieser Auffassung besteht das Atom aus einer Anzahl von Elektronen, welche durch quasielastische Kräfte an den Kern gebunden sind. Trifft eine elektromagnetische Welle ein solches Atom, so erfahren die Elektronen eine Kraft $e\,\mathfrak{E}_p(t)$, wobei $\mathfrak{E}_p(t)$ die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle ist. Die magnetische Feldstärke gibt ebenfalls Veranlassung zu einer Kraft in Richtung des Strahles (Lichtdruck); diese dürfen wir hier vernachlässigen. Jedes Elektron schwingt synchron mit der elektrischen Feldstärke des störenden Lichtes. Ein beschleunigtes Elektron strahlt aber elektromagnetische Energie aus; die Ausstrahlung ist gegeben durch

$$S = \frac{2}{3}\frac{e^2 v^2}{c^3} \tag{1}$$

Bei genügend hoher Frequenz können die elastischen Bindungskräfte des Elektrons vernachlässigt werden gegenüber der Kraft $e\,\mathfrak{E}_p(t)$. Wenn $\mathfrak{E}_p = \mathfrak{E}_o \cos 2\pi\nu t$, können wir die Verrückung x des Elektrons von seiner Ruhelage geben:

$$x = \xi_o \cos 2\pi\nu t$$

und

$$\dot{v} = \ddot{x} = -4\pi^2\nu^2\xi_o \cos 2\pi\nu t = -4\pi^2\nu^2 x.$$

Damit lässt sich die durch das schwingende Elektron ausgestrahlte Energie durch ein Dipolmoment $M(t) = ex$ ausdrücken:

$$S = \frac{32\pi^4\nu^4 M^2}{c^3} \tag{2}$$

Im weitern dürfen wir unter der Annahme, dass die elastischen Kräfte vernachlässigt werden können (eine Annahme, die nur möglich ist im Gebiete der Röntgenstrahlen), schreiben:

$$m\dot{v} = -e\,\mathfrak{E}_p\,,$$

wodurch (1) übergeht in

$$S = \frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2 c^3}\mathfrak{E}_p^2 \tag{3}$$

Die Energiedichte der einfallenden Welle ist

$$P = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}_p^2 \tag{4}$$

(3) misst die Grösse der Energie, welche von der primären Energie aufgenommen worden ist. Diese absorbierte Energie findet sich wieder in der Streustrahlung des schwingenden Elektrons. Die Streuabsorption eines Elektrons ist demnach:

$$\frac{S}{P} = \frac{8}{3} \frac{\pi e^4}{m^2 c^4} . \tag{5}$$

Sind n-Elektronen im cm³ vorhanden, und streut jedes Elektron unabhängig von den andern, so ist der Massen-Streuabsorptionskoeffizient:

$$\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{8 \pi e^4 n}{3 m^2 c^4 \varrho} = \frac{8 \pi e^4 LN}{3 m^2 c^4 A} = 0{,}4 \frac{N}{A} . \tag{6}$$

Dieses ist die bekannte J. J. Thomson'sche Formel. Im Falle von Wasserstoff ist $\frac{N}{A}$ gleich 1. Für andere leichte Elemente ist $\frac{N}{A}$ gleich $\frac{1}{2}$ und (6) verlangt demnach, dass für diese Elemente $\frac{\sigma}{\varrho}$ konstant, nämlich gleich o,2 sein soll, unabhängig von der Wellenlänge des gestreuten Lichtes und von der Substanz des absorbierenden Körpers. Wie stehen nun dazu die experimentellen Befunde?

Für diese Substanzen kleinen Molekulargewichtes wird für weiche Röntgenstrahlen der theoretische Wert tatsächlich bestätigt. Zudem wird auf Grund dieser Theorie die Zahl der Elektronen im Atom richtig bestimmt; ähnliche Überlegungen scheinen befriedigend, die Brechung von Röntgenstrahlen an Kristallen zu erklären. Im Falle von Substanzen wie Kupfer und Silber ist ein etwas grösserer Wert für $\frac{\sigma}{\varrho}$ als 0,2 beobachtet worden. Diese sogenannte „Extra-Streuung" konnte bis zu einem gewissen Grade von Debye und andern erklärt werden, indem sie zeigten, dass bei diesen schwereren Metallen, bei denen die gegenseitigen Abstände der Elektronen nicht mehr klein sind gegenüber der Wellenlänge des einfallenden Lichtes, die Elektronen nicht unabhängig voneinander streuen. Wird der absorbierende Körper andererseits mit sehr harten Röntgen- oder γ-Strahlen belichtet, so erhält man einen beträchtlich kleineren Wert von $\frac{\sigma}{\varrho}$. Es wurde in einem Falle, bei dem das Primär-Licht aus γ-Strahlen von *Ra-C* bestand (Ishino) sogar einen Wert von nur 0,048 gefunden. Betrachtungen, die sich rein auf die klassische Theorie stützen, können keine befriedigende Erklärung für

die Abweichung vom theoretisch erwarteten Resultat geben[1]). Die Abweichung ist noch auffallender, wenn wir die räumliche Verteilung des gestreuten Lichtes bei diesen sehr kleinen Wellenlängen betrachten. Nach (6) sollte die Streustrahlung symmetrisch verteilt sein in einer Ebene senkrecht zur Achse des Dipols M. Tatsächlich ist diese Symmetrie nur bei weichen Röntgenstrahlen beobachtet worden. Mit der Abnahme der Wellenlänge wird nun aber die Intensitätsverteilung um die Dipolachse asymmetrisch (im Falle von einer Anzahl von Atomen wird die Verteilung asymmetrisch zu einer senkrecht zum Primär-Strahl und durch den absorbierenden Körper gelegten Ebene). Mit anderen Worten, betrachten wir eine durch den absorbierenden Körper gelegte Normalebene zum einfallenden Strahl, so wird nicht nur die *totale* gestreute Energie, welche durch $\frac{\sigma}{\varrho}$ gemessen wird, mit abnehmender Wellenlänge kleiner, sondern noch viel auffallender ist es, dass die gestreute Energie im Eintrittsraum viel schneller abnimmt als im Austrittsraum. Für sehr kleine Wellenlängen findet sich fast die gesamte Streustrahlung nur im Austrittsraum. Die vorliegende Arbeit soll versuchen, diese beobachtete Asymmetrie und die damit verbundene Abnahme des Streukoeffizienten σ_3 bei sehr kurzen Wellenlängen auf Grund der Wellenmechanik zu erklären.

Durch eine experimentelle Untersuchung der Streuung bei sehr harten Röntgenstrahlen wurde Compton zur Entdeckung des oben erwähnten, vierten Phänomens geführt, nämlich der Streustrahlung, deren Frequenz ein weniges abweicht von jener des Primär-Strahles, wobei diese Abweichung eine Funktion des Winkels zwischen Primär- und Sekundär-Strahl ist. Bekanntlich erklärt die Theorie von Compton und Debye diese Erscheinung, indem der Röntgenstrahl als ein Strom von Quanten mit der Energie $h\,\nu$ und dem Impulsmomente $\frac{h\,\nu}{c}$ behandelt wird. Trifft ein Primärquant ein freies Elektron, so wird dasselbe abgelenkt. Nach den Gesetzen der Erhaltung von Energie und Impuls muss die ursprüngliche Energie bezw. der ursprüngliche Impuls des Primärquants gleich sein der skalaren Summe der Energien des abgelenkten Quants und des Rückstosselektrons nach dem Stosse bezw. gleich der Vektorsumme der Impulse der letzteren. Wir erhalten dadurch zwei Gleichungen, welche die Frequenz ν^* des abgelenkten Quantenstromes als eine Funktion des Ablenkungs-

[1]) Eine Ausnahme dieser Behauptung findet sich allerdings in den Ausführungen, die sich auf die Annahme eines „grossen" oder „complexen" Elektrons stützen. Cf. Compton, loc. cit.

winkels festlegen. Die Theorie ist nur für freie Elektronen angewandt worden[1]). Wenn die Primärenergie genügt, ein Elektron herauszulösen, so sind zwei Fälle möglich: Das primäre Lichtquant kann *entweder* alle seine Energie dem Elektron abgeben, in welchem Falle das Elektron als ein Photo-Elektron erscheint, *oder* das Primärquant gibt nur ein Teil seiner Energie dem Elektron ab und wird als Welle von veränderter Frequenz abgelenkt. Genügt aber die Primärenergie nicht dazu, ein Elektron aus seiner Bahn herauszulösen, kann immer noch eine Streuung (ohne Frequenzveränderung) vorhanden sein, aber weder Photo- noch Compton-Effekt können dabei vorkommen. Im allgemeinen können im Röntgenstrahlgebiet alle drei Erscheinungen bis zu einem gewissen Grade vorhanden sein. In den spektroskopischen Untersuchungen über sekundäre Röntgenstrahlen bezeichnet man die Streuung mit unveränderter Frequenz als die *unverschobene Linie*, die Streuung mit veränderter Frequenz als die *verschobene Linie*. Bei leichten Substanzen, wo alle Elektronen schwach gebunden sind, werden schon bei verhältnismässig langen Wellenlängen viele Elektronen ausgelöst; dementsprechend wird die verschobene Linie bereits stark auftreten. Sind die Elektronen wie im Falle der schweren Atome fester gebunden, erscheint die verschobene Linie erst bei sehr kurzen Wellenlängen.

Vernachlässigen wir für den Moment den Lichteffekt, so können wir die die Sache folgendermassen zusammenfassen. Betrachten wir einen von Licht langer Wellenlänge beleuchteten Absorber, dann werden keine Elektronen herausgelöst, die gesamte Streuenergie findet sich in der unverschobenen Linie und wird erklärt sowohl vom Standpunkt der klassischen- wie von der Quanten-Theorie durch Annahme einer *Störung* der Elektronen in ihren Bahnen. Nimmt jetzt die Wellenlänge ab, so werden eine gewisse Anzahl von Elektronen herausgelöst, um so mehr, je kleiner die Wellenlänge wird (zunehmende Primärenergie), und veranlassen die verschobene Linie. Mit der Zunahme der Intensität der verschobenen Linie geht Hand in Hand das Abfallen der Intensität der unverschobenen Linie, bis die gesamte Energie in der ersteren allein vorhanden ist. Ein und dasselbe Elektron kann nicht zu beiden Linien beitragen. Innerhalb eines gewissen Gebietes werden wir erwarten dürfen, dass beide Linien von beobachtbarer Intensität sind. Die Lage dieses Gebietes im Spektrum wird vom Absorber abhängen, d. h. von der Arbeit, die nötig ist, um die Elektronen aus ihren Bahnen zu lösen. Diese Frage wird wichtig sein bei der Diskussion der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit.

[1]) Cf. Compton, loc. cit. Fussnote zu Seite 265.

3. *Quantentheorie der Dispersion.*

Als die BOHR'sche Theorie der Quantenbahnen für die Erklärung der verschiedenen Serien von Spektrallinien mit Erfolg die klassische Theorie ersetzte, war es naheliegend, dieselbe auch für die Erklärung der Dispersion zu Hilfe zu nehmen. Auf Grund der Postulate der BOHR'schen Theorie gelang es KRAMERS und HEISENBERG[1]), eine allgemeine Formel zu geben, welche in ihren wichtigen Zügen grosse Ähnlichkeit aufweist mit der rein aus klassischen Überlegungen erhaltenen Formel. In dem einfachen Falle, wo der Primärstrahl linear polarisiert ist, geben die Verfasser für das die Streustrahlung veranlassende Dipolmoment den Ausdruck:

$$M(t) = \frac{e^2}{4\pi^2 m} \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi \nu t \left(\sum_a \frac{f_a}{\nu_a^2 - \nu^2} - \sum_e \frac{f_e}{\nu_e^2 - \nu^2} \right) \quad (7)$$

In (7) bezeichnen a resp. e die einer Absorption resp. Emission entsprechenden Übergänge und f die Wahrscheinlichkeitskoeffizienten für solche Übergänge. Offenbar ist die Intensität der Streustrahlung bestimmt durch die Nenner $\nu_a^2 - \nu^2$ und $\nu_e^2 - \nu^2$. Die Absorptions- und Emissionsfrequenzen sind charakteristisch für den absorbierenden Körper; durch (7) wird auch die anomale Dispersion in der Nachbarschaft der Eigenfrequenzen $\nu = \nu_a$ bestimmt. Für harte Röntgenstrahlen und leichte Atome darf gewöhnlich ν_a gegenüber ν vernachlässigt werden. Dies entspricht unserer Vernachlässigung der elastischen Kräfte in der Ableitung der J. J. THOMSON'schen Formel.

Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchung ist die Dispersionsformel, welche SCHRÖDINGER aus den Grundgleichungen der Wellenmechanik ableitete[2]). Nach derselben kann man bekanntlich jedem vom Einfluss äusserer Kräfte freien Atom eine allgemeine „Wellen-Gleichung" zuschreiben:

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_0 \psi - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 . \quad (8)$$

V_0 ist das vom Kern herrührende statische Potential, ein die

---

[1]) Nature, **113**, 673, 1924 und **114**, 310, 1924. — Zeitschr. f. Phys. **31**, 681, 1924.

[2]) E. SCHRÖDINGER, Ann. d. Phys. **4**, 81, 1926.

Eigenschaften der verschiedenen Atome bezeichnender Faktor. Die Lösung dieser „ungestörten" Probleme kann gegeben werden durch die Formel:

$$\psi = u_k(x)\, e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}}, \tag{9}$$

worin E_k die dem besonderen Kernpotential entsprechenden Eigenwerte bedeuten und wo das Argument x der Eigenfunktionen u die Gesamtheit der Konfigurationskoordinaten vertritt. Ist die Potentialfunktion V_0 bekannt, so darf im allgemeinen das Problem des ungestörten Atoms als gelöst betrachtet werden. Die den verschiedenen Quantenzuständen k entsprechenden Energieniveaus sind durch E_k gegeben, und nach der von Schrödinger auf rein heuristischer Grundlage aufgestellten Hypothese besteht Proportionalität zwischen dem Quadrate des absoluten Wertes von ψ und der Dichte der Elektrizität um den Kern. Wir werden zunächst über die Bedeutung von ψ keine Annahme machen und nehmen die Gültigkeit der Wellengleichung nur als Mittel zur Berechnung der Eigenschaften der Atome an.

Streuung erhalten wir, wie wir oben gesehen haben, beim Auffallen einer Lichtwelle auf ein atomistisches System. Um also eine Dispersionsformel zu erhalten, wird man, wie es Schrödinger getan, die Wirkung einer kleinen Störung im Potential V_0 der Gleichung (8) untersuchen. Kommt die störende Kraft z. B. von einem homogenen synchronschwingenden elektrischen Feld, so wird die Potentialfunktion von (8) ersetzt durch

$$V = V_0(x) + A(x) \cos 2\pi \nu t, \tag{10}$$

worin die Störungsfunktion A sehr klein gegen V_0 angenommen ist. Die Wellengleichung des *gestörten* Problems lautet jetzt:

$$\Delta \psi - \frac{8\pi^2 m V_0}{h^2} \psi - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} A \psi \cos 2\pi \nu t. \tag{11}$$

Da nun (11) homogen ist und das Störungsglied klein und zudem über den ganzen Raum stetig und eindeutig verteilt ist, können wir die Lösungen ψ^* des gestörten Problems in der unmittelbaren Nachbarschaft jener des ungestörten Problems ψ suchen[1]).

$$\psi^* = u_k(x)\, e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}} + w(x, t). \tag{12}$$

[1]) Eine vollständige Darstellung dieser Störungsmethode ist zu finden in Schrödinger, Ann. d. Phys. **4**, 80, 1926.

Führt man (12) in (11) ein, so gelangt man zu einer inhomogenen Gleichung für die Bestimmung von w. Diese Gleichung wird in der zitierten Arbeit aufgelöst durch eine Reihenentwicklung von w nach den diskreten Eigenfunktionen u_k, welche zu dem entsprechenden ungestörten Problem gehören. Die Wellenfunktion des gestörten Atoms ergibt sich als:

$$\psi^* = u_k(x)\, e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\, u_n(x) \left(\frac{e^{\frac{2\pi i t}{h}(E_k + h\nu)}}{E_k - E_n + h\nu} + \frac{e^{\frac{2\pi i t}{h}(E_k - h\nu)}}{E_k - E_n - h\nu} \right). \tag{13}$$

Auf Grund der oben erwähnten Hypothese der elektrodynamischen Bedeutung der ψ-Funktion setzt Schrödinger für die Komponente des gesamten Dipolmomentes

$$M = \int \sum_i e_i\, y_i\, |\psi|^2\, \varrho(x)\, dx\,. \tag{14}$$

Die Summierung ist über die Zahl der Elektronen des Atoms zu vollziehen und die Integration über den ganzen Konfigurationsraum zu erstrecken. $\varrho(x)$ ist die „Dichtefunktion"[1]). Indem wir in (14) den mit seinem konjugierten Werte $\overline{\psi}^*$ multiplizierten Wert ψ^* einführen, finden wir für M:

$$M = a_{kk} + 2F \cos 2\pi\nu t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(E_n - E_k)\, a_{kn}\, b_{kn}}{(E_k - E_n)^2 - h^2\nu^2}\,. \tag{15}$$

Hierin bedeutet F die elektrische Feldstärke des störenden Feldes,

$$a_{kn} = \int \sum_i e_i\, z_i\, u_k\, u_n\, \varrho\, dx\,,$$

$$b_{kn} = \int \sum_i e_i\, y_i\, u_k\, u_n\, \varrho\, dx\,,$$

z die Polarisationsrichtung der störenden Welle und y jene Kom-

[1]) Für die Bedeutung von (14) vom Standpunkt der Matrizenrechnung siehe Schrödinger, Ann. d. Phys. **4**, 79, 1926.

ponente des streuenden Dipols, für welche wir uns gerade interessieren. a_{kk} ist konstant und vertritt das Dipolmoment des ungestörten Atoms. Demnach stellt das zweite Glied auf der rechten Seite die mit derselben Frequenz wie das einfallende Licht auftretende Streustrahlung dar.

In der Ableitung dieses Ausdruckes ist stillschweigend angenommen, dass die Wellenlänge des störenden Feldes gross ist verglichen zur grössten Dimension des streuenden Systems, oder mit andern Worten, dass im störenden Potential

$$r(x,t) = A(x) \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

der Faktor $\frac{x}{\lambda}$ vernachlässigt werden darf. In der vorliegenden Arbeit wird beabsichtigt, die eben skizzierte SCHRÖDINGER'sche Behandlung der Dispersion zu erweitern bis ins Gebiet jener Frequenzen, für welche λ vergleichbar wird mit den Atomdimensionen, und nachzusehen, wie weit es möglich sein wird, die in diesem genannten Gebiete beobachteten Streuerscheinungen zu erklären. Es werden sich gewisse Modifikationen und Zusätze zur beschriebenen Methode als notwendig erweisen. Besonders wichtig dürfte die Untersuchung eines eventuellen Einflusses des kontinuierlichen Spektrums auf die Dispersion im Gebiete der betrachteten Frequenzen sein. Die Berechnungen sind durchgeführt worden für das Wasserstoffatom; dieses ist zur Zeit das einzige Atom, für welches die zahlenmässige Berechnung auf leichtere Art möglich ist.

Im Hinblick auf die schwerwiegenden Zweifel gegenüber der Hypothese, die der ψ-Funktion eine physikalische Bedeutung beilegt, wollen wir vom ursprünglichen Standpunkt der Wellenmechanik, welche ψ proportional der Elektrizitätsdichte setzt, Abstand nehmen. Kürzlich gemachte Betrachtungen von HEISENBERG haben es als fraglich erscheinen lassen, ob die rein als mathematisches Hilfsmittel aufgefasste Wellengleichung, obschon dieselbe im Falle des ungestörten Atoms formell identisch ist mit dem Matrizenausdruck der BORN-HEISENBERG-JORDAN'schen Mechanik, verwendbar bleibt für störende Kräfte, deren Frequenzen sehr gross sind. Wir werden bei der Diskussion der Resultate noch einmal darauf zurückkommen; die Resultate scheinen glücklicherweise so zu sein, dass experimentelle Untersuchungen eine endgültige Entscheidung ergeben könnten.

II. Ableitung des Streuungskoeffizienten.

In der vorhergehenden Betrachtung über die SCHRÖDINGERsche Dispersionstheorie ist die Störung als von einem monochromatisch schwingenden Skalarpotential $r(x,t) = Fe \cos 2\pi \nu t$ herrührend dargestellt worden (F elektrische Feldstärke des störenden Lichtes). Es ist etwas vorteilhafter, das Vektorpotential des störenden Feldes zu verwenden[1]). Die allgemeine Wellengleichung des gestörten Atoms ist von GORDON[2]) gegeben.

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V_0)\psi - \frac{4\pi i e}{h c}\sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \tag{16}$$

$$- \frac{4\pi^2 \cdot e^2}{h^2 c^2}\sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha^2 \psi = 0 ,$$

worin A_α die Komponenten des Viererpotentials bedeuten. Im Falle des Wasserstoffproblems ist das Kernpotential $V_0 = -\frac{e^2}{r}$. Vernachlässigt man Glieder in $\frac{1}{c^2}$, so reduziert sich (16) auf

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m e^2}{h^2 r}\psi - \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{4\pi e i}{h c}\sum_{k=1}^{3} A_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} . \tag{17}$$

Hier vertritt A_k die x,y,z-Komponenten der störenden Welle. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass diese in solcher Art polarisiert ist, dass

$$\mathfrak{E}_x = F_0 \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{z}{\lambda}\right) \qquad A_x = A_0 \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{z}{\lambda}\right)$$

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = A_y = A_z = 0 .$$

Die Grundgleichung unseres gestörten Problems lautet endlich

$$\Delta \psi^* + \frac{8\pi^2 m e^2}{h^2 r}\psi^* - \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{4\pi i e}{h c} A_0 \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{z}{\lambda}\right)\frac{\partial \psi^*}{\partial \varkappa} . \tag{18}$$

---

[1]) Siehe Fussnote, Seite 00.

[2]) W. GORDON, Zeitschr. f. Phys. **40**, 117, 1926.

Wird die linke Seite gleich Null gesetzt, so geht (18) über in die ungestörte Gleichung (8), deren Lösung uns bekannt ist. Die Lösung des gestörten Problems schreiben wir

$$\psi^* = \psi_0 + w\,(x, y, z, t)\,, \tag{19}$$

wo ψ^0 die Lösung von (8) ist. w bezw. seine ersten Ableitungen sollen klein sein gegenüber von ψ_0 bezw. seiner entsprechenden Ableitungen.

Führen wir (19) in (18) ein, so finden wir

$$w + \frac{8\pi^2 m e^2}{h^2 r} w - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{4\pi i e}{h c} A_0 \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{z}{\lambda}\right) \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \tag{20}$$

$$= \frac{2\pi e}{h c} A_0 \frac{\partial u_k}{\partial x} \left\{ e^{\frac{2\pi i t}{h}(E_k + h\nu) - \frac{2\pi i z}{\lambda}} - e^{\frac{2\pi i t}{h}(E_k - h\nu) - \frac{2\pi i z}{\lambda}} \right\}$$

Produkte von w und dem störenden Potential sind vernachlässigt worden. Dieser Gleichung genügt:

$$w = w_+ e^{\frac{2\pi i t}{h}(E_k + h\nu)} - w_- e^{\frac{2\pi i t}{h}(E_k - h\nu)} \tag{21}$$

worin $w_\pm$ zu bestimmen sind aus der inhomogenen Gleichung

$$\Delta w_\pm + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E_k \pm h\nu + \frac{e^2}{r}\right) w_\pm = \frac{2\pi e}{hc} A_0 e^{\frac{\mp 2\pi i z}{\lambda}} \frac{\partial u}{\partial x} k\,. \tag{22}$$

Wie vorher wird (22) gelöst durch eine Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen des ungestörten Problems. Es muss aber daran erinnert werden, dass den Grenzbedingungen des Wasserstoffproblems nicht nur genügt wird durch gewisse diskrete negative Werte von der Energie E_k, sondern auch durch alle positiven Werte E[1]). Dementsprechend müssen wir die Existenz des kontinuierlichen Spektrums der positiven Werte von E in Rechnung ziehen, indem wir unsere Reihenentwicklung

[1]) Schrödinger, Ann. d. Phys. **4**, 79, 1926 und **4**, 81, 1926. Es mag interessant sein, zu erwähnen, dass diese Gleichung die erste ist, die entdeckt worden ist mit Eigenfunktionen, die beiden Spektren, dem diskreten und dem kontinuierlichen angehören.

nach Eigenfunktionen machen, die beiden, den kontinuierlichen und den diskreten Eigenwerten entsprechen. So setzen wir

$$w_{\pm} = \sum_{n}^{\infty} \gamma^{\pm} u_n + \int_0^{\infty} \gamma^{\pm}(E)\, u(x, E)\, dE\,. \tag{23}$$

Das rechte Glied von (22) wird in gleicher Weise entwickelt:

$$e^{\frac{2\pi i z}{\lambda}} \frac{\partial u_k}{\partial x} \sum_{n}^{\infty} a^{\pm} u_n + \int_0^{\infty} a^{\pm}(E)\, u(x,E)\, dE\,. \tag{24}$$

Indem wir (23) und (24) in (22) einführen, werden die Entwicklungskoeffizienten ohne weiteres ermittelt durch Gleichsetzung gleicher Terme.

$$\gamma^{\pm} = \frac{a^{\pm}}{E_k - E_n \pm h\nu} \cdot \frac{A_0 e h}{4\pi m c}$$

$$\gamma^{\pm}(E) = \frac{a^{\pm}(E)}{E_k - E_n \pm h\nu} \cdot \frac{A_0 e h}{4\pi m c}$$

$$a^{\pm} = \int e^{\frac{\mp 2\pi i z}{\lambda}} \frac{\partial u_k}{\partial x} u_n\, d\tau \tag{25}$$

$$a^{\pm}(E) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int e^{\frac{\mp 2\pi i z}{\lambda}} \frac{\partial u_k}{\partial x} \int_E^{E+\Delta} u(\xi, E')\, dE'\, d\tau\,.$$

Durch (23), (21) und (19) haben wir die ψ-Funktion des gestörten Wasserstoffatoms bestimmt. Um das Quadrat des absoluten Wertes von ψ^*zu erhalten, multiplizieren wir ψ^* mit seinem konjugierten Werte $\overline{\psi}^*$ und finden endlich

$$|\psi^*|^2 = u_k^2 + \frac{h^2 e F_0}{2\pi^2 m} \left\{ \sum_n \frac{a\, u_k\, u_n}{(E_k - E_n)^2 - h^2 \nu^2} + \int \frac{a(E)\, u_k\, u(E)}{(E_k - E)^2 - h^2\nu^2}\, dE\,. \right. \tag{26}$$

Produkte und Quadrate der Störungsglieder haben wir darin vernachlässigt. Die Amplitude des Vektorpotentials ist ausgedrückt in Termen des elektrischen Feldes, mittelst den Beziehungen

$$\mathfrak{E} = -\frac{\dot{A}}{c} \text{ und } A_0 = -\frac{F_0 c}{2\pi\nu}\,. \tag{27}$$

Die Koeffizienten a und $a(E)$ sind:

$$a = \int \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{z}{\lambda} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x} u_n \, d\tau \,,$$
$$a(E) = \int \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{z}{\lambda} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x} u(E) \, d\tau \,. \tag{28}$$

Das gesamte resultierende Streumoment ist aus (14) zu berechnen; der Summierungsindex reduziert sich im Falle von H auf eins. Da aber die Wellenlänge des störenden Lichtes von derselben

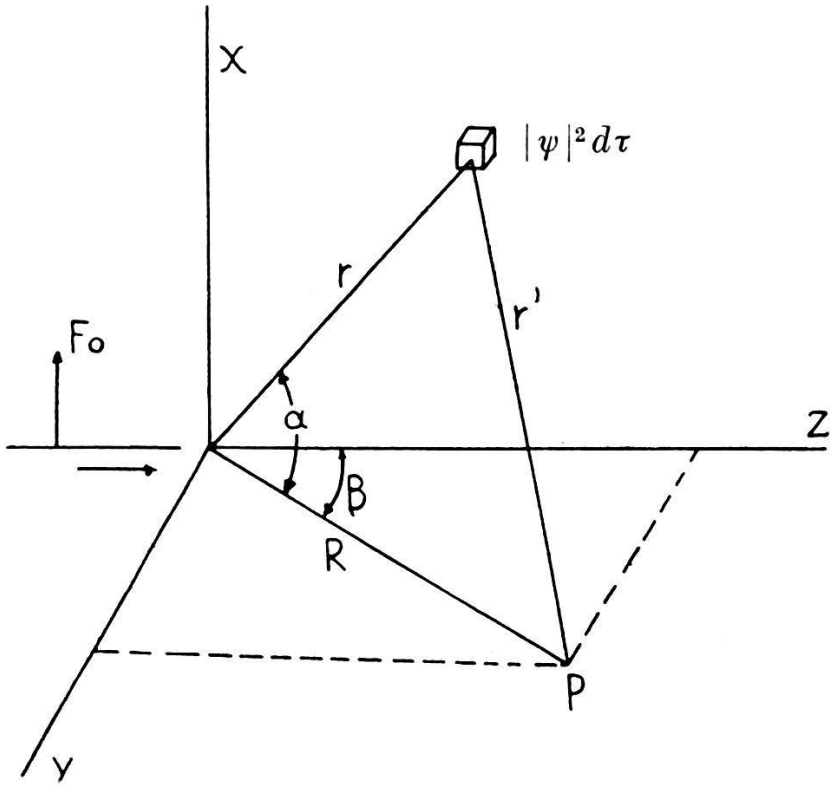

Fig. 1.

Grössenordnung sein kann wie die Atomdimensionen, ist es nötig, im Gebiete, in welchem wir die Elementarmomente zu integrieren haben, die Phasendifferenzen in Rechnung zu ziehen. Demnach ist in (28) die Zeit t durch die retardierte Zeit

$$t^* = t - \frac{r'}{c}$$

zu ersetzen, wobei r' der Abstand ist eines festen Punktes P von einem Element der räumlichen Verteilung von ψ, welches Element

Anlass gibt zur Streustrahlung. Das gesamte resultierende Moment ist also (29)

$$M = a_{kk} + \frac{e^2 h^2 F_0}{2\pi^2 m} \left\{ \sum_n \frac{a\,b}{(E_k - E_n)^2 - h^2 \nu^2} + \int_0^\infty \frac{a(E)\,b(E)}{\cdot\,(E_k - E)^2 - h^2 \nu^2} \right\}$$

worin[1])

$$b = \int x\, u_k\, u_n\, d\tau\,,$$

$$b(E) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int x\, u_k \int_E^{E+\Delta} u(\xi, E')\, dE' \cdot d\tau\,.$$

Dies ist offenbar die Komponente des Momentes in der x-Richtung, der Richtung der Polarisation des primären Lichtes.

Da wir uns für den numerischen Wert des Streuungskoeffizienten interessieren, müssen wir den Ausdruck

$$\sum_n \frac{a\,b}{(E_k - E_n)^2 - h^2 \nu^2} + \int_0^\infty \frac{a(E)\,b(E)}{(E_k - E)^2 - h^2 \nu^2}\, dE\,. \tag{30}$$

auswerten. Der Index k bezieht sich auf den Zustand, in welchem das Atom sich gerade befindet im Augenblicke, wenn der störende Strahl einfällt. Überall werden wir im folgenden annehmen, dass das Atom ursprünglich im Grundzustand $k = 1$ war. Im Hinblick auf

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 n^2} \tag{31}$$

ergibt eine einfache Rechnung, dass wenn die Wellenlänge λ des

---

[1]) Vergl. diesen Ausdruck mit (15), welcher erhalten wurde auf Grund eines skalaren Störungspotential. Prof. Schrödinger hat gezeigt, dass

$$\int u_n \frac{\partial u_k}{\partial x}\, d\tau = \frac{4\pi^2 m}{h^2} (E_k - E_n) \int x\, u_k\, u_n\, d\tau\,,$$

demnach ist (29) identisch mit (15), womit der Gebrauch eines skalaren, statt eines Vektorpotentials sich rechtfertigt. Der Beweis geht folgendermassen. Für zwei beliebige Eigenwerte E_k und E_n haben wir

$$u_k + \frac{8\pi^2 m}{h} (E_k - e V_0)\, u_k = 0\,.$$

$$u_n + \frac{8\pi}{h^2} (E_n - e V_0)\, u_n = 0\,.$$

Beide Ausdrücke werden mit x multipliziert, ersterer zudem mit u_n, letzterer mit u_k. Hierauf Subtraktion des zweiten vom ersten und endlich Integration der Differenz über $d\tau$.

primären Lichtes kleiner ist als etwa 500 Å, die Grösse $(E_k - E_n)^2$ vernachlässigt werden kann gegenüber $h^2 \nu^2$.

Um zu zeigen, dass eine ähnliche Annäherung im Nenner des Integrals gestattet ist, trotzdem E unendlich grosse, positive Werte annehmen kann, benutzen wir einen assymptotischen Ausdruck für die radiale Komponente von $u(x, E)$. Für grosse Werte von r haben wir [1])

$$u(r, E) = \sqrt{\frac{3k'}{E}} \cdot \frac{\cos(k'r - a)}{r}, \tag{32}$$

wo

$$k' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}$$

und

$$\sqrt{\frac{3k'}{E}}$$

der Normierungsfaktor ist. Die Eigenfunktion für den Grundzustand ist

$$u_1 = \sqrt{\frac{k_1^3}{\pi}} \cdot e^{-k_1 r}, \tag{33}$$

wo

$$k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{-2mE}.$$

Dann wird

$$b(x, E) = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin\Theta \sin\Phi \, u_1 u(x, E) \, r^2 \sin\Theta \, dr \, d\Theta \, d\Phi. \tag{34}$$

$$\sqrt{\frac{k_1^3}{\pi}} \sqrt{\frac{3k'}{E}} \int_0^\infty r^2 e^{-k_1 r} \cos(k'r - a) \, dr = \tag{35}$$

$$^{2)} \quad 2\sqrt{\frac{k_1^3}{\pi}} \sqrt{\frac{3k'}{E}} \frac{(k_1^3 - 3kk') \cos a + (3k_1^2 k' - k^{3\prime}) \sin a}{(k_1^2 + k'^2)^3}$$

---

[1]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 361, 1926. — G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **40**, 574, 1926.

[2]) Cf. Wentzel, loc. cit.

Da k' proportional ist zu $\sqrt{E}$, so wird das grösste Glied von (34) proportional sein zu $\frac{1}{E^{7/4}}$. Dasselbe gilt für $a\,(x,E)$. Deswegen ist der Integrand von (30) proportional zu $\frac{1}{E^{7/2}}$. Im Röntgenstrahlgebiet wird für Werte von E, die genügend gross sind, um $(E_k - F)^2$ vergleichbar mit $h^2\,\nu^2$ zu machen, der Integrand sehr klein und wir dürfen im betrachteten Gebiet $(E_k - E)$ vernachlässigen. Mit andern Worten, wenn die Frequenz des störenden Lichtes viel höher ist als die Eigenfrequenzen des Atoms, dann ist der Einfluss des kontinuierlichen Spektrums auf die Dispersion unwesentlich. Ist andererseits die primäre Wellenlänge grösser, etwa im ultravioletten Gebiet, so kann die Grösse $(E_k - E)$ nicht länger unterdrückt werden und das kontinuierliche Spektrum kann bei gewissen Wellenlängen zum bestimmenden Faktor der Dispersion werden. Dies scheint den Resultaten von Hertzfeld und Wolf zu entsprechen[1]). An den Dämpfen von Na und K konnte Harrison[2]) zeigen, dass das kontinuierliche Spektrum sehr nahe der Grenze der Absorptionsserien beginnt und dann ins ultraviolette stetig abnimmt. Im Bereiche der optischen Frequenzen gibt die klassische Dispersionsformel manchmal Resultate, die mit den Beobachtungen nicht übereinstimmen und nach den vorhin erwähnten Verfassern soll diese Abweichung von der Vernachlässigung des kontinuierlichen Spektrums herrühren.

Nachdem wir nun den Energieparameter des Nenners von (30) eliminiert haben, ist der Ausdruck

$$J = \sum_n \int \cos 2\pi \left(\nu\, t^* - \frac{z}{\lambda}\right) \frac{\partial u_k}{\partial x}\, u_n\, d\tau \cdot \int x\, u_k\, u_n\, d\tau \; + \tag{36}$$

$$\int_0^\infty \left\{ \int \cos 2\pi \left(\nu\, t^* - \frac{z}{\lambda}\right) \frac{\partial u_k}{\partial x}\, u(E)\, d\tau \int x\, u_k\, u(E)\, d\tau \right\} dE\,.$$

auszuwerten. Für die Durchführung werden wir zuerst von einem aus der Vollständigkeitsrelation abgeleiteten Theorem Gebrauch machen.

Es seien f und g zwei willkürliche Funktionen, welche sich nach einem System von normierten, orthogonalen Eigenfunk-

---

[1]) K. F. Hertzfeld u. K. L. Wolf, Ann. d. Phys. **76**, 71 u. 567, 1925.
[2]) C. B. Harrison, Proc. Nat. Acad. **8**, 260, 1922.

tionen entwickeln lassen, die beiden Spektren, dem diskreten und dem kontinuierlichen, gehören. Es ist

$$f = \Sigma\, c_n\, u_n + \int c\,(E)\; u(x,E)\; dE\,,$$

$$g = \Sigma\, d_m\, u_m + \int d\,(E')\; u(x,E')\; dE'\,.$$

Die Funktion u_n ist nicht nur orthogonal zu jeder andern Funktion des diskreten Spektrums, sondern auch zu *jeder* Funktion, die dem kontinuierlichen Spektrum angehört. So folgt

$$\int fg\, d\tau = \sum_n \sum_m c_n\, d_m \int u_n\, u_m\, d\tau + \int d\tau \int\int c(E)\; d(\mathrm{E}')\; u(E)\; u(E')\; dE +$$

$$+ \text{— — — — — — — usw.}$$

$$= \Sigma\, c_m d_m + \int c(E)\; d(E)\; dE\,.$$

Es ist aber

$$c_n = \int f\, u_n\, d\tau\,, \quad c\,(E) = \int f\, u\,(x,E)\; d\tau\,, \text{ usw.}$$

womit

$$\int f\,.\,g\, d\tau = \sum_m \int f\, u_m d\tau \int g\, u_m\, d\tau + \int \left\{ \int f\, u(E)\; d\tau \int g\, u(E)\; d\tau \right\} dE \qquad (37)$$

Dies ist das gewünschte Theorem. Vergleicht man (36) mit (37), so folgt

$$f = \cos 2\pi \left(\nu\, t^* - \frac{z}{\lambda} \right) \frac{\partial\, u_k}{\partial\, x}\,, \quad g = x\, u_k$$

d. h. (36) reduziert sich auf das Integral

$$J = \int \cos 2\pi \left(\nu\, t^* - \frac{z}{\lambda} \right) x\, \frac{\partial\, u_k}{\partial\, x}\, u_k\, d\tau\,. \qquad (38)$$

Die dem Grundzustand entsprechende Eigenfunktion u_k ist

$$u_1 = \frac{1}{a_0 \sqrt{\pi\, a_0}}\, e_e^{\frac{-r}{a_0}} \qquad (39)$$

wobei a_0 der Radius der ersten Bohr'schen Wasserstoffbahn bedeutet. Die Berechnung von (38) ist durch die Gegenwart der retardierten Zeit etwas umständlicher. Machen wir die gebräuchliche Annahme, dass die Entfernung des Aufpunktes P von der streuenden Ladung gross ist gegenüber der räumlichen Ausdehnung der Ladung. Zudem nehmen wir an, dass der Aufpunkt

in der Polarisationsrichtung senkrechten zy Ebene liegt (vergl. Fig. 1).

$$t^* = t - \frac{r'}{c}$$

$$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2\,r\,R\cos a}$$

oder da

$$r \ll R\,,$$

$$r' = R - r\cos a\,.$$

Cos a kann ausgedrückt werden als Funktion der Winkel ϑ, φ und β; letzterer bedeutet den Winkel zwischen R und der primären Fortpflanzungsrichtung z und liegt, wie die Figur zeigt, in der zy Ebene. Die Transformation auf Polarkoordinaten gibt:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\Theta\sin\varphi\ ,\ z = r\cos\Theta\,.$$

Drehen wir die Koordinatensysteme um die x-Achse, bis die z-Achse in $OP = R$ hineinfällt und bezeichnen wir OP als die z'-Achse eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystemes. Nach der Figur gilt für dieses neue Koordinatensystem

$$z' = r\cos a\,.$$

Demnach lautet die Gleichung für eine Transformation ins alte System:

$$z' = z\cos\beta + y\sin\beta\,,$$

und somit erhält man unmittelbar die gewünschte Beziehung:

$$r\cos a = r\cos\Theta\cos\varphi + r\sin\Theta\sin\varphi\sin\beta\,.$$

Setzen wir

$$t_0 = t - \frac{R}{c}\,.$$

Für J ergibt sich:

$$J = -\frac{1}{a_0^4\pi}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos 2\pi\left(\nu\,t_0 + \frac{r}{\lambda}\cos a - \frac{r}{\lambda}\cos\Theta\right) e^{\frac{-2r}{a_0}}\,r^3\sin^3\Theta\cos^2\varphi\,dr\,d\Theta\,d\Phi\,. \tag{40}$$

Die Integration von (40) nach φ würde zu einer Bessel'schen Funktion mit trigonometrischem Argument führen. Diese Funktion könnte in der Integralform ausgedrückt werden, und hierauf die Integration nach den noch verbleibenden Variablen aus-

geführt werden. Es ist jedoch einfacher, (41) zunächst nach r zu integrieren. Setzten wir

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad q = \frac{2}{a_0},$$

$$p = k \sin\beta \sin\Theta \sin\varphi - k\,(1 - \cos\beta)\cos\Theta\,.$$

Die erste Integration nach r ergibt

$$J_r = \int_0^\infty \cos\,(2\pi\,\nu\,t_0 + p\,r)\,e^{-qr}\,r^3\,dr = \Re\,\frac{6\,e^{2\pi i \nu t_0}}{(pi - q)^4}\,. \tag{41}$$

Integriert man zunächst nach φ, so hat man

$$J_\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(pi - q)^4} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(a + b\sin\varphi)^4} \tag{42}$$

auszuwerten, worin

$$a = -\,(q + k\,i\ \mathrm{vers}\,\beta\cos\Theta) \text{ und } b = k\,i\,\sin\beta\sin\Theta\,.$$

Die vierte Potenz des Nenners wird leicht beseitigt durch eine nach dem Parameter a ausgeführte Differentiation unter dem Integralzeichen. Es ergibt sich:

$$J_\varphi = -\frac{1}{6}\,\frac{d^3}{da^3}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{a + b\sin\varphi} = \frac{a\pi}{(a^2 - b^2)^{5/2}} \tag{43}$$

Es bleibt jetzt

$$-J_\Theta = q\int_0^\pi \frac{\sin^3\Theta\,d\Theta}{(a^2 - b^2)^{5/2}} - i\,k\,\mathrm{vers}\,\beta\int_0^\pi \frac{\cos\Theta\sin^3\Theta}{(a^2 - b^2)^{5/2}}\,d\Theta\,. \tag{44}$$

Setzt man

$$x = \cos\Theta\,,\ h = q^2 + k^2\sin^2\beta\,,\ g = q\,k\,\mathrm{vers}\,\beta\,,\ m = 2k^2\,\mathrm{vers}\,\beta\,,$$

so findet man leicht

$$a^2 - b^2 = h + 2\,g\,ix - mx^2.$$

Die vollzogene Integration nach x ergibt

$$J_\Theta = -\frac{4}{3}\,\frac{q^2(g^2 + m^2) - k^2\,\mathrm{vers}^2\beta\,(h^2 + g^2)}{(q^2 + k^2\,\mathrm{vers}^2\beta)\,(mh - g^2)^2} = -\frac{4}{3}\,\frac{1}{(q^2 + 2\,k^2\,\mathrm{vers}\,\beta)^2} \tag{45}$$

Es ergibt sich also endlich für J:

$$J = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 2a_0^2\pi^2(1-\cos\beta)}\right)\cos 2\pi\nu t_0 \tag{46}$$

und wir finden für das die Streustrahlung veranlassende resultierende Moment

$$M = -\frac{e^2 F_0 \cos 2\pi\nu t_0}{4\pi^2 m \nu^2}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 2a_0^2\pi^2(1-\cos\beta)}\right)^2. \tag{47}$$

Die Intensität des gestreuten Lichtes im Aufpunkte P ist dem Quadrat des Moments M proportional. In der Richtung des Primär-Strahles reduziert sich die Klammer auf eins und es ergibt sich für den Quotienten der Intensitäten:

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 2a_0^2\pi^2(1-\cos\beta)}\right)^4, \tag{48}$$

worin I die Intensität bei einem Streuwinkel β bedeutet und I_0 die Intensität in der Richtung des Primär-Strahles.

Wie zuvor definieren wir den Atom-Streukoeffizienten als den Bruchteil der Energie des an einem Atom gestreuten Lichtes zur Energiedichte des einfallenden Strahles:

$$\sigma_a = \frac{S}{P}.$$

Nach der klassischen Elektrodynamik ist die von einem schwingenden Dipol ausgestrahlte Energie

$$\mathfrak{S} = \frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3 r^2}\sin^2\gamma = \frac{4\pi^3\nu^4 M^2}{c^3 r^2}\sin^2\gamma, \tag{49}$$

wobei γ der Winkel zwischen dem Beschleunigungsvektor des Elektrons und der Richtung des Aufpunktes ist. Die gesamte ausgestrahlte Energie (mit unveränderter Frequenz!) ist also:

$$S = \frac{4\pi^3\nu^4}{c^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} M^2\sin^3\gamma\, d\beta\, d\gamma = \frac{16\pi^3\nu^4}{3c^3}\int_0^{2\pi} M^2\, d\beta = \tag{50}$$

$$\frac{e^4\mathfrak{E}_p^2}{3\pi m^2 c^3}\int_0^{2\pi}\frac{d\beta}{(1+k\,\mathrm{vers}\,\beta)^4}$$

worin

$$k = \frac{2\, a_0^2\, \pi^2}{\lambda^2}\,.$$

Die Energiedichte des Primär-Strahles ist

$$\frac{c\, \mathfrak{E}_p^2}{4\,\pi}$$

und es ergibt sich für den Atom-Streukoeffizienten:

$$\sigma_a = \frac{4\, e^4}{3\, m^2\, c^4} \int_0^{2\pi} \frac{d\,\beta}{(1 + k\, \mathrm{vers}\beta)^4} \tag{51}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{(1 + k\, \mathrm{vers}\beta)^4} = \frac{\pi\,(2 + 6\,k + 9\,k^2 + 5\,k^3)}{(2\,k + 1)^{7/2}}\,.$$

$$\sigma_a = \frac{8\,\pi\, e^4}{3\, m^2\, c^4}\, \frac{\lambda\,(\lambda^6 + 6\, a_0^2\, \pi^2\, \lambda^4 + 18\, a_0^4\, \pi^4\, \lambda^2 + 20\, a_0^6\, \pi^6)}{(4\, a_0^2\, \pi^2 + \lambda^2)^{7/2}}\,, \tag{52}$$

oder für grosse Werte von λ,

$$= \frac{3\,\pi\, e^4}{3\, m^2\, c^4} \left(1 - \frac{8\, a_0^2\, \pi^2}{\lambda^2} + \frac{60\, a_0^4\, \pi^4}{\lambda^4} - - - -\right).$$

Für unendlich grosse Werte von λ reduziert sich die Klammer auf eins und es bleibt

$$\underset{\lambda \to \infty}{\sigma_a} = \frac{8\,\pi\, e^4}{3\, m^2\, c^4}\,.$$

Dies ist genau die in (15) gegebene J. J. Thomson'sche Formel; (53) genügt somit der Bedingung, dass für grosse Wellenlängen die Dispersionsformel der Quantentheorie übergehen soll in die klassische. Da nach (6)

$$\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{8\,\pi\, e^4}{3\, m^2\, c^4}\, \frac{n}{\varrho} = 0{,}4\, \frac{N}{A}$$

und im Falle von Wasserstoff

$$\frac{N}{N} = 1\,,$$

können wir für den Massenstreukoeffizienten schreiben:

$$\frac{\sigma}{\varrho} = 0{,}4\, \frac{\lambda\,(\lambda^6 + 6\, a_0^2\, \pi^2\, \lambda^4 + 18\, a_0^4\, \pi^4\, \lambda^2 + 20\, a_0^6\, \pi^6)}{(4\, a_0^2\, \pi^2 + \lambda^2)^{7/2}}\,. \tag{53}$$

III. Diskussion der Ergebnisse.

Aus (48) und (53) ergeben sich sofort zwei Grenzfälle. Wie wir schon gesehen haben, geht erstens (53) für grosse Werte von λ über in die J. J. THOMSON'sche Formel (6). Zweitens wird in der Richtung des einfallenden Strahles ($\beta = 0$) die Intensität $I = I_0$ unabhängig von λ.

In Fig. 2 ist die Verteilung der Streustrahlung in der zy-Ebene für verschiedene Werte von λ nach Formel (48) graphisch

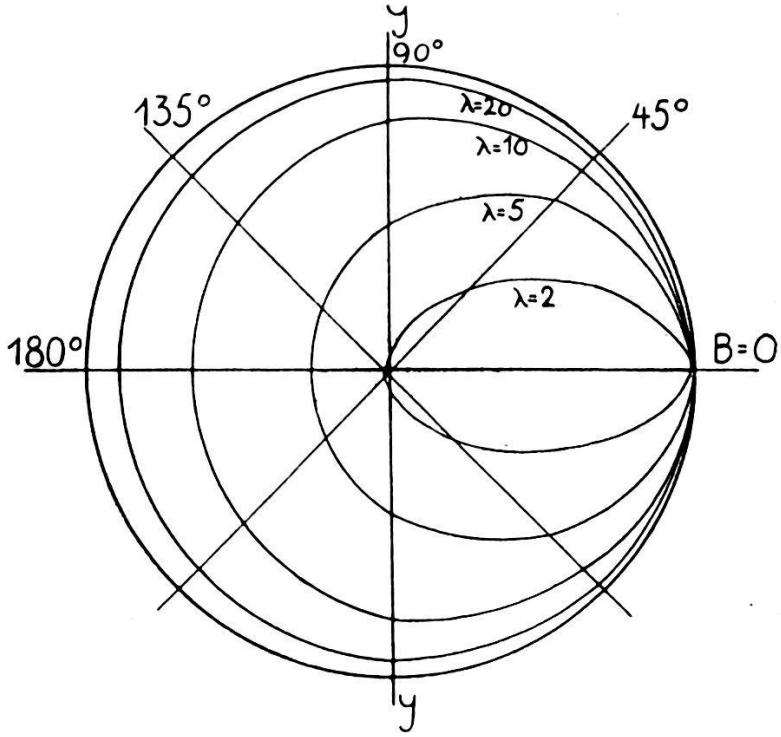

Fig. 2.

dargestellt. Der äussere Kreis stellt den Grenzfall dar, der vollkommen symmetrischen, grossen Werten der Wellenlänge entsprechenden Streuung. Mit der allmählichen Abnahme von λ wird ein immer grösser und grösser werdender Bruchteil von der gesamten Sekundär-Strahlung im Raume hinter der yy-Ebene (Austrittsraum) auftreten, bis bei einer Wellenlänge von ungefähr 1 Å die totale, beobachtete Sekundärstrahlung sich allein in diesem Austrittsraum befindet. In Fig. 3 sind dieselben Kurven in einer etwas gebräuchlicheren Form gegeben. $\frac{I}{I_0}$ bedeutet den Quotienten der Intensität des gestreuten Lichtes bei einem beliebigen Winkel β und des Maximums der Intensität bei $\beta = 0$. Die Abhängigkeit dieses Quotienten von λ ist dargestellt für verschiedene Wellenlängen.

Der Verlauf der Kurven von Fig. 2 und 3 ist äusserst ähnlich jenem, den man experimentell bei der Streustrahlung an leichten Substanzen erhält; doch bemerkt man bei genauerer Betrachtung, dass der rasche Abfall der Intensität und die damit verbundene Verlegung der gestreuten Strahlung in den Austrittsraum nach den theoretischen Kurven schon bei grösseren Wellenlängen auftreten sollten. Dies tritt besonders gut zu Tage bei den Kurven von Fig. 4. Für die meisten leichten Substanzen ist der Streuungskoeffizient genau gemessen worden; der fragliche Abfall aber tritt erst im Gebiete der sehr harten Röntgenstrahlen merk-

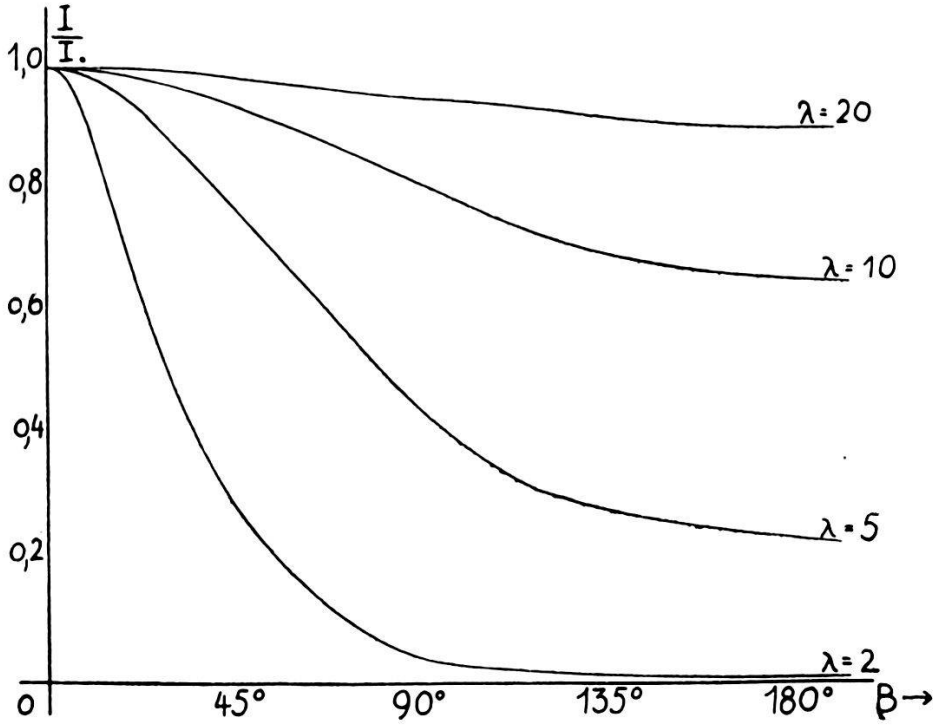

Fig. 3.

lich auf. Leider scheinen keine zuverlässigen Werte des Streuungskoeffizienten von Wasserstoff vorzuliegen, doch steht ausser Zweifel, dass eine Streustrahlung im Gebiete von etwa 0,7 Å vorhanden ist. Nach den Kurven von Fig. 4 sollte die *unverschobene* Linie für Wellenlänge kleiner als 4 bis 5 Å nur bei äusserst kleinen Winkeln auftreten.

Es scheint aber vernünftig zu sein, zu vermuten, dass die an Wasserstoff bei einer Wellenlänge von 1 Å oder weniger beobachtete Streuung allein vom Compton-Effekt und nicht von der Streuung, die wir hier betrachtet haben, herrührt. In einem Wasserstoff-Atom sind die Elektronen loser gebunden als in andern Atomen und demnach sollte, wie wir dies schon in der Einleitung angedeutet haben, der Compton-Effekt bei einer grösseren Wellenlänge als bei andern Atomen einsetzen. Zudem

wird bei fallender Wellenlänge der Wert von λ bei dem an Wasserstoff die Streustrahlung der verschobenen Linie beginnt, immer noch so gross sein, dass für schwerere Substanzen wie z. B. Kohlenstoff die beobachtete Strahlung noch allein oder wenigstens hauptsächlich in der unverschobenen Linie liegt. Wegen der kleinen Zahl von Streuelektronen ist die Messung des Streuungskoeffizienten von Wasserstoff schwierig. Somit sind die Intensitäten zu klein, um eine spektroskopische Methode anzuwenden, welche eine Trennung der beiden Strahlungen erlauben würde. Jedoch scheint eine solche Trennung nicht nötig zu sein für eine vor-

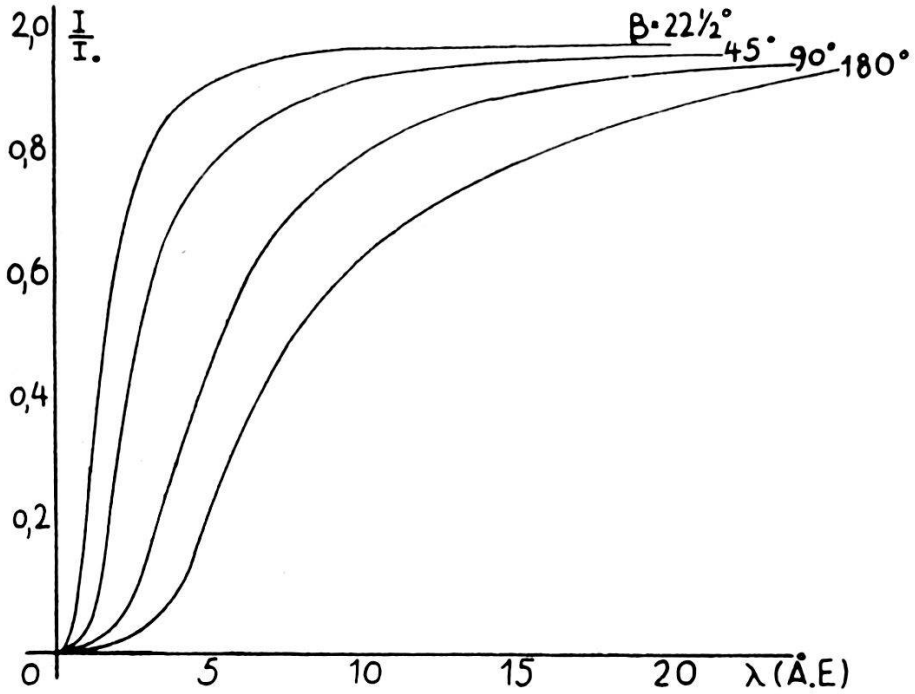

Fig. 4.

läufige Bestätigung oder Widerlegung der Theorie. Sind die Annahmen, auf welche die Formel (50) sich stützt, richtig, dann dürfen wir erwarten, dass innerhalb der Wellenlänge von 2 bis 5 Å eine sehr starke Zunahme der *gesamten* Streustrahlung beobachtet wird, wie dies durch die Kurven von Fig. 5 veranschaulicht wird. Diese Untersuchung sollte keine grösseren, experimentellen Schwierigkeiten bieten[1]).

[1]) Für eine Behandlung des Compton-Effekt nach einer ähnlichen Methode, siehe Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **43**, 1 und 779, 1927. Bei der Ausführung der eben angedeuteten Experimente soll erinnert werden, dass die Resultate sich auf atomistischen Wasserstoff beziehen, den Messungen ist aber nur die molekulare Form zugänglich. Allerdings darf man ein ähnliches Resultat erwarten, d. h. einen plötzlichen Anstieg des Streuungskoeffizienten bei einer verhältnismässig langen Wellenlänge.

Die vorliegende Arbeit wurde anfänglich unternommen in der Meinung, dass die Verteilung der Ladung des Elektrons durch die Funktion $|\psi|^2$ bestimmt ist. Nach dieser Auffassung müsste beim Wasserstoff, wo die Kernkräfte klein sind, das „Elektron" im Grundzustand einen mittleren Durchmesser von ungefähr einem Å haben und die starke Abnahme von $\frac{\sigma}{\varrho}$ bei verhältnismässig grosser Wellenlänge würde ganz verständlich erscheinen. Im Falle von schwereren Atomen mit entsprechend grösseren Kernkräften würden die Elektronen der Wellenmechanik stärker

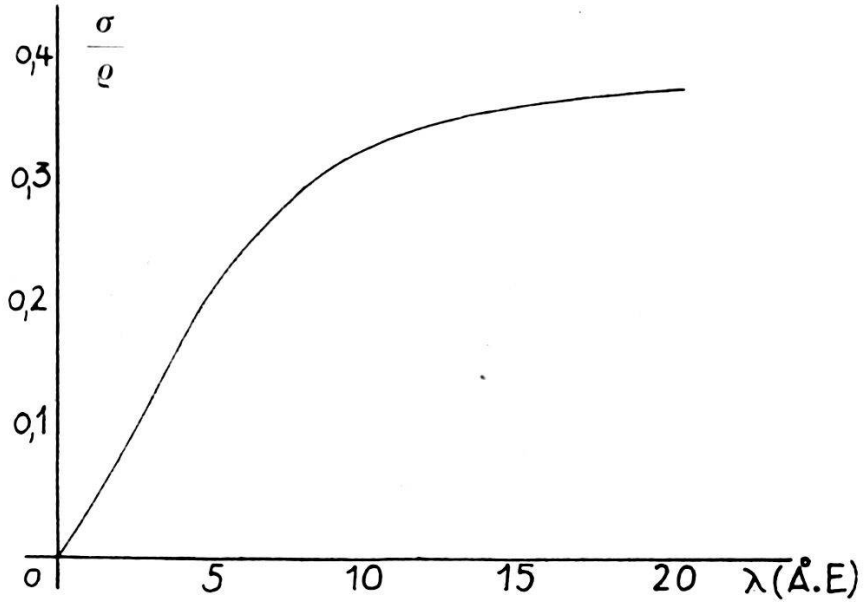

Fig. 5.

konzentriert sein und λ würde nur bei viel kleineren Werten von derselben Grössenordnung wie die streuende Ladung.

Es scheint aber im gegenwärtigen Augenblick schwierig, diese Auffassung zu stützen. $|\psi|^2$ wird allgemein mit der Wahrscheinlichkeit verknüpft betrachtet, dass ein Elektron (im klassischen Sinne) zu einer gegebenen Zeit an einem bestimmten Orte sich befindet. Von diesem Standpunkt aus ist die angewandte Methode immer noch anwendbar unter gewissen Bedingungen. Diese Frage hängt ab von den relativen Frequenzen der störenden Welle und den möglichen, kleinen unbestimmten Schwankungen in der räumlichen und zeitlichen Lage des Elektron, wie dies kürzlich von Heisenberg vorgebracht worden ist. Eine experimentelle Überprüfung der vorhergehenden, theoretischen Ergebnisse würde zeigen, wie weit die Methoden der Wellenmechanik anwendbar sind.

IV. Zusammenfassung.

Bei der Streuung von Röntgenstrahlen an materiellen Körpern kann man beobachten, dass die gestreute Energie zum Teil mit veränderter (COMPTON-Effekt), zum Teil mit unveränderter Frequenz auftritt. Das gesamte (veränderte und unveränderte) gestreute Licht nimmt mit abnehmender Primärwellenlänge ab. Die Abnahme der Intensität und der unsymmetrische Charakter der COMPTON-Strahlung kann auf Grund der Quantentheorie augenscheinlich erklärt werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Streuung mit *unveränderter* Frequenz eingehend untersucht. Es wird darin gezeigt, dass diese unveränderte Streustrahlung nicht nur mit abnehmender Primärwellenlänge abnimmt an Intensität, sondern dass auch die räumliche Verteilung derselben beherrscht wird von ähnlichen Beziehungen, wie sie in der Theorie des COMPTON-Effektes auftreten. Die beobachtete Abnahme an Intensität der unverschobenen Linie kann deshalb nicht erklärt werden durch die einfache Annahme, dass immer mehr und mehr Elektronen am COMPTON-Vorgang teilnehmen, und demzufolge immer weniger und weniger Elektronen für die gewöhnliche Strahlung übrigbleiben.

Ich möchte für das Interesse, das die Herren Professoren DEBYE, SCHERRER und WEYL dieser Arbeit entgegengebracht haben, noch herzlich danken.

Zürich, Phys. Institut der E. T. H., Dezember 1927.